Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.
по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 05 мая 2021 г.

1 Лекция №26

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists$-ет хотя бы одна сходящаяся последовательность.

$\uparrow$

1. Раз ограничена; то $\exists\ M\ :\ \forall n\ |x_n| \leq M$, т.е. $I_0 = [-M; M]$, то $\forall n\ x_n \in I_0$
   $d_0 = 2M$
2. $\frac{I_0}{2}$ (делим I_0 пополам)
   Пусть I_1-та половина, в которой содержится ∞ число членов последовательности x_n (если в обеих, то выбираем любую из них) $I_1 = \frac{I_0}{2}$
   $d_1 = \frac{2M}{2}$
3. $\frac{I_1}{2} \Rightarrow$, та часть, в которой содержится ∞ число членов последовательности $\{x_n\}$ (если в обеих, то любую из) в I_2 $b_2 = x_{n2} \in I_2$ $n_2 > n_1$
   $d_1 = \frac{2M}{2^2}$
4. и т.д. $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset .....$
   k)$d_k = \frac{2M}{2^k} \longrightarrow_{k\to\infty} 0$

по Т. о вложенных промежутках $\exists!\ B\ :\ B \in I_k\ \forall k$
Покажем, что $\{b_k\} \xrightarrow[k\to\infty]{} B$

$\forall \varepsilon > 0 \exists\ K : \forall k > K :$

$|b_k - B| < \varepsilon$

$|b_k - B| < |I_k| = \frac{2M}{2^k} < \frac{2M}{k} < \varepsilon$

$2^k > k\ K = [\frac{2M}{\varepsilon}] + 1$

$\downarrow$

1.1 Верхний и нижний предел последовательности

1.1.1 Верхний предел

Определение. Число M будем называть верхним пределом последовательности x_n, если

1. $\exists\ x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} M$
2. $\forall x'_{nk} \to M'\ M' \leq M$

$\uparrow$

Обозначение. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \overline{\lim} x_n = M$

Пример.

1. $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim x_n = 1$
2. $x_n = \sin\frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim x_n = 1$
3. $x_n = (n)^{-1} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$
   $1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; ...$

Замечание.

1. Если x_n не ограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. Если $\overline{\lim} x_n = a$(а — конечное число)

1.1.2 Нижний предел

Определение. Число m будем называть нижним пределом последовательности x_n, если

1. $\exists\ x_{nk} : x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} m$
2. $\forall x'_{nk} \to m'\ m' \leq m$

Обозначение. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim} x_n = M$

Пример.

1. $x_n = (-1)^n \Rightarrow \lim x_n = 1; \underline{\lim} x_n = -1$
2. $x_n = \sin \frac{\pi n}{2} \Rightarrow \lim x_n = 1 \underline{\lim} x_n = -1$
3. $x_n = (n)^{-1} \Rightarrow \overline{\lim} x_n = +\infty; \underline{\lim} x_n = 0$
   $1; 2; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}; 6; \frac{1}{7}; ...$

Замечание.

1. Если x_n не ограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$
2. Если $\underline{\lim} x_n = a$(а — конечное число)

Теорема. У всякой $\{x_n\}\ \exists\ \overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$.

$\uparrow$

1. x_n — не ограничена сверху, то $\overline{\lim} x_n = +\infty$
2. x_n — не ограничена снизу, то $\underline{\lim} x_n = -\infty$
3. x_n ограничена сверху и снизу

дальше как в Т. Больцано-Вейерштрасса, только 3.1) если ищем $\overline{\lim}$, то всегда беру правую половинку, если возникает выбор.
3.2) Для $\underline{\lim}$, то беру левую половинку

$\downarrow$

Замечание. Очевидно, что $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

Теорема. $\exists\ \lim_{n\to\infty} x_n = A$ (конечн, $+\infty$, $-\infty$) $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

$\uparrow$ "$\Rightarrow$"пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

1. $A = +\infty$, т.е. $lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
   $\Rightarrow \underline{lim} x_n = +\infty \Rightarrow \overline{lim} x_n = +\infty$
2. $A = -\infty$; т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = -\infty$
3. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ (А — конечное число) $\Rightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$ уже доказывали

"$\Leftarrow$"

1. $\lim x_n = +\infty$ т.е. $\lim n \to \infty x_n = +\infty$
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$
3. А — конечный $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = A$

Надо $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ A - \varepsilon <_{\text{из } \underline{\lim} x_n = A} x_n <_{\text{из } \overline{\lim} x_n = A} A + \varepsilon$, т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

$\downarrow$

1.2 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N$

$|x_n - a| < \varepsilon$

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$

$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$

Т.е. x_n — такие, что для любого $\varepsilon > 0$ я могу их всех(n $>$ N) "закрыть"интервалом длины 2ε

Определение. Последовательность x_n называется фундаментальной(удовлетворяет условию Коши), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$

Теорема. Критерий Коши. Числовая последовательность $\{x_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n, m > N :$ $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$\uparrow$

"$\Rightarrow$"пусть сходится ($\lim_{n\to\infty} x_n = a$ — конечное число) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| = |x_n - a| + |x_m - a| <_{n>N;m>N} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

"$\Leftarrow$"1) покажем, что $\{x_n\}$ — ограничена $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0 : \forall n, m > N_0,\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = 1$
$|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m| < 1$
$\Downarrow$
$|x_n| < 1 + |x_m|$

Фиксированный $m \Rightarrow \forall n > N_0$ рассмотрим $M = \max\{1 + |x_m|; |x_1|; |x_2|; |x_3|; ...; |x_{N_0}|\}$

2) По Т. Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить сходящиеся последовательности
$\exists x_{nk}\ :\ x_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$