1 Действительные числа

1.1 Введение. Задача измерения отрезков

$a_{\in\mathbb{N}} + x = b_{\in\mathbb{N}}$ есть алгебраическая предпосылка для возникновения целых чисел.

$\mathbb{Z} = N^+ \cup N^- \cup \{0\}$

Свойства для $\mathbb{N}$ сохраняем в $\mathbb{Z}$:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $ab = ba$
4. $a(bc) = (ab)c$
5. $a(b + c) = ab + ac$

$a_{\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}x = b_{\in\mathbb{Z}}$ есть алгебраическая предпосылка для возникновения рациональных чисел Q

O————————A
O—–E

OE — единичный отрезок

$|OA| = n|OE|$

Определение. Отрезки a и b называются соизмеримыми, если $\exists$ отрезок c:

$|a| = n|c|$
$|b| = m|c|,\ m,\ n \in \mathbb{N}$

$|a| = \frac{n}{m}|b|$

Определение. Числа вида $\frac{n}{m}$, где $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}$ назовем рациональными.

Между любыми двумя рациональными числами $\exists\ \infty$ число других рациональных чисел

Например, между r_1 и r_2 существует $\frac{r_1+r_2}{2}$ и т.д.

Множество $\mathbb{Q}$ — "всюду плотно"

Существуют несоизмеримые отрезки:

Нарисуем квадрат со сторонами x и y. $x^2 + x^2 = y^2$. Если они соизмеримы, то $y = rx$. $\nexists\ r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$

От противного:

Пусть $\exists\ r = \frac{n}{m}$ — несократимая $\Rightarrow \frac{n^2}{m^2} = 2 \Rightarrow n^2 = 2m^2 \Rightarrow n = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2m^2 \Rightarrow 2k^2 = m^2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2 \Rightarrow$ дробь сократима — противоречие.

Это возникновение иррациональных чисел

1.2 Бесконечные десятичные дроби

Будем рассматривать десятичные дроби:

1. конечная десятичная дробь.
   $|OA| = 4,806 = 4_{=4\ |OE|_{=e}} + \frac{8}{10} + \frac{6}{1000}$

2. $|OA| = \frac{1}{3}$?
   $\frac{1}{3} = \frac{m}{10^n}$ $\quad 10^n = 3m$ невозможно
   Но можно измерять со все больше возрастающей точностью
   $|_0 - - - - | - - - - |_N - - - - |_{N+1} - - - - >$
   $O - - - - - - - - - - - - A$

   1. Делим OX на отрезки равные 1, т.е. рассмотрим $[n; n+1] \Rightarrow$ пусть A попала в $[N; N+1]$

2. $|_N - - | - - |_A - - | - - |_N - - |_{N+1}$
   $[N,m_1; N,m_1 + \frac{1}{10}]$
   $[N,n_1; N,n_1 + \frac{1}{10}]$ — это тот куда попал A
   $[N,n_1 n_2; N,n_1 n_2 + \frac{1}{100}]$ и т.д.

$[N; N+1] = I_0$
$[N,n_1; N,n_1 + \frac{1}{10}] = I_1$
$[N,n_1 n_2; N,n_1 n_2 + \frac{1}{100}] = I_2$
...
$[N,n_1 n_2 ... n_k; N,n_1 n_2 ... n_k + \frac{1}{10^k}] = I_k$
...
Это процесс(*)!!!

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset ...$

$\alpha_k = N,n_1 n_2 ... n_k \quad \nearrow$

$\alpha'_k = N,n_1 n_2 ... n_k + \frac{1}{10^k} \quad \searrow$

Определение. Этот процесс (*) принято называть бесконечной десятичной дробью и обозначается $\alpha N,n_1 n_2 ... n_k ...$

Определение. Число $\alpha_k = N,n_1 n_2 ... n_k$ — приближение α по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$

Определение. Число $\alpha'_k = N,n_1 n_2 ... n_k + \frac{1}{10^k}$ — приближение α по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$

В общем случае процесс (*), кроме случая конечной десятичной дроби.

Например:

$$0,45$$

$$[0,4; 0,5]$$

процесс раздвоился

$$[0,44; 0,45] \quad | \quad [0,45; 0,46]$$

$$[0,449; 0,450] \quad | \quad [0,450; 0,451]$$

$$[0,4499; 0,4500] \quad | \quad [0,4500; 0,4501]$$

$$...$$

$\cancel{0,44999...(9)}$(такие числа не рассматриваем) $\qquad 0,4500000...(0)$

Определение. Положительным действительным числом называем всякую бесконечную десятичную дробь, не оканчивающуюся последовательностью 9-ок.

Определение. Число β назовем отрицательным действительным числом, если $\beta = -\alpha = -N,n_1 n_2 ... n_k ...$

$0 = 0,000...0...$
$\cancel{0 = -0,000...0...}$

$\alpha = [\alpha_k; \alpha'_k]$

$-\alpha = \beta = [-\alpha'_k; -\alpha_k]$

Свойства.

0. Действительные числа можно сравнивать

   1.

$$\alpha, \beta > 0;\ \alpha = N,n_1 n_2 ... n_k ...;\ \beta = N,m_1 m_2 ... m_k ...$$

$$N < M \Rightarrow \alpha < \beta, N = M, N > M \Rightarrow \alpha > \beta$$

$$\Downarrow$$

$$n_1 < m_1 \Rightarrow \alpha < \beta, n_1 = m_1, n_1 > m_1 \Rightarrow \alpha > \beta$$

$$\Downarrow$$

$$...$$

2.

$$\alpha < 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha < \beta$$

3.

$$\alpha < 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta$$

1.3 Рациональные числа и бесконечные десятичные дроби

Утверждение. Всякое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби.

$\frac{2}{5} = 0,4(0)...$

$\frac{5}{11} = 0,(45)...$

$\frac{1}{7} = 0,(142857)...$

$\frac{8}{45} = 0,1(7)...$

Определение. Период - повторяющаяся группа цифр.

Определение. Длина периода - число цифр.

Утверждение. Всякое рациональное число представимо в виде <u>периодической</u> бесконечной десятичной дроби.

$\uparrow$ Достаточно доказать для правильных дробей.

$\frac{m}{n}$

Остатки при делении на n?

$0_{\text{с этим легко}}, 1, 2, 3, 4, ..., n-1$

Остался $n-1$ остаток

Не более чем через $n-1$ чисел возникает второй раз остаток, который уже был. Далее остатки будут повторяться.

<u>Итог:</u> Иррациональные числа - непериодические бесконечные десятичные дроби.

1.4 Разделяющее число числовых множеств

Некоторую совокупность действительных чисел назовем числовым множеством.

Само множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Другими примерами числовых множеств могут служить:

$\mathbb{R}+$ —– множество положительных действительных чисел.

$\mathbb{Q}-$ —– множество отрицательных рациональных чисел.

$(-\infty; a]$ —– множество действительных чисел $x : x \leq a$.

Определение. Числовое множество X называется ограниченным, если $\exists\ M \in \mathbb{R} : \forall\ x \in X : |x| \leq M$.

Определение. Будем говорить, что множество B лежит справа от множества A, если $\forall\ x \in A$ и $\forall\ y \in B : x \leq y \quad A, B \subset \mathbb{R}$.

Определение. Число $c \in \mathbb{R}$ называется разделяющим числом для множества A и $B \subset \mathbb{R}$, если $\forall\ a \in A$ и $\forall\ b \in B : a \leq c \leq b$.

Из определения следует, что если для множеств A и B существует разделяющее число, то B лежит справа от множества A. Верно и обратное утверждение.

Теорема. Пусть A и B два числовых множества. Причем множество B лежит справа от множества B. Тогда $\exists$ по крайней мере одно число c, разделяющее эти множества.

$\uparrow$ Рассмотрим единичные отрезки вида $[n, n+1]$.

Для множества B рассмотрим самый левый из отрезков $[n, n+1]$, содержащий элементы этого множества (если самый маленький b попал на границу, то берем «достаточный отрезок»). Обозначим этот отрезок $[N, N+1]$. Для простоты будем считать, что $N \geq 0$.

Для множества A рассмотрим самый правый из отрезков $[n, n+1]$. Пусть это $[M, M+1]$.

1. $M > N$ –– невозможно (так как тогда есть $a > b$);
2. $M < N$ –– тогда в качестве разделяющего числа можно взять, например, $c = N. \forall\ a \in A, \forall\ b \in B a \leq c \leq b$.
3. $M = N \Rightarrow$

Разделим $[N, N+1]$ на 10 частей $\Rightarrow [N + \frac{n_1}{10}, N + \frac{n_1+1}{10}], n_1 = 0, 1, 2, ..., 9$.

Снова выбираем $N_1 : [N + \frac{N_1}{10}, N + \frac{N_1+1}{10}]$ –– самый левый (с замечанием) из таких отрезков, содержащий элементы из B, и $M_1 : [N + \frac{M_1}{10}, N + \frac{M_1+1}{10}]$ –– самый правый из таких отрезков, содержащий элементы из A.

1. $M_1 > N_1$ –– невозможно (так как тогда есть $a > b$);
2. $M_1 < N_1$ –– тогда в качестве разделяющего числа можно взять, например, $c = N, N_1. \forall\ a \in A, \forall\ b \in B a \leq c \leq b$.
3. $M_1 = N_1 \Rightarrow$

Полученный $[N + \frac{N_1}{10}, N + \frac{N_1+1}{10}] = [N, N_1; N, N1 + 1/10]$ снова делим на 10 частей. И снова выбираем самый левый промежуток, содержащий элементы из B, и самый правый, содержащий элементы из A. И т.д.

В итоге, мы либо найдем c, либо в самом «тяжелом случае» построим систему вложенных промежутков:

$[N, N+1] \supset [N, N_1; N, N_1 + \frac{1}{10}] \supset [N, N_1N_2; N, N_1N_2 + \frac{1}{100}] \supset ...$

Возьмем в качестве c б.д.д., отвечающую этому процессу: $c = N, N_1N_2...N_k...$

Это c и будет разделяющим числом.

Действительно, покажем, что $\forall\ b \in B c \leq b$.

От противного. Если существует $b < c$, то из упорядоченности действительных чисел при большом l точки b и c попали бы в разные отрезки длины $\frac{1}{10^l}$, и выбранный малый промежуток не был бы самым левым для множества B. $\Rightarrow c \leq b$

Аналогично $\forall\ a \in A a \leq c$.

Остались неосвещенными моменты: c оканчивается последовательностью 9-ок, для $N < 0$. $\downarrow$

1.5 Теорема о разноцветных отрезках (единственность разделяющего числа)

Определение. Пусть множество B лежит справа от A. Назовем отрезок $[a; b]$ разноцветным, если $a \in A, b \in B$.

Определение. Будем говорить, что существует система сколь угодно малых разноцветных отрезков, если $\forall\ \varepsilon > 0$ (каким бы маленьким мы его не взяли) $\exists$ разноцветные отрезки $[a; b]$ и $[\alpha; \beta]$ ($[\alpha; \beta] \supset [a; b], \alpha, \beta$ –– рациональные числа): $\beta - \alpha < \varepsilon$.

Замечание.

1. Так как $\forall\ \varepsilon$, то таких отрезков сколь угодно много (система).
2. Координаты α, β –– рациональные числа нужны нам, так как действия с действительными числами ещё не вводились. Мы не знаем, что есть $a - b$. Если бы знали, то просто писали бы: $\exists$ разноцветные отрезки $[a; b] : b - a < \varepsilon$.

Теорема. Пусть множество B лежит справа от A. Для того, чтобы A и B разделялись лишь одним числом необходимо и достаточно, чтобы $\exists$ система сколь угодно малых разноцветных отрезков.

$\uparrow$ Необходимость “$\Leftarrow$“. Пусть существует система сколь угодно малых разноцветных отрезков, покажем, что $\exists! c$.

От противного. Пусть $\exists$ два разделяющих числа c_1 и c_2 (для определенности $c_1 < c_2$). При достаточно большом n числа c_1 и c_2 принадлежат отрезкам деления числовой оси длины $\frac{1}{10^n}$, не имеющими общих концов (это следует из упорядоченности действительных чисел). Т.е. между c_1 и c_2 существует хотя бы один отрезок $[\frac{m}{10^n}; \frac{m+1}{10^n}] : c_1 < \frac{m}{10^n} < \frac{m+1}{10^n} < c_2$.

Но тогда, $\forall\ a \in A, b \in B a \leq c_1 < c_2 \leq b$, а потому $d =$(длина любого отрезка с рациональными концами, содержащего $[a; b]) > \frac{1}{10^n}$. Противоречие с существованием системы сколь угодно малых разноцветных отрезков.

Достаточность "$\Rightarrow$". Пусть $\exists! c$, покажем существование системы сколь угодно малых разноцветных отрезков.

c — единственное разделяющее число. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмём $[\alpha, \beta]$ с рациональными концами такой, что $\alpha < c < \beta$. Например, если c_n — приближение c по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$, то можем рассмотреть целую систему таких промежутков: $[\alpha_n; \beta_n] = [c_n - \frac{1}{10^n}; c_n + \frac{1}{10^n}]$.

Покажем, что на любом отрезке такого вида есть, хотя бы одно число из A. От противного: пусть нет, тогда $\forall\ a \in A a < \alpha_n$, при этом $\forall\ b \in B b \geq c$. Тогда все числа из $[\alpha_n; c]$ разделяют A и B. Аналогично, можно показать, что на любом отрезке такого вида есть, хотя бы одно число из B. Значит любой такой $[\alpha_n; \beta_n] \supset [a_n; b_n]$ — разноцветный.

$\beta - \alpha = \frac{2}{10^n} < \{10^n = (1+9)^n > 9n\} < \frac{2}{9n} < \varepsilon_k < \varepsilon$, где $N \geq [\frac{2}{9\varepsilon_k}] + 1. \downarrow$

Пример. Покажем, что отрезки $[1; 4][4; 8]$ разделяются лишь числом 4.

Заметим, что отрезки $[4 - \frac{1}{n}; 4 + \frac{1}{n}]$ — разноцветные. Их длина $d = \frac{2}{n}$ путем выбора n может быть сделана меньше любого наперед заданного действительного ε. Если $\frac{2}{n} < \varepsilon_k < \varepsilon$, то $n \geq [\frac{2}{\varepsilon_k}] + 1$.

Пример. Найти разделяющее число множеств $A = \{\frac{n^2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{\frac{n^2+2}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$

Заметим, что $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2+1-1}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1} < 1$, $\frac{n^2+2}{n^2+1} = \frac{n^2+1+1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{n^2+1} > 1$. Т.е. множество B лежит справа от A. Докажем, что 1 — единственное разделяющее число этих множеств. Отрезки $[1 - \frac{1}{n^2+1}; 1 + \frac{1}{n^2+1}]$ разноцветные, их длина $d = \frac{2}{n^2+1} < \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon_k < \varepsilon \Rightarrow n \geq [\frac{2}{\varepsilon_k}] + 1$.

1.6 Арифметические операции над действительными числами

Сложение

Пусть заданы $x, y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два множества:

$A = \{p + q,$ где $p \in \mathbb{Q}, p \leq x, q \in \mathbb{Q}, q \leq y\}$,

$B = \{r + s,$ где $r \in \mathbb{Q}, r \geq x, s \in \mathbb{Q}, s \geq y\}$.

Так как $p \leq x \leq r$, $q \leq y \leq s \Rightarrow p + q \leq r + s$, значит множество B лежит справа от $A \Rightarrow$ существует по крайней мере одно разделяющее число для этих множеств.

Утверждение. Покажем, что разделяющее число существует единственное.

Для этого достаточно показать существование системы сколь угодно малых разноцветных отрезков.

Пусть десятичное приближение по недостатку с точностью $\frac{1}{10^n}$ для x — это $\frac{l}{10^n}$, а для y — $\frac{m}{10^n}$. Тогда $\frac{l}{10^n} \leq x < \frac{l+1}{10^n}$, $\frac{m}{10^n} \leq x < \frac{m+1}{10^n}$. Тогда $\frac{l}{10^n} + \frac{m}{10^n} \in A$, а $\frac{l+1}{10^n} + \frac{m+1}{10^n} \in B$. Но $d = (\frac{l+1}{10^n} + \frac{m+1}{10^n}) - (\frac{l}{10^n} + \frac{m}{10^n}) = \frac{2}{10^n} < \frac{2}{9n} < \varepsilon_k < \varepsilon$. Т.е. существуют сколь угодно маленькие разноцветные отрезки.

Это единственное число, разделяющее множества A и B, называют суммой $x + y$.

Определение. Суммой действительных чисел x и y называют такое число $x + y$, которое является единственным разделяющим числом для сумм $p + q (p \leq x, q \leq y, p, q \in \mathbb{Q})$ и сумм $r + s (r \geq x, s \geq y, r, s \in \mathbb{Q})$.

Разность

Определение. Разностью действительных чисел x и y назовем сумму x и $(-y)$.

Умножение

(I)

$x, y > 0$

$A = \{pq, p, q \in \mathbb{Q}^+ : p \le x; q \le y\}(*)$

$B = \{rs, r, s \in \mathbb{Q}^+ : x \le r; y \le s\}(*)$

Легко понять, что $pq \le rs \Rightarrow B$ лежит справа от $A \Rightarrow \exists$ хотя бы одно разделяющее число c.

Утверждение. $\exists! c$ для A и B (*)

(II)

Если x, y не > 0, то произведение вводится в соответствии с правилом знаков.

$(-x)y = x(-y) = -xy$

и

$(-x)(-y) = xy$

Свойства (доказываются из свойств рациональных чисел):

1. $xy = yx$
2. $x(yz) = (xy)z$
3. $x(y + z) = xy + xz$

Остается в силе:

$0 * x = x * 0 = 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$

$1 * x = x * 1 = x, \forall\ x \in \mathbb{R}$

Деление

$x > 0$ Поймем, что есть $\frac{1}{x}$

$A = \{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{Q}^+ : p \ge x\}$ (**)

$B = \{\frac{1}{q}, q \in \mathbb{Q}^+ : q \le x\}$ (**)

$q \le p \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{1}{p} \le \frac{1}{q} \Rightarrow$ множество B лежит справа от A.

$\Downarrow$

$\exists$ хотя бы одно разделюящее число.

Утверждение. $\exists! c$ для A и B (**)

Если $x = 0 : \nexists\ \frac{1}{x}$

Если $x < 0 : \frac{1}{x} = -\frac{1}{-x}$

$x, y \in \mathbb{R} : \quad y \ne 0 \quad \frac{x}{y} = x * (\frac{1}{y})$

Свойство:

$x * \frac{1}{x} = 1 \quad \forall x \ne 0$

Множество $\mathbb{R}$ замкнуто относительно четырех арифметических операций.

$\mathbb{R}$ — числовое поле.

1.7 Превращение бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные

Пример.

$0,(54)$

$x = 0,(54)$

$100x = 54,(54)$

$99x = 54$

$x = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

Пример.

$0,(351)$

$x = 0,(351)$

$1000x = 351,(351)$

$999x = 351$

$x = \frac{351}{999}$

Пример.

$0,47(612)$

$x = 0,47(612)$

$x * 10^5 = 47612,(612)$

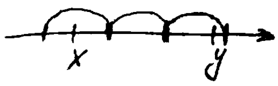
$x * 10^2 = 47,(612)$

$x = \frac{47612-47}{10^2 * 999}$

1.8 Рациональное и иррациональное число. Плотность этих множеств в R

Утверждение. Для $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \exists$ отрезок с рациональными концами: он лежит между x и y. (***)

$\uparrow$



$x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$\exists$ разбиение отрезками длины $\frac{1}{10^n}$, что x и y лежат в отрезках такой длины и не имещих общих концов: это отрезки вида $[\frac{m}{10^n}{}_{=r \in \mathbb{Q}}; \frac{m+1}{10^n}] = [r, r + \frac{1}{10^n}] \downarrow$

Утверждение. Между любыми $x, y \in \mathbb{R}, x \subset y \exists\ \infty$ число рациональных чисел.

$\uparrow$

Уже в утверждении (***) показали, что $\exists$ между x и y $[r_{\in \mathbb{Q}}, r + \frac{1}{10^n}{}_{\in \mathbb{Q}}] = [r_1, r_2] \Rightarrow r_1 < \frac{r_1 + r_2 = r_3}{2} < r_2$

$r_1 < \frac{r_1 + r_3}{2} < r_3 < \frac{r_3 + r_2}{2} < r_2$ и т.д. $\downarrow$

Утверждение. Между x и $y \in \mathbb{R} x < y \exists\ \infty$ число иррациональных чисел.

$\uparrow$

Покажем, что между любыми двумя рациональными числами $\exists$ хотя бы одно иррациональное.

Уже между x и $y \exists\ [r, r + \frac{1}{10^m}] = [r_1, r_2]$

$r_1 = \alpha, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m \quad r_2 = r_1 + \frac{1}{10^m}$

Легко понять, что $\beta = \alpha, \alpha_1 ... \alpha_m 00100111$ (допишем заведомо непериодический конец) $\downarrow$

Определение. Числовое множество A эквивалентно множеству B, если $\exists$ взаимнооднозначное отображение A в B.

Определение. Числовое множество A называется счетным, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$. (т.е. все элементы A можно пронумеровать).

Утверждение. Множество рациональных чисел счётно.

$\uparrow$

<u>Способ 1</u> $\frac{p}{q}$ — рациональное, если $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

$s = |p| + q$ — высота рационального числа.

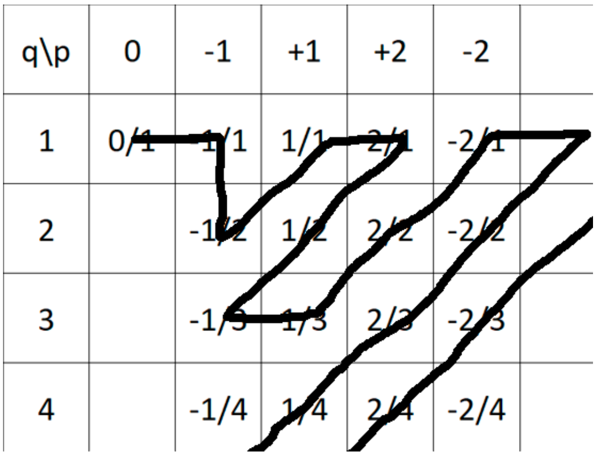
$s = 1 \quad \frac{0}{1} \quad 1$ист

$s = 2 \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \cancel{\frac{0}{2}} \quad 3$ ист

$s = 3 \quad \frac{\pm 2}{1} \frac{\pm 1}{2} \cancel{\frac{0}{3}} 5$ ист

s : не более $2(s-1)+1 = 2s-1$ ист — конечное число и т.д. все занумерую.

Способ 2 — - линия, вдоль которой нумерую, вычеркивая повторяющиеся.



q\p	0	-1	+1	+2	-2
1	0/1	-1/1	1/1	2/1	-2/1
2		-1/2	1/2	2/2	-2/2
3		-1/3	1/3	2/3	-2/3
4		-1/4	1/4	2/4	-2/4

$\downarrow$

Утверждение. Множество $\mathbb{R}$ — несчетное множество.

$\uparrow$

Остается пологать, что $(0;1)$ — несчетное множество.

От противного. Пусть счетное, тогда нумерую все элементы.

Обозначим эту группу (****)

$r_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...$

$r_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...$

$r_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}...$

$r_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}...$

и т.д.

$\beta = 0, \beta_1\beta_2...\beta_n...$

$\beta_1 \neq a_{11} \neq 9 \Rightarrow \beta \neq r_1$

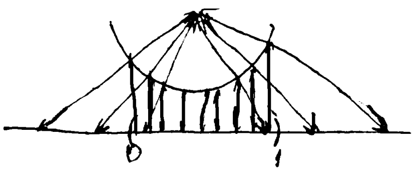
$\beta_2 \neq a_{22} \neq 9 \Rightarrow \beta \neq r_2$

$\beta_3 \neq a_{33} \neq 9 \Rightarrow \beta \neq r_3$

и т.д.

$\beta \neq r_n, n \in \mathbb{N}$

т.е. $\beta \notin (****)$ — противоречие со счетностью $(0, 1) \downarrow$



$(0,1)$ эквивалентно $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_{\text{несчет.}} = \mathbb{Q}_{\text{счет.}} \cup \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ несчетная.