函数极限与连续

极限的定义

$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, x \to a$时，有：
$|f(x) - A| < \epsilon$

a可为

1. 常数
2. 常数的左极限
3. 常数的右极限
4. 无穷
5. 负无穷
6. 正无穷
   这六种情况

极限的五大考点

极限为常数

极限的唯一性

极限的局部有界性

极限的保号性

等式脱帽法

极限的计算

求极限参考链接：
https://www.sohu.com/a/214347954_507476

关于e的特殊极限

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

证明：

$= e^A$
$A = \lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$
倒代换，$t = \frac{1}{x}$：
$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$
$\therefore = e^A = e$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

证明：

$= e^A$
$A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x)$
$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$
$\therefore = e^A = e$

关于x的幂指函数的特殊极限

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

带根号的特殊极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

关于对数的特殊极限

$$\lim_{x\to 0^+} x^q \ln^p x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^p x}{x} = 0$$

泰勒展开

1、$sin(x)$

$$sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x)$$

$$sin(x)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2、$arcsin(x)$

$$arcsin(x)=x+\frac{1}{6}x^3+O(x)$$

$$arcsin(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3、$tan(x)$

$$tan(x)=x+\frac{1}{3}x^3+O(x^3)$$

$$tan(x)=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

4、（必须要记牢，推导麻烦且易错）$arctan(x)$

$$arctan(x)=x-\frac{1}{3}x^3+O(x^3)$$

$$arctan(x)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

5、$cos(x)$

$$cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O(x^4)$$

$$cos(x)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

6、$ln(1+x)$

$$ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^3)$$

$$ln(1+x)=\sum_{i=0}^{i=n}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

注意使用条件：

必须是$x\to 0$是才可以使用

例如：$\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$

原式$=e^{(\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x)}$

$\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$

做代换:$\ln x=\ln(1+x-1)=x-1$是错的

应该用倒代换：

$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

用洛必达：

$=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x(x\to+0)=0$

原式等于$e^0=1$

7、e^x

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+O(x^3)$$

$$e^x=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x^n}{n!}$$

8、$(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+O(x)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{C_\alpha^n}{n!}\cdot x^n$$

9、$\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+O(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

10、a^x

$$a^x=1+x\ln a$$

11、$(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}-\frac{7x^3}{16}\cdots)=e-\frac{x}{2}e+\frac{11x^2}{24}e-\frac{7x^3}{16}e\cdots$$

（易错点）使用等价无穷小和泰勒展开求极限的条件

重点！！

1、做乘除法时，可以

2、做加减法时，只有部分情况可以，检验是否可行的方法：

对于
$\lim a+b$
带入泰勒或者等价无穷小后，看看是否满足$\frac{a}{b}=\pm 1$
是则不能带入，否则可以带入；例如：
$\lim \cos x-1=(1-\frac{x^2}{2})-1=-\frac{x^2}{2}$
因为带入后为$\frac{1-\frac{x^2}{2}}{-1}\neq \pm 1$
而$\lim \sin x-\tan x$不行，因为带入后为$\frac{x}{-x}=-1$

极限计算题分类

函数极限的计算

第一步：化简

1、等价无穷小替换

使用泰勒公式替换，要注意的是被替换的函数只有在其自变量趋向于0的时候才可用

2、恒等变形

提取公因式

例如：
21 强化 例题 1.6
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}}$

21 强化 例题 1.7
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$

换元
“倒代换”：
21 例题 1.8
$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\ln(\frac{x+1}{x-1})-2x^2$

使用多次换元化简的：
21 强化 例题 1.10
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-2}}$

通分
21 强化 例题 1.12
$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}+\frac{\pi x-1}{\arctan x})$

因式分解

分子有理化

中值定理
一般用拉格朗日中值定理比较多
21 强化 例题 1.13
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2[\arctan(x+1) - \arctan x]$

3、计算过程中及时提出极限存在且不为0的因式

21 强化 例题 1.15
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

第二步 洛必达 or 泰勒展开

化简之后根据情况用洛必达法则或者泰勒展开公式进行下一步计算。

无穷小比阶

1、若$a \neq 0, k > 0$，$x \to 0$时$f(x) \sim ax^k \Rightarrow x \to 0$时，f(x)是x的k阶无穷小

2、若$k > 0$时，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} \Rightarrow x \to 0, f(x)$是$x$的$k$阶无穷小

3、若$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_k x^k \cdots$,其中$a_0 + a_1 x + \cdots a_{k-1} = 0$，但$a_k \neq 0$,则$f(x)$是x的k阶无穷小

4、若$x \to 0$,$g(x)$是x的n阶无穷小,$f(x)$是x的m阶无穷小,$\int_0^{g(x)} f(t)dt$是x的$(m+1) \cdot n$阶无穷小

5、若$x \to 0$时$f(x)$与$g(x)$分别是x的m阶无穷小和n阶无穷小，又$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = a \neq 0$，则
1）$f(x)h(x)$是x的m阶无穷小
$f(x)g(x)$是x的$m+n$阶无穷小
2）$m > n$时，$f(x)+g(x)$是x的n阶无穷小
3）$m = n$时，$f(x)+g(x)$是x的n阶或高于n阶的无穷小

利用极限构造函数

1.$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x^n$

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \text{振荡}, & x = -1 \end{cases}$$

2.$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} e^{nx}$

$$f(x) = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

数列极限的计算

1、常见的数列极限

$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n} = (\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n}, 0\le a_i(i=1,2,3,\cdots m) = \max(a_1,\cdots,a_m)$

2、转化为函数极限来算

然后就可以用洛必达、拉格朗日中值定理

2、先求和或积

3、夹逼准则

1、简单放缩

n个正数之和不超过 n乘以最大值，不小于n乘以最小值

例如：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}\cdots\frac{n}{n^2+n})$

设原极限为A；
数列中最大值为$\frac{n}{n^2+1}$，最小值为$\frac{n}{n^2+n}$

$\frac{n}{n^2+n}\cdot n\le A\le\frac{n}{n^2+1}\cdot n$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\le A\le\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$

$\Rightarrow A=1$

有限m个数相加

例如：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n}, 0\le a_i(i=1,2,3,\cdots m)$

这种题要注意，要找**最大值**，大于最大值，小于m个最大值之和

设原数列和为A，其最大值为$a_1 = max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$则
$a_1^n\le A\le a_1^n\cdot m$

$\Rightarrow a_1\le\sqrt[n]{A}\le a_1\cdot m^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A = a_1 = max(a_1,\cdots,a_m)$

重要结论：
形如$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_m^n} = max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$m有限

例1：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2020+2^n+3^n+4^n} = 4$

例2：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$(记得分类讨论)

4、单调有界准则

5、数列的构造法

求极限的应用

1、间断点

间断点的求法

1. 找函数无定义的点
2. 求这些点的左右极限
3. 极限存在-》可去间断点
4. 左右极限不等-》跳跃间断点
5. 极限为无穷-》无穷间断点
6. 极限振荡-》振荡间断点

求函数间断点时，极限要分左右的函数有

1. 带有绝对值的函数
2. 分段函数
3. e^{∞}
4. $\arctan(\infty)$

第一类

可去间断点

$x=x_0$ 时无定义，且极限存在：为某一常数

跳跃间断点

左右极限不等

第二类

无穷间断点

无极限，且无界

振荡间断点

无极限却有界

2、函数曲线渐近线的求法

垂直渐近线

1. 先找无定义点 x_0

2. 求该点的极限$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 极限存在则，$x=x_0$ 为垂直渐近线

水平渐近线

求极限 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ A是否存在

存在则$y=A$ 为水平渐近线

斜渐近线

若$y=f(x)$ 满足：

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ k 存在
2. $\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$ b 存在

则有斜渐近线 $y=kx+b$

3、利用导数的定义计算特殊的导数