2022-2023

ETS CPI2

Radoine : Quelques exercices et résumé de cours

1 Nombres complexes

Formules de trigonométrie
La fonction cos est 2π-périodique et paire, la fonction $\sin x$ est 2π-périodique et impaire et la fonction $\tan x$ est π-périodique et impaire

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi)=\cos x,\ \sin(x+2\pi)=\sin x,\ \tan(x+\pi)=\tan x \\ \cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x,\ \tan(-x)=-\tan x \\ -1\leq\cos x\leq 1,\ -1\leq\sin x\leq 1,:-\infty<\tan x<\infty \\ \cos^2 x+\sin^2 x=1 \end{aligned}$$

Valeurs particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	?	0	?	0

Propriétés

$$\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x,\ \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x,\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$$

et

$$\cos(\pi+x) = -\cos x,\ \cos(\pi-x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi+x) = -\sin x,\ \sin(\pi-x) = \sin x$$

et enfin

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b\\ \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 &= 1 - 2\sin^2 a\\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a\\ \sin(2a) &= 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

Exemple
considérons

$$\frac{1}{3-4\imath} = \frac{3+4\imath}{(3-4\imath)(3+4\imath)} = \frac{3+4\imath}{9+16} = \frac{3}{25} + \imath\frac{4}{25}$$

et

$$\frac{1}{\imath} = -\imath$$

et enfin
$$\frac{1-\imath}{1+\imath} = \frac{(1-\imath)^2}{(1+\imath)(1-\imath)} = \frac{1+(-1)-2\imath}{2} = -\imath$$

Représentation graphique des nombres complexes
On muni le plan $\mathcal{P}$ du repère orthonormé $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = (1,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,1)$. A tout $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ on associe le point $M(x,y)$ du plan. Le point $M(x,y)$ est appelé l'image du nombre complexe $z = x + \imath$. Le nombre complexe $z = x + \imath y$ s'appelle l'affixe du point $M(x,y)$.
A tout nombre complexe $z = x + \imath y$ on peut associer le vecteur $\vec{u} = (x,y)$ appelé le vecteur image de z.
Soient A et B deux point du plan $\mathcal{P}$ d'affixes $z_A = x_A + \imath y_B$ et $z_B = x_B + \imath y_B$. Le vec teur $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ a pour affixe $z_B - z_A$. Si $z = x + \imath y$ et son conjugué $z^\star = x - \imath y$ alors $z^\star$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des réels.

Représentation trigonométrique des nombres complexes
On appelle argument d'un nombre complexe z non nul toute mesure en radians de l'angle orienté $\theta = (\vec{e}_1, \vec{OM})$ où M a pour affixe z. On note $\theta = arg(z)$. Un nombre complexe $z \neq 0$ a une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z. Deux arguments d'un même nombre complexe z different de $2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. On appelle argument principal de $z \neq 0$ l'argumen appartenant à $[-\pi, \pi]$ (ou $[0, 2\pi]$). L'argument principal de $\imath$ est $\pi/2$ et celui de 1 est l'angle 0.

Soit $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ non nul. On peut écrire$z = |z|(\frac{x}{|z|} + \imath \frac{y}{|z|})$. On notera alors que $(\frac{x}{|z|})^2 + (\frac{y}{|z|})^2 = 1$ par définition de $|z|$. Ainsi le point $M(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|})$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, $\theta = (\vec{O}, \vec{OM})$ tel que $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$. Donc θ est l'argument principal du nombre complexe $\frac{x}{|z|} + \imath \frac{y}{|z|}$. On déduit que la représentation trigonométrique (ou polaire) de z

$$z = |z|(\cos\theta + \imath \sin\theta)$$

on écrira aussi

$$z = re^{\imath\theta}, \ avec \ r = |z|, \ e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath \sin\theta$$

ainsi on voit que

$$(re^{\imath\theta})^\star = re^{-\imath\theta}, \ |e^{\imath\theta}| = 1$$

où on a utilisé la formule (théorème de Pythagore) $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$. D'autre part pour $z = e^{\imath\theta}$ on a les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{\imath\theta} + e^{-\imath\theta}}{2}, \ \sin\theta = \frac{e^{\imath\theta} - e^{-\imath\theta}}{2\imath}$$

Exercice 1. []

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. En déduire la nature du triangle OAB, où O, A et B sont respectivement le point d'affixe 0 et les deux solutions de (E).

Exercice 2. [] Soient A, B et C trois points d'affixe respective $a = 2 + i$, $b = 4 - i$, $c = -2 - 3i$.

1. Calculer $\dfrac{a - b}{c - a}$.
2. Que peut-on conclure sur les droites (AB) et (AC)?

Exercice 3. [] Donner une forme exponentielle du nombre complexe $z = (-1-i)\left(3+i3\sqrt{3}^{4}\right)$.

Exercice 4. [] Déterminer puis représenter graphiquement l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :

- $\left|z-2+\frac{3}{4}i\right| = 3$
- $|z-3+i| = -2$

Exercice 5. [] En utilisant la formule d'Euler $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, exprimer $\cos^3(x)$ en fonction d'une somme de cosinus de la forme $\cos(nx)$.

2 Suites

2.1 Limites à connaître

$$
\begin{aligned}
&u_n = \frac{1}{n^\alpha} \to 0,\ \forall \alpha > 0 \\
&u_n = n^\alpha \to +\infty,\ \forall \alpha > 0 \\
&u_n = \frac{n^\alpha}{e^n} \to 0,\ \forall \alpha > 0 \\
&u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha} \to 0,\ \forall \alpha > 0 \\
&u_n = n\ln(1+\frac{1}{n}) \to 1 \\
&u_n = n\sin(\frac{1}{n}) \to 1 \\
&u_n = (1+\frac{x}{n})^n \to e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Observons que $n\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$ et comme $1/n \to 0$ alors on utilise le résultat $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ quand $x \to 0$. On a aussi $n\sin(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 1$ quand $1/n \to 0$ car $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ quand $x \to 0$. Enfin en écrivant $(1+\frac{x}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$ et en utilisant le fait que $n\ln(1+\frac{x}{n}) = x\dfrac{\ln(1/\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \to x \times 1 = x$ quand $x/n \to 0$, on trouve bien le résultat $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$ quand $n \to +\infty$. Les autres limites se déduisent du comportement à l'infini des fonctions : exponentielle, logarithme et puissance.

2.2 Quelques suites importantes

Suites géométriques
Elle sont définies par : $u_{n+1} = qu_n$ de raison $q \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}$.
On a $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } -1 < q < 1 \Longrightarrow q^n \to 0 \\
&\text{Si } q = 1 \Longrightarrow q^n = 1^n = 1 \to 1 \\
&\text{Si } q = -1 \Longrightarrow q^n = (-1)^n \text{ ne } \textit{converge pas} \\
&\text{Si } q > 1 \Longrightarrow q^n \to +\infty \\
&\text{Si } q < -1 \Longrightarrow q^n \text{ ne } \textit{converge pas}
\end{aligned}
$$

Séries géométriques

Elles sont définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ de raison $q \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \text{ si } q \neq 1$$
$$u_n = n + 1 \text{ si } q = 1 \text{ et } u_n \to +\infty$$

Suites arithmétiques

Elles sont définies par : $u_{n+1} = u_n + r$ de raison $r \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n = u_0 + nr, n \in \mathbb{N}$$

Considérons la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_0 = 0$. On a donc $u_n = n$ et $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Alors

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ donnés et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour trouver u_n en fonction de n on procède comme suit : On considère le polynôme caractéristique $x^2 - ax - b = 0$. Soient q_1 et q_2 les racines réelles de l'équation.

Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$ alors $q_1 \neq q_2$ et u_n est donné par

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n,$$

où λ et u sont déterminés en résolvant le système suivant (obtenu en faisant $n = 0$ et $n = 1$)

$$\lambda + \mu = u_0$$
$$\lambda q_1 + \mu q_2 = u_1$$

Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$ alors $q_1 = q_2$ et u_n est donné par

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu n q_1^n,$$

où λ et u sont déterminés en résolvant le système suivant (obtenu en faisant $n = 0$ et $n = 1$)

$$\lambda = u_0$$
$$\lambda q_1 + \mu q_1 = u_1$$

Exemple 1. *Soit (u_n) définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = u_1 = 1$. Donner l'expression de la suite u_n*

Théorème 1. *(Théorème de la convergence monotone)*
(1) - Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle est convergente et $\lim u_n = \sup(u_n)$
(2) - Si (u_n) est croissante non majorée alors $\lim u_n = +\infty$
(3) - Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle est convergente et $\lim u_n = \inf(u_n)$
(4) - Si (u_n) est décroissante non minorée alors $\lim u_n = -\infty$

Exercice 6. [] Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n$ et $_{20} = 7$. Déterminer u_{100}. Calculer la somme $S = u_{20} + u_{21} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 7. [] Soit $S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \ldots + \frac{19}{3} + 7$. Déterminer S après avoir vérifié que S est la somme de termes d'une suite arithmétique.

Exercice 8. [] Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ avec $u_0 = 2$. Montrer par que la suite (u_n) est décroissante et minorée. La suite (u_n) est-elle convergente et si oui déterminer sa limite.

Exercice 9. []

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geq a > 0$) :
$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \qquad \text{et} \qquad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

3 Analyse : intégration et interpolation (DL)

Exercice 10. [] Calculer les intégrales suivantes

1. $I = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\, dx.$
2. $J = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{3x}\, dx.$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\, dt$
4. $L = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, où le domaine $\mathcal{D}$ est de disque de centre 0 et de rayon R (On passera en coordonnées polaire, $x = rcos(\theta)$ et $y = rsin(\theta)$) Quelle est la limite de L quand R tend vers $+\infty$.

4 Équations différentielles

Exercice 11. []

1. Résoudre l'équation (E) $y'(t) - 5.y(t) = 0$ avec $t_0 = 0$ et $y_0 = 2$
2. Résoudre l'équation (F) $y' - e^t.y = 0.$
3. Résoudre l'équation (G) $y' - \ln(t).y = 0.$
4. Résoudre l'équation (K) $y' - \tan^2(t).y = 0.$

Exercice 12. []

1. Résoudre (E) $y'' + 2y' + y = 4te^t$.
2. Résoudre (F) $y'' + 2y' + y = 4te^{-t}.$

Exercice 13. []

On considère le problème de Cauchy : (E) $y'' - 3y' - 10y = 0$ avec $y(0) = 3$, et $y'(0) = 2$.

1. L'équation (E) est-elle linéaire ? Homogène ? Factoriser le polynôme caractéristique

associé et donner la solution générale de (E) en fonction de deux constantes K_1 et K_2.

2. Donner la solution au problème de Cauchy en prenant le soin d'expliquer la méthode utilisée pour obtenir de K_1 et K_2.

5 Étude de données

Exercice 14. []
Soit (X, Y) une série statistique de dimension 2. On note (x_i, y_i) les n valeurs prises par cette série. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 .$$

A l'aide d'une étude de f, pouvez vous retrouver la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés. La droite des moindres carrés est la droite dont le carré des écarts verticaux entre les points (x_i, y_i) et celle-ci est minimal. **Pour cela, il faut calculer le point critique de la fonction f et déterminer la nature de ce point critique**.