

Числовые последовательности и их пределы

Ученики 10-4 класса Оконешников Д.Д. и Паньков М.А. по лекции к.ф.-м.н. Протопоповой Т.В.
от 21 апреля 2021 г.

1 Лекция №24

1.1 Свойства бесконечно больших

1. Если предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty (+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена снизу, т.е. $b_n \geq b \forall n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$
2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty (+\infty + c)$, а $\{b_n\}$ ограничена $M : b_n \geq M > 0, \forall n \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = +\infty$
3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, а b_n ограничена, т.е. $0 < b_n < M(n \rightarrow \infty) \forall n$, то

$$\left(\frac{+\infty}{c > 0}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

4. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, а b_n ограничена; $|b_n| \leq M \forall n$,

$$\left(\frac{M}{\infty}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

1.1.1 Неопределённости

1) $\infty - \infty$

$2n - n = n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

2) $\frac{\infty}{\infty}$

$n^2, n, 2n$

$$\frac{n^2}{n}$$

3) $\infty * 0$

1.2 Теорема Вейерштрасса

Определение. Числовая последовательность целых чисел называется стабилизирующей к ξ , если $\exists n_0 \forall n > n_0 a_n = \xi : a_n \rightarrow \xi$

Лемма 1. Если $\{a_n\}$ — последовательность целых неотрицательных чисел, неубывающая и ограниченная сверху, т.е. $a_n \leq N \forall n$, то $\exists \xi : a_n \rightarrow \xi$ и $\xi \leq M$.

хотя число членов последовательности ∞ , но между a_1 (самый маленький член последовательности т.к. $a_n \searrow$) и M есть только конечное число целых чисел, \Rightarrow только конечно число значений a_n

Обозначим наибольшее значение принимаемое a_n , ч/з ξ , т.е. $\exists n_0 : a_{n_0} = \xi \leq M$, тогда $\forall n > n_0 a_n = \xi$, т.к. $a_n \downarrow$

$\{a_n\}$ — б.д.д. > 0

$$a_1 = \alpha_{10}, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}...$$

$$a_2 = \alpha_{20}, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}...$$

$$a_3 = \alpha_{30}, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}...$$

...

$$a_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}...$$

$$\downarrow a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3...$$

α_{n_0} — целые неотр.

$\alpha_{n_j} j = 1, \dots$ — это $\in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Определение. Будем говорить, что последовательность б.д.д. $(> 0)\{a_n\} \Rightarrow$

$a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3... (a_n \rightarrow a)$, если $\forall k \alpha_{n_k} \Rightarrow \gamma_k$

Лемма 2. Если $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных б.д.д. (*) является неубывающей и ограниченной (т.е. $\exists M$ (б.д.д., не оканчивающаяся последовательностью 9-ок)): $\forall n \ a_n \leq M$, то $\exists a$:

$$1) \ a_n \rightrightarrows a$$

$$2) \ a_n \leq a \leq M$$

↑ В табл. (*) смотрим на первый столбец

$$\alpha_{10}$$

$$\alpha_{20}$$

$$\alpha_{30}$$

$$\dots$$

$$\alpha_{n0}$$

Это последовательность неубывающих целых неотр. чисел и ограниченных сверху M по **Л1**

$$\exists \text{ номер } N_0 \quad \forall n > N_0$$

$$\alpha_{n_0} \rightrightarrows \gamma_0$$

$$\alpha_{10}$$

$$\alpha_{20}$$

$$\alpha_{30}$$

$$\dots$$

$$\alpha_{N_0 0} = \gamma_0$$

$$\gamma_0$$

$$\gamma_0$$

Пусть $n > N_1$, тогда смотрим на $\{\alpha_{n1}\}$

α_{n1} — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой; неубывающей (т.к. $a_n \searrow$ и 0-й столбец уже застabilиз.) $\Rightarrow \exists N_1 \ \alpha_{n1} \rightrightarrows \gamma_1 \ \forall n > N_1 \geq N_0$

Пусть $n > N_1 \geq N_0$ и смотрим $\{\alpha_{n2}\}$

$\{\alpha_{n2}\}$ — последовательность целых, неотр. чисел. Она ограничена 9-кой, неубывающей (т.к. $a_n \searrow$ и 1-ый столбец уже застabilиз.) $\Rightarrow \exists N_2 \ \forall n > N_2 \geq N_1 \geq N_0 \ \alpha_{n2} \rightrightarrows \gamma_2$ и т.д.

в итоге $\forall n > N_k \geq N_{k-1} \geq \dots \geq N_0 \ \{\alpha_{nk}\} \rightrightarrows \gamma_k$, то $a_n \rightrightarrows a = \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_k \dots$

Из построения $a_n \leq a$

Осталось показать, что $a \leq M$

Будем доказывать от противного: т.е. пусть $a > M$, т.е. $a_{(k)} = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k > M$

a_k — прил. по недост. для a , но тогда $a_n \ n > N_k$

$a_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nk}, \alpha_{nk+1}, \dots = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k \alpha_{nk+1} > a_{(k)} > M$, противоречие с тем, что $a_n \leq M \ \forall n \downarrow$

1.2.1 Теорема Вейерштрасса

Если $\{x_n\}$ — числовая последовательность неубывает и ограничена сверху, то она сходится.

↑

1. Пусть $x_1 > 0 \Rightarrow \forall n \ x_n > 0$ т.к. $(x_n \searrow)$.

2. Любое $x_n \in \mathbb{R}$ представлена в виде б.д.д.

3. По **Л2**, такая (1) $x_n \rightrightarrows a$

4. Покажем, что $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

Надо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N, |x_n - a| < \varepsilon$

пусть $n > N_k$, где N_k - номер, когда k -ый столбец в (*) застabilиз., тогда

$$|x_n - a| = |\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k \alpha_{nk+1} \alpha_{nk+2} \dots - \gamma_0, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k \gamma_k + 1 \gamma_{k+2} \dots|$$

$$= 0, \underbrace{0 \dots 0}_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots < 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k-1} 1 = \frac{1}{10^k} < \frac{1}{9k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{1}{9\varepsilon} \quad \varepsilon \rightarrow k \rightarrow N_k = N \downarrow$$

Замечание 1. Если $x_1 < 0$, тогда рассм. $y_1 = x_1 + c : y_1 > 0$, тогда по доказ. $y_n = x_n + c \searrow$, ограничена сверху и $y_1 > 0 \Rightarrow$ по доказ $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Rightarrow \dots$

Замечание 2. Аналогично можно доказать, что, если $\{x_n\} \nearrow$ и ограничена снизу, то она сх-ся.

В общем случае:

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сх-ся \downarrow

Пример.

$a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}; a_1 = 2$, доказать, что $\{a_n\}$ сх-ся и найти \lim .

$a_1 = 2; a_2 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}; a_3 = \frac{5}{4}; a_4 = \frac{9}{8}$

Предположение: \searrow и $1 < a_n \leq 2$

$$a = \frac{a+1}{2}$$

$$2a = a + 1$$

$$a = 1$$

I. Покажем, что $1 < a_n \leq 2$ 1) База $n = 1$ $1 < a_1 = 2 \leq 2$ верно

2) Пусть при $n = k$ $1 < a_k \leq 2$ выполнено

3) Надо при $n = k+1$ $1 < a_{k+1} \leq 2$

$$1 = \frac{1}{2}(1+1) < \text{(по ПИ)} a_{k+1} = \frac{a_k+1}{2} = \frac{1}{2}(a_k+1) \leq \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} \leq 2$$

\Downarrow по ПМИ $\forall n$ $1 < a_n \leq 2$

II. $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n+1)}{2} - a_n = \frac{1-a_n}{2} (a_n > 1 \text{ из опр } < 0) < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \forall n \in N$ т.е. a_n - убыв.

III. Из I и II по Т. Вейерштрасса $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow a = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1$