1、一元微分及导数

导数的定义

有两种写法：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

本质：

$\frac{函数的增量}{自变量的增量}$的极限

微分的定义

导数的计算

四则运算

商导数的计算

有$y=\frac{f(x)}{g(x)}$,求y'

$$y'=\frac{f(x)'\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)'}{g(x)^2}$$

求导公式

三角函数

$$tan(x)'=sec(x)^2$$

$$cot(x)'=-csc(x)^2$$

$$sec(x)'=sec(x)\cdot tan(x)$$

$$csc(x)'=-csc(x)\cdot cot(x)$$

$$arcsin(x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$arccos(x)'=\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$arctan(x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$arccot(x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

对数函数

$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$

$\ln(x)' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$(\ln(x-\sqrt{x^2+a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

指数函数

$(\alpha^x)' = \alpha^x\ln(\alpha)$

双曲线函数

双曲正弦函数
$\backslash\mathrm{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦函数
$\backslash\mathrm{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切函数
$\backslash\mathrm{th}x = \frac{\backslash\mathrm{sh}x}{\backslash\mathrm{ch}x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\backslash\mathrm{sh}x' = \backslash\mathrm{ch}x$

$\backslash\mathrm{ch}x' = \backslash\mathrm{sh}x$

$\backslash\mathrm{th}x = \frac{1}{\backslash\mathrm{ch}x^2}$

高阶求导公式

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(x>-1)$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

分段函数的导数计算

在间断点使用左右导数是否相等来判断这一点是否存在导数

注意绝对值函数的求导：
求导时视绝对值符号而不见，但是计算完导数要把绝对值符号带上。

复合函数的导数计算

1. $y=g(f(x))$，求y'

$y' = g(f(x))' \cdot f(x)'$

2. $y=g(u)$，g、u均为关于同一个自变量的函数

$y' = g' \cdot u'$

隐函数导数的计算

反函数的导数计算

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{y'_x}$

反函数的二阶导数：

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x_y}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^3}$$

参数方程的导数计算

$x=\phi(t)$

$y=\psi(t)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = g(t)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g'(t)}{\phi'(t)}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\phi'(t)-\phi''(t)\psi'(t)}{(\phi'(t))^3}$

变限积分求导公式

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f\left[\varphi_2(x)\right]\varphi'_2(x) - f\left[\varphi_1(x)\right]\varphi'_1(x)$$

高阶导数计算

一点的高阶导数计算

1. **泰勒公式：** $y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
2. **牛顿-莱布尼茨公式**

$(uv)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (u)^{(n-k)} v^{(k)}$

2、一元微分的应用

2.1 研究函数的工具

“三点两性一线”

1. 极值点
2. 最值点
3. 拐点
4. 单调性
5. 凹凸性
6. 渐进线

极值点

注意可疑点的选取不要漏：
不光是导数为0的点，还有导数不存在的点，都要进行分析，看在该点左右导数是否变号，变号则是极值点。

最值点

注意：

1. 除了要计算极值点的函数值，还要将区间端点的函数计算出来进行比较
2. 有时题设所给函数是没有最值的

极值点与最值点的区别

特殊的极值点

单调性的判别与极值点的判别

凹凸性

拐点

拐点的判别与极值点类似：

1. 找可疑点：二阶导数为0的点、二阶导数不存在的点
2. 分析该点左右二阶导数是否变号

凹凸性与拐点的判别

极值点与拐点判别条件的对比

渐近线

最值或取值范围

作图

2.2 几何应用

曲率

$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}(y'' \neq 0)$

曲率半径

$R = \frac{1}{k} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$

曲率圆

$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$
$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$

2.3 中值定理、方程的根、不等式综合应用

2.4 物理应用