微分中值定理

研究对象	区间	使用的定理
抽象函数 或者 $\int_a^b f(x)dx$	1、指定区间	十大定理：
乘积求导公式的变形	2、缩小区间	1、有界定理
商的求导公式的变形	3、划分区间	2、最值定理
		……

需要掌握9个基本定理，一个重要结论(其实有11个)

1、**有界与最值定理**

当$m \le f(x) \le M$， m, M分别为 $f(x)$在 $[a,b]$上的最小值与最大值

2、**介值定理**

当$f(a) \le \mu \le f(b)$时，存在 $\epsilon \in [a,b]$，使得 $f(\epsilon) = \mu$

3、**平均值定理**

当$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$时，在 $[x_1, x_n]$内至少存在一点 ϵ，使得 $f(\epsilon) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

4、**零点定理**

当$f(a) \cdot f(b) < 0$时，存在 $\epsilon \in (a,b)$，使得 $f(\epsilon) = 0$

5、**费马定理**

设$f(x)$满足在x_0点处，1、可导；2、取极值，则 $f'(x_0) = 0$

6、罗尔定理

如果在$[a,b]$(开区间、闭区间都可以)可导、连续，$f(a) = f(b)$，则必有$\exists \epsilon \in (a,b), f'(\epsilon) = 0$

7、拉格朗日定理

如果在$[a,b]$(开区间、闭区间都可以)可导、连续，则：

$\exists \epsilon \in (a,b)$ 使得

$f'(\epsilon)(b-a) = f(b) - f(a)$ 或 $f'(\epsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

8、柯西中值定理

如果$f(x), g(x)$在$[a,b]$(开区间、闭区间都可以)可导、连续，则

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\epsilon)}{g'(\epsilon)}$

9、泰勒定理（公式）

$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2f''(x_0)}{2!}\cdots\frac{(x-x_0)^nf^{(n)}(x_0)}{n!}$

麦克劳林公式

其实就是泰勒公式的特殊形式，在$x=0$点处展开，即$x_0=0$

$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2f''(0)}{2!}+\cdots\frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!}$

佩亚诺余项

$f(x)=f(x)+o(x-x_0)^m$

对于n阶展开式，$m=n+1$

拉格朗日余项

$f(x)=f(x)+\frac{f^{(m)}x^n}{n!}$

对于n阶展开式，$m=n+1$

10、积分中值定理

$\int_a^b f(x)dx=f(\epsilon)(b-a)$

零点问题

1、零点定理

主要用于证明根的存在性。

注意零点定理的推广。

推广的零点定理：
若$f(x)$ 在(a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha,\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta,\alpha\cdot\beta<0$， 则原方程存在零点。
其中α 和β可以是$+\infty$或者$-\infty$

2、函数的单调性

用于证明方程根的唯一性。

3、罗尔原话（罗尔定理的推论）

若$f^{(n)}(x)=0$ 至多有k 个根，则$f(x)=0$ 至多有$k+n$ 个根。

4、实系数奇次方程至少有一个实根

任何实系数奇次方程：$x^{(2n+1)}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$
至少有一个实根。

证明：

微分不等式

1、用函数的形态证明不等式

单调性、凹凸性、最值

均值不等式

$T \leq J \leq S \leq F$

T为调和平均数；J为几何平均数；S为算数平均数；F为平方平均数。
简称“**调几算方**”。

调和平均数
$T = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}}$

几何平均数
$J = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}} = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}$

算术平均数
$S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 \cdots x_n}{n}$

平方平均数
$P = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 \cdots x_n^2}{n}}$

根据上述不等式的简化，有一个简单的结论：
$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

经典不等式

1、$2|ab| \leq a^b + b^2$

2、$|a \pm b| \leq |a| + |b|$

推广：
离散的情况：
$|a_1 \pm a_2 \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

连续的情况：
$|\int_b^a f(x)dx| \leq \int_b^a |f(x)|dx$

3、$||a| - |b|| \leq |a - b|$

积分不等式

若$f(x), g(x)$ 在$[a, b]$可积分，且平方也可积分，则:
$[\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx$

三角函数不等式

$\sin x < x < \tan x$

$\arctan x \leq arcsinx$

自然对数不等式

$x + 1 \leq e^x (x)$

$\ln x \leq x - 1 (x > 0)$

$\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, (x > 0)$