多元微分学

偏导数的定义

求二重极限

$$f(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\cdots+a_{m-1}xy^{m-1}+a_my^m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\cdots+b_{n-1}xy^{n-1}+b_ny^n}$$

（1）当$m>n$时，若方程$Q(1,y)=0$与$Q(x,1)=0$均无实根，则原极限为0

若方程$Q(1,y)=0$与$Q(x,1)=0$均无实根，则原极限为0

（2）若当$m<n$，则原极限不存在

求偏导数

定义法

“先代后求”

复合函数求偏导数

“链式法则”

隐函数求偏导数

方程组求偏导数

偏导数的连续性

全微分的定义

可微

判定是否可微

有3步：

1. 写出全增量$\Delta z=(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0))$
2. 写出线性增量$A\Delta x+B\Delta y$，其中$A=f'_x(x_0,y_0),B=f'_y(x_0,y_0)$
3. 求极限$\lim\limits_{(\Delta x\to0,\Delta y\to0)}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\frac{f(x,y)-f\left(x_0,y_0\right)-f'_x\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)-f'_y\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}$$

若等于0则可微，否则不可微

计算涉及到上面的二重极限计算

全微分的几何意义

隐函数存在定理

隐函数存在定理1:
对隐函数$F(x,y)=0$有：
$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$

证明推导：
$F(x,y)$对x求偏导：
$=F_x'+F_y'\frac{dy}{dx}=0$
$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$

隐函数存在定理2:
设函数$F(x,y,z)$在点P的某一邻域内具有连续的偏导数，且$F(x,y,z)=0$，$F_z'\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$，它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$，并有：
$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$
$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$

注例：

微分法在几何上的应用

空间曲线方程

1、空间曲线方程为参数方程

例如：

2、空间曲线方程为方程组

例如：

曲面的切平面与法线

1、若曲面方程为$F(x,y,z)=0$

2、若曲面方程为$z=f(x,y)$

多元函数的极值

无条件极值

二元函数取极值的必要条件

二元函数取极值的充分条件

求极值的步骤

条件极值与拉格朗日乘数法

方向导数

多元函数微分的题型

1、基本概念

2、多元微分法

3、多元函数的极值、最值问题

极值问题

例:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-axy}{x^2+y^2}=1$

得
$(x,y)\to(0,0),f(x,y)=axy\Rightarrow f(0,0)=0$

先利用极限的保号性，得

$f(x,y)>axy$

由于xy可为正为负，所以此时保号性用不了
（如果保号性能用，一般都是极值）

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-axy}{x^2+y^2}=1$
极限可推出
$f(x,y)=(1+\alpha)(x^2+y^2)+axy$

再带入$y=x$,$y=-x$进行分类讨论（这种方法一般解决不是极值的问题，解决是极值的问题也有：1000题4.33）

多元函数极值与最值问题的理论依据

条件极值与拉格朗日乘数法

无条件极值

闭区域边界上的最值

闭区域上的最值

条件极值 拉格朗日乘数法

条件

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

令

$$\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0 \\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0 \\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0 \\ F'_\mu=\psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$