Universidad Adolfo Ibañez

Derivados Avanzados

LEVY PROCESSES SIMULATIONS

Alumno:
Felipe Ignacio Durán Aranda

Profesor:
Jacques Burrus

Ayudantes:
- Alejandro Olguín
- Guillermo Sepúlveda

February 25, 2021

Contenidos

1 Prefacio

Mediante este informe se busca presentar los resultados conseguidos en la simulación de varios *Lévy Processes* obtenidos a través de *Matlab*, planteados en la actividad *Lévy Processes Simulations*, efectuando un análisis comparativo en donde se utilizan diversas metodologías y procedimientos.

2 Pregunta Uno

Para esta pregunta, se pide generar un vector espaciado uniformemente en 53 secciones, para un rango de 0 a 1. Esto, puede ser realizado fácilmente utilizando la función en *Matlab* llamada *Linspace*, la cuál ingresando como argumentos el rango del vector esperado y el número de espaciados, entrega un vector espaciado uniformemente con dichas características. El código utilizado para este propósito es el siguiente:

```
T=linspace(0,1,53);
```

Finalmente, este vector es guardado en una variable (T) para ser utilizado en preguntas posteriores. Este vector representa en su totalidad a un año, con cada uno de sus intervalos representando una semana.

3 Pregunta Dos

El objetivo de esta pregunta consiste en crear una función capaz de generar un proceso de *Wiener*, definido a través de la siguiente expresión:

$$\Delta W_n \sim \text{Gauss}\,(0; \Delta T_n) \tag{1}$$

De esta forma, cada *step* o paso del proceso *Wiener* viene dado por una variable aleatoria de distribución normal, con media (μ) 0 y varianza (σ^2) ΔT_n, siendo el último representado por los pasos del vector T planteado en la pregunta anterior.

Por otra parte, se solicita el representar gráficamente cinco de estos procesos, lo cuál se puede ver a continuación:

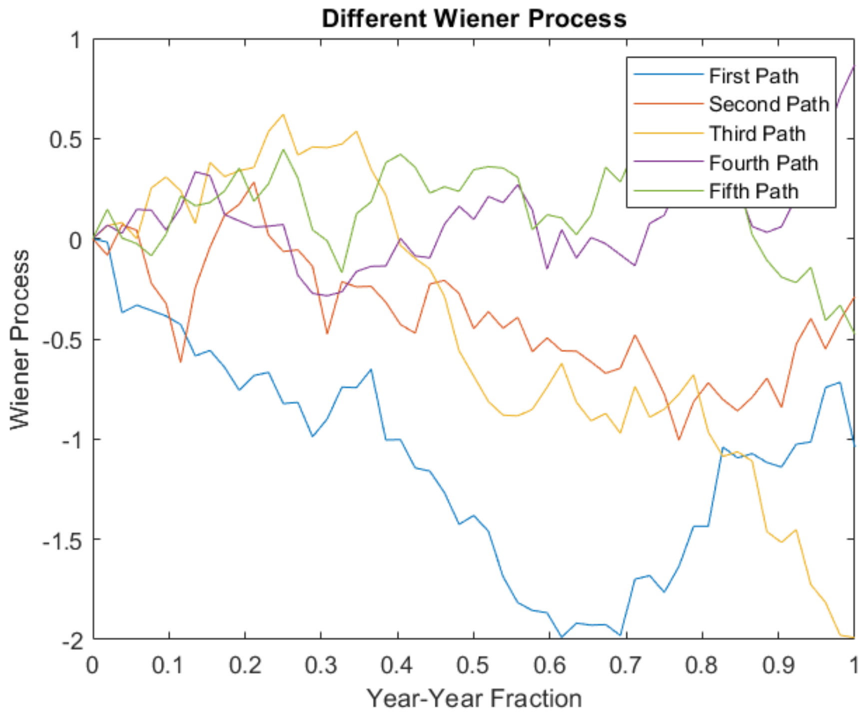

Figura 1: Diferentes Procesos de Wiener

Para crear los procesos de *Wiener*, se utilizó la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_i &= W_{i-1} + \Delta W_i \end{aligned} \tag{2}$$

La cuál, nos permite generar los procesos a través de la propiedad recursiva de la variable, plasmado en el siguiente código:

```
function [pregunta2] = pregunta2(mu,vector)
W=zeros(1,length(vector));
dt=vector(1,2);
for i=1:length(vector)
    if i==1
        W(1,i)=0;
    else
        dw=normrnd(mu,sqrt(dt));
        W(1,i)=W(1,i-1)+dw;
    end
end
pregunta2=W;
end
```

Este código corresponde al utilizado para generar la función solicitada para resolver la actividad.

4 Pregunta Tres

De manera similar a la pregunta anterior, se pide esta vez simular un proceso *Browniano* a través de un *step* o paso de *Wiener*, con un *drift* (μ) de 0.1 y una volatilidad (σ) de 0.3, utilizando la siguiente fórmula:

$$\Delta B = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta W \tag{3}$$

Para construir finalmente el proceso *Browniano*, se utilizó la siguiente relación:

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_i &= B_{i-1} + \Delta B_i \end{aligned} \tag{4}$$

Que, utilizando la propiedad recursiva de la variable, genera los valores correspondientes al vector para el proceso *Browniano*. Por otra parte, se pide graficar cinco posibles caminos correspondientes a simulaciones para un proceso *Browniano*, cuyos resultados son presentados a continuación:

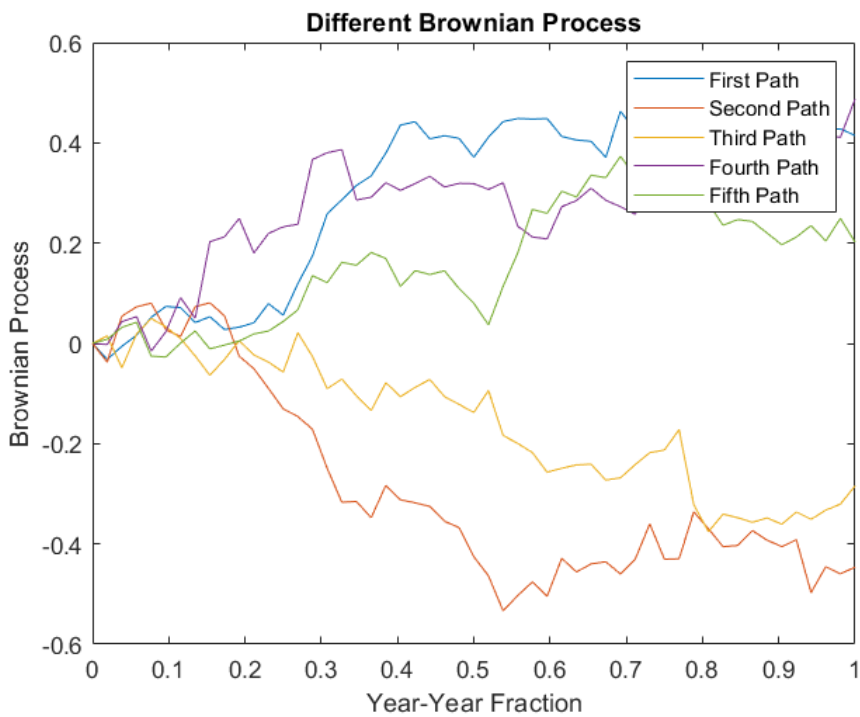

Figura 2: Diferentes Procesos Brownianos

5 Pregunta Cuatro

Para esta pregunta, se pide simular mil procesos *Brownianos* y graficar la distribución obtenida a través de un histograma en conjunto con la distribución teórica esperada. Los resultados se presentan a continuación:

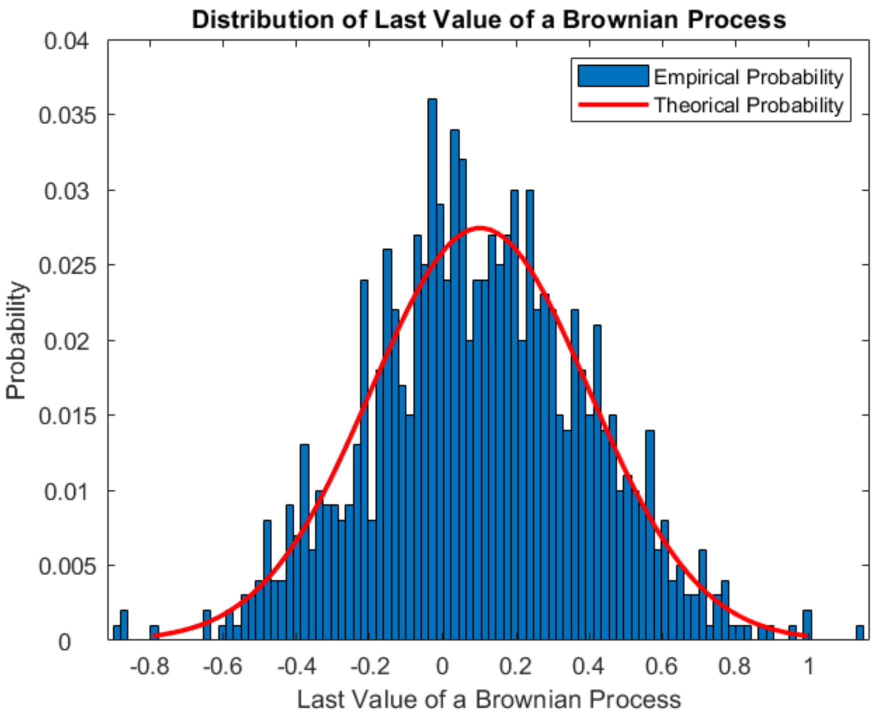

Figura 3: Histograma de Probabilidades Proceso Browniano

Para generar el histograma, así como la distribución teórica que deberían seguir los datos, se utilizó la función *histfit* disponible en *Matlab*, la cual fue utilizada como un ejemplo de solución para la entrega anterior. Esta función entrega el histograma de una distribución empírica en conjunto a la distribución teórica esperada, ingresando como parámetro el tipo de distribución que debería seguir, en este caso, una distribución normal o *Gaussiana*.

Sobre el histograma presentado, podemos observar que existe un buen ajuste entre la distribución empírica obtenida,y la distribución teórica esperada.

6 Pregunta Cinco

Esta pregunta fue eliminada de la actividad, por lo cuál no se considera tampoco para la realización de este informe, ni para el respectivo código de la actividad en *Matlab*.

7 Pregunta Seis

El objetivo de esta pregunta consiste en replicar el procedimiento y cálculos realizados en las preguntas dos, tres y cuatro, utilizando esta vez una distribución de *Cauchy*, lo que puede ser explicado a través de la siguiente fórmula:

$$\begin{gathered}\Delta Z_n \sim \text{Cauchy}\,(0;\Delta T_n)\\ \Delta C_t = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta Z_t\\ Z_0 = 0\\ C_0 = 0\end{gathered} \tag{5}$$

Nuevamente, fue utilizada la propiedad de la recursividad de las variables para generar los procesos respectivos, tal como se puede observar a continuación:

$$\begin{gathered}Z_i = Z_{i-1} + \Delta Z\\ C_i = C_{i-1} + \Delta C\end{gathered} \tag{6}$$

Los resultados obtenidos para las preguntas dos y tres son presentados a continuación:

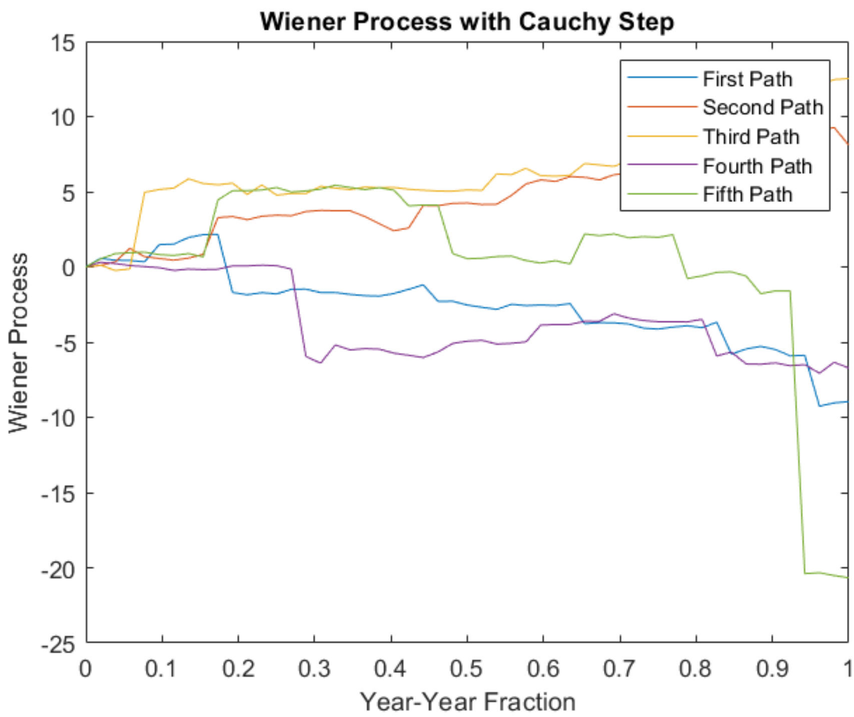

Figura 4: Diferentes Procesos de Wiener con un paso de Cauchy

Símil a la pregunta tres, se presenta el siguiente gráfico, correspondiente a un proceso *Browniano* con un paso de *Cauchy*:

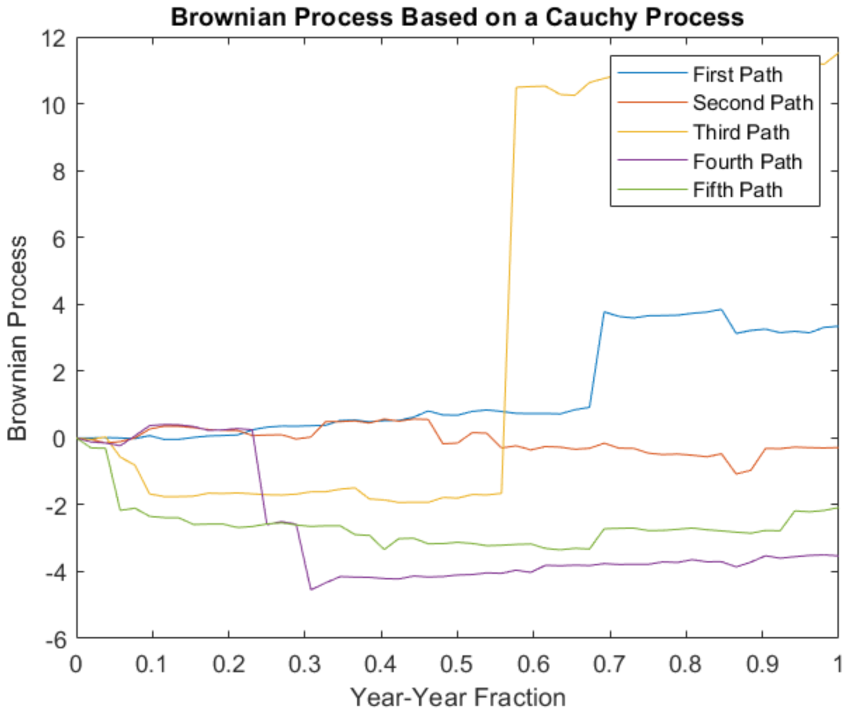

Figura 5: Diferentes Procesos Brownianos con un paso de Cauchy

Finalmente, se adjunta el equivalente a la pregunta cuatro para procesos *Brownianos* con un paso de *Cauchy*, siendo la distribución de los últimos valores de mil simulaciones, tal como se puede observar en el siguiente gráfico:

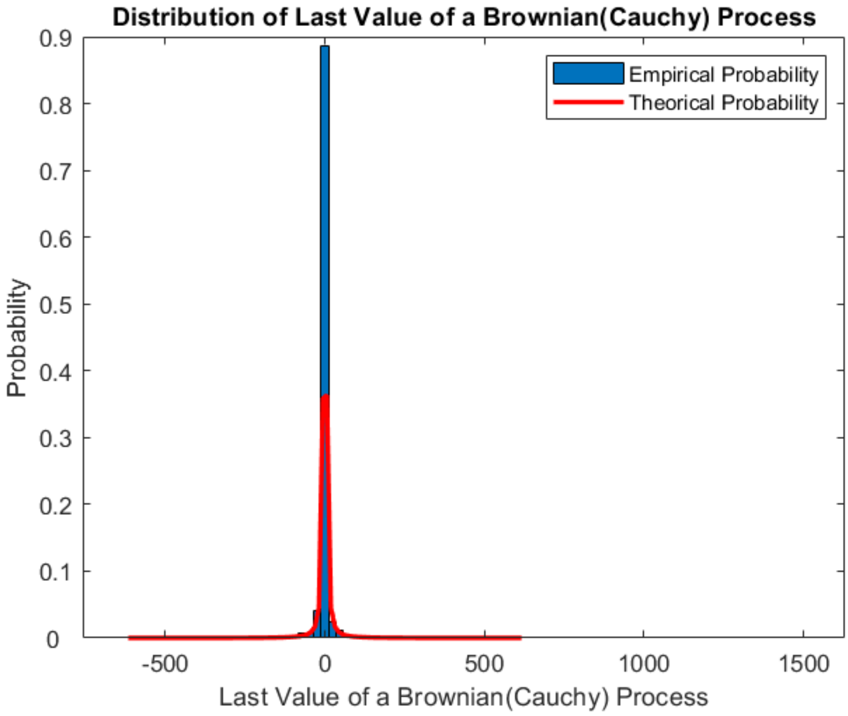

Figura 6: Histograma de Probabilidades Proceso Browniano con un paso de Cauchy

El histograma, de manera similar a la pregunta cuatro, fue obtenido utilizando la función *histfit* en *Matlab*, haciendo uso de la similitud entre la distribución *t-student* con un grado de libertad y la distribución de *Cauchy*, para ingresar como parámetro un ajuste *tlocationscale*. Como se puede observar en la figura presentada anteriormente, la distribución empírica tendió a presentar un mayor sesgo, alrededor de la localización (μ), que la distribución teórica esperada.

Lo anterior, podríamos atribuirlo a que el modelo para generar pasos *Brownianos*, a partir de una variable aleatoria *Cauchy*, limita o reduce la volatilidad esperada para una distribución de este estilo, en la que esperaríamos normalmente encontrarnos con valores esporádicos exageradamente grandes o pequeños. Con tal motivo, es que podemos observar que la distribución empírica presenta una mayor concentración de los datos alrededor de la localización, presentando un sesgo hacia este punto, comportamiento que sigue un modelo más apegado a diversos instrumentos financieros reales existentes.