Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.
по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 21 апреля 2021 г.

1 Лекция №24

1.1 Свойства бесконечно больших

1. Если предел последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена снизу, т.е. $b_n \geq b\ \forall n$, тогда $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
2. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена $M : b_n \geq M > 0,\ \forall n \lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = +\infty$
3. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, а b_n ограничена, т.е. $0 < b_n < M(n \to \infty)\ \forall n$, то
$$(\frac{+\infty}{c > 0}) \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$
4. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, а b_n ограничена; $|b_n| \leq M\ \forall n$,
$$(\frac{M}{\infty}) \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$
.

1.1.1 Неопределённости

1) $\infty - \infty$
$2n - n = n \to +\infty$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

2) $\frac{\infty}{\infty}$

$n^2,\ n,\ 2n$

$\frac{n^2}{n}$

3) $\infty * 0$

1.2 Теорема Вейерштрасса

Определение. Числовая последовательность целых чисел называется стабилизирующейся к ξ, если $\exists\ n_0 : \forall n > n_0\ a_n = \xi,\ a_n \rightrightarrows \xi$

Лемма 1. Если $\{a_n\}$ — последовательность целых неотрицательных чисел, неубывающая и ограниченная сверху, т.е. $a_n \leq M\ \forall n$, то $\exists\ \xi : a_n \rightrightarrows \xi$ и $\xi \leq M$.

хотя число членов последовательности ∞, но между a_1 (самый маленький член последовательности т.к. $a_n \not\searrow$) и M есть только конечное число целых чисел, $\Rightarrow$ только конечно число значений a_n
Обозначним наибольшее значение принимаемое a_n, ч/з ξ, т.е. $\exists n_0 : a_{n_0} = \xi \leq M$, тогда $\forall n > n_0\ a_n = \xi$, т.к. $a_n \downarrow$

$\{a_n\}$ — б.д.д. > 0

$a_1 = \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}...$
$a_2 = \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}...$
$a_3 = \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}...$
...
$a_n = \alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\alpha_{n_3}...$
$\downarrow a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...$

α_{n_0} — целые неотр.
$\alpha_{n_j}\ j = 1, ...$ — это $\in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9\}$

Определение. Будем говорить, что последовательность б.д.д. $(> 0)\{a_n\} \rightrightarrows$
$a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...\ (a_n \to a)$, если $\forall k\ \alpha_{n_k} \rightrightarrows \gamma_k$

Лемма 2. Если $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных б.д.д. (*) является неубывающей и ограниченной (т.е. $\exists M$ (б.д.д., не оканчивающася последовательностью 9-ок)): $\forall\ n\ a_n \leq M$), то $\exists\ a$:

1) $a_n \rightrightarrows\ a$

2) $a_n \leq a \leq M$

$\uparrow$ В табл. (*) смотрим на первый столбец

α_{10}
α_{20}
α_{30}
...
α_{n0}

Это последовательность неубывающих целых неотр. чисел и ограниченных сверху M по **Л1**
$\exists$ номер $N_0 \quad \forall\ n > N_0$
$\alpha_{n_0} \rightrightarrows\ \gamma_0$

α_{10}
α_{20}
α_{30}
...
$\alpha_{N_0 0} = \gamma_0$
γ_0
γ_0

Пусть $n > N_1$, тогда смотрим на $\{\alpha_{n1}\}$

α_{n1} — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой; неубывающая(т.к. a_n ↘̸ и 0-й столбец уже застабилиз.) $\Rightarrow\ \exists\ N_1\ \alpha_{n_1} \rightrightarrows\ \gamma_1\ \forall n > N_1 \geq N_0$

Пусть $n > N_1 \geq N_0$ и смотрим $\{\alpha_{n2}\}$

$\{\alpha_{n2}\}$ — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой, неубывающей(т.к. a_n ↘̸ и 1-ый столбец уже застабилиз.) $\Rightarrow\ \exists N_2 \quad \forall n > N_2 \geq N_1 \geq N_0\ \alpha_{n2} \rightrightarrows\ \gamma_2$ и т.д.

в итоге $\forall\ n > N_k \geq N_{k-1} \geq ... \geq N_0 \quad \{\alpha_{nk}\} \rightrightarrows\ \gamma_k$, то $a_n \rightrightarrows\ a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_k...$

Из построения $a_n \leq a$
Осталось показать, что a $\leq$ M

Будем доказывать от противного: т.е. пусть $a > M$, т.е. $a_{(k)} = \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_k > M$
a_k — прибл. по недост. для a, но тогда $a_n \quad n > N_k$
$a_n = \alpha_{n0},\ \alpha_{n1},\ \alpha_{n2},\ ...,\ \alpha_{nk},\ \alpha_{nk+1},\ ... = \gamma_0,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_k\alpha_{nk+1} > a_{(k)} > M$, противоречие с тем, что $a_n \leq M\ \forall n\ \downarrow$

1.2.1 Теорема Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ — числовая последовательность неубывает и ограничена сверху, то она сходится.

$\uparrow$

1. Пусть $x_1 > 0 \Rightarrow \forall\ n\ x_n > 0$ т.к. (x_n ↘̸).
2. Любое $x_n \in \mathbb{R}$ представлена в виде б.д.д.
3. По **Л2**, такая (1) $x_n \rightrightarrows a$
4. Покажем, что $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} a$
   Надо $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \quad \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$

   пусть $n > N_k$, где N_k - номер, когда k-ый столбец в (*) застабилиз., тогда

$$|x_n - a| = |\gamma_0, \gamma_1....\gamma_k\alpha_{nk+1}\alpha_{nk+2}... - \gamma_0, \gamma_1\gamma_2...\gamma_k\gamma k + 1\gamma_{k+2}...|$$

$$= 0,\underbrace{0...0}_{k}\beta_{k+1}\beta_{k+2}... < 0,\underbrace{0...0}_{k-1}1 = \frac{1}{10^k} < \frac{1}{9k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{1}{9\varepsilon} \quad \varepsilon \to k \to N_k = N \downarrow$$

Замечание 1. Если $x_1 < 0$, тогда рассм. $y_1 = x_1 + c \ : \ y_1 > 0$, тогда по доказ. $y_n = x_n + c \searrow$, ограничена сверху и $y_1 > 0 \Rightarrow$ по доказ $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Rightarrow$ ....

Замечание 2. Аналогично можно доказать, что, если $\{x_n\} \nearrow$ и ограничена снизу, то она сх-ся.

В общем случае:
Если последовательность монотонна и ограничена, то она сх-ся $\downarrow$

Пример.

$a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}$; $a_1 = 2$, доказать, что $\{a_n\}$ сх-ся и найти lim.

$a_1 = 2;\ a_2 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{5}{4};\ a_4 = \frac{9}{8}$
Предположение: $\searrow$ и $1 < a_n \leq 2$

$a = \frac{a+1}{2}$
$2a = a + 1$
$a = 1$

I. Покажем, что $1 < a_n \leq 2$ 1) База $n = 1 \quad 1 < a_1 = 2 \leq 2$ верно

2) Пусть при $n = k \quad 1 < a_k \leq 2$ выполнено

3) Надо при $n = k+1 \quad 1 < a_{k+1} \leq 2$
$1 = \frac{1}{2}(1+1) <$ (по ПИ) $a_{k+1} = \frac{a_k+1}{2} = \frac{1}{2}(a_k+1) \leq \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \leq 2$
$\Downarrow$ по ПМИ $\forall n \ 1 < a_n \leq 2$

II. $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n+1)}{2} - a_n = \frac{1-a_n}{2}(a_n > 1$ из опр $< 0) < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \forall\ n \in N$ т.е. a_n - убыв.

III. Из I и II по Т. Вейерштрасса $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n$. Пусть $lim_{n\to\infty} = a \Rightarrow a = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1$