

# Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.

по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 05 мая 2021 г.

## 1 Лекция №26

### Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если  $\{x_n\}$  ограничена, то  $\exists$ -ет хотя бы одна сходящаяся последовательность.

↑

1. Раз ограничена; то  $\exists M : \forall n |x_n| \leq M$ , т.е.  $I_0 = [-M; M]$ , то  $\forall n x_n \in I_0$   
 $d_0 = 2M$
2.  $\frac{I_0}{2}$  (делим  $I_0$  пополам)  
Пусть  $I_1$ -та половина, в которой содержится  $\infty$  число членов последовательности  $x_n$  (если в обеих, то выбираем любую из них)  $I_1 = \frac{I_0}{2}$   
 $d_1 = \frac{2M}{2}$
3.  $\frac{I_1}{2} \Rightarrow$ , та часть, в которой содержится  $\infty$  число членов последовательности  $\{x_n\}$  (если в обеих, то любую из) в  $I_2$   $b_2 = x_{n_2} \in I_2$   $n_2 > n_1$   
 $d_1 = \frac{2M}{2^2}$
4. и т.д.  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots$   
к)  $d_k = \frac{2M}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

по Т. о вложенных промежутках  $\exists! B : B \in I_k \forall k$

Покажем, что  $\{b_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} B$

$\forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k > K :$

$$|b_k - B| < \varepsilon$$

$$|b_k - B| < |I_k| = \frac{2M}{2^k} < \frac{2M}{k} < \varepsilon$$

$$2^k > k K = \left[ \frac{2M}{\varepsilon} \right] + 1$$

↓

### 1.1 Верхний и нижний предел последовательности

#### 1.1.1 Верхний предел

**Определение.** Число  $M$  будем называть верхним пределом последовательности  $x_n$ , если

1.  $\exists x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$
2.  $\forall x'_{nk} \rightarrow M' M' \leq M$

↑

**Обозначение.**  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \overline{\lim} x_n = M$

**Пример.**

1.  $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim x_n = 1$
2.  $x_n = \sin \frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim x_n = 1$
3.  $x_n = (n)^{-1} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$   
 $1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; \dots$

**Замечание.**

1. Если  $x_n$  не ограничена сверху, то  $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. Если  $\overline{\lim} x_n = a$  ( $a$  — конечное число)

### 1.1.2 Нижний предел

**Определение.** Число  $m$  будем называть нижним пределом последовательности  $x_n$ , если

1.  $\exists x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m$
2.  $\forall x'_{nk} \rightarrow m' \quad m' \leq m$

**Обозначение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim} x_n = M$

**Пример.**

1.  $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim x_n = 1; \underline{\lim} x_n = -1$
2.  $x_n = \sin \frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim x_n = 1; \underline{\lim} x_n = -1$
3.  $x_n = (n)^{-1} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty; \underline{\lim} x_n = 0$   
 $1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; \dots$

**Замечание.**

1. Если  $x_n$  не ограничена снизу, то  $\underline{\lim} x_n = -\infty$
2. Если  $\underline{\lim} x_n = a$  ( $a$  — конечное число)

**Теорема.** У всякой  $\{x_n\} \exists \overline{\lim}$  и  $\underline{\lim}$ .

↑

1.  $x_n$  — не ограничена сверху, то  $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2.  $x_n$  — не ограничена снизу, то  $\underline{\lim} x_n = -\infty$
3.  $x_n$  ограничена сверху и снизу

далее как в Т. Больцано-Вейерштрасса, только 3.1) если ищем  $\overline{\lim}$ , то всегда беру правую половинку, если возникает выбор.

3.2) Для  $\underline{\lim}$ , то беру левую половинку

↓

**Замечание.** Очевидно, что  $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

**Теорема.**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  (конечн,  $+\infty$ ,  $-\infty$ )  $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

↑ "⇒" пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

1.  $A = +\infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$   
 $\Rightarrow \underline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$
2.  $A = -\infty$ ; т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = -\infty$
3. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  ( $A$  — конечное число)  $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$  уже доказывали

"⇐"

1.  $\lim x_n = +\infty$  т.е.  $\lim n \rightarrow \infty x_n = +\infty$
2.  $\overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$
3.  $A$  — конечный  $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

Надо  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad A - \varepsilon <_{\text{из } \underline{\lim} x_n = A} x_n <_{\text{из } \overline{\lim} x_n = A} A + \varepsilon$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

↓

## 1.2 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$

$|x_n - a| < \varepsilon$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$$

Т.е.  $x_n$  — такие, что для любого  $\varepsilon > 0$  я могу их всех ( $n > N$ ) "закрыть" интервалом длины  $2\varepsilon$

**Определение.** Последовательность  $x_n$  называется фундаментальной (удовлетворяет условию Коши), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \varepsilon$

$$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

**Теорема. Критерий Коши.** Числовая последовательность  $\{x_n\}$  сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon$

↑

" $\Rightarrow$ " пусть сходится ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  — конечное число)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| = |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

" $\Leftarrow$ " 1) покажем, что  $\{x_n\}$  — ограничена  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall n, m > N_0, |x_n - x_m| < \varepsilon$

Пусть  $\varepsilon = 1$

$$|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m| < 1$$

↓

$$|x_n| < 1 + |x_m|$$

Фиксированный  $m \Rightarrow \forall n > N_0$  рассмотрим  $M = \max\{1 + |x_m|; |x_1|; |x_2|; |x_3|; \dots; |x_{N_0}|\}$

2) По Т. Больцано-Вейерштрасса из  $\{x_n\}$  можно выделить сходящиеся последовательности

$$\exists x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$$

Покажем, что  $x_n \rightarrow a$