Летняя сессия по математике

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д., Паньков М.А. и Кангелдиева А.С.
по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 18 мая 2021 г.

Содержание

1 Элементы теории чисел

1.1 Определение операции деления с остатком для целых чисел.

Определение. Для $a \in Z$ и $b \in Z \backslash \{0\}$ определена операция деления с остатком: разделить целое a на целое b ($\neq 0$) с остатком, означает найти такие целые $q,\ r \in Z$, что $a = b * q + r,\ 0 \leq r < |b|$.

Определение. Если при делении с остатком $r = 0$, то число a делится на b ($a \vdots b$). Число b при этом называется делителем числа a.

1.2 Свойства делимости

(1) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$

$\uparrow \begin{matrix} a = cq_1 \\ b = cq_2 \end{matrix} \Rightarrow (a \pm b) = c(q_1 \pm q_2) \Rightarrow (a \pm b) \vdots c \downarrow$

(2) $a \vdots b \Rightarrow ak \vdots b\ (k \in Z)$

(3) $a \vdots b,\ b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

$\uparrow a = bq_1,\ b = cq_2 \Rightarrow a = c * (q_1 * q_2) \Rightarrow a \vdots c \downarrow$

(4) Если $a \neq 0,\ a \vdots b \Rightarrow |a| \geq |b|$

$\uparrow a \vdots b \Leftrightarrow a = b * q \Rightarrow |a| = |b| * |q| \Rightarrow$ от противного, если $|a| < |b|$, то $|q| = \frac{|a|}{|b|} < \frac{|b|}{|b|} = 1 \Rightarrow$ единственная возможность при целом $q = 0$, но тогда и $a = 0$. Противоречие. $\downarrow$

(5) $a \vdots b$ и $b \vdots a \Rightarrow |a| = |b|$

(6) $\forall\ a \in Z \backslash \{0\} \Rightarrow 0 \vdots a$

(7) $\forall\ a \in Z \Rightarrow a \vdots 1$

(8) Если $ab \vdots m$ и НОД$(a,\ m) = 1,$ то $b \vdots m$

(9) Если $a \vdots m,\ a \vdots k$ и НОД$(m,\ k) = 1,$ то $a \vdots mk$

1.3 Простые и составные числа

Определение. Натуральное число $p > 1$ называется простым, если оно имеет ровно два натуральных делителя (p и 1).

Все остальные натуральные числа называются составными (кроме 1). Единица не является ни простым, ни составным.

1.4 Основная теорема арифметики

Th.1 (Основная теорема арифметики) Всякое натуральное число $n > 1$ может быть представлено в виде $n = p_1 * p_2 * ... * p_i$, где p_i — простые числа. Это представление единственно с точностью до порядка множителей (т.е. если $n = p_1 * p_2 * ... * p_r = q_1 * q_2 * ... * q_s$, то $r = s$ и $q_1,\ q_2, ...,\ q_s$ можно перестановкой получить из чисел $p_1,\ p_2, ...,\ p_r$)

(1) Докажем существование

Пусть $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Среди делителей n есть числа превосходящие 1 (например, само n). Пусть p_1 — наименьший из таких делителей.

p_1 — простое число (если оно само имело бы делитель $1 < a < p_1$, то a было бы меньше p_1 и было бы делителем n (св-ва 4,3), противоречит тому, что выбран наименьший делитель).

Итак, $n = p_1 n_1,$ где p_1 — простое, $n_1 \in \mathbb{N}$ и $n_1 < n$ (св-во 4).

Если $n_1 > 1$, то поступим с ним так же, как и числом n, представим его в виде $n_1 = p_2 n_2$, p_2 — простое, $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 < n_1 \Rightarrow n = p_1 * p_2 * n_2$ и т.д.

В конце концов, так как $n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, ...$ убывают, то $\exists\ n_r = 1$ и процесс обрывается: $n = p_1 * p_2 * ... p_r$

(2) Докажем существование (единственность) От противного. Если $\exists$ хоть одно натуральное число, допускающее два существенно различных разложения, то непременно $\exists$ и наименьшее число с таким свойством:

$$m = p_1 * p_2 * ... * p_r = q_1 * q_2 * ... * q_s \qquad (1)$$

Можем допустить, что $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_r; q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_s$.

А) Заметим, что $p_1 \neq q_1$.
Если равны, то разделив (1) на $p_1 = q_1$, получили бы два существенно различных разложения на простые множители для числа $< m$ (Противоречие с тем, что m — наименьшее).
На самом деле показали больше: что среди q_j нет чисел равных какому-либо p_i

Б) Из А) $p_1 < q_1$ или $p_1 > q_1$. Пусть $p_1 < q_1$ (для $p_1 > q_1$ доказательство строится аналогично).
Рассмотрим целое число:

$$m' = m - p_1 * q_2 * ... * q_s \qquad (2)$$

Подставляя вместо m два его разложения, получим:

$$m' = p_1 * p_2 * ... * p_r - p_1 * q_2 * ... * q_s = p_1(p_2 * ... * p_r - q_2 * ... * q_s) \qquad (3)$$

$$m' = q_1 * q_2 * ... * q_s - p_1 * q_2 * ... * q_s = (q_1 - p_1)q_2 * ... * q_s \qquad (4)$$

Из равенства (4) очевидно $m' > 0$. Из равенства (2) $m' < m$, а значит, для m' разложение на простые множители — единственно (с точностью до порядка сомножителей).

Из (3) $\Rightarrow p_1$ входит множителем в m', значит, из (4) p_1 входит множителем либо в $q_1 - p_1$, либо в $q_2 * ... * q_s$. Но последнее невозможно, так как все $q_j > p_1$ ($p_1 < q_1$) и они простые.

Значит, p_1 входит множителем в $q_1 - p_1$, т.е. $(\mathbf{q_1} - \mathbf{p_1}) \vdots \mathbf{p_1} \Rightarrow q_1 - p_1 = p_1 h \Rightarrow q_1 = p_1(h+1)$, т.е. $\mathbf{q_1} \vdots \mathbf{p_1}$, чего быть не может. Противоречие. Ч.Т.Д.

1.5 Теорема о количестве простых чисел

Th.2 (Теорема Евклида) Множество простых чисел бесконечно.

$\uparrow$ Доказательство проведем от противного. Предположим, что множество простых чисел конечно, т.е. $P = \{p_1, p_2, ...p_k\}$ — конечная совокупность простых чисел.

Рассмотрим число $p = p_1 * p_2 * ... * p_k + 1$.

Заметим, что $\forall\ i, i = 1, 2, ..., k$ это $p > p_i$, т.е. $p \notin P$, значит, оно составное и по ОТА может быть представлено в виде произведения простых множителей.

Но p не делится ни на какой p_i (при делении дает в остатке 1).

Значит, наше предположение о конечности системы простых чисел неверно. $\downarrow$

1.6 Как часто встречаются простые числа на числовой оси? (утверждение)

Утверждение. Существуют сколь угодно длинные участки натурального ряда, вовсе не содержащие простых чисел

$\uparrow$ Действительно, пусть $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Рассмотрим ряд чисел: $n! + 2, n! + 3, ..., n! + n$.

$n = 2 : 2! + 2$ — одно число в ряду;	
$n = 3 : 3! + 2, 3! + 3$ — два числа в ряду;	чем больше n, тем больше в ряду
$n = 4 : 4! + 2, 4! + 3, 4! + 4$ — три числа в ряду;	чисел ($n - 1$ число).
и т.д.	

В этом ряду нет ни одного простого числа, так как $n! + 2$ делится на 2, $n! + 3$ делится на 3, $n! + n$ делится на n. Таким образом, при больших n такие участки натурального ряда могут быть очень большими. $\downarrow$

1.7 Каноническое разложение, число всех натуральных делителей натурального числа, НОД и НОК

Th.3 (Теорема Эйлера) Пусть $\tau(n)$ — количество простых чисел $\leq n$. Тогда

$$\frac{\tau(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Понятно, что $\tau(n)$ увеличивается (т.е. $\to \infty$) при $n \to \infty$ (это означает, что простые числа встречаются все реже и реже).

Мы показали, что любое натуральное число мы можем представить в виде произведения простых множителей (и такое представление единственно с точностью до перестановки множителей): $n = p_1 * p_2 * ... * p_r,\ p_1 \le p_2 \le ... \le p_r$. Используя обозначение степени, можем записать так:

$$\mathbf{n = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * ... * p_k^{a_k}},\ \text{(каноническое разложение)}$$

$$\text{где } p_1 < p_2 < ... < p_k \text{ — простые, } a_1, a_2, ..., a_k \text{ — натуральные числа.}$$

Замечание. Бывает полезно записать в разложение <u>все</u> простые числа $\le p_k$ и использовать показатель равный 0.

Если число m является делителем n, то несложно понять, что $\mathbf{m = p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * ... * p_k^{\beta_k}}$, где $0 \le \beta_i \le a_i$.

Можно посчитать число всех натуральных делителей числа n. Любой делитель n имеет следующую структуру: $\mathbf{m = p_1^{0,1,2,...,a_1} * p_2^{0,1,...a_2} * ... * p_k^{0,1,...,a_k}}$

Для первого множителя (a_1+1) возможность для второго (a_2+1) возможностей и т.д. Таким образом, число всех делителей $(a_1+1)*(a_2+1)*...*(a_k+1)$.

Пример. Сколько делителей у числа 120 (включая 1 и само число)?

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 * 3^1 * 5^1$. Значит, число всех делителей $= (3+1)*(1+1)*(1+1) = 4*2*2 = 16$.

Определение. d — общий делитель a и $b \Leftrightarrow \mathbf{a \vdots d}$ и $\mathbf{b \vdots d}$.

Определение. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается НОД(a, b).

Определение. Наименьшее общее кратное НОК$(a, b) = k$ — наименьшее натуральное число такое, что $\mathbf{k \vdots a}$ и $\mathbf{k \vdots b}$.

Пусть $\mathbf{a = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * ... * p_k^{a_k}},\ \mathbf{b = p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * ... * p_k^{\beta_k}}$

Здесь использовали показатель 0 для тех простых множителей, которые входят только в одно из разложений.

Тогда

$$\text{НОД}(a,b) = p_1^{min(a_1,\beta_1)} * p_2^{min(a_2,\beta_2)} * ... * p_k^{min(a_k,\beta_k)}$$

$$\text{НОК}(a,b) = p_1^{max(a_1,\beta_1)} * p_2^{max(a_2,\beta_2)} * ... * p_k^{max(a_k,\beta_k)}$$

$$\text{НОД}(a,b) * \text{НОК}(a,b) = a * b$$

Пример. $a = 2*3^3*5^2*7,\ b = 2^2*3*7^2*11 \Rightarrow a = 2^1*3^3*5^2*7^1*11^0,\ b = 2^2*3^1*5^0*7^2*11^1 \Rightarrow$ НОД$(a,b) = 2^1*3^1*5^0*7^1*11^0$, НОК$(a,b) = 2^2*3^3*5^2*7^2*11^1$.

1.8 Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11

1) на 2 и 5. Легко.

2) на 4. $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = 100 * \overline{a_k a_{k-1} ... a_2} + \overline{a_1 a_0}$. $\quad 100 \vdots 4. \ \Rightarrow n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

3) на 8. $n \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

4) на 3. $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0 = a_k(\underbrace{999...9}_{k} + 1) + a_{k-1}(\underbrace{999...9}_{k-1} + 1) + ... + a_1(9+1) + a_0 = (a_k \underbrace{999...9}_{k} + a_{k-1} \underbrace{999...9}_{k-1} + ... + a_1 9) + (a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0)$

Аналогично для 9.

5) на 6. $n\vdots 2$ и $n\vdots 3 \Rightarrow$ (так как 2 и 3 взаимно просты) $n\vdots 6$
6) на 11.

$$n = \overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} = a_0 + a_1 10 + a_2 100 + a_3 + 1000 + ... + a_k 10^k =$$
$$= a_0 + a_1(11-1) + a_2(99+1) + a_3(1001-1) + a_4(9999+1) + a_5(100001-1) + ... + a_k 10^k =$$
$$= (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ...) + (a_1 11 + a_3 1001 + a_5 100001 + ... + a_{2l+1} 1\underbrace{00...0}1_{2l} + ...) +$$
$$+ (a_2 99 + a_4 9999 + ... + a_{2m}\underbrace{99...99}_{2m} + ...)$$

А) числа, состоящие из четного числа 9-ок, делятся на 11, т.е. последняя скобка $\vdots 11$;

Б) заметим, что $1001 = (1100 - 99)\vdots 11$, $\quad 100001 = (110000 - 9999)\vdots 11$, $\quad 1\underbrace{00...00}_{2l}1 = (11\underbrace{00...00}_{2l} - \underbrace{99...99}_{2l}\vdots 11)$.

Доказательство свойств делимости 8 и 9

Свойство 8. Если $ab\vdots m$ и НОД$(a, m) = 1$, то $b\vdots m$

$\uparrow$ Имеем НОД$(a, m) = 1 \Rightarrow \exists A,\ M : Aa + Mm = 1$.

Домножим последнее равенство на $b : \underset{\vdots m}{Aab} + \underset{\vdots m}{Mmb} = b \Rightarrow b\vdots m \downarrow$

Свойство 9. Если $a\vdots m,\ a\vdots k$ и НОД$(m, k) = 1$, то $a\vdots mk$

$\uparrow$

1) $a\vdots m \Rightarrow a = mq_1$

2) $a\vdots k \Rightarrow mq_1\vdots k$

3) из 2) и НОД$(m, k) = 1 \Rightarrow$ по свойству 8 $q_1\vdots k \Rightarrow q_1 = kq_2$

4) $a = mq_1 = mkq_2$, т.е. $a\vdots mk \downarrow$

1.9 Алгоритм Евклида

Пусть требуется найти НОД(a, b). Будем считать, что $|a| > |b|$.

1) Разделим a на b с остатком:

$$a = q_1 b + r_1,\ 0 \le r_1 < |b| \quad (1)$$

Заметим, что любой делитель пары a и b будет делителем r_1, а значит пары b и r_1. С другой стороны, любой делитель пары (b, r_1) будет делителем a, а значит пары (a, b). Таким образом (равенство множеств), множество делителей пары (a, b) совпадает с множеством делителей пары (b, r_1), а значит и НОД$(a, b) =$ НОД(b, r_1).

2) Разделим b на r_1 с остатком:

$$b = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1 \quad (2)$$

При этом получаем, что НОД$(b, r_1) =$ НОД(r_1, r_2)

3) Разделим r_1 на r_2 с остатком:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \le r_3 < r_2 \quad (3)$$

При этом НОД$(r_1, r_2) =$ НОД(r_2, r_3).
И т.д.

Посмотрим на остатки. $|b| > r_1 > r_2 > r_3 > ... \ge 0$. Получили строго убывающую последовательность неотрицательных целых чисел. Эта последовательность конечна. Существует $r_{k+1} = 0$, т.е.

k+1)

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0 \quad (k+1)$$

При этом НОД$(a, b) =$ НОД$(b, r_1) =$ НОД$(r_1, r_2) =$ НОД$(r_2, r_3) = ... =$ НОД$(r_{k-1}, r_k) = r_k$.
Таким образом, НОД(a, b) равен последнему ненулевому остатку в алгоритме Евклида.

1.10 Применение алгоритма Евклида

Весь алгоритм:
1) $a = q_1 b + r_1,\ 0 \leq r_1 < |b|$
2) $b = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \leq r_2 < |r_1|$
3) $r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < |r_2|$
...
k) $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$
k+1) $r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0$
НОД$(a, b) = r_k$

Пример. НОД(5083,3553)-?
$5083 = 1 * 3553 + 1530$
$3553 = 2 * 1530 + 493$
$493 = 9 * 51 + 34$
$51 = 1 * 34 + 17$
$34 = 2 * 17 + 0 \Rightarrow$ НОД$(5083, 3553) = 17$

Утверждение. Если $d =$ НОД(a, b), то существуют целые A и $B : d = Aa + Bb$.

Замечание. Если НОД$(a, b) = 1$ (т.е. a и b взаимно просты), то существуют целые A и $B : 1 = Aa + Bb$.

1.11 Решение уравнений ax + by = c

Определение. Диофантово уравнение первой степени - уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c, x, y — целые числа.

Пусть НОД$(a, b) = d$.

1) Если $c \vdots d$, то делим на d правую и левую части уравнения и получаем $a_1 x + b_1 y = c_1$, где НОД$(a_1, b_1) = 1$.
2) Если c не делится на d, то уравнение решений не имеет.

Таким образом, будем рассматривать уравнения (*) $ax + by = c,$ НОД$(a, b) = 1$.

Так как НОД$(a, b) = 1$, то по следствию из алгоритма Евклида $\exists$ целые $A,\ B : Aa + Bb = 1$.
Домножим равенство на $c : Aca + Bcb = c$.
Видим, что пара целых чисел $(x_0, y_0) = (Ac, bc)$ является решением уравнения.
Мы нашли частное (одно из) решение нашего уравнения. Найдем все решения (x, y).

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c, \\ ax + by = c. \end{cases} \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,\ a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

НОД$(a, b) = 1$, значит $(x - x_0) \vdots b$, т.е. $x - x_0 = bt$ или $x = x_0 + bt$, где t — целое.
Тогда $y - y_0 = \frac{-a(x - x_0)}{b} = -at$ или $y = y_0 - at$.
Таким образом, все пары вида $(x_0 + bt, y_0 - at)$, где t — целое, являются решениями (*).

Замечание. Общее решение диофантова уравнения представляет собой сумму частного решения уравнения и решения соответствующего однородного уравнения (уравнения $ax + by = 0$).

Легко понять, что решениями однородного уравнения являются все пары вида $(bt, -at)$, где t — целое.

Пример. 7x - 23y = 131 Проверка решения: $c \vdots$ НОД$(a, b) \Rightarrow$ имеет решения.
Можно угадать частное решение (22,1), так как 154 - 23 = 131.
Тогда все решения — $(22 - 33t, 1 - 7t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

1.12 Сравнения и их свойства

Основная идея теории сравнений заключается в том, что два числа a и $b(\in \mathbb{Z})$, имеющие при делении на $m \in \mathbb{N}$ один и тот же остаток, обнаруживают целый ряд одинаковых свойств по отношению к m.

Так по отношению к 2 мы выделяем четные и нечетные числа. Знаем, например, что сумма/разность четных - четное число, произведение четных - четное и т.д.

Определение. Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю $m(a \equiv b(mod\ m))$, если при делении на m они дают одинаковые остатки. **(1)**

Пример. $8 \equiv 3(mod\ 5) \equiv 103(mod\ 5) \equiv -2(mod\ 5) \equiv -17(mod\ 5)$ и т.д.

Определение. $a \equiv b (mod\ m) \Leftrightarrow (a-b) \vdots m$. **(2)**

Докажем эквивалентность определений 1 и 2.
$\uparrow$
1) **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**. Пусть остатки одинаковы, т.е. $a = q_1 m + r,\ b = q_2 m + r \Rightarrow a - b = m(q_1 - q_2),\ (q_1 - q_2) \in \mathbb{Z}$, т.е. $(a-b) \vdots m$;
2) **(2)** $\Rightarrow$ **(1)**. От противного.
Пусть остатки разные, т.е. $a = q_1 m + r_1,\ b = q_2 m + r_2$, где $0 \le r_1 < |m|,\ 0 \le r_2 < |m| \ (-|m| < -r_2 \le 0)$.

Тогда $a - b = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$ и $-|m| < r_1 - r_2 < |m|\ (|r_1 - r_2| < |m|\ (\mathbf{3})) \Rightarrow (r_1 - r_2) \vdots m$
Но тогда по свойству делимости 4, если $r_1 - r_2 \ne 0$, то $|r_1 - r_2| \ge |m|$, противоречие с **(3)**. Таким образом, $r_1 = r_2$. $\downarrow$

Свойства сравнений

1) $a \equiv a (mod\ m)$
2) $a \equiv b (mod\ m) \Rightarrow b \equiv a (mod\ m)$
3) $a \equiv b (mod\ m),\ b \equiv c (mod\ m) \Rightarrow a \equiv c (mod\ m)$

$$\uparrow \begin{cases} (a-b) \vdots m, \\ (b-c) \vdots m. \end{cases} \Rightarrow a - c = \underbrace{(a-b)}_{\vdots m} + \underbrace{(b-c)}_{\vdots m} \vdots m \downarrow$$

Далее считаем, что $a \equiv b (mod\ m),\ c \equiv d (mod\ m)$

4/5) $a \pm c \equiv b \pm d (mod\ m)$

$$\uparrow \begin{cases} (a-b) \vdots m, \\ (c-d) \vdots m. \end{cases} \Rightarrow (a+c) - (b+d) = \underbrace{(a-b)}_{\vdots m} + \underbrace{(c-d)}_{\vdots m} \vdots m \downarrow$$

6) $ac \equiv bd (mod\ m)$

$$\begin{cases} (a-b) \vdots m, \\ (c-d) \vdots m. \end{cases} \Rightarrow ac - bd = ac - bc + bc - bd = c\underbrace{(a-b)}_{\vdots m} + b\underbrace{(c-d)}_{\vdots m} \vdots m \downarrow$$

7) $a^k \equiv b^k$
Следствие. Пусть $P(x)$ — любой многочлен с целыми коэффициентами, т.е. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, тогда из $x \equiv y (mod\ m) \Rightarrow P(x) \equiv P(y) (mod\ m)$.

8) Если $ac \equiv bc (mod\ m)$ и НОД$(c, m) = 1$, то $a \equiv b (mod\ m)$.

$\uparrow ac - bc = c(a-b)$. Так как левая часть делится на m и НОД$(c, m) = 1$, то $(a-b) \vdots m \downarrow$
9) Если $a \equiv b (mod\ m)$ и $\exists\ k \in \mathbb{Z} : a = ka_1,\ b = kb_1,\ m = km_1$, то $a_1 \equiv b_1 (mod\ m_1)$.

$\uparrow a - c = k(a_1 - b_1)$, т.е. $k(a_1 - b_1) \vdots km_1 \Rightarrow (a_1 - b_1) \vdots m_1 \downarrow$

Примеры.

1) Признак делимости на 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$. Так как $10 \equiv 1 (mod\ 3)$, то $10^k \equiv 1 (mod\ 3) \Rightarrow n (mod\ 3) = (a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0)(mod\ 3)$.

2) Признак делимости на 11

Так как $10 \equiv -1 (mod\ 11)$, то $10^k \equiv (-1)^k (mod\ 11)$.
Тогда $n (mod\ 11) = ((-1)^k a_k + ... + a_2 - a_1 + a_0)(mod\ 11)$

3) Найти остаток от деления на 3 числа $n = (1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)...(1000^2+1)$

$n (mod\ 3) = \{(4^2+1) = (1^2+1)(mod\ 3),\ (4^2+1) = (1^2+1)(mod\ 3),\ 1000 : 3 = 333 * 3 + 1\} = (1^2+1)^{334}(2^2+1)^{333}(3^2+1)^{333}(mod\ 3) \equiv (2)^{334}(2)^{333}(1)^{333}(mod\ 3) \equiv (2)^{667}(mod\ 3) \equiv (-1)^{667}(mod\ 3) \equiv -1(mod\ 3) \equiv 2(mod\ 3)$.

4) При каких натуральных n число $8n+3$ делится на 13?

То есть при каких n $8n+3 \equiv 0(mod\ 13)$?

$8n \equiv -3(mod\ 13)$
$8n \equiv 10(mod\ 13)$
$4n \equiv 5(mod\ 13)$
$12n \equiv 15(mod\ 13)$
$-n \equiv 2(mod\ 13)$
$n \equiv -2(mod\ 13)$
$n = 13t-2,\ t \in \mathbb{N}$ или $n = 13t+11,\ t \in \mathbb{N}$

5) Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $7x-23y = 131$.

Избавимся от одного неизвестного: рассмотрим уравнение, например, по модулю 7.

$-23y \equiv 131(mod\ 7)$
$-2y \equiv 5(mod\ 7)$
$2y \equiv -5(mod\ 7)$
$2y \equiv 2(mod\ 7)$
$y \equiv 1(mod\ 7) \Rightarrow y = 7t+1,\ t \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{131+23y}{7} = \frac{131+23*7t+23}{7} = \frac{154+23*7t}{7} = 22+23t$
Ответ: $(22+23t, 1+7t), t \in \mathbb{Z}$.

1.13 Классификация чисел по данному модулю

Все числа сравнимые с данным a (а значит, сравнимые между собой) по модулю m в один класс.

Остатками при делении на m могут быть $0, 1, 2, ..., m-1$.

Значит, можно выделить ровно m классов по модулю m.

Класс характеризуется остатком: $a = mt+r,\ t \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r \leq m-1$. Фактически, каждый класс — арифметическая прогрессия со множителем m.

1.14 Полная и приведенная системы вычетов

Выберем произвольным образом по одному числу в каждом классе. Такую группу назовем *полной системой вычетов по модулю* m(ПСВ(m). Для данного m таких систем существует бесконечно много.

Пример. По mod 3: ПСВ(3) = (0,1,2); ПСВ(3) = (10,11,12); ПСВ(3) = (-4,6,-5).

Теорема. Если a и m взаимно просты, и в выражении $ax+b$ число x пробегает ПСВ(m), то получаемые значения выражения $ax+b$ тоже образуют ПСВ(m).

$\uparrow$ Так как при m значениях x получаем m значений $ax+b$, то достаточно показать, что все они будут разных классов по $mod\ m$.

От противного: пусть x_1 и x_2 из разных классов по модулю m, а $(ax_1+b) \equiv (ax_2+b)(mod\ m) \Rightarrow ax_1 \equiv ax_2(mod\ m)$. Так как НОД$(a,m) = 1$, то $x_1 \equiv x_2(mod\ m)$.

Противоречие. $\downarrow$

Следствие. Рассмотрим m членов арифметической прогрессии

$$b, b+a, b+2a, ..., b+(m-1)a,$$

где $b, a, m \in \mathbb{Z}$ и НОД$(a,m) = 1$. Среди m членов этой арифметической прогрессии имеется ровно один, делящийся на m.

$\uparrow$ Заметим, что $(0, 1, ..., m-1)$ образуют полную систему вычетов по модулю m, но тогда по Теореме эти m членов арифметической програссии тоже образуют ПСВ(m), а в ней ровно одно число делится на $m \downarrow$

Пример. Найти все тройки простых чисел вида $p, p+2, p+4$

$\uparrow$ Эту тройку чисел можем рассмотреть как 3 последовательных члена арифметической прогрессии с начальным членом p и множителем 2: $p+0*2, p+1*2, p+2*2$.

Так как НОД$(2,3)=1$, то по следствию к теореме, среди этих трех чисел есть только одно, делящееся на 3. Простое число, делящееся на 3 только 3 $\Rightarrow$

$$p=3\Rightarrow 3,5,7 \text{ подходит.},\ p+2=3\Rightarrow p=1 \text{ не подходит (1 не простое)},\ p+4=3\Rightarrow \text{невозможно}$$

Утверждение. Все числа, принадлежащие одному классу, имеют с m (в паре) одни и те же общие делители. В том числе один и тот же НОД.

$\uparrow$ Пусть a и b принадлежат одному классу по модулю $m\Rightarrow a=km+r,\ b=lm+r,\ k,l\in\mathbb{Z}\Rightarrow a*b=(k*l)m=qm,\ q\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=qm+b$

Если d_1 — делитель пары (m,b), то d_1 — делитель пары (m,a).

И наоборот, если d_2 — делитель пары (m,a), то d_2 — делитель пары (m,b).

Значит, множество общих делителей пары (m,a) совпадает со множеством общих делителей пары (m,b). Значит и НОД$(m,a)=$ НОД$(m,b)\downarrow$

Определение. Группа чисел, содержащая по одному представителю от каждого класса, взаимно простого с модулем, называется привиденной системной вычетов по данному модулю. Обозначени. ПрСВ(m)

Пример. По модулю 8

ПСВ$(8)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\Rightarrow$ ПрСВ$(8)=\{1,3,5,7\}=\{9,-5,21,-1\}$

Простейший способ получить ПрСВ(m): отбираем в ряду чисел $1,2,3,...,m$, представлюящем из себя ПСВ(m), те, что взаимно просты с m.
Таким образом, число классов взаимно простых с m, равно числу натуральных чисел $\leq m$ и взаимно простых с m. Это число зависит только от m и обозначается $\phi(m)$

Теорема. Если a и m взаимно просты, и в выражении ax число x пробегает какую-либо ПрСВ(m), то получаемые значения выражения ax тоже образуют ПрСВ(m).

$\uparrow$ Так как одному x соответствуют один ax, надо понять, что число классов не уменьшится, т.е. если x_1 и x_2 из разных классов, то и ax_1 и ax_2 из разных классов, которые тоже взаимно просты с m.

Пусть x_1 и x_2 из разных классов по модулю m, но $ax_1\equiv ax_2(mod\ m)$. Так как НОД$(a,m)=1$, то $x_1\equiv x_2(mod\ m)$. Противоречие.

Если НОД$(x,m)=1$ и НОД$(a,m)=1$, то очевидно, что НОД$(ax,m)=1\downarrow$

1.15 Теорема Эйлера

Если a взаимно просто с m, то $a^{\phi(m)}\equiv 1(mod\ m)$, где $\phi(m)$ — число классов взаимно простых с m.

$\uparrow$ Пусть НОД$(a,m)=1,\phi(m)=s$ (для краткости), ПрСВ$(m)=\{r_1,r_2,...,r_s\}$.

Тогда в силу доказанной теоремы $\{ar_1,ar_2,...,ar_s\}=$ ПрСВ(m).

Т.е. каждое из чисел первой системы сравнимо по модулю m с каким-то одним числом из второй системы:

$ar_1\equiv r_{i1}(mod\ m)$,

$ar_2\equiv r_{i2}(mod\ m)$,

...

$ar_s\equiv r_{is}(mod\ m)$,

где ряд индексов $i_1,i_2,...,i_s$ есть расположенный в другом порядке ряд чисел $1,2,...,s$.

Перемножив все эти сравнения, находим: $a^{\phi(m)}r_1r_2...r_s\equiv r_{i1}r_{i2}...r_{is}(mod\ m)$.

Так как все r_j взаимно просты с m, то $a^{\phi(m)}\equiv 1(mod\ m)$. $\downarrow$

1.16 Малая теорема Ферма

Если p — простое, и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)(a^p \equiv a(mod\ p))$.

$\uparrow$ Если p — простое, то ПСВ$(p) = \{1, 2, ..., p\} \Rightarrow$ ПрСВ$(p) = \{1, 2, ..., p-1\}$ и $\phi(p) = p - 1$

По теореме Эйлера $a^{p-1} \equiv (mod\ p) \downarrow$

2 Тригонометрические функции

2.1 Радианная мера угла

Определение. Радианной мерой угла называется отношение длины дуги окружности с центром в вершине угла, заключенной между сторонами угла, к радиусу этой окружности. От радиуса это отношение не зависит.

Замечание. Если радиус окружности равен 1, то радианная мера угла равна длине соответствующей дуги.

2.2 Определение числовой окружности и функций sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x)

Определение. Тригономерическая окружность — окружость радиуса 1 с центром в начале координат.
$P_0(1, 0)$ — "начало отсчета"
Направление движения против часовой стрелки будем называть положительным направлением.

Тригонометрическая окружность служит для того, чтобы отмечать на ней числа.

Определение. Косинусом числа t называется абсцисса точки на тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

Определение. Синусом числа t называется ордината точки на тригонометрической окружности, соответствующей числу t.

Определение. Тангенсом числа t называется отношение синуса этого числа к его косинусу.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Определение. Котангенсом числа t называется отношение косинуса этого числа к его синусу.

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

2.3 Основные свойства тригонометрических функций

1. **О.О.**

   $\sin t$, $\cos t$ определены $\forall t \in \mathbb{R}$ (для всех точек на круге можем найти их координаты);

   $\operatorname{tg} t \Leftrightarrow \cos t \neq 0 \iff t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

   $\operatorname{ctg} t \Leftrightarrow \sin t \neq 0 \iff t \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

2. **О.З.**

   Для всех точек окружности $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1 \Rightarrow |\cos t| \leq 1$, $|\sin t| \leq 1$
   Т.е. ограниченные функции!

3. **Периодичность**

   Тригонометрические функции являются периодическими.

   Утверждение 1. Число 2π является периодом синуса и косинуса.

   $\uparrow$ Так как точки окружности, соответствующие t и $t \pm 2\pi$ совпадают,
   то $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$, $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t \downarrow$

   Утверждение 2. Число 2π является наименьшим периодом косинуса(и синуса).

$\uparrow$ От противного. Пусть $\exists T : 0 < T < 2\pi$ и $\forall t \ \cos(t+T) = \cos t (*)$.

В частности, для $t = 0$ имеем $\cos T = \cos 0 = 1$ (точка P_0), но этой точке соответствуют значения $T = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

Однако, не $\exists k \in \mathbb{Z} : 0 < 2\pi k < 2\pi$. Противоречие. $\downarrow$

Следствия

(a) $2\pi l, \ l \in \mathbb{Z}$ — тоже периоды

(b) 2π — период тангенса и котангенса

Утверждение 3. Наименьший период тангенса и котангенса равен π.

$\uparrow$ Подозрение о таком периоде может возникнуть из О.О. этих функций.

В самом деле, точки, соответствующие числам t и $t \pm \pi$ на тригонометрической окружности диаметрально противоположны: от точки t до точки $t \pm \pi$ нужно пройти расстояние π, в точности равное половине длины окружности.

Если воспользоваться определением tg и ctg с помощью осей тангенсов и котангенсов равенства $\operatorname{tg}(t \pm \pi) = \operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg}(t \pm \pi) = \operatorname{ctg} t$ становятся очевидными.

Можно показать, что π — наименьший период. Так для тангенса достаточно рассмотреть ту же точку $P_0(1, 0)$. $\downarrow$

Таким образом, если построить графики синуса и косинуса на промежутках длины 2π, а тангенса и котангенса на промежутках длины π, то с помощью периодичности построим графики этих функций всюду на $\mathbb{R}$.

4. **Чётность**

Утверждение. Синус - нечётная функция, косинус - чётная функция.

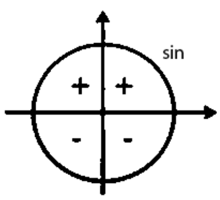
$\uparrow$ Достаточно заметить, что $\forall P_t (t \in (-\pi, \pi])$ P_{-t} расположена на окружности симметрично относительно прямой OP_0. Т.е. их абсциссы совпадают $(\cos -t) = \cos t$, а ординаты отличаются знаком $(\sin(-t) = -\sin t)$ $\downarrow$

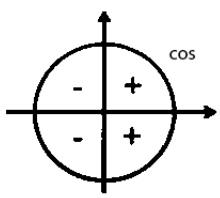
Следствие. Тангенс и котангенс - нечётные функции.

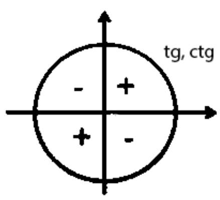
$\uparrow$ $\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$ $\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$ на О.О. $\downarrow$

Итак, задача ещё упростилась: построить графики на половине периода.

5. **Знаки тригонометрических функций**

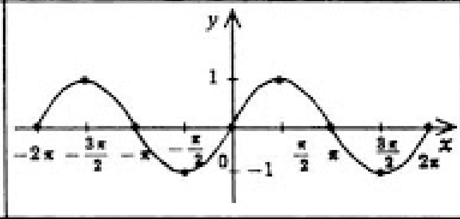
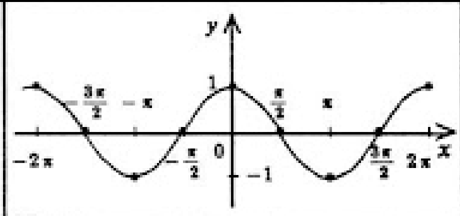
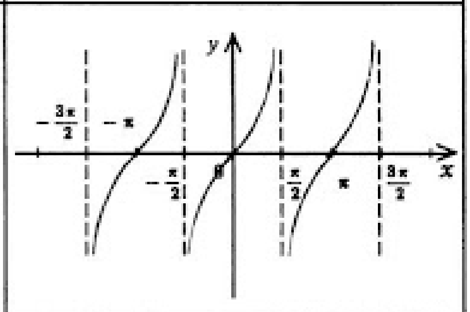
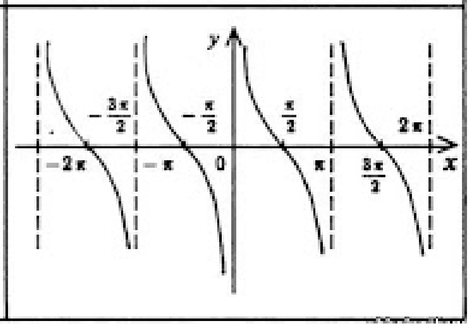






6. **Графики**

Графики тригонометрических функций

Функция	Что является графиком	График
$y=\sin x$	Синусоида	
$y=\cos x$	Синусоида	
$y=\mathrm{tg}\, x$	Тангенсоида	
$y=\mathrm{ctg}\, x$	–	

2.4 Формулы приведения

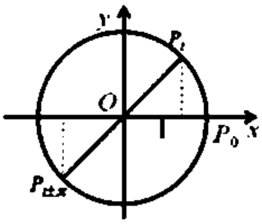
Основные формулы:

$\sin(t \pm \pi) = -\sin t$

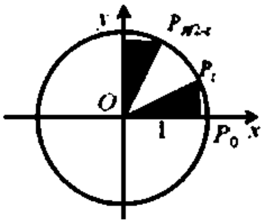
$\cos(t \pm \pi) = -\cos t$

$\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$

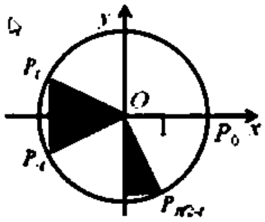
$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$



$\sin(t\pm\pi)=-\sin t,$
$\cos(t\pm\pi)=-\cos t,$



$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

Другие формулы:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-t)\right)=\cos(-t)=\cos t$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$

2.5 Формулы сложения для тригонометрических функций и их следствия (формулы двойного угла, тройного угла, половинного угла)

Определение 1. Скалярным произведением векторов называется произведение их модулей (длин) на косинус угла между ними.

$$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=|a||b|\cos\phi$$

Замечание: угол между векторами ϕ: $0\le\phi\le\pi$

Определение 2. Если векторы заданы своими координатами $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$ в ортономированном базисе (системе координат), то

$$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

Начнём с формулы косинуса разности: $\cos(\alpha-\beta)$

Итак, пусть даны числа α и β. Рассмотрим на тригонометрическом круге точки A и B, соответствующие α и β.

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$
$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$

$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

С другой стороны:
$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$
а угол между ними равен "$\beta-\alpha$"
точнее! $|\beta-\alpha|+2\pi k$

Так или иначе $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\cos(\alpha-\beta)$ (свойства четности и периодичности косинуса)

$\overrightarrow{a}*\overrightarrow{b}=|a||b|\cos\phi=1*1*\cos(\alpha-\beta)$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\{\cos\alpha\cos\beta\neq0\}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

О.О. левой части формулы:

$\cos(\alpha+\beta)\neq 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta\neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

О.О. правой части формулы:

$$\begin{cases}\cos\alpha\neq 0,\\ \cos\beta\neq 0,\\ \operatorname{tg}\alpha * \operatorname{tg}\beta\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z};\\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\\ \cos\alpha+\beta\neq 0,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{1}$$

Аналогично можно получить формулы:

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$, если $\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$, если $\sin\alpha\neq 0$ и $\sin\beta\neq 0$ и т.д.

Следствия

1. **Формулы двойного аргумента**

   $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \Rightarrow \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \Rightarrow \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

   $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

   О.О. левой части снова не совпадает с О.О. правой части формулы.

   О.О. левой части:

   $\cos 2\alpha\neq 0\Leftrightarrow 2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

   О.О. правой части:

$$\begin{cases}\cos\alpha\neq 0,\\ \operatorname{tg}^2\alpha\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z},\\ \operatorname{tg}\alpha\neq\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z},\\ \alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{2}$$

   $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$
   Замечание относительно О.О. в силе!

   Синус и косинус двойного угла можно выразить через тангенс:

   $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, если $\cos\alpha\neq 0$

   $\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, если $\cos\alpha\neq 0$

2. **Формулы тройного аргумента**

   $\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos^2\alpha=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

   $\cos 3\alpha=4\cos^2\alpha-3\cos\alpha$

3. **Формулы половинного угла**

   $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

   $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

   $|\sin\alpha|=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, $|\cos\alpha|=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

   $\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, $\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

   Знак раскрытия модуля зависит от того, в какой четверти на тригонометрической окружности находится точка, соответствующая $\frac{x}{2}$

   Для тангенса и котангенса половинного аргумента можем получить:

   $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Можно получить и другие формулы, например:

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

2.6 Произведение тригонометрических функций

Имеем:

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Путём сложения и вычитания выражений получим:

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

Имеем:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Путём сложения и вычитания выражений получим:

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Замечание. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 2\alpha) = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

2.7 Сумма тригонометрических функций

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Пусть

$$\begin{cases} \alpha+\beta = x, \\ \alpha-\beta = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2}, \\ \beta = \frac{x-y}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{x+y}{2}$,

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

$\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y = \frac{\sin x}{\cos x} \pm \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y \pm \cos x\sin y}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$

2.8 Введение дополнительного угла

Получим формулу для преобразования выражения $s = a\sin x + b\cos x, a, b \neq 0$.

$s = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

Заметим, что $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow\ \exists\ \phi$.

$\sin\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\exists\ \psi : \cos\psi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда

1. $s = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\phi\sin x + \cos\phi\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi)$ или

2. $s = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\psi\sin x + \sin\psi\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\psi)$.

2.9 Обратные тригонометрические функции, их основные свойства (ОО, ОЗ, графики, чётность, монотонность)

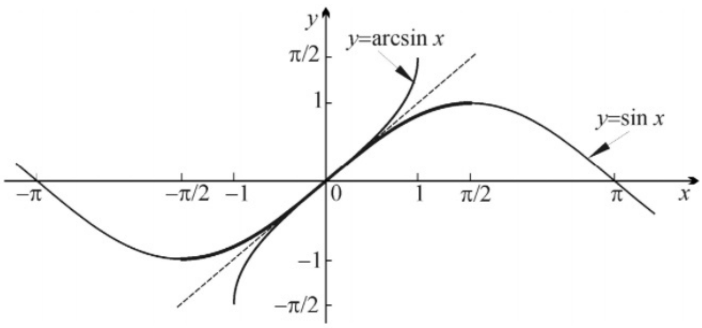
2.9.1 Арксинус

Определение. Функция, обратная к функции $y = \sin x$, рассмотренной на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, называется арксинусом и обозначается $x = \arcsin y$, где y — аргумент, а x — значение функции

О.О. $x \in [-1; 1]$(из определения)

О.З. $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$(из определения)

Графики



Чётность. Арксинус — нечётная функция: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\uparrow$ Обозначим $\phi = \arcsin(-x)$ — такое число, что по определению арксинуса $-\frac{\pi}{2} \le -\phi \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin\phi = -x$. Но тогда, в силу свойств неравенств и нечетности синуса, получаем $-\frac{\pi}{2} \le -\phi \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin(-\phi) = x$. Эти выражения по определению арксинуса означают, что $-\phi = \arcsin x$. Из последнего равенства следует, что $\phi = -\arcsin x$ или, возвращаясь к исходным обозначениям, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $\downarrow$

Монотонность. Арксинус есть функция непрерывная и возрастающая на области определения

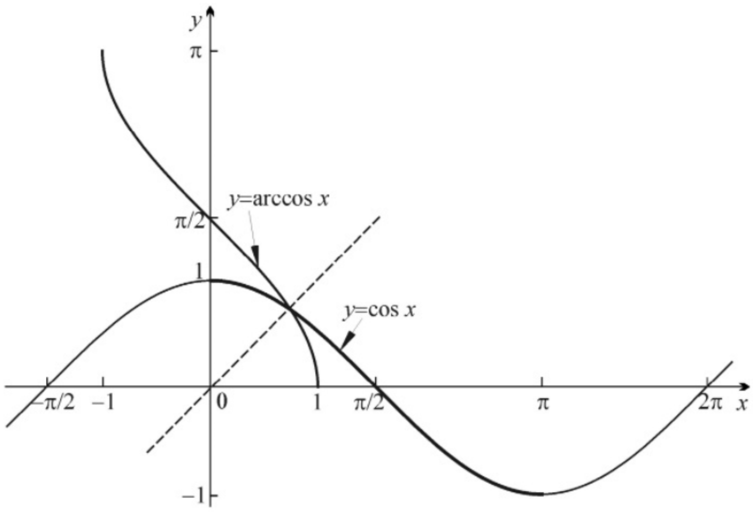
2.9.2 Арккосинус

Определение. Функция, обратная к функции $y = \cos x$, рассмотренной на промежутке $[0; \pi]$, называется арккосинусом и обозначается $x = \arccos y$, где y — аргумент, а x — значение функции

О.О. $x \in [-1; 1]$(из определения)

О.З. $y \in [0; \pi]$(из определения)

Графики



Чётность. Арккосинус — ни чётная, ни нечётная функция: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ $\uparrow$ Обозначим $\phi = \arccos(-x)$ — такое число, что по определению арккосинуса $0 \le \phi \le \pi$ и $\cos\phi = -x$. Но тогда, в силу свойств неравенств и формул приведения, получаем $0 \le \pi - \phi \le \pi$ и $x = \cos(\pi - \phi)$. Эти выражения по определению арккосинуса означают, что $\pi - \phi = \arccos x$. Из последнего равенства получаем, что $\phi = \pi - \arccos x$ или, возвращаясь к исходным обозначениям, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Монотонность. Арккосинус есть функция непрерывная на промежутке $[-1; 1]$ и монотонно убывает на нём от π до 0

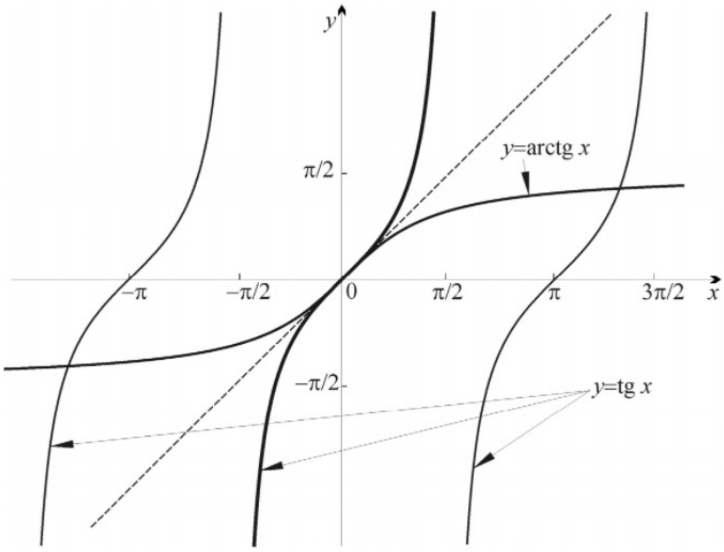
2.9.3 Арктангенс

Определение. Функция, обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассмотренной на промежутке $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, называется арктангенсом и обозначается $x = \operatorname{arctg} y$, где y — аргумент, а x — значение функции

О.О. $x \in (-\infty; +\infty)$(из определения)

О.З. $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$(из определения)

Графики



Чётность. Арктангенс — нечётная функция: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

$\uparrow$ Обозначим $\phi = \operatorname{arctg}(-x)$ — такое число, что по определению арктангенса $-\frac{\pi}{2} < -\phi < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\phi = -x$. Но тогда, в силу свойств неравенств и нечетности тангенса, получаем $-\frac{\pi}{2} < -\phi < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}(-\phi) = x$. Эти выражения по определению арктангенса означают, что $-\phi = \operatorname{arctg} x$. Из последнего равенства следует, что $\phi = -\operatorname{arctg} x$ или, возвращаясь к исходным обозначениям, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ $\downarrow$

Монотонность. Арктангенс есть функция непрерывная на всей числовой оси и монотонно возрастающая на ней от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

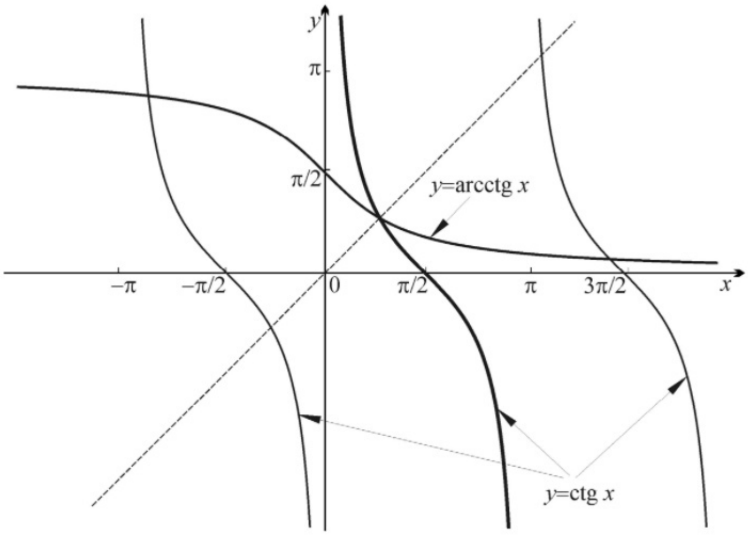
2.9.4 Арккотангенс

Определение. Функция, обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассмотренной на промежутке $(0; \pi)$, называется арккотангенсом и обозначается $x = \operatorname{arcctg} y$, где y — аргумент, а x — значение функции

О.О. $x \in (-\infty; +\infty)$(из определения)

О.З. $y \in (0; \pi)$(из определения)

Графики



Чётность. Арккотангенс — ни чётная, ни нечётная функция: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ ↑ Обозначим $\phi = \operatorname{arcctg}(-x)$ — такое число, что по определению арккотангенса $0 < \phi < \pi$ и $\operatorname{ctg}\phi = -x$. Но тогда, в силу свойств неравенств и формул приведения, получаем $0 < \pi - \phi < \pi$ и $x = \operatorname{ctg}(\pi - \phi)$. Эти выражения по определению арккотангенса означают, что $\pi - \phi = \operatorname{arcctg} x$. Из последнего равенства получаем, что $\phi = \pi - \operatorname{arcctg} x$ или, возвращаясь к исходным обозначениям, $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Монотонность. Арккотангенс есть функция непрерывная на всей числовой оси и монотонно убывающая на ней от 0 до π

3 Действительные числа

3.1 Введение. Задача измерения отрезков

$a_{\in\mathbb{N}} + x = b_{\in\mathbb{N}}$ есть алгебраическая предпосылка для возникновения целых чисел.

$\mathbb{Z} = N^{+} \cup N^{-} \cup \{0\}$

Свойства для $\mathbb{N}$ сохраняем в $\mathbb{Z}$:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $ab = ba$
4. $a(bc) = (ab)c$
5. $a(b + c) = ab + ac$

$a_{\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}x = b_{\in\mathbb{Z}}$ есть алгебраическая предпосылка для возникновения рациональных чисел Q

O——————————A
O—–E

OE — единичный отрезок

$|OA| = n|OE|$

Определение. Отрезки a и b называются соизмеримыми, если $\exists$ отрезок c:

$|a| = n|c|$
$|b| = m|c|,\ m,\ n \in \mathbb{N}$

$|a| = \frac{n}{m}|b|$

Определение. Числа вида $\frac{n}{m}$, где $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}$ назовем рациональными.

Между любыми двумя рациональными числами $\exists$ ∞ число других рациональных чисел

Например, между r_1 и r_2 существует $\frac{r_1+r_2}{2}$ и т.д.

Множество $\mathbb{Q}$ — "всюду плотно"

Существуют несоизмеримые отрезки:

Нарисуем квадрат со сторонами x и y. $x^2 + x^2 = y^2$. Если они соизмеримы, то $y = rx$. $\nexists\, r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$

От противного:

Пусть $\exists\, r = \frac{n}{m}$ — несократимая $\Rightarrow \frac{n^2}{m^2} = 2 \Rightarrow n^2 = 2m^2 \Rightarrow n = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2m^2 \Rightarrow 2k^2 = m^2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2 \Rightarrow$ дробь сократима — противоречие.

Это возникновение иррациональных чисел

3.2 Бесконечные десятичные дроби

Будем рассматривать десятичные дроби:

1. конечная десятичная дробь.
   $|OA| = 4,806 = 4_{=4\,|OE|_{=e}} + \frac{8}{10} + \frac{6}{1000}$

2. $|OA| = \frac{1}{3}$?
   $\frac{1}{3} = \frac{m}{10^n}$ $\quad 10^n = 3m$ невозможно
   Но можно измерять со все больше возрастающей точностью
   $|_0 - - - - | - - - - |_N - - - - |_{N+1} - - - - >$
   $O - - - - - - - - - - - - A$

   1. Делим OX на отрезки равные 1, т.е. рассмотрим $[n; n+1] \Rightarrow$ пусть A попала в $[N; N+1]$
   2. $|_N - - | - - |_A - - | - - |_N - - |_{N+1}$
      $[N, m_1; N, m_1 + \frac{1}{10}]$
      $[N, n_1; N, n_1 + \frac{1}{10}]$ — это тот куда попал A
      $[N, n_1n_2; N, n_1n_2 + \frac{1}{100}]$ и т.д.

$[N; N+1] = I_0$
$[N, n_1; N, n_1 + \frac{1}{10}] = I_1$
$[N, n_1n_2; N, n_1n_2 + \frac{1}{100}] = I_2$
...
$[N, n_1n_2...n_k; N, n_1n_2...n_k + \frac{1}{10^k}] = I_k$
...
Это процесс(*)!!!

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset ...$

$\alpha_k = N, n_1n_2...n_k \quad \nearrow$

$\alpha'_k = N, n_1n_2...n_k + \frac{1}{10^k} \quad \searrow$

Определение. Этот процесс (*) принято называть бесконечной десятичной дробью и обозначается $\alpha N, n_1n_2...n_k...$

Определение. Число $\alpha_k = N, n_1n_2...n_k$ — приближение α по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$

Определение. Число $\alpha'_k = N, n_1n_2...n_k + \frac{1}{10^k}$ — приближение α по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$

В общем случае процесс (*), кроме случая конечной десятичной дроби.

Например:

$$0,45$$

$$[0,4; 0,5]$$

процесс раздвоился

$$[0,44;0,45] \quad | \quad [0,45;0,46]$$

$$[0,449;0,450] \quad | \quad [0,450;0,451]$$

$$[0,4499;0,4500] \quad | \quad [0,4500;0,4501]$$

$$...$$

$$\cancel{0,44999...(9)}\text{(такие числа не рассматриваем)} \qquad 0,4500000...(0)$$

Определение. Положительным действительным числом называем всякую бесконечную десятичную дробь, не оканчивающуюся последовательностью 9-ок.

Определение. Число β назовем отрицательным действительным числом, если $\beta = -\alpha = -N, n_1 n_2 ... n_k ...$

$0 = 0,000...0...$
$\cancel{0 = -0,000...0...}$

$\alpha = [\alpha_k; \alpha'_k]$

$-\alpha = \beta = [-\alpha'_k; -\alpha_k]$

Свойства.

0. Действительные числа можно сравнивать

1.
$$\alpha, \beta > 0;\ \alpha = N, n_1 n_2 ... n_k ...;\ \beta = N, m_1 m_2 ... m_k ...$$
$$N < M \Rightarrow \alpha < \beta, N = M, N > M \Rightarrow \alpha > \beta$$
$$\Downarrow$$
$$n_1 < m_1 \Rightarrow \alpha < \beta, n_1 = m_1, n_1 > m_1 \Rightarrow \alpha > \beta$$
$$\Downarrow$$
$$...$$

2.
$$\alpha < 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha < \beta$$

3.
$$\alpha < 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta$$

3.3 Рациональные числа и бесконечные десятичные дроби

Утверждение. Всякое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби.

$\frac{2}{5} = 0,4(0)...$

$\frac{5}{11} = 0,(45)...$

$\frac{1}{7} = 0,(142857)...$

$\frac{8}{45} = 0,1(7)...$

Определение. Период - повторяющаяся группа цифр.

Определение. Длина периода - число цифр.

Утверждение. Всякое рациональное число представимо в виде <u>периодической</u> бесконечной десятичной дроби.

$\uparrow$ Достаточно доказать для правильных дробей.

$\frac{m}{n}$

Остатки при делении на n?

$0_{\text{с этим легко}}, 1, 2, 3, 4, ..., n-1$

Остался $n-1$ остаток

Не более чем через $n-1$ чисел возникает второй раз остаток, который уже был. Далее остатки будут повторяться.

<u>Итог:</u> Иррациональные числа - непериодические бесконечные десятичные дроби.

3.4 Разделяющее число числовых множеств

Некоторую совокупность действительных чисел назовем числовым множеством.

Само множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Другими примерами числовых множеств могут служить:

$\mathbb{R}+$ —– множество положительных действительных чисел.

$\mathbb{Q}-$ —– множество отрицательных рациональных чисел.

$(-\infty; a]$ —– множество действительных чисел $x : x \leq a$.

Определение. Числовое множество X называется ограниченным, если $\exists\ M \in \mathbb{R} : \forall\ x \in X : |x| \leq M$.

Определение. Будем говорить, что множество B лежит справа от множества A, если $\forall\ x \in A$ и $\forall\ y \in B : x \leq y \quad A, B \subset \mathbb{R}$.

Определение. Число $c \in \mathbb{R}$ называется разделяющим числом для множества A и $B \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ a \in A$ и $\forall\ b \in B : a \leq c \leq b$.

Из определения следует, что если для множеств A и B существует разделяющее число, то B лежит справа от множества A. Верно и обратное утверждение.

Теорема. Пусть A и B два числовых множества. Причем множество B лежит справа от множества B. Тогда $\exists$ по крайней мере одно число c, разделяющее эти множества.

$\uparrow$ Рассмотрим единичные отрезки вида $[n, n+1]$.

Для множества B рассмотрим самый левый из отрезков $[n, n+1]$, содержащий элементы этого множества (если самый маленький b попал на границу, то берем «достаточный отрезок»). Обозначим этот отрезок $[N, N+1]$. Для простоты будем считать, что $N \geq 0$.

Для множества A рассмотрим самый правый из отрезков $[n, n+1]$. Пусть это $[M, M+1]$.

1. $M > N$ —– невозможно (так как тогда есть $a > b$);
2. $M < N$ —– тогда в качестве разделяющего числа можно взять, например, $c = N. \forall\ a \in A, \forall\ b \in B a \leq c \leq b$.
3. $M = N \Rightarrow$

Разделим $[N, N+1]$ на 10 частей $\Rightarrow [N + \frac{n_1}{10}, N + \frac{n_1+1}{10}], n_1 = 0, 1, 2, ..., 9$.

Снова выбираем $N_1 : [N + \frac{N_1}{10}, N + \frac{N_1+1}{10}]$ —– самый левый (с замечанием) из таких отрезков, содержащий элементы из B, и $M_1 : [N + \frac{M_1}{10}, N + \frac{M_1+1}{10}]$ —– самый правый из таких отрезков, содержащий элементы из A.

1. $M_1 > N_1$ —– невозможно (так как тогда есть $a > b$);
2. $M_1 < N_1$ —– тогда в качестве разделяющего числа можно взять, например, $c = N, N_1. \forall\ a \in A, \forall\ b \in B a \leq c \leq b$.
3. $M_1 = N_1 \Rightarrow$

Полученный $[N + \frac{N_1}{10}, N + \frac{N_1+1}{10}] = [N, N_1; N, N1 + 1/10]$ снова делим на 10 частей. И снова выбираем самый левый промежуток, содержащий элементы из B, и самый правый, содержащий элементы из A. И т.д.

В итоге, мы либо найдем c, либо в самом «тяжелом случае» построим систему вложенных промежутков:

$[N, N+1] \supset [N, N_1; N, N_1 + \frac{1}{10}] \supset [N, N_1N_2; N, N_1N_2 + \frac{1}{100}] \supset ...$

Возьмем в качестве c б.д.д., отвечающую этому процессу: $c = N, N_1N_2...N_k...$

Это c и будет разделяющим числом.

Действительно, покажем, что $\forall\ b \in Bc \leq b$.

От противного. Если существует $b < c$, то из упорядоченности действительных чисел при большом l точки b и c попали бы в разные отрезки длины $\frac{1}{10^l}$, и выбранный малый промежуток не был бы самым левым для множества B. $\Rightarrow c \leq b$

Аналогично $\forall\ a \in Aa \leq c$.

Остались неосвещенными моменты: c оканчивается последовательностью 9-ок, для $N < 0$. $\downarrow$

3.5 Теорема о разноцветных отрезках (единственность разделяющего числа)

Определение. Пусть множество B лежит справа от A. Назовем отрезок $[a; b]$ разноцветным, если $a \in A, b \in B$.

Определение. Будем говорить, что существует система сколь угодно малых разноцветных отрезков, если $\forall\ \varepsilon > 0$ (каким бы маленьким мы его не взяли) $\exists$ разноцветные отрезки $[a; b]$ и $[\alpha; \beta]$ ($[\alpha; \beta] \supset [a; b], \alpha, \beta$ — рациональные числа): $\beta - \alpha < \varepsilon$.

Замечание.

1. Так как $\forall\ \varepsilon$, то таких отрезков сколь угодно много (система).
2. Координаты α, β — рациональные числа нужны нам, так как действия с действительными числами ещё не вводились. Мы не знаем, что есть $a - b$. Если бы знали, то просто писали бы: $\exists$ разноцветные отрезки $[a; b] : b - a < \varepsilon$.

Теорема. Пусть множество B лежит справа от A. Для того, чтобы A и B разделялись лишь одним числом необходимо и достаточно, чтобы $\exists$ система сколь угодно малых разноцветных отрезков.

$\uparrow$ Необходимость "$\Leftarrow$". Пусть существует система сколь угодно малых разноцветных отрезков, покажем, что $\exists! c$.

От противного. Пусть $\exists$ два разделяющих числа c_1 и c_2 (для определенности $c_1 < c_2$). При достаточно большом n числа c_1 и c_2 принадлежат отрезкам деления числовой оси длины $\frac{1}{10^n}$, не имеющими общих концов (это следует из упорядоченности действительных чисел). Т.е. между c_1 и c_2 существует хотя бы один отрезок $[\frac{m}{10^n}; \frac{m+1}{10^n}] : c_1 < \frac{m}{10^n} < \frac{m+1}{10^n} < c_2$.

Но тогда, $\forall\ a \in A, b \in Ba \leq c_1 < c_2 \leq b$, а потому $d =$(длина любого отрезка с рациональными концами, содержащего $[a; b]$) $> \frac{1}{10^n}$. Противоречие с существованием системы сколь угодно малых разноцветных отрезков.

Достаточность "$\Rightarrow$". Пусть $\exists! c$, покажем существование системы сколь угодно малых разноцветных отрезков.

c — единственное разделяющее число. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмём $[\alpha, \beta]$ с рациональными концами такой, что $\alpha < c < \beta$. Например, если c_n — приближение c по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$, то можем рассмотреть целую систему таких промежутков: $[\alpha_n; \beta_n] = [c_n - \frac{1}{10^n}; c_n + \frac{1}{10^n}]$.

Покажем, что на любом отрезке такого вида есть, хотя бы одно число из A. От противного: пусть нет, тогда $\forall\ a \in Aa < \alpha_n$, при этом $\forall\ b \in Bb \geq c$. Тогда все числа из $[\alpha_n; c]$ разделяют A и B. Аналогично, можно показать, что на любом отрезке такого вида есть, хотя бы одно число из B. Значит любой такой $[\alpha_n; \beta_n] \supset [a_n; b_n]$ — разноцветный.

$\beta - \alpha = \frac{2}{10^n} < \{10^n = (1+9)^n > 9n\} < \frac{2}{9n} < \varepsilon_k < \varepsilon$, где $N \geq [\frac{2}{9\varepsilon_k}] + 1$. $\downarrow$

Пример. Покажем, что отрезки $[1; 4][4; 8]$ разделяются лишь числом 4.

Заметим, что отрезки $[4 - \frac{1}{n}; 4 + \frac{1}{n}]$ — разноцветные. Их длина $d = \frac{2}{n}$ путем выбора n может быть сделана меньше любого наперед заданного действительного ε. Если $\frac{2}{n} < \varepsilon_k < \varepsilon$, то $n \geq [\frac{2}{\varepsilon_k}] + 1$.

Пример. Найти разделяющее число множеств $A = \{\frac{n^2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{\frac{n^2+2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Заметим, что $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2+1-1}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1} < 1, \frac{n^2+2}{n^2+1} = \frac{n^2+1+1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{n^2+1} > 1$. Т.е. множество B лежит справа от A. Докажем, что 1 — единственное разделяющее число этих множеств. Отрезки $[1 - \frac{1}{n^2+1}; 1 + \frac{1}{n^2+1}]$ разноцветные, их длина $d = \frac{2}{n^2+1} < \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon_k < \varepsilon \Rightarrow n \geq [\frac{2}{\varepsilon_k}] + 1$.

3.6 Арифметические операции над действительными числами

Сложение

Пусть заданы $x, y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два множества:

$A = \{p + q,$ где $p \in \mathbb{Q}, p \leq x, q \in \mathbb{Q}, q \leq y\}$,

$B = \{r + s,$ где $r \in \mathbb{Q}, r \geq x, s \in \mathbb{Q}, s \geq y\}$.

Так как $p \leq x \leq r$, $q \leq y \leq s \Rightarrow p + q \leq r + s$, значит множество B лежит справа от $A \Rightarrow$ существует по крайней мере одно разделяющее число для этих множеств.

Утверждение. Покажем, что разделяющее число существует единственное.

Для этого достаточно показать существование системы сколь угодно малых разноцветных отрезков.

Пусть десятичное приближение по недостатку с точностью $\frac{1}{10^n}$ для x — это $\frac{l}{10^n}$, а для y — $\frac{m}{10^n}$. Тогда $\frac{l}{10^n} \leq x < \frac{l+1}{10^n}$, $\frac{m}{10^n} \leq x < \frac{m+1}{10^n}$. Тогда $\frac{l}{10^n} + \frac{m}{10^n} \in A$, а $\frac{l+1}{10^n} + \frac{m+1}{10^n} \in B$. Но $d = (\frac{l+1}{10^n} + \frac{m+1}{10^n}) - (\frac{l}{10^n} + \frac{m}{10^n}) = \frac{2}{10^n} < \frac{2}{9n} < \varepsilon_k < \varepsilon$. Т.е. существуют сколь угодно маленькие разноцветные отрезки.

Это единственное число, разделяющее множества A и B, называют суммой $x + y$.

Определение. Суммой действительных чисел x и y называют такое число $x + y$, которое является единственным разделяющим числом для сумм $p + q(p \leq x, q \leq y, p, q \in \mathbb{Q})$ и сумм $r + s(r \geq x, s \geq y, r, s \in \mathbb{Q})$.

Разность

Определение. Разностью действительных чисел x и y назовем сумму x и $(-y)$.

Умножение

(I)

$x, y > 0$

$A = \{pq, p, q \in \mathbb{Q}^+ : p \leq x; q \leq y\}(*)$

$B = \{rs, r, s \in \mathbb{Q}^+ : x \leq r; y \leq s\}(*)$

Легко понять, что $pq \leq rs \Rightarrow B$ лежит справа от $A \Rightarrow \exists$ хотя бы одно разделяющее число c.

Утверждение. $\exists! c$ для A и B (*)

(II)

Если x, y не > 0, то произведение вводится в соответствии с правилом знаков.

$(-x)y = x(-y) = -xy$

и

$(-x)(-y) = xy$

Свойства (доказываются из свойств рациональных чисел):

1. $xy = yx$
2. $x(yz) = (xy)z$
3. $x(y + z) = xy + xz$

Остается в силе:

$0 * x = x * 0 = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

$1 * x = x * 1 = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$

Деление

$x > 0$ Поймем, что есть $\frac{1}{x}$

$A = \{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{Q}^+ : p \geq x\}$ (**)

$B = \{\frac{1}{q}, q \in \mathbb{Q}^+ : q \leq x\}$ (**)

$q \leq p \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \Rightarrow$ множество B лежит справа от A.

$\Downarrow$

$\exists$ хотя бы одно разделюящее число.

Утверждение. $\exists! c$ для A и B (**)

Если $x = 0 : \nexists\ \frac{1}{x}$

Если $x < 0 : \frac{1}{x} = -\frac{1}{-x}$

$x, y \in \mathbb{R} : \quad y \neq 0 \quad \frac{x}{y} = x * (\frac{1}{y})$

Свойство:

$x * \frac{1}{x} = 1 \quad \forall x \neq 0$

Множество $\mathbb{R}$ замкнуто относительно четырех арифметических операций.

$\mathbb{R}$ — числовое поле.

3.7 Превращение бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные

Пример.

$0,(54)$

$x = 0,(54)$

$100x = 54,(54)$

$99x = 54$

$x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

Пример.

$0,(351)$

$x = 0,(351)$

$1000x = 351,(351)$

$999x = 351$

$x = \frac{351}{999}$

Пример.

$0,47(612)$

$x = 0,47(612)$

$x * 10^5 = 47612,(612)$

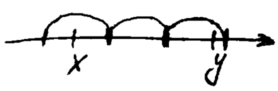
$x * 10^2 = 47,(612)$

$x = \frac{47612-47}{10^2*999}$

3.8 Рациональное и иррациональное число. Плотность этих множеств в R

Утверждение. Для $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \exists$ отрезок с рациональными концами: он лежит между x и y. (***)

$\uparrow$



$x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$\exists$ разбиение отрезками длины $\frac{1}{10^n}$, что x и y лежат в отрезках такой длины и не имещих общих концов: это отрезки вида $[\underset{=r\in\mathbb{Q}}{\frac{m}{10^n}}; \frac{m+1}{10^n}] = [r, r+\frac{1}{10^n}] \downarrow$

Утверждение. Между любыми $x, y \in \mathbb{R}, x \subset y \exists\ \infty$ число рациональных чисел.

$\uparrow$

Уже в утверждении (***) показали, что $\exists$ между x и y $[r_{\in\mathbb{Q}}, r + \frac{1}{10^n}{}_{\in\mathbb{Q}}] = [r_1, r_2] \Rightarrow r_1 < \frac{r_1+r_2=r_3}{2} < r_2$

$r_1 < \frac{r_1+r_3}{2} < r_3 < \frac{r_3+r_2}{2} < r_2$ и т.д. $\downarrow$

Утверждение. Между x и $y \in \mathbb{R} x < y \exists\ \infty$ число иррациональных чисел.

$\uparrow$

Покажем, что между любыми двумя рациональными числами $\exists$ хотя бы одно иррациональное.

Уже между x и $y \exists\ [r, r+\frac{1}{10^m}] = [r_1, r_2]$

$r_1 = \alpha, \alpha_1\alpha_2...\alpha_m \quad r_2 = r_1 + \frac{1}{10^m}$

Легко понять, что $\beta = \alpha, \alpha_1...\alpha_m 00100111$ (допишем заведомо непериодический конец) $\downarrow$

Определение. Числовое множество A эквивалентно множеству B, если $\exists$ взаимнооднозначное отображение A в B.

Определение. Числовое множество A называется счетным, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$. (т.е. все элементы A можно пронумеровать).

Утверждение. Множество рациональных чисел счётно.

$\uparrow$

Способ 1 $\frac{p}{q}$ — рациональное, если $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

$s = |p| + q$ — высота рационального числа.

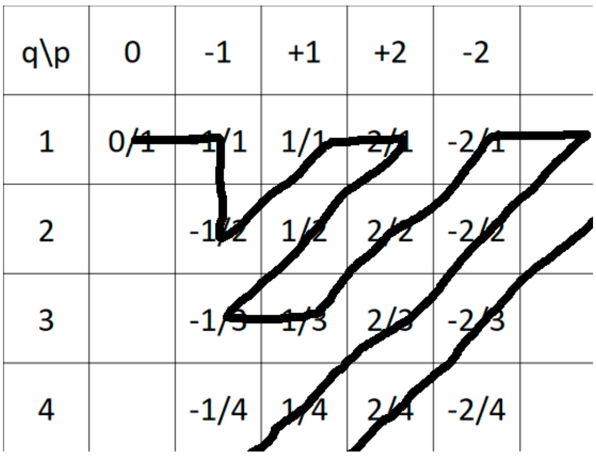
$s = 1 \quad \frac{0}{1} \quad$ 1ист

$s = 2 \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{1}\cancel{\frac{0}{2}} \quad$ 3 ист

$s = 3 \quad \frac{\pm 2}{1}\frac{\pm 1}{2}\cancel{\frac{0}{3}} \quad$ 5 ист

s : не более $2(s-1)+1 = 2s-1$ ист — конечное число и т.д. все занумерую.

Способ 2 — - линия, вдоль которой нумерую, вычеркивая повторяющиеся.



q\p	0	-1	+1	+2	-2
1	0/1	-1/1	1/1	2/1	-2/1
2		-1/2	1/2	2/2	-2/2
3		-1/3	1/3	2/3	-2/3
4		-1/4	1/4	2/4	-2/4

$\downarrow$

Утверждение. Множество $\mathbb{R}$ — несчетное множество.

$\uparrow$

Остается пологать, что (0; 1) — несчетное множество.

От противного. Пусть счетное, тогда нумерую все элементы.

Обозначим эту группу (****)

$r_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...$

$r_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...$

$r_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}...$

$r_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}...$

и т.д.

$\beta = 0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$

$\beta_1 \neq a_{11} \neq 9 \Rightarrow \beta \neq r_1$

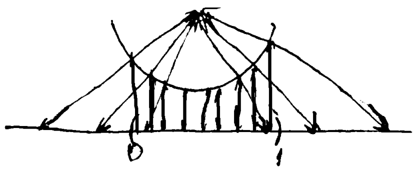
$\beta_2 \neq a_{22} \neq 9 \Rightarrow \beta \neq r_2$

$\beta_3 \neq a_{33} \neq 9 \Rightarrow \beta \neq r_3$

и т.д.

$\beta \neq r_n, n \in \mathbb{N}$

т.е. $\beta \notin (****)$ — противоречие со счетностью $(0, 1) \downarrow$



$(0, 1)$ эквивалентно $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_{\text{несчет.}} = \mathbb{Q}_{\text{счет.}} \cup \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ несчетная.

4 Числовые последовательности и их пределы

4.1 Числовые последовательности и их свойства

Определение. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ поставить в соответствие единственное число $x_n \in \mathbb{R}$, тогда x_n — числовая послеельность. x_n — отображение, заданное на множестве $\mathbb{N}$.

4.1.1 Способы задания последовательностей

1. Формула n-го члена
2. Рекуррентная формула
3. Словесное задание

4.2 Понятие монотонности и ограниченности последовательности

Определение. Числовая последовательность называется

- возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$
- убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > x_{n+1}$
- неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq x_{n+1}$
- невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq x_{n+1}$

Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists M\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leq M$; ограниченна снизу, если $\exists m\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq m$; ограниченна снизу, если $\exists M_1\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq M_1$.

4.3 Арифметическая и геометрическая прогрессии

4.3.1 Арифметическая прогрессия

Определение. Арифметической прогрессией конечной или бесконечной будем называть числовую последовательность, у которой каждый её член, начиная со второго, есть сумма предыдущего её члена и некоторого фиксированного числа
$x_{n+1} = x_n + d$; x_1 — задан, d — разность арифметической прогрессии

Свойства

1. Три числа x_{n-1}, x_n, x_{n+1} являются последовательными членами а.п. $\Leftrightarrow x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}$
2. $x_n = x_{n-1} + d = x_{n-2} + 2d = ... = x_1 + (n-1) * d$, $x_n = x_1 + (n-1) * d$, $x_n = x_k + (n-k) * d$.
3. $x_n = x_{n-k} + k * d \ k \in \mathbb{N}$
   $x_{n+k} = x_n + k * d$
   $d = \frac{x_n - x_{n-k}}{k}$
   $d = \frac{x_{n+k} - x_n}{k} \Leftrightarrow x_n - x_{n-k} = x_{n+k} - x_n$, $x_n = \frac{x_{n-k}+x_{n+k}}{2}$
4. $x_k + x_l = x_m + x_n$, если $k + l = m + n$
   Пусть k — самый маленький номер
   $x_l = x_k + (l-k)d$
   $x_m = x_k + (m-k)d$
   $x_n = x_k + (n-k)d$
   левая часть $= x_k + x_l = 2x_k + (l-k)d$
   правая часть $= x_m + x_n = 2x_k + (m+n-2k)d = 2x_k + (l-k)d$
5. $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$
   $+$
   $S_n = x_n + x_{n-1} + ... + x_2 + x_1$
   $\Downarrow$
   $2S_n = (x_1 + x_n)n$
   $S_n = \frac{(x_1+x_n)n}{2}$

4.3.2 Геометрическая прогрессия

Определение. Геометрической прогрессией конечной или бесконечной назовём числовую последовательнность, у которой каждый член, начиная со второго, равен произведению предыдущего её члена на фиксированное для данной последовательности число $q \neq 0$
$x_{n+1} = x_n * q$; x_1 — задан, $x_1 \neq 0$, q — множитель геометрической прогрессии

Свойства

1. $\begin{matrix} x_{n+1} = x_n * q \\ x_n = x_{n-1} * q \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} q = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \\ q = \dfrac{x_n}{x_{n-1}} \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \Leftrightarrow x_n^2 = x_{n-1} * x_{n+1}$

   Три последовательных числа $x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1}$ являются членами одной геометрической прогрессии(в указанном порядке) $\Leftrightarrow x_n^2 = x_{n-1} * x_{n+1}$

   Замечание. Если все $x_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, тогда $x_n = \sqrt{x_{n-1} * x_{n+1}}$
2. Получим формулу x_n.
   $x_n = x_{n-1} * q = x_n * q^2 = ... = x_1 * q^{n-1}$
   $x_n = x_1 * q^{n-1}$
   $x_n = x_k * q^{n-k}$
3. $\begin{matrix} x_n = x_{n-k} * q^k \\ x_{n+k} = x_n * q^k \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} q^k = \dfrac{x_n}{x_{n-k}} \\ q^k = \dfrac{x_{n+k}}{x_n} \end{matrix} \Leftrightarrow x_n^2 = x_{n-k} * x_{n+k}$
4. $x_k * x_l = x_m * x_n$, если $k + l = m + n$

Пусть k — самый маленький номер
$x_l = x_k q^{l-k}$
$x_m = x_k q^{m-k}$
$x_n = x_k q^{n-k}$
левая часть $= x_k x_l = x_k^2 q^{l-k}$
правая часть $= x_m x_n = x_k^2 q^{m+n-2k} = x_n^2 q^{l+k-2k} = x_n^2 q^{l-k}$

5. $$-\begin{array}{l} S_n = x_1 + \cancel{x_1q} + \cancel{x_1q^2} + ... + \cancel{x_1q^{n-1}} \\ qS_n = \cancel{x_1q} + \cancel{x_1q^2} + \cancel{x_1q^3} + ... + x_1q^n \end{array} \Rightarrow (1-q)S_n = x_1 - x_1q^n$$

   Если $1 - q \neq 0 \Rightarrow S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}$
   Если $1 - q = 0 \Rightarrow q = 1,\ S_n = nx_1$

6. (a) Если $q > 1$, то все x_n одного знака, $\{x_n\}$ возрастает по абсолютной величине
   (b) Если $0 < q < 1$, то все x_n одного знака, $\{x_n\}$ убывает по абсолютной величине
   (c) Если $q < -1$, то знаки последовательности чередуются, $\{x_n\}$ возрастает по абсолютной величине
   (d) Если $-1 < q < 0$, то знаки последовательности чередуются, $\{x_n\}$ убывает по абсолютной величине
   (e) Если $q = 1 \rightarrow$ постоянна, $\{x_n\} = x_1$
   $q = -1 \rightarrow x_1, -x_1, x_1, -x_1, ...$

4.4 Определение предела числовой последовательности

Определение. Будем говорить, что x_n сходится к $a(\lim_{n\to\infty} x_n = a)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$

4.5 Геометрический смысл определения предела

а — предел x_n, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$O_a = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ — ε-окрестность т. а

4.6 Теорема о единственности существующего предела

Теорема 1. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $a\exists!$

$\uparrow$ От противного
Пусть $\lim_{n\to} x_n = a_1$ и $\lim_{n\to} x_n = a_2,\ a_1 < a_2$.

Геометрический смысл:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_1 : n > N_1,\ a_1 - \varepsilon < x_n < a_1 + \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_2 : n > N_2,\ a_2 - \varepsilon < x_n < a_2 + \varepsilon$
$n > \max(N_1, N_2)$

Пусть $\varepsilon < \frac{a_2 - a_1}{2} \Rightarrow U_\varepsilon(a_1) \not\cap U_\varepsilon(a_2)$, но такого быть не может, т.к. для $n > \max(N_1, N_2)$ $\begin{array}{l} x_n \in U_\varepsilon(a_1) \text{ и} \\ x_n \in U_\varepsilon(a_2) \end{array}$ — противоречие $\downarrow$

4.7 Теорема об ограниченности последовательности, имеющей предел

Теорема 2. Если $\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = a$, то x_n — ограничена

$\uparrow x_n$ — ограничена($\forall n\ \exists\ M,\ |x_n| < M$)?

Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$
$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Возьмём $\varepsilon = \varepsilon_*$ такое, чтобы все члены x_n удовлетворяли $a - \varepsilon_* < x_n < a + \varepsilon_*$,
тогда $M = \max\left(|a - \varepsilon_*|, |a + \varepsilon_*|\right)$, т.е. x_n — ограничена $\downarrow$

4.8 Теорема о сохранении знака (отделении от нуля)

Теорема 3. Пусть x_n — сходится, т.е. $\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \ a \neq 0$, тогда $\exists\ N_1 : \forall n > N,\ |x_n| > \frac{|a|}{2}\ (*)$

В частности $\begin{array}{l} a > 0 \quad x_n > \dfrac{a}{2} > 0\ (1) \\ a < 0 \quad x_n < \dfrac{a}{2} < 0\ (2) \end{array}$

$\uparrow$ Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 \Rightarrow a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$

1. Если $a > 0 \Rightarrow 0 < \frac{a}{2} < x_n < \frac{3a}{2}$. $N_1 = N$
2. Если $a < 0 \Rightarrow \frac{3a}{2} < x_n < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0$. $N_1 = N$

В общем случае $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{|a| - |b| \leq |a - b|}$$
$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a|\ (= |a - b|) + |a|$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{|b| - |a| \leq |a - b|}$$
$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|}$$

$\big||a| - |x_n|\big| \leq |x_n - a| < \frac{|a|}{2}$
$\frac{|a|}{2} < |x_n|\ \downarrow$

4.9 Теорема о пределе последовательности, полученной сдвигом нумерации

Теорема 4. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

$\uparrow$ Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$

$\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a| < \varepsilon$

Получилось $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ \big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$ — определение $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|\ \downarrow$

4.10 Теорема о предельном переходе в неравенствах

Теорема 5. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$; $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ и $\forall n\ x_n \le y_n \Rightarrow a \le b$

$\uparrow$ Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 : \forall n > N_1,\ a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \quad \exists\ N_2 : \forall n > N_2,\ b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon$

От противного. Пусть $b < a$. Возьмём $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$; и $n > \max(N_1, N_2)$.

Тогда $y_n \le b+\varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < x_n$ — противоречие $\downarrow$

Замечание. Если $\forall n\ x_n < y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \le b$

Следствие. Если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ \forall n\ x_n \in [c,\ d] \Rightarrow a \in [c,\ d]$

$\uparrow$ Пусть $c_n = c,\ d_n = d\ \forall n\ c_n \le x_n \le d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \le a \le d \Rightarrow a \in [c,\ d]\ \downarrow$

4.11 Теорема о двух милиционерах

Теорема 6. Пусть $\begin{matrix} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \end{matrix}$ и $\forall n\ x_n \le z_n \le y_n$, тогда $\exists\ \lim_{n\to\infty} z_n = a$

$\uparrow$ Дано: $\forall \varepsilon > 0 \begin{matrix} \exists\ N_1(\varepsilon) : \forall n > N_1,\ a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \\ \exists\ N_2(\varepsilon) : \forall n > N_2,\ a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon \end{matrix}$

$\forall n > \max(N_1, N_2),\ a-\varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a+\varepsilon$, т.е. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ \downarrow$

Теорема 7. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = a$

$\uparrow$ Дано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$

Надо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 : \forall n > N_1,\ |x_{n+k} - a| < \varepsilon$

$n' = n + k\ n' > N$ всё хорошо
$n + k > N$
$n > N - k$, т.е. $N_1 = N - k\ \downarrow$

4.12 Теорема о сумме, разности, произведении и частном пределов

Теорема 8. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

1. $\lim_{n\to\infty} x_n \pm y_n = a \pm b$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = a * b$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

$\uparrow$ Дано: $\begin{matrix} \forall \varepsilon_1 > 0\ \exists\ N_1 : \forall n > N_1,\ |x_n - a| < \varepsilon_1 \\ \forall \varepsilon_2 > 0\ \exists\ N_2 : \forall n > N_2,\ |y_n - a| < \varepsilon_2 \end{matrix}$

1. Надо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) : \forall n > N,\ \big|x_n + y_n - (a+b)\big| < \varepsilon$

   $\big|x_n + y_n - (a+b)\big| = |x_n - a + y_n - b| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$

   $\varepsilon \to \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to N_1,\ N_2 \to N = \max(N_1, N_2)$

2. Надо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) : \forall n > N,\ |x_n y_n - a * b| < \varepsilon$

   $|x_n y_n - a * b| = |x_n y_n - a * y_n + a * y_n - a * b| \le |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \underset{\exists\ M : |y_n| < M}{<} |y_n|\,\varepsilon_1 + |a|\,\varepsilon_2 < M\varepsilon_1 + |a|\,\varepsilon_2 = \varepsilon$
   $\varepsilon \to \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M},\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|a|} \to N_1,\ N_2 \to N = \max(N_1, N_2)$

3. Надо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$

   $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|x_n b - y_n a|}{|b\|y_n|} = \frac{|x_n b - a*b + a*b - y_n a|}{|b\|y_n|} \le \frac{|b\|x_n - a|}{|b\|y_n|} + \frac{|a\|y_n - b|}{|b\|y_n|} < \frac{\varepsilon_1}{y_n} + \frac{|a|}{|b\|y_n|}\varepsilon_2$

По теореме 3 $\exists\ N_3 : \forall n > N_3,\ |y_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$

$\frac{\varepsilon_1}{y_n} + \frac{|a|}{|b||y_n|}\varepsilon_2 < \frac{2\varepsilon_1}{b} + \frac{2|a|}{|b|^2}\varepsilon_2 = \varepsilon$
$N = \max(N_1, N_2, N_3)\ \downarrow$

4.13 Бесконечно малые последовательности и их свойства

Определение. Числовая последовательность α_n называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |\alpha_n| < \varepsilon$

Свойства

1. Сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая
2. Разность двух бесконечно малых — бесконечно малая ч.п.
3. α_n — б.м.; β_n ограничена $\Rightarrow \alpha_n\beta_n$ — б.м.

   $\uparrow$ Надо: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |\alpha_n\beta_n| < \varepsilon$

   Дано: $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists\ N_1 : \forall n > N_1,\ |\alpha_n| < \varepsilon_1;\ \forall n\ |\beta_n| > M$

   $|\alpha_n\beta_n| = |\alpha_n||\beta_n| < \varepsilon_1 M = \varepsilon$
   $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M},\ N = N_1\ \downarrow$
4. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, где α_n — б.м.

   $\uparrow\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0 \Rightarrow \alpha = x_n - a$ — б.м. $\Rightarrow x_n = a + \alpha_n$, где α_n — б.м.

   "$\Leftarrow$" $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — б.м. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(a + \alpha_n) = a\ \downarrow$

4.14 Пределы q^n, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$

4.14.1 Предел q^n

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$

1. Если $q = 0$, то очевидно
2. Если $q \neq 0$

   $\uparrow$ Надо: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |q^n| < \varepsilon$
   $q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \alpha,\ \alpha > 0$
   $\frac{1}{|q|} = (1+\alpha)^n > \alpha n$
   $\Downarrow$
   $|q|^n < \frac{1}{\alpha n}$

   $|q^n| = |q|^n < \frac{1}{\alpha(>0)n} < \varepsilon$
   $n > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$

   $N = [\frac{1}{\alpha\varepsilon}] + 1\ \downarrow$

4.14.2 Предел $\sqrt[n]{a}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

1. Если $a = 1$, то очевидно
2. Если $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[a]{1} = 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n,\ \alpha_n > 0.$

   $a = (1+\alpha_n)^n > \alpha_n n \Rightarrow \alpha_n < \frac{a}{n}$
   $0(\to 0) < \alpha_n < \frac{a}{n}(\to 0)$, по Т. о 2х милиционерах $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
3. $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$

   $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$

4.14.3 Предел $\sqrt[n]{n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n,\ \alpha_n > 0$

$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + \alpha_n n + c_n\alpha_n^2 + ... = 1 + \alpha_n n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + ... \underset{\text{“выбрасываем” все слагаемые, кроме } \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2}{>}$
$\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \Rightarrow 0 < \alpha_n^2 < \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0(\to 0) < \alpha_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}(\to 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по Т. о 2х милиционерах $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ \downarrow$

4.15 Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$S = b + bq + bq^2 + ... + bq^n + ...$
$|q| < 1$

$S_n = b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b}{1-q}$

4.16 Бесконечно большие и расходящиеся последовательности и их свойства

Определение. Если x_n не является сходящейся, то она называется расходящейся

Определение. Числовая последовательность x_n называется бесконечно большой, если $\forall E > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |x_n| > E$

Определение. $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty;\ \forall E > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ x_n > E$

Определение. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty;\ \forall E > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ x_n < -E$

Теорема. Если α_n — б.м. $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_n}$ — б.б.

$\uparrow\ \alpha_n$ — б.м.
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_1 : \forall n > N_1,\ |\alpha_n| < \varepsilon$

$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ — б.б.
$\forall E > 0\ \exists\ N_2 : \forall n > N_2,\ \frac{1}{|\alpha_n|} > E$

$\text{“}\Rightarrow\text{”}\frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E;\ \varepsilon = \frac{1}{E}$
$E \to \varepsilon \to N_1 \to N_2 = N_1$

$\text{“}\Leftarrow\text{”}|\alpha_n| > \frac{1}{E} = \varepsilon$
$\varepsilon \to E = \frac{1}{\varepsilon} \to N_2 \to N_1 = N_2\ \downarrow$

4.16.1 Свойства бесконечно больших числовых последовательностей

1. Если предел последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена снизу, т.е. $b_n \geq b\ \forall n$, тогда $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
2. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена $M : b_n \geq M > 0,\ \forall n\ \lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = +\infty$
3. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, а b_n ограничена, т.е. $0 < b_n < M(n \to \infty)\ \forall n$, то
$$(\frac{+\infty}{c > 0}) \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$
4. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, а b_n ограничена; $|b_n| \leq M\ \forall n$,
$$(\frac{M}{\infty}) \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

.

4.17 Неопределенности (понятие)

1. $\infty - \infty$
   $2n - n = n \to +\infty$
   $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$
2. $\frac{\infty}{\infty}$

   $n^2,\ n,\ 2n$

   $\frac{n^2}{n} \to +\infty;\ \frac{n}{n^2} \to 0$
3. $\infty * 0$

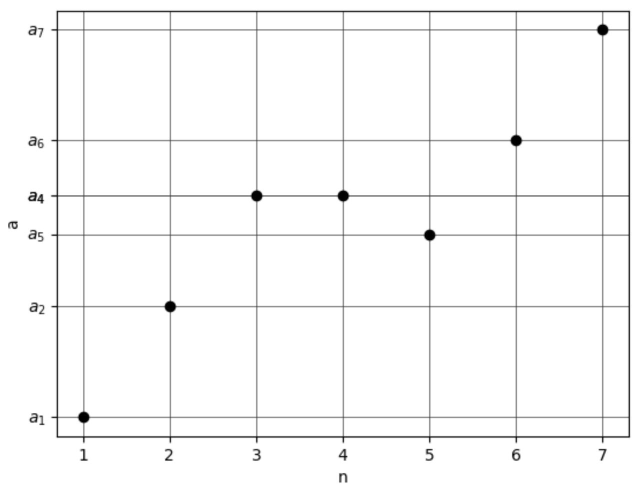
4.18 Стабилизирующиеся последовательности

Определение. Числовая последовательность целых чисел называется стабилизирующейся к ξ, если $\exists\ n_0$: $\forall n > n_0\ a_n = \xi,\ a_n \rightrightarrows \xi$

4.18.1 Лемма 1

Если $\{a_n\}$ — последовательность целых неотрицательных чисел, неубывающая и ограниченная сверху, т.е. $a_n \leq M\ \forall n$, то $\exists\ \xi : a_n \rightrightarrows \xi$ и $\xi \leq M$.

$\uparrow$



хотя число членов последовательности ∞, но между a_1 (самый маленький член последовательности т.к. $a_n \searrow$) и M есть только конечное число целых чисел, $\Rightarrow$ только конечно число значений a_n
Обозначним наибольшее значение принимаемое a_n, ч/з ξ, т.е. $\exists n_0 : a_{n_0} = \xi \leq M$, тогда $\forall n > n_0\ a_n = \xi$, т.к. $a_n \downarrow$

Определение. Будем говорить, что последовательность б.д.д. $(> 0)\{a_n\} \rightrightarrows$
$a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...$ $(a_n \to a)$, если $\forall k\ \alpha_{n_k} \rightrightarrows \gamma_k$

4.18.2 Лемма 2

Если $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных б.д.д. (*) является неубывающей и ограниченной (т.е. $\exists M$ (б.д.д., не оканчивающася последовательностью 9-ок)): $\forall\ n\ a_n \leq M$), то $\exists\ a$:

1. $a_n \rightrightarrows\ a$
2. $a_n \leq a \leq M$

$\uparrow$ В табл. (*) смотрим на первый столбец

α_{10}
α_{20}

α_{30}
...
α_{n0}

Это последовательность неубывающих целых неотр. чисел и ограниченных сверху M по **Л1**
$\exists$ номер $N_0 \quad \forall\ n > N_0$
$\alpha_{n_0} \rightrightarrows\ \gamma_0$

α_{10}
α_{20}
α_{30}
...
$\alpha_{N_0 0} = \gamma_0$
γ_0
γ_0

Пусть $n > N_1$, тогда смотрим на $\{\alpha_{n1}\}$

α_{n1} — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой; неубывающая(т.к. $a_n \searrow$ и 0-й столбец уже застабилиз.) $\Rightarrow\ \exists\ N_1\ \alpha_{n_1} \rightrightarrows\ \gamma_1\ \forall n > N_1 \geq N_0$

Пусть $n > N_1 \geq N_0$ и смотрим $\{\alpha_{n2}\}$

$\{\alpha_{n2}\}$ — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой, неубывающей(т.к. $a_n \searrow$ и 1-ый столбец уже застабилиз.) $\Rightarrow\ \exists N_2 \quad \forall n > N_2 \geq N_1 \geq N_0\ \alpha_{n2} \rightrightarrows\ \gamma_2$ и т.д.

в итоге $\forall\ n > N_k \geq N_{k-1} \geq ... \geq N_0 \quad \{\alpha_{nk}\} \rightrightarrows\ \gamma_k$, то $a_n \rightrightarrows\ a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_k...$

Из построения $a_n \leq a$
Осталось показать, что a $\leq$ M

Будем доказывать от противного: т.е. пусть $a > M$, т.е. $a_{(k)} = \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_k > M$
a_k — прибл. по недост. для a, но тогда $a_n \quad n > N_k$
$a_n = \alpha_{n0},\ \alpha_{n1},\ \alpha_{n2},\ ...,\ \alpha_{nk},\ \alpha_{nk+1},\ ... = \gamma_0,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_k\alpha_{nk+1} > a_{(k)} > M$, противоречие с тем, что $a_n \leq M\ \forall n\ \downarrow$

4.19 Теорема Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ — числовая последовательность неубывает и ограничена сверху, то она сходится.

$\uparrow$

1. Пусть $x_1 > 0 \Rightarrow \forall\ n\ x_n > 0$ т.к. ($x_n \searrow$).
2. Любое $x_n \in \mathbb{R}$ представлена в виде б.д.д.
3. По **Л2**, такая (1) $x_n \rightrightarrows a$
4. Покажем, что $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} a$
   Надо $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \quad \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$

   пусть $n > N_k$, где N_k - номер, когда k-ый столбец в (*) застабилиз., тогда

$$|x_n - a| = |\gamma_0, \gamma_1....\gamma_k\alpha_{nk+1}\alpha_{nk+2}... - \gamma_0, \gamma_1\gamma_2...\gamma_k\gamma k + 1\gamma_{k+2}...|$$

$$= 0,\underbrace{0...0}_{k}\beta_{k+1}\beta_{k+2}... < 0,\underbrace{0...0}_{k-1}1 = \frac{1}{10^k} < \frac{1}{9k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{1}{9\varepsilon} \quad \varepsilon \to k \to N_k = N \downarrow$$

Замечание 1. Если $x_1 < 0$, тогда рассм. $y_1 = x_1 + c\ :\ y_1 > 0$, тогда по доказ. $y_n = x_n + c \searrow$, ограничена сверху и $y_1 > 0 \Rightarrow$ по доказ $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b\ \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b - c$

Замечание 2. Аналогично можно доказать, что, если $\{x_n\}\nearrow$ и ограничена снизу, то она сх-ся.

В общем случае:
Если последовательность монотонна и ограничена, то она сх-ся $\downarrow$

4.20 Число е (задание)

1. $\{x_n\}$ — ограничена
2. $\{x_n\}$ — монотонна

Из 1) и 2) $\Rightarrow$ сходятся

I монотонна и возрастает

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \ C_n^k \ a^{n-k}b^k = 1 * a^n + \sum_{k=1}^{n} \ C_n^k \ a^{n-k}b^k = a^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k =$

$= a^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k$

$x_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + ... +$

$+ \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k} + ... + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n^n} = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + ... + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{n^{k-1}} + ... +$

$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n}) + ... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{n-1}{n})$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \ C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)n(n+1-2)...(n+1-(k-1))}{k!}a^{n+1-k}b^k$

$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + ... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{k-1}{n+1}) + ...$

$... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1}) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1})}_{>0}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$

$0 < (1-\frac{1}{n}) < (1-\frac{1}{n+1}) \ n > 1$
аналог:
$0 < 1-\frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1} \Rightarrow (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$

Сравним x_n и x_{n+1} почленно

$\forall n \ x_n < x_{n+1} \Rightarrow$ возрастает

II ограничена

$2 < x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!} <$
$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} ... \frac{1}{2^{k+1}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

$\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2*3} < \frac{1}{2*2} = \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{3*4} < \frac{1}{2*2*2} = \frac{1}{2^3}$

$x_n \nearrow$
$\underbrace{2 < x_n < 3}_{\Downarrow}$
по теореме Вейерштрасса:
$\exists \ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
$e \approx 2.718281828459045...$

$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}_{\to e}(1+\frac{1}{n-1})_{\to 1}})^n = e^{-1}$

4.21 Принцип вложенных промежутков

Теорема. Пусть задана система замкнутых промежутков:
$\sigma_n = [a_n; b_n] \ \forall n \in \mathbb{N} : \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset ... \supset \sigma_n \supset \sigma_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$
$\alpha_n = b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Тогда $\exists! \ c \ : \ c \subset \sigma_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\uparrow$

1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1$
   $\{a_n\} \nearrow\!\!\searrow$ и ограничена сверху любым $b_n \forall n \;\Rightarrow\; b_n$ сх-ся по т. Вейерштрасса
   $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = c_1 \quad c_1 \leq b_n \;\forall n$
   $\{b_n\} \searrow\!\!\nearrow$ и ограничена любым a_n $\forall n$ снизу
2. $c_1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + n_n) = 0 + c_2 = c_2$
   $c_1 = c_2 = c$
3. уже в п.1 показали, что $a_n \leq c \leq b_n \;\forall\; n$, т.е. $c \in [a_n; b_n] \;\forall\; n$
4. Покажем, такое c $\exists!$ от противного: пусть есть еще $\widetilde{c}$ — общая точка всех промежутков $\widetilde{c} \neq c$, например, $\widetilde{c} < c$

   Тогда: $\lim_{n\to\infty} a_n = c \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \;:\; \forall n > N, c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$

   $a_n > c - \varepsilon = \{\varepsilon = \frac{c-\widetilde{c}}{2}\} = c - \frac{c-\widetilde{c}}{2} = \frac{c+\widetilde{c}}{2} > \frac{2c}{2} = \widetilde{c}$
   $\exists N \;:\; \forall n > N \; a_{n1} > \widetilde{c}$ т.е. для $n > N$ $\widetilde{c} \notin [a_n; b_n]$ — противоречие $\downarrow$

Замечание

1. $[a_n; b_n]!$
   $1 - \frac{1}{n}; 1 \to (1,1) = \emptyset$
2. Верна для $\mathbb{R}$, неверна для $\mathbb{Q}$

4.22 Подпоследовательности

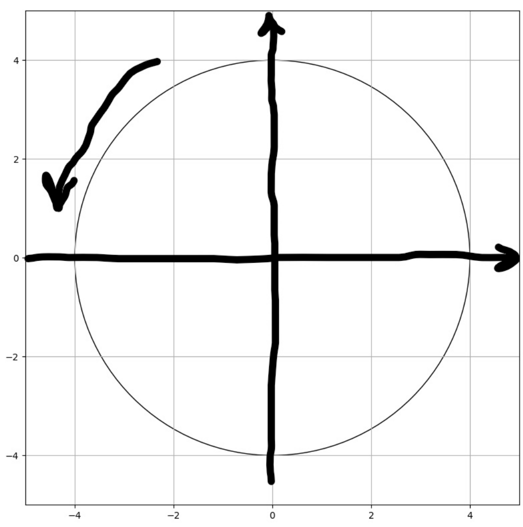
Определение. Числовая последовательность $\{b_k\} = \{a_{nk}\}$, где $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ... n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ последовательность натуральных чисел называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$

4.23 Предел подпоследовательности

Определение. Если $\exists$ lim подпоследовательности $b_k = a_{nk}$ $\lim_{k\to\infty} b_k = b$, то b — частичный предел последовательности $\{a_n\}$

Теорема. Если $\{a_n\}$ — сходится к a, то и все частичные пределы $\{a_n\}$ тоже равны a

$\uparrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$



начиная с $n > N$ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ $\forall \varepsilon$, но тогда $\forall n_k > N$ $a - \varepsilon < a_{nk} < a + \varepsilon \Rightarrow$ т.е. $\lim_{k\to\infty} a_{nk} = a$ $\downarrow$

Следствие

$x_n = (-1)^n$

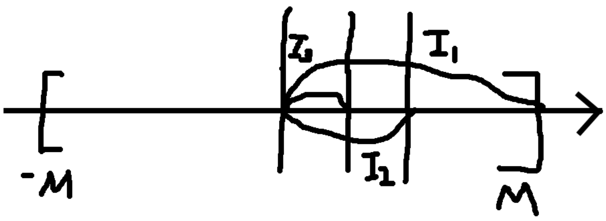
Если $\exists$ x_{nk} и x'_{nk} : $\lim_{k\to\infty} x_{nk} \neq \lim_{k\to\infty} x'_{nk} \Rightarrow \nexists$ $\lim x_n$

4.24 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists$-ет хотя бы одна сходящаяся последовательность.

$\uparrow$

1. Раз ограничена; то $\exists\ M\ :\ \forall n\ |x_n| \leq M$, т.е. $I_0 = [-M; M]$, то $\forall n\ x_n \in I_0$
   $d_0 = 2M$
2. $\frac{I_0}{2}$ (делим I_0 пополам)
   Пусть I_1-та половина, в которой содержится ∞ число членов последовательности x_n (если в обеих, то выбираем любую из них) $I_1 = \frac{I_0}{2}$
   $d_1 = \frac{2M}{2}$
3. $\frac{I_1}{2} \Rightarrow$, та часть, в которой содержится ∞ число членов последовательности $\{x_n\}$ (если в обеих, то любую из) в I_2 $b_2 = x_{n2} \in I_2$ $n_2 > n_1$

   $d_1 = \frac{2M}{2^2}$
4. и т.д. $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset .....$
   k)$d_k = \frac{2M}{2^k} \longrightarrow_{k\to\infty} 0$

по Т. о вложенных промежутках $\exists!\ B\ :\ B \in I_k\ \forall k$
Покажем, что $\{b_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} B$

$\forall \varepsilon > 0 \exists\ K : \forall k > K :$

$|b_k - B| < \varepsilon$

$|b_k - B| < |I_k| = \frac{2M}{2^k} < \frac{2M}{k} < \varepsilon$

$2^k > k\ K = [\frac{2M}{\varepsilon}] + 1$

$\downarrow$

4.25 Определения верхнего и нижнего пределов

4.25.1 Верхний предел

Определение. Число M будем называть верхним пределом последовательности x_n, если

1. $\exists\ x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} M$
2. $\forall x'_{nk} \to M'\ M' \leq M$

$\uparrow$

Обозначение. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \overline{\lim} x_n = M$

Замечание.

1. Если x_n не ограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. Если $\overline{\lim} x_n = a$(а — конечное число)

4.25.2 Нижний предел

Определение. Число m будем называть нижним пределом последовательности x_n, если

1. $\exists\ x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} m$
2. $\forall x'_{nk} \to m'\ m' \leq m$

Обозначение. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim} x_n = M$

Замечание.

1. Если x_n не ограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$
2. Если $\underline{\lim} x_n = a$(а — конечное число)

4.26 Необходимое и достаточное условие существования предела

Теорема. У всякой $\{x_n\}$ $\exists$ $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$.

$\uparrow$

1. x_n — не ограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. x_n — не ограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$
3. x_n ограничена сверху и снизу

дальше как в Т. Больцано-Вейерштрасса, только 3.1) если ищем $\overline{\lim}$, то всегда беру правую половинку, если возникает выбор.
3.2) Для $\underline{\lim}$, то беру левую половинку

$\downarrow$

Замечание. Очевидно, что $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

4.27 Теорема о существовании верхнего и нижнего предела у произвольной последовательности

Теорема. $\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = A$ (конечн, $+\infty$, $-\infty$) $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

$\uparrow$ "$\Rightarrow$"пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

1. $A = +\infty$, т.е. $lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
   $\Rightarrow \underline{lim} x_n = +\infty \Rightarrow \overline{lim} x_n = +\infty$
2. $A = -\infty$; т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = -\infty$
3. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ (A — конечное число) $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$ уже доказывали

"$\Leftarrow$"

1. $\lim x_n = +\infty$ т.е. $\lim n \to \infty x_n = +\infty$
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$
3. A — конечный $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

Надо $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ A - \varepsilon <_{\text{из } \underline{\lim} x_n = A} x_n <_{\text{из } \overline{\lim} x_n = A} A + \varepsilon$, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

$\downarrow$

4.28 Фундаментальные последовательности, критерий Коши сходимости последовательности

Определение. Последовательность x_n называется фундаментальной(удовлетворяет условию Коши), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$

Теорема. Критерий Коши. Числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N :$ $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$\uparrow$

"$\Rightarrow$"пусть сходится ($\lim_{n\to\infty} x_n = a$ — конечное число) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m| = |x_n - a| + |x_m - a| <_{n>N;m>N} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

"$\Leftarrow$"1) покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0 : \forall n, m > N_0,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = 1$
$|x_n| - |x_m| \le |x_n - x_m| < 1$
$\Downarrow$
$|x_n| < 1 + |x_m|$

Фиксированный $m \Rightarrow \forall n > N_0$ рассмотрим $M = \max\{1 + |x_m|; |x_1|; |x_2|; |x_3|; ...; |x_{N_0}|\}$

2) По Т. Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящиеся последовательности
$\exists x_{nk}\ :\ x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$

Покажем, что $x_n \to a$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0\ :\ \forall n, m > N_0,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

Имеем:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0\ :\ \forall n, m > N_0,\ |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ и
$x_{nk} \to a$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists K_0\ :\ \forall k > K_0,\ |x_{nk} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - a| = |x_n - x_{nk} + x_{nk} - a| \le |x_n - x_{nk}| + |x_{nk} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$n_k > N_0$
$k > K_0\ n_k > n_{K_0}$
$N = \max(N_0, n_{K_0})$
$\downarrow$