Числовые последовательности и их пределы

Ученик 10-4 класса Паньков М.А. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 12 мая 2021 г.

1 Лекция №27

Покажем, что $x_n \to a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \; : \; \forall n, m > N_0, \; |x_n - x_m| < \varepsilon$

Имеем:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \; : \; \forall n, m > N_0, \; |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ и
$x_{nk} \to a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K_0 \; : \; \forall k > K_0, \; |x_{nk} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - a| = |x_n - x_{nk} + x_{nk} - a| \leq |x_n - x_{nk}| + |x_{nk} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$n_k > N_0$
$k > K_0 \; n_k > n_{K_0}$
$N = \max(N_0, n_{K_0})$
$\downarrow$

Пример. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n}$ — доказать сходимость

Замечание. Другая форма условия Коши: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \; : \; \forall n > N_0; \; \forall p > 0, \; \left|x_n - x_{n+p}\right| < \varepsilon$

$\left|x_n - x_{n+p}\right| = \left|\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n} - (\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n} + ... + \frac{\sin n+p}{2^{n+p}})\right| = \left|\frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin n+1}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin n+p}{2^{n+p}}\right| \leq$
$\frac{|\sin n+1|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin n+2|}{2^{n+2}} + ... + \frac{|\sin n+p|}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{\frac{1}{2^{n+p+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{n+\cancel{1}}}(1 - \frac{1}{2^p})}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

1. Теорема Вейерштрасса
   $\Downarrow$
2. Принцип вложенных промежутков
   $\Downarrow$
3. Теорема Больцано-Вейерштрасса
   $\Downarrow$
4. Критерий Коши