1 一元积分学的概念

不定积分

原函数（不定积分）的存在性

原函数（不定积分）存在定理

1. 连续函数$f(x)$必有原函数$F(x)$
2. 有第一件类间断点和无穷间断点的函数$f(x)$在包含这些间断点的区间内必无原函数$F(x)$

定积分

定积分存在性

定积分存在定理
定积分存在的充分条件：

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点

则$\int_a^b f(x)dx$存在

定积分的性质

1. **被积函数为常数k**$=\text{积分区间长度}\times k$
2. 线性性质：
3. 可加性：
4. 积分的保号性（定积分的不等式性质）：若在区间$[a,b]$ 上有 $f(x) \leqslant g(x)$ 则 $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$
5. 估值定理：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有最大值 M，最小值 m，L 为区间 $[a,b]$ 长度，则有 $mL \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant ML$
6. 中值定理：若$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $\exists\epsilon \in [a,b]$，则有 $\int_a^b f(x)dx = f(\epsilon)(b-a)$

定积分的精确定义

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)\cdot\frac{b-a}{n}$
当$a=0$ $b=1$
$\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$

变限积分

变限积分的概念

变限积分的性质

变限积分的求导公式

反常积分

反常积分的概念

无穷区间上反常积分的概念与敛散性

无界函数的反常积分的概念与敛散性

原函数与积分的性质

原函数与积分的奇偶性

1、$奇 \pm 奇 = 奇，奇 \times 奇 = 偶$

2、$偶 \pm 偶 = 偶，偶 \times 偶 = 偶$

3、$奇 \times 偶 = 奇$

4、连续的奇函数其原函数（积分）是偶函数

5、偶函数的原函数（积分）只有在积分上下限其中一个为0的情况下为奇函数

总结：

1. 奇偶性相同的加减不变
2. 奇偶性相同的乘除均为偶；不同奇偶性的乘除均为奇

推导：实在不记得可以利用三角函数（例如$\sin x, \cos x$）来推一下

原函数与积分的周期性

1、若$f(x)$有周期T，则：
对任意的a有：
$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$

2、若$f(x)$有周期T，则$f'(x)$有周期T；积分则不一定

3、若$f(x)$有周期T，且$\int_0^T f(x)dx = 0$，则
$\int_a^x f(t)dt$有周期T

4、$f(x)$有周期T，则$\int_0^{nT} f(x)dx = n \cdot \int_0^T f(x)dx$

2 积分计算

基本积分表

1、

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, (k \neq -1)$

常考的有：

1. $k=-2, \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C,$
2. $k=-\frac{1}{2}, \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
   上式常用于凑微分

2、

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
求导的时候视绝对值而不见，但积分的时候绝对值就得无中生有了

3、

$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4、十个三角函数

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
2. $\int \cos x dx = \sin x + C$
3. $\int tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + c$
4. $\int cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + c$
5. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int sec(x) dx = \ln|sec(x) + \tan(x)| + c$
6. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc(x) dx = \ln|\csc(x) - \cot(x)| + c$
7. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
8. $\int csc^2 x dx = -\cot x + C$
9. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
10. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

5、

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, (a>0)$

$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2} dx = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a} + C, (a>0)$

6、

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

7、

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$

8、

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = -\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$
$= \frac{1}{2a}\ln|\frac{x+a}{x-a}|+C$

对于$\int \frac{1}{1-x^2}dx$可直接带入

9、

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$

10、

$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$

$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$

凑微分法（第一换元法）

凑微分公式

都是从基本积分表逆推得来的

$\frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$

$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d(2\sqrt{x})$

$\sqrt{x}dx = d(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})$

$\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$

$e^x dx = d(e^x)$

$a^x dx = \frac{1}{1-a}d(a^x)$

$\sin x dx = d(-\cos x)$

$\cos x dx = d(\sin x)$

$\frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x dx = d(\tan x)$

$\frac{dx}{\sin^2 x} = \csc^2 x dx = d(-\cot x)$

$\frac{1}{1+x^2} dx = d(\arctan x)$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$

换元法（第二换元法）

该方法是重中之重

1
$\sqrt{a^2 - x^2}, x = a\sin t$

$\sqrt{a^2 + x^2}, x = a\tan t$

$\sqrt{x^2 - a^2}, x = a\sec t$

这个有点特殊

$\sqrt{ax^2 + bx + c},$

$\sqrt[n]{ax + b}$

$\frac{ax+b}{cx+d}$

$\sqrt{ae^{bx} + t}$

$\frac{1}{x^n}$

注意：
如果换元之后的函数在被积区间上不是单值连续的，不可用牛顿-莱布尼茨公式进行计算。
必须先利用被积函数的周期性、奇偶性对被积区间进行划分或化简使得被积函数在被积区间上是单值连续的，后才可利用牛顿-莱布尼茨公式进行计算。

有理函数求积分通用做法

（十八讲）例 7.21
$\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2} dx$

分母最高次为n，则分母分解因式后为$f(x) \times g(x) \cdots$

则设:

$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2} dx$

解方程得A、B、C的值即可继续按照积分法则计算（分别计算各因式的积分）

三角函数有理积分

分部积分法

$\int udv = uv - \int u'vdx$

典型的用分部积分法
反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数

分部积分口诀：**反、对、幂、指、三**
往左是u（易求导）；往右是v（凑微分）

定积分的计算

定积分的精确定义

$\int_a^b = f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$

将$a=0,b=1$ 代入得：

$\int_0^1 f(x)d = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$

凑定义步骤：

1. 提出$\frac{1}{n}$
2. 凑$\frac{i}{n}$
3. 将$\frac{i}{n}$，看成是x；将$\frac{1}{n}$，看成是dx

点火公式（华里士公式的特殊版本）

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx$

$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为正奇数} \end{cases}$

总结：

无论n是偶数还是奇数都放在分号下面，偶数最后为乘以$\frac{\pi}{2}$，而奇数为1

同理：

$\int_0^{2\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{ 为正奇数}, \\ 4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}. \end{cases}$

$\int_0^{2\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{ 为正奇数}, \\ 4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}. \end{cases}$

区间再现公式

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

适用于幂函数与三角函数，或三角函数里有$(x+n)$的形式，用此公式可以使三角函数里的x和n分离开了，大多数情况下可利用积分循环来求解；有时还需算三角函数的有理积分。

变上限积分

反常积分的计算与敛散性判别

反常积分的计算

无穷极限的反常积分

无穷函数的广义积分

判断敛散性

两个重要结论

对于无穷区间的反常积分：
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$

$p > 1$，收敛
$p \leq 1$，发散

对于无界函数的反常积分：
$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$

$0 < p < 1$，收敛
$p \geq 1$，发散

两个比较准则

比较准则一

设函数$f(x)$、$g(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，并且$0 \leq f(x) \leq g(x)(a \leq x \leq +\infty)$，则

1. 当$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛时，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛
2. 当$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散时，$\int_0^{+\infty} g(x)dx$发散

比较准则二

设函数$f(x)$、$g(x) \in C[a,+\infty)$,且$g(x) > 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\lambda$，则

1. $\lambda \neq 0$时，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$与$\int_0^{+\infty} g(x)dx$有相同的敛散性
2. $\lambda = 0$时，$\int_0^{+\infty} g(x)dx$收敛，则$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛

3. $\lambda=\infty$时，$\int_0^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_0^{+\infty}f(x)dx$也发散

通过计算来判别

一元积分的几何应用

求面积

直角坐标系：

$S=\int_a^b f(x)dx$

极坐标系：

$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r(\theta)]^2 d\theta$

参数方程：

$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$

$S=\int_\alpha^\beta y(x)dx=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt$

求旋转体的体积

绕x轴转：

$V_x=\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$

绕y轴转：

$V_y=\int_a^b 2\pi x|f(x)|dx$

绕平行于坐标轴直线$y=m$旋转的体积

$V_m=\int_a^b \pi[f(x)-m]^2 dx$

计算旋转体的侧表面积：

$y=f(x)$绕x轴：

$S=\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$

$x=g(y)$绕y轴：

$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+(x')^2}dy$

平行于截面，截面面积已知的立体体积

$V=\int_a^b S(x)dx$

$S(x)$为曲面表达式

计算曲边平面的弧长

曲面由参数方程确定：

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

直角坐标系：

$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2} dx$

极坐标系：

$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$

定积分求旋转体体积

一元积分的物理应用

1、变速运动总路程

已知速度$V(t)$

$S = \int_{t1}^{t2} V(t) dt$

2、变力沿直线做功

变力为$F(x)$

$W = \int_{x1}^{x2} F(x) dx$

3、提取物体做功

与变力做功类似，区分好对时间还是对位移

抽水做功

$W = \int_{a}^{b} (X_{水面} - x) S(x) dx$

$S(x)$：用x来表示的横截面积的表达式

常考的横截面有曲边梯形、四边形，圆形等

4、静水压力

已知该平面（水闸门啥的）上边曲线方程为$f(x)$下边曲线方程为$g(x)$

$P = \int_{a}^{b} \rho g x [f(x) - g(x)] dx$

5、细杆质心

$\overline{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx}$

一元函数积分学的题型

1、概念与性质

2、一元积分比大小

3、定积分的定义

4、分部积分法

5、换元法

6、有理函数积分

7、不可求的积分但可以抵消

8、分段函数积分

9、变限积分

10、一元积分的复杂与特色计算

$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

11、反常积分收敛性的判别与计算

12、一元积分的几何应用

借助于导数求极值

借助极限求渐近线

14、一元积分的平均值

15、一元积分不等式