微分方程

“按类求解，对号入座！”

一阶微分方程

1、可分离变量型

2、齐次型方程

$y' + P(x)y = 0$

$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$

3、一阶线性微分方程

4、伯努利方程（换元法）

$y' = P(x)y = y^n Q(x)$

y^n

高阶方程

1、齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$u' = u + x\frac{du}{dx}$

有时根据情况可作$u = \frac{x}{y}$

2、一阶线性微分齐次方程

$y' + P(x)y = 0$

$y = Ce^{-\int P(x)dx}$

其中C为任意常数

3、一阶线性微分非齐次方程

3.1 公式法

$y' + P(x)y = Q(x)$

$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \cdot e^{-\int P(x)dx}$

$= y = e^{-\int P(x)dx} \cdot (C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx)$

3.2 凑导数法

$$\mu = \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$\left[ye^{\int P(x)dx}\right]' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

3.3 凑全微分

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(xy)$$

可降阶微分方程

1、$y^{(n)} = f(x)$型

伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

$$\left(y^{1-n}\right)' = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

在方程1的两端乘$n-1$

2、$y'' = f(x, y')$型

二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

1、二阶线性齐次方程

$y'' + Py' + qy = 0$

列特征方程：

$r^2+pr+q=0$

解特征方程得：

$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$

当$\Delta>0$时

$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

当$\Delta=0$时,$r_1=r_2=-\frac{P}{2}$

$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$

当$\Delta<0$时,$r_{1,2}=\alpha\pm\beta_i$

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

2、二阶线性非齐次方程

类型1 $y''+Py'+qy=P(x)\cdot e^{\lambda x}$

对应的齐次方程为：

$y''+py'+qy=0$

列特征方程：

$r^2+pr+q=0$

先解出齐次方程的通解 y^* （具体步骤看上面的二阶齐次方程求解过程）

依据$y^*=x^kQ(x)e^{\lambda x}$，中的k来判断：

$$k=\begin{cases}0, & \lambda\text{不是根}\\1, & \lambda\text{为单根}\\2, & \lambda\text{为重根}\end{cases}$$

注意：$Q(x)$与$P(x)$次数相同

将y^*代入原式，解出$Q(x)$

原方程通解为：

$y=y_1+y^*$

如果只是求特解：
则解出特征方程的根r_1,r_2，并根据这个来判断k值的大小

类型2 $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$

$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{x}}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$

列出特征方程：
$ar^2+br+c=0$

由于这种类型的特征方程是没有实根的，全部是共轭复根，求法如下

$r_{1,2}=\frac{-b\pm i\times\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\lambda\pm\omega\cdot i$($i$为虚数，$i^2=-1$)

根据上面的λ，确定k

$$k=\begin{cases}0, & =\lambda\pm\omega\cdot i\text{不是根}\\1, & =\lambda\pm\omega\cdot i\text{是根}\end{cases}$$