Математика 2-й семестр, 10-й класс

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А. по лекциям Протопоповой Т.В.

Для внутреннего использования

Россия, г. Новосибирск
СУНЦ НГУ
2021

Содержание

Элементы теории чисел

1 Лекция №12 **2**
1.1 Свойства делимости (нацело). ОТА . . . 2
1.1.1 Основная теорема арифметики . . . 2
1.1.2 Теорема Евклида . . . 3
1.2 Каноническое разложение числа. НОД. НОК . . . 3
1.2.1 Теорема Эйлера . . . 3
1.2.2 Алгоритм Евклида нахождения НОД(a,b) . . . 5

2 Лекция №13 **6**
2.1 Каноническое разложение числа. НОД. НОК . . . 6
2.2 Доказательство свойств делимости 8 и 9 . . . 6
2.3 Решение уравнений ax + by = c . . . 6

Теория сравнений
2.4 Сравнения . . . 7
2.5 Свойства сравнений . . . 7
2.6 Классификация чисел по данному модулю . . . 8

Числовые последовательности и их пределы

3 Лекция №21 **9**

4 Лекция №24 **10**
4.1 Свойства бесконечно больших . . . 10
4.1.1 Неопределённости . . . 10
4.2 Теорема Вейерштрасса . . . 10
4.2.1 Теорема Вейерштрасса . . . 11

5 Лекция №25 **13**
5.1 Число e . . . 13
5.2 Принцип вложенных промежутков . . . 14
5.3 Подпоследовательности . . . 14

6 Лекция №26 **16**
6.1 Верхний и нижний предел последовательности . . . 16
6.1.1 Верхний предел . . . 16
6.1.2 Нижний предел . . . 17
6.2 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши . . . 17

Элементы теории чисел. Теория сравнений.

Ученик 10-4 класса Оконешников Д.Д. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 12 января 2021 г.

1 Лекция №12

Определение. $a \in Z$ и $b \in Z\backslash\{0\}$ определена операция деления с остатком: разделить целое a на целое b $(\neq 0)$ с остатком, означает найти такие целые $q,\ r \in Z$, что $a = b * q + r,\ 0 \leq r < |b|$.

Определение. Если при делении с остатком $r = 0$, то число a делится на b ($a \vdots b$). Число b при этом называется делителем числа a.

Пример. -7 на 5 $\qquad -7 = 5 * (-2) + 3$

1.1 Свойства делимости (нацело). ОТА

(1) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$

$\uparrow \begin{matrix} a = cq_1 \\ b = cq_2 \end{matrix} \Rightarrow (a \pm b) = c(q_1 \pm q_2) \Rightarrow (a \pm b) \vdots c \downarrow$

(2) $a \vdots b \Rightarrow ak \vdots b$ $(k \in Z)$

(3) $a \vdots b,\ b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

$\uparrow a = bq_1,\ b = cq_2 \Rightarrow a = c * (q_1 * q_2) \Rightarrow a \vdots c \downarrow$

(4) Если $a \neq 0,\ a \vdots b \Rightarrow |a| \geq |b|$

$\uparrow a \vdots b \Leftrightarrow a = b * q \Rightarrow |a| = |b| * |q| \Rightarrow$ от противного, если $|a| < |b|$, то $|q| = \frac{|a|}{|b|} < \frac{|b|}{|b|} = 1 \Rightarrow$ единственная возможность при целом $q = 0$, но тогда и $a = 0$. Противоречие. $\downarrow$

(5) $a \vdots b$ и $b \vdots a \Rightarrow |a| = |b|$

(6) $\forall\ a \in Z\backslash\{0\} \Rightarrow 0 \vdots a$

(7) $\forall\ a \in Z \Rightarrow a \vdots 1$

(8) Если $ab \vdots m$ и НОД$(a,\ m) = 1,$ то $b \vdots m$

(9) Если $a \vdots m,\ a \vdots k$ и НОД$(m,\ k) = 1,$ то $a \vdots mk$

Определение. Натуральное число $p > 1$ называется простым, если оно имеет ровно два натуральных делителя (p и 1).

Все остальные натуральные числа называются составными (кроме 1). Единица не является ни простым, ни составным.

1.1.1 Основная теорема арифметики

Th.1 (Основная теорема арифметики) Всякое натуральное число $n > 1$ может быть представлено в виде $n = p_1 * p_2 * ... * p_i$, где p_i — простые числа. Это представление единственно с точностью до порядка множителей (т.е. если $n = p_1 * p_2 * ... * p_r = q_1 * q_2 * ... * q_s$, то $r = s$ и $q_1,\ q_2, ...,\ q_s$ можно перестановкой получить из чисел $p_1,\ p_2, ...,\ p_r$)

(1) Докажем существование

Пусть $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Среди делителей n есть числа превосходящие 1 (например, само n). Пусть p_1 — наименьший из таких делителей.

p_1 — простое число (если оно само имело бы делитель $1 < a < p_1$, то a было бы меньше p_1 и было бы делителем n (св-ва 4,3), противоречит тому, что выбран наименьший делитель).

Итак, $n = p_1 n_1,$ где p_1 — простое, $n_1 \in \mathbb{N}$ и $n_1 < n$ (св-во 4).

Если $n_1 > 1$, то поступим с ним так же, как и числом n, представим его в виде $n_1 = p_2 n_2$, p_2 — простое, $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 < n_1 \Rightarrow n = p_1 * p_2 * n_2$ и т.д.

В конце концов, так как $n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, ...$ убывают, то $\exists\ n_r = 1$ и процесс обрывается: $n = p_1 * p_2 * ... p_r$

(2) Докажем существование (единственность) От противного. Если $\exists$ хоть одно натуральное число, допускающее два существенно различных разложения, то непременно $\exists$ и наименьшее число с таким свойством:

$$m = p_1 * p_2 * ... * p_r = q_1 * q_2 * ... * q_s \qquad (1)$$

Можем допустить, что $p_1 \le p_2 \le ... \le p_r; q_1 \le q_2 \le ... \le q_s$.

А) Заметим, что $p_1 \ne q_1$.
Если равны, то разделив (1) на $p_1 = q_1$, получили бы два существенно различных разложения на простые множители для числа $< m$ (Противоречие с тем, что m — наименьшее).
На самом деле показали больше: что среди q_j нет чисел равных какому-либо p_i

Б) Из А) $p_1 < q_1$ или $p_1 > q_1$. Пусть $p_1 < q_1$ (для $p_1 > q_1$ доказательство строится аналогично).
Рассмотрим целое число:

$$m' = m - p_1 * q_2 * ... * q_s \qquad (2)$$

Подставляя вместо m два его разложения, получим:

$$m' = p_1 * p_2 * ... * p_r - p_1 * q_2 * ... * q_s = p_1(p_2 * ... * p_r - q_2 * ... * q_s) \qquad (3)$$

$$m' = q_1 * q_2 * ... * q_s - p_1 * q_2 * ... * q_s = (q_1 - p_1)q_2 * ... * q_s \qquad (4)$$

Из равенства (4) очевидно $m' > 0$. Из равенства (2) $m' < m$, а значит, для m' разложение на простые множители — единственно (с точностью до порядка сомножителей).

Из (3) $\Rightarrow p_1$ входит множителем в m', значит, из (4) p_1 входит множителем либо в $q_1 - p_1$, либо в $q_2 * ... * q_s$. Но последнее невозможно, так как все $q_j > p_1$ ($p_1 < q_1$) и они простые.

Значит, p_1 входит множителем в $q_1 - p_1$, т.е. $(\mathbf{q_1} - \mathbf{p_1}) \vdots \mathbf{p_1} \Rightarrow q_1 - p_1 = p_1 h \Rightarrow q_1 = p_1(h+1)$, т.е. $\mathbf{q_1} \vdots \mathbf{p_1}$, чего быть не может. Противоречие. Ч.Т.Д.

1.1.2 Теорема Евклида

Th.2 (Теорема Евклида) Множество простых чисел бесконечно.

$\uparrow$ Доказательство проведем от противного. Предположим, что множество простых чисел конечно, т.е. $P = \{p_1, p_2, ...p_k\}$ — конечная совокупность простых чисел.

Рассмотрим число $p = p_1 * p_2 * ... * p_k + 1$.

Заметим, что $\forall\ i, i = 1, 2, ..., k$ это $p > p_i$, т.е. $p \notin P$, значит, оно составное и по ОТА может быть представлено в виде произведения простых множителей.

Но p не делится ни на какой p_i (при делении дает в остатке 1).

Значит, наше предположение о конечности системы простых чисел неверно. $\downarrow$

Утверждение. Существуют сколь угодно длинные участки натурального ряда, вовсе не содержащие простых чисел

$\uparrow$ Действительно, пусть $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Рассмотрим ряд чисел: $n! + 2, n! + 3, ..., n! + n$.

$n = 2 : 2! + 2$ — одно число в ряду;	
$n = 3 : 3! + 2, 3! + 3$ — два числа в ряду;	чем больше n, тем больше в ряду
$n = 4 : 4! + 2, 4! + 3, 4! + 4$ — три числа в ряду;	чисел ($n - 1$ число).
и т.д.	

В этом ряду нет ни одного простого числа, так как $n! + 2$ делится на 2, $n! + 3$ делится на 3, $n! + n$ делится на n. Таким образом, при больших n такие участки натурального ряда могут быть очень большими. $\downarrow$

1.2 Каноническое разложение числа. НОД. НОК

1.2.1 Теорема Эйлера

Th.3 (Теорема Эйлера) Пусть $\tau(n)$ — количество простых чисел $\le n$. Тогда

$$\frac{\tau(n)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Понятно, что $\tau(n)$ увеличивается (т.е. $\to \infty$) при $n \to \infty$ (это означает, что простые числа встречаются все реже и реже).

Мы показали, что любое натуральное число мы можем представить в виде произведения простых множителей (и такое представление единственно с точностью до перестановки множителей): $n = p_1 * p_2 * ... * p_r,\ p_1 \le p_2 \le ... \le p_r$. Используя обозначение степени, можем записать так:

$$\mathbf{n = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * ... * p_k^{a_k}},\ \text{(каноническое разложение)}$$

$$\text{где } p_1 < p_2 < ... < p_k \text{ — простые, } a_1, a_2, ..., a_k \text{ — натуральные числа.}$$

Замечание. Бывает полезно записать в разложение <u>все</u> простые числа $\le p_k$ и использовать показатель равный 0.

Если число m является делителем n, то несложно понять, что $\mathbf{m = p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * ... * p_k^{\beta_k}}$, где $0 \le \beta_i \le a_i$.

Можно посчитать число всех натуральных делителей числа n. Любой делитель n имеет следующую структуру: $\mathbf{m = p_1^{0,1,2,...,a_1} * p_2^{0,1,...a_2} * ... * p_k^{0,1,...,a_k}}$

Для первого множителя $(a_1 + 1)$ возможность для второго $(a_2 + 1)$ возможностей и т.д. Таким образом, число всех делителей $(a_1 + 1) * (a_2 + 1) * ... * (a_k + 1)$.

Пример. Сколько делителей у числа 120 (включая 1 и само число)?

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 * 3^1 * 5^1$. Значит, число всех делителей $= (3 + 1) * (1 + 1) * (1 + 1) = 4 * 2 * 2 = 16$.

Определение. d — общий делитель a и $b \Leftrightarrow \mathbf{a \vdots d}$ и $\mathbf{b \vdots d}$.

Определение. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается НОД(a, b).

Определение. Наименьшее общее кратное НОК$(a, b) = k$ — наименьшее натуральное число такое, что $\mathbf{k \vdots a}$ и $\mathbf{k \vdots b}$.

Пусть $\mathbf{a = p_1^{a_1} * p_2^{a_2} * ... * p_k^{a_k}},\ \mathbf{b = p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * ... * p_k^{\beta_k}}$

Здесь использовали показатель 0 для тех простых множителей, которые входят только в одно из разложений.

Тогда

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{min(a_1,\beta_1)} * p_2^{min(a_2,\beta_2)} * ... * p_k^{min(a_k,\beta_k)}$$

$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{max(a_1,\beta_1)} * p_2^{max(a_2,\beta_2)} * ... * p_k^{max(a_k,\beta_k)}$$

$$\text{НОД}(a, b) * \text{НОК}(a, b) = a * b$$

Пример. $a = 2 * 3^3 * 5^2 * 7,\ b = 2^2 * 3 * 7^2 * 11 \Rightarrow a = 2^1 * 3^3 * 5^2 * 7^1 * 11^0,\ b = 2^2 * 3^1 * 5^0 * 7^2 * 11^1 \Rightarrow$ НОД$(a, b) = 2^1 * 3^1 * 5^0 * 7^1 * 11^0$, НОК$(a, b) = 2^2 * 3^3 * 5^2 * 7^2 * 11^1$.

Чтобы получить каноническое разложение полезно помнить признаки делимости.

1) на 2 и 5. Легко.

2) на 4. $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = 100 * \overline{a_k a_{k-1} ... a_2} + \overline{a_1 a_0}$. $\quad 100 \vdots 4.\ \Rightarrow n \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$.

3) на 8. $n \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$.

4) на 3. $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0 = a_k(\underbrace{999...9}_{k} + 1) + a_{k-1}(\underbrace{999...9}_{k-1} + 1) + ... + a_1(9 + 1) + a_0 = (a_k \underbrace{999...9}_{k} + a_{k-1} \underbrace{999...9}_{k-1} + ... + a_1 9) + (a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0)$

Аналогично для 9.

5) на 6. $n \vdots 2$ и $n \vdots 3 \Rightarrow$ (так как 2 и 3 взаимно просты) $n \vdots 6$

6) на 11.

$$n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = a_0 + a_1 10 + a_2 100 + a_3 + 1000 + ... + a_k 10^k =$$

$$= a_0 + a_1(11-1) + a_2(99+1) + a_3(1001-1) + a_4(9999+1) + a_5(100001-1) + ... + a_k10^k =$$
$$= (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - ...) + (a_1 11 + a_3 1001 + a_5 100001 + ... + a_{2l+1} 1\underbrace{00...0}1_{2l} + ...) +$$
$$+ (a_2 99 + a_4 9999 + ... + a_{2m}\underbrace{99...99}_{2m} + ...)$$

А) числа, состоящие из четного числа 9-ок, делятся на 11, т.е. последняя скобка $\vdots 11$;

Б) заметим, что $1001 = (1100 - 99) \vdots 11$, $\quad 100001 = (110000 - 9999) \vdots 11$, $\quad 1\underbrace{00...00}_{2l}1 = (11\underbrace{00...00}_{2l} - \underbrace{99...99}_{2l} \vdots 11)$.

1.2.2 Алгоритм Евклида нахождения НОД(a,b)

Пусть требуется найти НОД(a, b). Будем считать, что $|a| > |b|$.

1) Разделим a на b с остатком:

$$a = q_1 b + r_1,\ 0 \le r_1 < |b| \quad (1)$$

Заметим, что любой делитель пары a и b будет делителем r_1, а значит пары b и r_1. С другой стороны, любой делитель пары (b, r_1) будет делителем a, а значит пары (a, b). Таким образом (равенство множеств), множество делителей пары (a, b) совпадает с множеством делителей пары (b, r_1), а значит и НОД$(a, b) =$ НОД(b, r_1).

2) Разделим b на r_1 с остатком:

$$b = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1 \quad (2)$$

При этом получаем, что НОД$(b, r_1) =$ НОД(r_1, r_2)

3) Разделим r_1 на r_2 с остатком:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \le r_3 < r_2 \quad (3)$$

При этом НОД$(r_1, r_2) =$ НОД(r_2, r_3).
И т.д.

Посмотрим на остатки. $|b| > r_1 > r_2 > r_3 > ... \ge 0$. Получили строго убывающую последовательность неотрицательных целых чисел. Эта последовательность конечна. Существует $r_{k+1} = 0$, т.е.

k+1)

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0 \quad (k+1)$$

При этом НОД$(a, b) =$ НОД$(b, r_1) =$ НОД$(r_1, r_2) =$ НОД$(r_2, r_3) = ... =$ НОД$(r_{k-1}, r_k) = r_k$.
Таким образом, НОД(a, b) равен последнему ненулевому остатку в алгоритме Евклида.

Весь алгоритм:	**Пример.** НОД(5083,3553)-?
1) $a = q_1 b + r_1,\ 0 \le r_1 < \lvert b \rvert$	$5083 = 1 * 3553 + 1530$
2) $b = q_2 r_1 + r_2,\ 0 \le r_2 < \lvert r_1 \rvert$	$3553 = 2 * 1530 + 493$
3) $r_1 = q_3 r_2 + r_3,\ 0 \le r_3 < \lvert r_2 \rvert$	$493 = 9 * 51 + 34$
...	$51 = 1 * 34 + 17$
k) $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$	$34 = 2 * 17 + 0 \Rightarrow$ НОД$(5083, 3553) = 17$
k+1) $r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0$	
НОД$(a, b) = r_k$	

Элементы теории чисел. Теория сравнений.

Ученик 10-4 класса Оконешников Д.Д. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 20 января 2021 г.

2 Лекция №13

2.1 Каноническое разложение числа. НОД. НОК

Весь алгоритм:	**Пример.** НОД(5083,3553)-?
1) $a = q_1 b + r_1$	$\Rightarrow r_1 = a - q_1 b = A_1 a + B_1 b$
2) $b = q_2 r_1 + r_2$	$\Rightarrow r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2(A_1 a + B_1 b) = -q_2 A_1 a + (1 - B_1 q_2) b = A_2 a + B_2 b$
3) $r_1 = q_3 r_2 + r_3$	$\Rightarrow r_3 = r_1 - q_3 r_2 = A_1 a + B_1 b - q_3(A_2 a + B_2 b) =$
...	$= (A_1 - q_3 A_2) a + (B_1 - q_3 B_2) b = A_3 a + B_3 b$
k) $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$	$r_k = A_k a + B_k b$ или НОД$(a,b) = Aa + Bb$, где $A,\ B$ — целые
k+1) $r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0$	
НОД$(a,b) = r_k$	

Утверждение. Если $d =$ НОД(a,b), то существуют целые A и $B : d = Aa + Bb$.

Замечание. Если НОД$(a,b) = 1$ (т.е. a и b взаимно просты), то существуют целые A и $B : 1 = Aa + Bb$.

2.2 Доказательство свойств делимости 8 и 9

Свойство 8. Если $ab \vdots m$ и НОД$(a,m) = 1$, то $b \vdots m$

$\uparrow$ Имеем НОД$(a,m) = 1 \Rightarrow \exists A,\ M : Aa + Mm = 1$.

Домножим последнее равенство на $b : \underset{\vdots m}{Aab} + \underset{\vdots m}{Mmb} = b \Rightarrow b \vdots m \downarrow$

Свойство 9. Если $a \vdots m,\ a \vdots k$ и НОД$(m,k) = 1$, то $a \vdots mk$

$\uparrow$

1) $a \vdots m \Rightarrow a = mq_1$

2) $a \vdots k \Rightarrow mq_1 \vdots k$

3) из 2) и НОД$(m,k) = 1 \Rightarrow$ по свойству 8 $q_1 \vdots k \Rightarrow q_1 = kq_2$

4) $a = mq_1 = mkq_2$, т.е. $a \vdots mk \downarrow$

2.3 Решение уравнений ax + by = c

Определение. Диофантово уравнение первой степени - уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c, x, y — целые числа.

Пусть НОД$(a,b) = d$.

1) Если $c \vdots d$, то делим на d правую и левую части уравнения и получаем $a_1 x + b_1 y = c_1$, где НОД$(a_1, b_1) = 1$.
2) Если c не делится на d, то уравнение решений не имеет.

Таким образом, будем рассматривать уравнения (*) $ax + by = c,$ НОД$(a,b) = 1$.

Так как НОД$(a,b) = 1$, то по следствию из алгоритма Евклида $\exists$ целые $A,\ B : Aa + Bb = 1$.
Домножим равенство на $c : Aca + Bcb = c$.
Видим, что пара целых чисел $(x_0, y_0) = (Ac, bc)$ является решением уравнения.
Мы нашли частное (одно из) решение нашего уравнения. Найдем все решения (x, y).

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c, \\ ax + by = c. \end{cases} \Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,\ a(x - x_0) = -b(y - y_0)$$

НОД$(a,b)=1$, значит $(x-x_0)\vdots b$, т.е. $x-x_0=bt$ или $x=x_0+bt$, где t — целое.
Тогда $y-y_0=\frac{-a(x-x_0)}{b}=-at$ или $y=y_0-at$.
Таким образом, все пары вида (x_0+bt, y_0-at), где t — целое, являются решениями (*).

Замечание. Общее решение диофантова уравнения представляет собой сумму частного решения уравнения и решения соответствующего однородного уравнения (уравнения $ax+by=0$).

Легко понять, что решениями однородного уравнения являются все пары вида $(bt,-at)$, где t — целое.

Пример. 7x - 23y = 131 Проверка решения: $c \vdots$ НОД$(a,b) \Rightarrow$ имеет решения.
Можно угадать частное решение (22,1), так как 154 - 23 = 131.
Тогда все решения — $(22-33t, 1-7t)$, $t\in\mathbb{Z}$.

2.4 Сравнения

Основная идея теории сравнений заключается в том, что два числа a и $b(\in\mathbb{Z})$, имеющие при делении на $m\in\mathbb{N}$ один и тот же остаток, обнаруживают целый ряд одинаковых свойств по отношению к m.

Так по отношению к 2 мы выделяем четные и нечетные числа. Знаем, например, что сумма/разность четных - четное число, произведение четных - четное и т.д.

Определение. Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю $m(a\equiv b(mod\ m))$, если при делении на m они дают одинаковые остатки. **(1)**

Пример. $8\equiv 3(mod\ 5)\equiv 103(mod\ 5)\equiv -2(mod\ 5)\equiv -17(mod\ 5)$ и т.д.

Определение. $a\equiv b(mod\ m)\Leftrightarrow (a-b)\vdots m$. **(2)**

Докажем эквивалентность определений 1 и 2.
$\uparrow$
1) **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**. Пусть остатки одинаковы, т.е. $a=q_1m+r,\ b=q_2m+r\Rightarrow a-b=m(q_1-q_2),\ (q_1-q_2)\in\mathbb{Z}$, т.е. $(a-b)\vdots m$;
2) **(2)** $\Rightarrow$ **(1)**. От противного.
Пусть остатки разные, т.е. $a=q_1m+r_1,\ b=q_2m+r_2$, где $0\le r_1<|m|,\ 0\le r_2<|m|\ (-|m|<-r_2\le 0)$.

Тогда $a-b=m(q_1-q_2)+r_1-r_2$ и $-|m|<r_1-r_2<|m|\ (|r_1-r_2|<|m|\ \mathbf{(3)})\Rightarrow (r_1-r_2)\vdots m$
Но тогда по свойству делимости 4, если $r_1-r_2\neq 0$, то $|r_1-r_2|\ge|m|$, противоречие с **(3)**. Таким образом, $r_1=r_2$. $\downarrow$

2.5 Свойства сравнений

1) $a\equiv a(mod\ m)$
2) $a\equiv b(mod\ m)\Rightarrow b\equiv a(mod\ m)$
3) $a\equiv b(mod\ m),\ b\equiv c(mod\ m)\Rightarrow a\equiv c(mod\ m)$

$$\uparrow\begin{cases}(a-b)\vdots m,\\ (b-c)\vdots m.\end{cases}\Rightarrow a-c=\underset{\vdots m}{(a-b)}+\underset{\vdots m}{(b-c)}\vdots m\downarrow$$

Далее считаем, что $a\equiv b(mod\ m),\ c\equiv d(mod\ m)$

4/5) $a\pm c\equiv b\pm d(mod\ m)$

$$\uparrow\begin{cases}(a-b)\vdots m,\\ (c-d)\vdots m.\end{cases}\Rightarrow (a+c)-(b+d)=\underset{\vdots m}{(a-b)}+\underset{\vdots m}{(c-d)}\vdots m\downarrow$$

6) $ac\equiv bd(mod\ m)$

$$\begin{cases}(a-b)\vdots m,\\ (c-d)\vdots m.\end{cases}\Rightarrow ac-bd=ac-bc+bc-bd=c\underset{\vdots m}{(a-b)}+b\underset{\vdots m}{(c-d)}\vdots m\downarrow$$

7) $a^k \equiv b^k$

Следствие. Пусть $P(x)$ — любой многочлен с целыми коэффициентами, т.е. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, тогда из $x \equiv y(mod\ m) \Rightarrow P(x) \equiv P(y)(mod\ m)$.

8) Если $ac \equiv bc(mod\ m)$ и НОД$(c, m) = 1$, то $a \equiv b(mod\ m)$.

$\uparrow ac - bc = c(a - b)$. Так как левая часть делится на m и НОД$(c, m) = 1$, то $(a - b) \vdots m \downarrow$

9) Если $a \equiv b(mod\ m)$ и $\exists\ k \in \mathbb{Z} : a = ka_1,\ b = kb_1,\ m = km_1$, то $a_1 \equiv b_1(mod\ m_1)$.

$\uparrow a - c = k(a_1 - b_1)$, т.е. $k(a_1 - b_1) \vdots km_1 \Rightarrow (a_1 - b_1) \vdots m_1 \downarrow$

Примеры.

1) Признак делимости на 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + ... + a_1 10 + a_0$. Так как $10 \equiv 1(mod\ 3)$, то $10^k \equiv 1(mod\ 3) \Rightarrow n(mod\ 3) = (a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0)(mod\ 3)$.

2) Признак делимости на 11

Так как $10 \equiv -1(mod\ 11)$, то $10^k \equiv (-1)^k(mod\ 11)$.
Тогда $n(mod\ 11) = ((-1)^k a_k + ... + a_2 - a_1 + a_0)(mod\ 11)$

3) Найти остаток от деления на 3 числа $n = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)...(1000^2 + 1)$

$n(mod\ 3) = \{(4^2 + 1) = (1^2 + 1)(mod\ 3),\ (4^2 + 1) = (1^2 + 1)(mod\ 3),\ 1000 : 3 = 333 * 3 + 1\} = (1^2 + 1)^{334}(2^2 + 1)^{333}(3^2 + 1)^{333}(mod\ 3) \equiv (2)^{334}(2)^{333}(1)^{333}(mod\ 3) \equiv (2)^{667}(mod\ 3) \equiv (-1)^{667}(mod\ 3) \equiv -1(mod\ 3) \equiv 2(mod\ 3)$.

4) При каких натуральных n число $8n + 3$ делится на 13?

То есть при каких n $8n + 3 \equiv 0(mod\ 13)$?

$8n \equiv -3(mod\ 13)$
$8n \equiv 10(mod\ 13)$
$4n \equiv 5(mod\ 13)$
$12n \equiv 15(mod\ 13)$
$-n \equiv 2(mod\ 13)$
$n \equiv -2(mod\ 13)$
$n = 13t - 2,\ t \in \mathbb{N}$ или $n = 13t + 11,\ t \in \mathbb{N}$

5) Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению $7x - 23y = 131$.

Избавимся от одного неизвестного: рассмотрим уравнение, например, по модулю 7.

$-23y \equiv 131(mod\ 7)$
$-2y \equiv 5(mod\ 7)$
$2y \equiv -5(mod\ 7)$
$2y \equiv 2(mod\ 7)$
$y \equiv 1(mod\ 7) \Rightarrow y = 7t + 1,\ t \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{131+23y}{7} = \frac{131+23*7t+23}{7} = \frac{154+23*7t}{7} = 22 + 23t$
Ответ: $(22 + 23t, 1 + 7t), t \in \mathbb{Z}$.

2.6 Классификация чисел по данному модулю

Все числа сравнимые с данным a (а значит, сравнимые между собой) по модулю m в один класс.

Остатками при делении на m могут быть $0, 1, 2, ..., m - 1$.

Значит, можно выделить ровно m классов по модулю m.

Класс характеризуется остатком: $a = mt + r,\ t \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r \leq m - 1$. Фактически, каждый класс — арифметическая прогрессия со множителем m.

Выберем произвольным образом по одному числу в каждом классе. Такую группу назовем *полной системой вычетов по модулю* m(ПСВ(m). Для данного m таких систем существует бесконечно много.

Пример. По mod 3: ПСВ(3) = (0,1,2); ПСВ(3) = (10,11,12); ПСВ(3) = (-4,6,-5).

Числовые последовательности и их пределы

Ученик 10-4 класса Паньков М.А. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 16 марта 2021 г.

3 Лекция №21

Определение. Будем говорить, что x_n сходится к $a(\lim_{n\to\infty} x_n = a)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,\ |x_n - a| < \varepsilon$

Геометрический смысл:
a — предел x_n, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
$O_a = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ — ε-окрестность т. a

Примеры:

1. Док-ть $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,$ док-ть: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$
   $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \frac{1}{\varepsilon}$
   $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 \in \mathbb{N}$([x] — выделение целой части)

   $[x] \le x < [x] + 1$
   $\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x}$

   действительно:
   $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, ч.т.д.

2. Док-ть $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

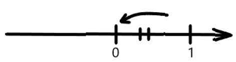
   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall n > N,$ док-ть: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

   $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, ч.т.д. $(N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1] + 1)$

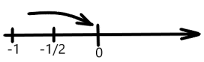
3. α — б.д.д.
   α_n — приближение б.д.д. по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$
   Покажем, что $\alpha_n \longrightarrow_{n\to\infty} \alpha$
   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall n > N,\ |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$
   $|\alpha_n - \alpha| = |a,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_n - a,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}....| = 0,\underbrace{0\ ....\ 0}_{n},\ a_{n+1},\ a_{n+2}.... < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{9n} <$
   $< \varepsilon$
   $10^n = (1+9)^n > 9n \qquad n > \frac{1}{9\varepsilon}$
   $N = [\frac{1}{9\varepsilon}] + 1$

   Сходимость может быть разной

   $x_n = \frac{1}{n}$

   $x_n = -\frac{1}{n}$

   $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.
по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 21 апреля 2021 г.

4 Лекция №24

4.1 Свойства бесконечно больших

1. Если предел последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена снизу, т.е. $b_n \geq b\ \forall n$, тогда $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
2. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена $M : b_n \geq M > 0,\ \forall n\ \lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = +\infty$
3. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, а b_n ограничена, т.е. $0 < b_n < M(n \to \infty)\ \forall n$, то
$$(\frac{+\infty}{c>0}) \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$
4. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, а b_n ограничена; $|b_n| \leq M\ \forall n$,
$$(\frac{M}{\infty}) \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$
.

4.1.1 Неопределённости

1) $\infty - \infty$
$2n - n = n \to +\infty$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

2) $\frac{\infty}{\infty}$

$n^2,\ n,\ 2n$

$\frac{n^2}{n}$

3) $\infty * 0$

4.2 Теорема Вейерштрасса

Определение. Числовая последовательность целых чисел называется стабилизирующейся к ξ, если $\exists\ n_0\ \forall n > n_0\ a_n = \xi : a_n \to \xi$

Лемма 1. Если $\{a_n\}$ — последовательность целых неотрицательных чисел, неубывающая и ограниченная сверху, т.е. $a_n \leq N\ \forall n$, то $\exists\ \xi : a_n \to \xi$ и $\xi \leq M$.

хотя число членов последовательности ∞, но между a_1 (самый маленький член последовательности т.к. $a_n \not\searrow$) и M есть только конечное число целых чисел, $\Rightarrow$ только конечно число значений a_n
Обозначим наибольшее значение принимаемое a_n, ч/з ξ, т.е. $\exists n_0 : a_{n_0} = \xi \leq M$, тогда $\forall n > n_0\ a_n = \xi$, т.к. $a_n \downarrow$

$\{a_n\}$ — б.д.д. > 0

$a_1 = \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}...$
$a_2 = \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}...$
$a_3 = \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}...$
...
$a_n = \alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\alpha_{n_3}...$
$\downarrow a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...$

α_{n_0} — целые неотр.
$\alpha_{n_j}\ j = 1, ...$ — это $\in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9\}$

Определение. Будем говорить, что последовательность б.д.д. $(> 0)\{a_n\} \rightrightarrows$
$a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...$ $(a_n \to a)$, если $\forall k\ \alpha_{n_k} \rightrightarrows \gamma_k$

Лемма 2. Если $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных б.д.д. (*) является неубывающей и ограниченной (т.е. $\exists M$ (б.д.д., не оканчивающася последовательностью 9-ок)): $\forall\ n\ a_n \leq M$), то $\exists\ a$:

1) $a_n \rightrightarrows\ a$

2) $a_n \leq a \leq M$

$\uparrow$ В табл. (*) смотрим на первый столбец

α_{10}
α_{20}
α_{30}
...
α_{n0}

Это последовательность неубывающих целых неотр. чисел и ограниченных сверху M по **Л1**
$\exists$ номер $N_0\quad \forall\ n > N_0$
$\alpha_{n_0} \rightrightarrows\ \gamma_0$

α_{10}
α_{20}
α_{30}
...
$\alpha_{N_0 0} = \gamma_0$
γ_0
γ_0

Пусть $n > N_1$, тогда смотрим на $\{\alpha_{n1}\}$

α_{n1} — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой; неубывающая(т.к. $a_n \nearrow\!\!\!\searrow$ и 0-й столбец уже застабилиз.) $\Rightarrow\ \exists\ N_1\ \alpha_{n_1} \rightrightarrows\ \gamma_1\ \forall n > N_1 \geq N_0$

Пусть $n > N_1 \geq N_0$ и смотрим $\{\alpha_{n2}\}$

$\{\alpha_{n2}\}$ — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой, неубывающей(т.к. $a_n \nearrow\!\!\!\searrow$ и 1-ый столбец уже застабилиз.) $\Rightarrow\ \exists N_2\quad \forall n > N_2 \geq N_1 \geq N_0\ \alpha_{n2} \rightrightarrows\ \gamma_2$ и т.д.

в итоге $\forall\ n > N_k \geq N_{k-1} \geq ... \geq N_0\quad \{\alpha_{nk}\} \rightrightarrows\ \gamma_k$, то $a_n \rightrightarrows\ a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_k...$

Из построения $a_n \leq a$
Осталось показать, что а $\leq$ М

Будем доказывать от противного: т.е. пусть $a > M$, т.е. $a_{(k)} = \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ ...,\ \gamma_k > M$
a_k — прибл. по недост. для а, но тогда $a_n\quad n > N_k$
$a_n = \alpha_{n0},\ \alpha_{n1},\ \alpha_{n2},\ ...,\ \alpha_{nk},\ \alpha_{nk+1},\ ... = \gamma_0,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_k\alpha_{nk+1} > a_{(k)} > M$, противоречие с тем, что $a_n \leq M\ \forall n\ \downarrow$

4.2.1 Теорема Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ — числовая последовательность неубывает и ограничена сверху, то она сходится.

$\uparrow$

1. Пусть $x_1 > 0 \Rightarrow \forall\ n\ x_n > 0$ т.к. ($x_n \nearrow\!\!\!\searrow$).
2. Любое $x_n \in \mathbb{R}$ представлена в виде б.д.д.
3. По **Л2**, такая (1) $x_n \rightrightarrows a$
4. Покажем, что $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} a$
   Надо $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\quad \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$

   пусть $n > N_k$, где N_k - номер, когда k-ый столбец в (*) застабилиз., тогда

$$|x_n - a| = |\gamma_0, \gamma_1....\gamma_k\alpha_{nk+1}\alpha_{nk+2}... - \gamma_0, \gamma_1\gamma_2...\gamma_k\gamma k + 1\gamma_{k+2}...|$$

$$= 0,\underbrace{0...0}_{k}\beta_{k+1}\beta_{k+2}... < 0,\underbrace{0...0}_{k-1}1 = \frac{1}{10^k} < \frac{1}{9k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{1}{9\varepsilon} \quad \varepsilon \to k \to N_k = N \downarrow$$

Замечание 1. Если $x_1 < 0$, тогда рассм. $y_1 = x_1 + c \ : \ y_1 > 0$, тогда по доказ. $y_n = x_n + c \searrow$, ограничена сверху и $y_1 > 0 \Rightarrow$ по доказ $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Rightarrow$ ....

Замечание 2. Аналогично можно доказать, что, если $\{x_n\} \nearrow$ и ограничена снизу, то она сх-ся.

В общем случае:
Если последовательность монотонна и ограничена, то она сх-ся $\downarrow$

Пример.

$a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}$; $a_1 = 2$, доказать, что $\{a_n\}$ сх-ся и найти lim.

$a_1 = 2;\ a_2 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{5}{4};\ a_4 = \frac{9}{8}$
Предположение: $\searrow$ и $1 < a_n \leq 2$

$a = \frac{a+1}{2}$
$2a = a + 1$
$a = 1$

I. Покажем, что $1 < a_n \leq 2$ 1) База $n = 1$ $1 < a_1 = 2 \leq 2$ верно

2) Пусть при $n = k$ $1 < a_k \leq 2$ выполнено

3) Надо при $n = k+1$ $1 < a_{k+1} \leq 2$
$1 = \frac{1}{2}(1+1) <$ (по ПИ) $a_{k+1} = \frac{a_k+1}{2} = \frac{1}{2}(a_k + 1) \leq \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \leq 2$
$\Downarrow$ по ПМИ $\forall n\ 1 < a_n \leq 2$

II. $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n+1)}{2} - a_n = \frac{1-a_n}{2}(a_n > 1$ из опр $< 0) < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \forall\ n \in N$ т.е. a_n - убыв.

III. Из I и II по Т. Вейерштрасса $\exists\ lim_{n\to\infty} a_n$. Пусть $lim_{n\to\infty} = a \Rightarrow a = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1$

Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.
по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 28 апреля 2021 г.

5 Лекция №25

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
1^∞
$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$

5.1 Число e

1) $\{x_n\}$ — ограничена
2) $\{x_n\}$ — монотонна
Из 1) и 2) $\Rightarrow$ сходятся

I монотонна и возрастает

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}b^k = 1*a^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\ a^{n-k}b^k = a^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k =$

$= a^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k$

$x_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + ... +$

$+\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k} + ... + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n^n} = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + ... + \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{n^{k-1}} + ... +$

$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n}) + ... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{n-1}{n})$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)n(n+1-2)...(n+1-(k-1))}{k!}a^{n+1-k}b^k$

$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + ... + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{k-1}{n+1}) + ... + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1}) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1})}_{>0} \Rightarrow TODO$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$

$0 < (1-\frac{1}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})\ n > 1$
аналог:
$0 < 1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n+1} \Rightarrow (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) < (1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$
$\forall n\ x_n < x_{n+1} \Rightarrow$ возрастает

II ограничена

$2 < x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!}$

$<$

$\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2*3} < \frac{1}{2*2} = \frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{3*4} < \frac{1}{2*2*2} = \frac{1}{2^3}$

$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} ... \frac{1}{2^{k+1}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

$x_n \nearrow$
$\underbrace{2 < x_n < 3}$
$\Downarrow$
по теореме Вейерштрасса:
$\exists\ \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
$e \approx 2.718281828459045...$

$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\frac{n-1+1}{n-1}})^n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\underbrace{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}_{\to e}\underbrace{(1+\frac{1}{n-1})}_{\to 1}})^n = e^{-1}$

5.2 Принцип вложенных промежутков

Теорема. Пусть задана система замкнутых промежутков:
$\sigma_n = [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} : \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset ... \supset \sigma_n \supset \sigma_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
$\alpha_n = b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Тогда $\exists!\ c\ :\ c \subset \sigma_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\uparrow$

1. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n \le ... \le b_n \le b_{n-1} \le ... \le b_1$
   $\{a_n\}$ ↘ и ограничена сверху любым $b_n \forall n \ \Rightarrow\ b_n$ сх-ся по т. Вейерштрасса
   $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = c_1 \quad c_1 \le b_n\ \forall n$
   $\{b_n\}$ ↗ и ограничена любым $a_n\ \forall n$ снизу
2. $c_1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n + n_n) = 0 + c_2 = c_2$
   $c_1 = c_2 = c$
3. уже в п.1 показали, что $a_n \le c \le b_n\ \forall\ n$, т.е. $c \in [a_n; b_n]\ \forall\ n$
4. Покажем, такое c $\exists!$ от противного: пусть есть еще $\widetilde{c}$ — общая точка всех промежутков $\widetilde{c} \ne c$, например, $\widetilde{c} < c$

   Тогда: $\lim_{n\to\infty} a_n = c\ \Rightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ :\ \forall n > N, c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$

   $a_n > c - \varepsilon = \{\varepsilon = \frac{c-\widetilde{c}}{2}\} = c - \frac{c-\widetilde{c}}{2} = \frac{c+\widetilde{c}}{2} > \frac{2c}{2} = \widetilde{c}$
   $\exists N\ :\ \forall n > N\ a_{n1} > \widetilde{c}$ т.е. для $n > N\ \widetilde{c} \notin [a_n; b_n]$ — противоречие $\downarrow$

Замечание.

1) $[a_n; b_n]!$
$1 - \frac{1}{n}; 1 \to (1,1) = \emptyset$ 2) Верна для $\mathbb{R}$, неверна для $\mathbb{Q}$

5.3 Подпоследовательности

Определение. Числовая последовательность $\{b_k\} = \{a_{nk}\}$, где $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ... n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ последовательность натуральных чисел называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...; \frac{1}{100}; ...$

$b_k = \frac{1}{2k} \quad \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; ... \frac{1}{100}; ...$

$b'_k = \frac{1}{2k+1} \quad \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; ...$

$b''_k = \frac{1}{k+3} \quad \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...$

$b'''_k = \frac{1}{3k} \quad ...$

$a_n = (-1)^n$

$b'_k = 1$

$b''_k = -1$

Определение. Если $\exists$ lim подпоследовательности $b_k = a_{nk}$ $\lim_{k\to\infty} b_k = b$, то b — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.

Пример. $a_n = (-1)^n$
Частичные пределы: $b'_k = 1,\ b''_k = -1$
$a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$

Теорема. Если $\{a_n\}$ — сходится к a, то и все частичные пределы $\{a_n\}$ тоже равны a.

$\uparrow\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$

начиная с $n > N\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\ \forall\varepsilon$, но тогда $\forall n_k > N\ a - \varepsilon < a_{nk} < a + \varepsilon \Rightarrow$ т.е. $\lim_{k\to\infty} a_{nk} = a\ \downarrow$

Следствие.

$x_n = (-1)^n$

Если $\exists\ x_{nk}$ и $x'_{nk}:\ \lim_{k\to\infty} x_{nk} \neq \lim_{k\to\infty} x'_{nk} \Rightarrow \nexists\ \lim x_n$

Пример.
$a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$
$a_{nk} = a_{2k} = \sin \pi k = 0$
$\sin\frac{\pi n}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\cancel{\pi} n}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} + 4\ \cancel{\pi} k$
$a_{4k+1} = \sin\frac{\pi(4k+1)}{2} = \sin 2\pi k + \frac{\pi}{2} = 1$

Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.
по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 05 мая 2021 г.

6 Лекция №26

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists$-ет хотя бы одна сходящаяся последовательность.

$\uparrow$

1. Раз ограничена; то $\exists\ M\ :\ \forall n\ |x_n| \leq M$, т.е. $I_0 = [-M; M]$, то $\forall n\ x_n \in I_0$
   $d_0 = 2M$
2. $\frac{I_0}{2}$ (делим I_0 пополам)
   Пусть I_1-та половина, в которой содержится ∞ число членов последовательности x_n (если в обеих, то выбираем любую из них) $I_1 = \frac{I_0}{2}$
   $d_1 = \frac{2M}{2}$
3. $\frac{I_1}{2} \Rightarrow$, та часть, в которой содержится ∞ число членов последовательности $\{x_n\}$ (если в обеих, то любую из) в I_2 $b_2 = x_{n2} \in I_2$ $n_2 > n_1$
   $d_1 = \frac{2M}{2^2}$
4. и т.д. $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset .....$
   k)$d_k = \frac{2M}{2^k} \longrightarrow_{k\to\infty} 0$

по Т. о вложенных промежутках $\exists!\ B\ :\ B \in I_k\ \forall k$
Покажем, что $\{b_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} B$

$\forall \varepsilon > 0 \exists\ K : \forall k > K :$

$|b_k - B| < \varepsilon$

$|b_k - B| < |I_k| = \frac{2M}{2^k} < \frac{2M}{k} < \varepsilon$

$2^k > k\ K = [\frac{2M}{\varepsilon}] + 1$

$\downarrow$

6.1 Верхний и нижний предел последовательности

6.1.1 Верхний предел

Определение. Число M будем называть верхним пределом последовательности x_n, если

1. $\exists\ x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} M$
2. $\forall x'_{nk} \to M'\ M' \leq M$

$\uparrow$

Обозначение. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \overline{\lim} x_n = M$

Пример.

1. $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim x_n = 1$
2. $x_n = \sin\frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim x_n = 1$
3. $x_n = (n)^{-1} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$
   $1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; ...$

Замечание.

1. Если x_n не ограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. Если $\overline{\lim} x_n = a$(a — конечное число)

6.1.2 Нижний предел

Определение. Число m будем называть нижним пределом последовательности x_n, если

1. $\exists\ x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} m$
2. $\forall x'_{nk} \to m'\ m' \le m$

Обозначение. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim} x_n = M$

Пример.

1. $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim x_n = 1; \underline{\lim} x_n = -1$
2. $x_n = \sin\frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim x_n = 1 \underline{\lim} x_n = -1$
3. $x_n = (n)^{-1} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty; \underline{\lim} x_n = 0$
   $1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; ...$

Замечание.

1. Если x_n не ограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$
2. Если $\underline{\lim} x_n = a$(а — конечное число)

Теорема. У всякой $\{x_n\}\ \exists\ \overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$.

$\uparrow$

1. x_n — не ограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. x_n — не ограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$
3. x_n ограничена сверху и снизу

дальше как в Т. Больцано-Вейерштрасса, только 3.1) если ищем $\overline{\lim}$, то всегда беру правую половинку, если возникает выбор.
3.2) Для $\underline{\lim}$, то беру левую половинку

$\downarrow$

Замечание. Очевидно, что $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$

Теорема. $\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = A$ (конечн, $+\infty$, $-\infty$) $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

$\uparrow$ "$\Rightarrow$"пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

1. $A = +\infty$, т.е. $lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
   $\Rightarrow \underline{lim} x_n = +\infty \Rightarrow \overline{lim} x_n = +\infty$
2. $A = -\infty$; т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = -\infty$
3. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ (A — конечное число) $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$ уже доказывали

"$\Leftarrow$"

1. $\lim x_n = +\infty$ т.е. $\lim n \to \infty x_n = +\infty$
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$
3. A — конечный $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

Надо $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ A - \varepsilon <_{\text{из } \underline{\lim} x_n = A} x_n <_{\text{из } \overline{\lim} x_n = A} A + \varepsilon$, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

$\downarrow$

6.2 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N$

$|x_n - a| < \varepsilon$

$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

$(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$

Т.е. x_n — такие, что для любого $\varepsilon>0$ я могу их всех(n > N) "закрыть"интервалом длины 2ε

Определение. Последовательность x_n называется фундаментальной(удовлетворяет условию Коши), если $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n,m>N,\ |x_n-x_m|<\varepsilon$

$x_m-\varepsilon<x_n<x_m+\varepsilon$

Теорема. Критерий Коши. Числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall n,m>N:$ $|x_n-x_m|<\varepsilon$

$\uparrow$

"$\Rightarrow$"пусть сходится ($\lim_{n\to\infty}x_n=a$ — конечное число) $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N:|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n-x_m|=|x_n-a+a-x_m|\leq|x_n-a|+|a-x_m|=|x_n-a|+|x_m-a|<_{n>N;m>N}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

"$\Leftarrow$"1) покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0:\forall n,m>N_0,\ |x_n-x_m|<\varepsilon$

Пусть $\varepsilon=1$
$|x_n|-|x_m|\leq|x_n-x_m|<1$
$\Downarrow$
$|x_n|<1+|x_m|$

Фиксированный $m\Rightarrow\forall n>N_0$ рассмотрим $M=\max\{1+|x_m|;|x_1|;|x_2|;|x_3|;...;|x_{N_0}|\}$

2) По Т. Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящиеся последовательности
$\exists x_{nk}\ :\ x_{nk}\xrightarrow[k\to\infty]{}a$

Покажем, что $x_n\to a$