1 Лекция №21

Определение. Будем говорить, что x_n сходится к $a(\lim_{n\to\infty} x_n = a)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$

Геометрический смысл:
а — предел x_n, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$O_a = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ — ε-окрестность т. а

Примеры:

1. Док-ть $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,$ док-ть: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$
   $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$
   $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$([x] — выделение целой части)

   $[x] \le x < [x] + 1$
   $\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x}$

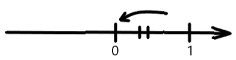
   действительно:
   $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, ч.т.д.

2. Док-ть $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,$ док-ть: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$
   $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, ч.т.д. $(N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1] + 1)$

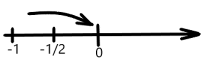
3. α — б.д.д.
   α_n — приближение б.д.д. по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$
   Покажем, что $\alpha_n \longrightarrow_{n\to\infty} \alpha$
   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$
   $|\alpha_n - \alpha| = |a,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_n - a,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}....| = 0,\underbrace{0\ ....\ 0}_{n},\ a_{n+1},\ a_{n+2}.... < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{9n} <$
   $< \varepsilon$
   $10^n = (1+9)^n > 9n \qquad n > \frac{1}{9\varepsilon}$
   $N = [\frac{1}{9\varepsilon}] + 1$

   Сходимость может быть разной

   $x_n = \frac{1}{n}$

   $x_n = -\frac{1}{n}$

   $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$