

Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А.

по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.

от 28 апреля 2021 г.

1 Лекция №25

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$$

1.1 Число e

1) $\{x_n\}$ — ограничена

2) $\{x_n\}$ — монотонна

Из 1) и 2) \Rightarrow сходятся

I монотонна и возрастает

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = 1 * a^n + \sum_{k=1}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} a^{n-k} b^k$$

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{n^{k-1}} + \dots +$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{n-1}{n})$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)n(n+1-2)\dots(n+1-(k-1))}{k!} a^{n+1-k} b^k$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) + \dots + \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{k-1}{n+1}) + \dots + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n-1}{n+1}) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{n}{n+1})}_{>0} \Rightarrow TODO$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$$

$$0 < (1 - \frac{1}{n}) < (1 - \frac{1}{n+1}) \quad n > 1$$

аналог:

$$0 < 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1} \Rightarrow (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) < (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})$$

$\forall n \quad x_n < x_{n+1} \Rightarrow$ возрастает

II ограничена

$$2 < x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

<

$$\frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2*3} < \frac{1}{2*2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{3*4} < \frac{1}{2*2*2} = \frac{1}{2^3}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$$x_n \nearrow$$

$$\underline{2 < x_n < 3}$$

\downarrow

по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$e \approx 2.718281828459045\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n-1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\frac{n-1}{n-1} + 1})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^{\frac{n-1}{n-1} + 1} (1 + \frac{1}{n-1}) \rightarrow 1})^n = e^{-1}$$

1.2 Принцип вложенных промежутков

Теорема. Пусть задана система замкнутых промежутков:

$$\sigma_n = [a_n; b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots \supset \sigma_n \supset \sigma_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_n = b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Тогда $\exists! c : c \in \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

↑

1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$
 $\{a_n\} \nearrow$ и ограничена сверху любым $b_n \forall n \Rightarrow b_n$ сх-ся по т. Вейерштрасса
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_1 \quad c_1 \leq b_n \quad \forall n$
 $\{b_n\} \searrow$ и ограничена любым $a_n \quad \forall n$ снизу
2. $c_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n + b_n) = 0 + c_2 = c_2$
 $c_1 = c_2 = c$
3. уже в п.1 показали, что $a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n$, т.е. $c \in [a_n; b_n] \quad \forall n$
4. Покажем, такое $c \exists!$ от противного: пусть есть еще \tilde{c} — общая точка всех промежутков $\tilde{c} \neq c$, например, $\tilde{c} < c$
Тогда: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$
 $a_n > c - \varepsilon = \{ \varepsilon = \frac{c - \tilde{c}}{2} \} = c - \frac{c - \tilde{c}}{2} = \frac{c + \tilde{c}}{2} > \frac{2c}{2} = \tilde{c}$
 $\exists N : \forall n > N \quad a_{n1} > \tilde{c}$ т.е. для $n > N \quad \tilde{c} \notin [a_n; b_n]$ — противоречие ↓

Замечание.

- 1) $[a_n; b_n]!$
- 1) $1 - \frac{1}{n}; 1 \rightarrow (1, 1) = \emptyset$ 2) Верна для \mathbb{R} , неверна для \mathbb{Q}

1.3 Подпоследовательности

Определение. Числовая последовательность $\{b_k\} = \{a_{n_k}\}$, где $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ последовательность натуральных чисел называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Пример. $a_n = \frac{1}{n} \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{100}; \dots$

$$b_k = \frac{1}{2k} \quad \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \dots \frac{1}{100}; \dots$$

$$b'_k = \frac{1}{2k+1} \quad \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \dots$$

$$b''_k = \frac{1}{k+3} \quad \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$$

$$b'''_k = \frac{1}{3k} \quad \dots$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$b'_k = 1$$

$$b''_k = -1$$

Определение. Если $\exists \lim$ подпоследовательности $b_k = a_{n_k} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$, то b — частичный предел последовательности $\{a_n\}$.

Пример. $a_n = (-1)^n$

Частичные пределы: $b'_k = 1, \quad b''_k = -1$

$$a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$$

Теорема. Если $\{a_n\}$ — сходится к a , то и все частичные пределы $\{a_n\}$ тоже равны a .

$$\uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

начиная с $n > N \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall \varepsilon$, но тогда $\forall n_k > N \quad a - \varepsilon < a_{n_k} < a + \varepsilon \Rightarrow$ т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \quad \downarrow$

Следствие.

$$x_n = (-1)^n$$

Если $\exists x_{nk}$ и $x'_{nk} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{nk} \Rightarrow \nexists \lim x_n$

Пример.

$$a_n = \sin \frac{\pi n}{2}$$

$$a_{nk} = a_{2k} = \sin \pi k = 0$$

$$\sin \frac{\pi n}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\pi k$$

$$a_{4k+1} = \sin \frac{\pi(4k+1)}{2} = \sin 2\pi k + \frac{\pi}{2} = 1$$