Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.
от 28 апреля 2021 г.

1 Лекция №25

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
1^∞
$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$

1.1 Число e

1) $\{x_n\}$ — ограничена
2) $\{x_n\}$ — монотонна
Из 1) и 2) $\Rightarrow$ сходятся

I монотонна и возрастает

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k\ a^{n-k}b^k = 1 * a^n + \sum_{k=1}^n C_n^k\ a^{n-k}b^k = a^n + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k =$

$= a^n + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k$

$x_n = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + ...+$

$+\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k} + ... + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n^n} = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + ... + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{n^{k-1}} + ...+$

$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n}) + ... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{n-1}{n})$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)n(n+1-2)...(n+1-(k-1))}{k!}a^{n+1-k}b^k$

$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + ... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{k-1}{n+1}) + ... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1}) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1})}_{>0} \Rightarrow TODO$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$

$0 < (1-\frac{1}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})\ n > 1$
аналог:
$0 < 1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n+1} \Rightarrow (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$
$\forall n\ x_n < x_{n+1} \Rightarrow$ возрастает

II ограничена

$2 < x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!}$

$<$

$\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2*3} < \frac{1}{2*2} = \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{3*4} < \frac{1}{2*2*2} = \frac{1}{2^3}$

$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}...\frac{1}{2^{k+1}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

$x_n \nearrow$
$\underbrace{2 < x_n < 3}_{\Downarrow}$
по теореме Вейерштрасса:
$\exists\ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
$e \approx 2.718281828459045...$

$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\underbrace{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}_{\to e}\underbrace{(1+\frac{1}{n-1})}_{\to 1}})^n = e^{-1}$

1.2 Принцип вложенных промежутков

Теорема. Пусть задана система замкнутых промежутков:
$\sigma_n = [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} : \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset ... \supset \sigma_n \supset \sigma_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
$\alpha_n = b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Тогда $\exists!\ c\ :\ c \subset \sigma_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\uparrow$

1. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n \le ... \le b_n \le b_{n-1} \le ... \le b_1$
   $\{a_n\}\ \searrow$ и ограничена сверху любым $b_n \forall n \ \Rightarrow\ b_n$ сх-ся по т. Вейерштрасса
   $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = c_1 \quad c_1 \le b_n\ \forall n$
   $\{b_n\}\ \nearrow$ и ограничена любым $a_n\ \forall n$ снизу
2. $c_1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + n_n) = 0 + c_2 = c_2$
   $c_1 = c_2 = c$
3. уже в п.1 показали, что $a_n \le c \le b_n\ \forall\ n$, т.е. $c \in [a_n; b_n]\ \forall\ n$
4. Покажем, такое $c\ \exists!$ от противного: пусть есть еще $\widetilde{c}$ — общая точка всех промежутков $\widetilde{c} \ne c$, например, $\widetilde{c} < c$

   Тогда: $\lim_{n\to\infty} a_n = c\ \Rightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ :\ \forall n > N, c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$

   $a_n > c - \varepsilon = \{\varepsilon = \frac{c-\widetilde{c}}{2}\} = c - \frac{c-\widetilde{c}}{2} = \frac{c+\widetilde{c}}{2} > \frac{2c}{2} = \widetilde{c}$
   $\exists N\ :\ \forall n > N\ a_{n1} > \widetilde{c}$ т.е. для $n > N\ \widetilde{c} \notin [a_n; b_n]$ — противоречие $\downarrow$

Замечание.

1) $[a_n; b_n]$!
$1 - \frac{1}{n}; 1 \to (1, 1) = \emptyset$ 2) Верна для $\mathbb{R}$, неверна для $\mathbb{Q}$

1.3 Подпоследовательности

Определение. Числовая последовательность $\{b_k\} = \{a_{nk}\}$, где $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ... n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ последовательность натуральных чисел называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...; \frac{1}{100}; ...$

$b_k = \frac{1}{2k} \quad \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; ... \frac{1}{100}; ...$

$b'_k = \frac{1}{2k+1} \quad \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; ...$

$b''_k = \frac{1}{k+3} \quad \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...$

$b'''_k = \frac{1}{3k} \quad ...$

$a_n = (-1)^n$

$b'_k = 1$

$b''_k = -1$

Определение. Если $\exists$ lim подпоследовательности $b_k = a_{nk}$ $\lim_{k\to\infty} b_k = b$, то b — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.

Пример. $a_n = (-1)^n$
Частичные пределы: $b'_k = 1,\ b''_k = -1$
$a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$

Теорема. Если $\{a_n\}$ — сходится к a, то и все частичные пределы $\{a_n\}$ тоже равны a.

$\uparrow\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$

начиная с $n > N\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\ \forall\varepsilon$, но тогда $\forall n_k > N\ a - \varepsilon < a_{nk} < a + \varepsilon \Rightarrow$ т.е. $\lim_{k\to\infty} a_{nk} = a\ \downarrow$

Следствие.

$x_n = (-1)^n$

Если $\exists\ x_{nk}$ и x'_{nk} : $\lim_{k\to\infty} x_{nk} \neq \lim_{k\to\infty} x'_{nk} \Rightarrow \nexists\ \lim x_n$

Пример.
$a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$
$a_{nk} = a_{2k} = \sin \pi k = 0$
$\sin \frac{\pi n}{2} = 1 \Rightarrow n =$