

Числовые последовательности и их пределы

Ученик 10-4 класса Паньков М.А. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 16 марта 2021 г.

1 Лекция №21

Определение. Будем говорить, что x_n сходится к a ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$

Геометрический смысл:

a — предел x_n , $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$O_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ — ε -окрестность т. a



Примеры:

1. Док-ть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N$, док-ть: $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$
 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \in \mathbb{N}([x])$ — выделение целой части)

$[x] \leq x < [x] + 1$

$\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x}$

действительно:

$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, ч.т.д.

2. Док-ть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N$, док-ть: $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-n-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, ч.т.д. ($N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$)

3. α — б.д.д.

α_n — приближение б.д.д. по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$

Покажем, что $\alpha_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \alpha$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$

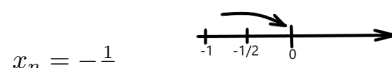
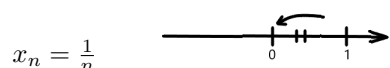
$|\alpha_n - \alpha| = |a, a_1, a_2, \dots, a_n - a, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots| = 0, \underbrace{0 \dots 0}_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{9n} <$

$< \varepsilon$

$10^n = (1 + 9)^n > 9n \quad n > \frac{1}{9\varepsilon}$

$N = \left[\frac{1}{9\varepsilon} \right] + 1$

Сходимость может быть разной



$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$