二重积分

基本概念

和式极限

例如：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)\left(n^2+j^2\right)}$$

其实就是两个一元积分的叠加

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)\left(1+y^2\right)}dy$$

性质

1. 区域面积：$\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=A$
2. 可积函数必有界：当$f(x,y)$在有界闭区域D上可积时，则$f(x,y)$在D上必有界。
3. 二重积分的线性性质（类比一元积分）:设k_1,k_2为常数，则：$\iint\limits_D\left[k_1f(x,y)\pm k_2g(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma=k_1\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm k_2\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$
4. 积分的可加性：当$f(x,y),g(x,y)$在有界闭区域D，上可积时，且$D_1\cup D_2=D,D_1\cap D_2=\varnothing$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_z}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
5. 积分的保号性：当$f(x,y),g(x,y)$在有界闭区域D上可积时，若在D上$f(x,y)\leqslant g(x,y)$则有：$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$,特殊地有：$|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma|\leqslant\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$
6. 二重积分的估值定理：设M,m分别是$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大值和最小值，A 为D的面积，则有：$mA\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant MA$
7. 二重积分的中值定理：设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，A为D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)，使得：$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)A$

普通对称性

积分区域关于y轴对称
只需计算一边的面积然后乘以2

积分区域关于x轴对称

轮换对称性

即把x和y对掉以后，积分区域不变。

注例：

设区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$为$D$上的正值连续函数，$a,b$为常数，求$I=\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$

计算

积分区域

直角坐标：

$x+y\leqslant 1$

$x^2+y^2\leqslant 1$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1$

极坐标方程：

$r=\alpha(1-\cos\theta)$

$r=\alpha(1+\cos\theta)$

$r=\alpha\theta$

$r^2=\alpha^2\sin 2\theta$

$r^2=\alpha^2\cos 2\theta$

参数方程：

$$\begin{cases} x=\alpha(t-\sin t), \\ y=\alpha(1-\cos t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\alpha\cos^3 t, \\ y=\alpha\sin^3 t, \end{cases} x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\alpha^{\frac{2}{3}}$$

积分变换次序口诀

1. 后积先定限
2. 限内画条线
3. 先交写下限
4. 后交写上限

直角坐标下

1、【X-型】

即上下型

2、【Y-型】

即左右型

什么型就后积哪个

极坐标下

$\iint\limits_{D} f(r,\theta) r dr d\theta$

重积分的应用

1、体积

2、曲面面积

3、

二重积分的题型

1、概念与性质

2、积分比大小

3、计算