TUTORIAL FEYNMAN-KAC AND SOME EXOTIC OPTIONS

Felipe Ignacio Durán Aranda

MAGÍSTER EN INGENIERÍA FINANCIERA
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS
UNIVERSIDAD ADOLFO IBAÑEZ

UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

Trabajo de Magíster en Derivados Avanzados

Viña del Mar, a 25 de Febrero de 2021

Profesor: Jacques Burrus

Ayudantes:
Alejandro Olguín
Guillermo Sepúlveda

Autorización de difusión

Felipe Ignacio Durán Aranda

Viña del Mar, a 25 de Febrero de 2021

El autor mencionado, matriculado en el Magíster de Ingeniería Financiera de la Facultad de Ingeniería y Ciencias, autoriza a la Universidad Adolfo Ibañez (UAI) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente trabajo de magíster: "Feynman-Kac And Some Exotic Options", realizado durante el curso académico 2020-2021 bajo la rectoría de Harald Beyer Burgos, y a la Biblioteca de la UAI a depositarlo en los archivos respectivos con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

Contenidos

1. Prefacio

Mediante este informe se busca exponer los resultados conseguidos en los cálculos a partir de diferencias finitas de los valores de distintas opciones, presentados en la actividad *Tutorial Extraction Of Implied Volatility With Newton-Raphson In Pricing Of European Forwards*, así como los análisis respectivos, realizados mediante el programa *Matlab*.

2. Pregunta Uno

Esta pregunta no es considerada para esta actividad.

3. Pregunta Dos

Esta pregunta no es considerada para esta actividad.

4. Pregunta Tres

Para esta pregunta, se pide entregar el *Space Operator* para la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{1}$$

Dicho operador, se expresa a continuación:

$$\mathcal{A}(\tau)V = (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV \tag{2}$$

Correspondiendo al operador espacial de la ecuación derivada parcial de la fórmula de *Black-Scholes*.

5. Pregunta Cuatro

En esta pregunta, se pide indicar cuales serían límites adecuados para el *Space Grid*. Para esto, se utilizaron los límites adecuados para una distribución *log-normal*, indicados por la ecuación a continuación:

$$\begin{aligned} S_{\text{up}} &= S_0 e^{\left[(r-q)-\frac{\sigma^2}{2}\right]T+3\sigma\sqrt{T}} \\ S_{\text{down}} &= S_0 e^{\left[(r-q)-\frac{\sigma^2}{2}\right]T-3\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \tag{3}$$

Siendo finalmente los límites que se utilizarían después para definir el espacio uniforme de *Spot Price*.

6. Pregunta Cinco

En esta pregunta, se nos pide indicar cual sería una condición de borde adecuada para la opción *Straddle* en los límites del *Space Grid*. La condición de borde utilizada corresponde a la *Zero-Gamma*. Dicha condición, la usaremos para formar la *Discretization Matrix*; nos permite utilizar la *Left Scheme*, la *Right Scheme* y adicionalmente tiene la cualidad que los términos de difusión desaparecen en el borde.

7. Pregunta Seis

En esta pregunta, se pide confeccionar la *Discretization Matrix* a partir del vector *Space Grid*, siendo una distribución uniforme de 100 puntos abarcando los límites indicados en la pregunta (4). Esta matriz tiene dimensiones de NxN, siendo N un número equivalente a la cantidad de puntos de los que consta el vector *Space Grid*. A continuación se presentan las fórmulas utilizadas para el cálculo de los puntos de esta matriz:

$$d_j = \frac{(r-q)S_j}{\Delta S}$$

$$g_j = \frac{\sigma^2 s^2}{(\Delta S)^2}$$

$$\begin{gathered} A_{j,j-1} = -d_j/2 + g_j/2 \\ A_{j,j} = -g_j - r \\ A_{j,j+1} = d_j/2 + g_j/2 \\ A_{1,1} = -d_1 - r \\ A_{1,2} = d_1 \\ A_{N,N-1} = -d_N \\ A_{N,N} = d_N - r \\ A_{i,i} = 0 \; Any\ Other\ Case \end{gathered} \tag{4}$$

Siendo los puntos $A_{i,j}$ correspondientes a la respectiva matriz de diferenciación. Finalmente, una apreciación importante de esta matriz es que solo posee datos en su diagonal y diagonales inmediatamente aledañas, siendo 0 en cualquier otro caso.

8. Pregunta Siete

En esta pregunta se pide implementar las *Time Discretization Schemes* respectivas a las formas implícita, explícita, y *Crank-Nicolson*. Para esto, se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered}\vec{V}_{i+1} = [I + A\Delta\tau]\vec{V}_i \\ \vec{V}_{i+1} = [I - A\Delta\tau]^{-1}\vec{V}_i \\ \vec{V}_{i+1} = [I - A\Delta\tau/2]^{-1}[I + A\Delta\tau/2]\vec{V}_i\end{gathered} \tag{5}$$

Correspondientes a las formas explícita, implícita y la de *Crank-Nicolson* respectivamente. Estas mismas formulas fueron programadas de manera independiente en *Matlab*.

9. Pregunta Ocho

Para esta pregunta se pide implementar las formas implícita y la de *Crank-Nicolson* con un Δ_T de 0.5, para luego comparar ambos métodos con el error respectivo que debería presentar contra el valor teórico dado por la fórmula de *Black-Scholes*. Para realizar los cómputos necesarios se utilizaron las siguientes ecuaciones:

Para el cálculo del *Fair Value* de la opción se utilizó la siguiente fórmula:

$$V_0 = \epsilon \cdot S_0 \cdot e^{-qT} \cdot N\left(\epsilon \cdot d_1\right) - \epsilon \cdot K \cdot e^{-rT} \cdot N\left(\epsilon \cdot d_2\right) \tag{6}$$

En donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{\ln S_0/K+(r-q)T}{\sigma\sqrt{T}} + \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{7}$$

Con *"r"* siendo la tasa libre de riesgo doméstica, *"q"* la tasa libre de riesgo extranjera,*"S"* el *Spot Price*, *"K"*, *Strike Price*, "ϵüna *Call/Put* flag y *"N"* representando la función de densidad acumulada de una normal estándar. El cálculo de la opción *European Straddle* se hizo sumando los *Fair Value* de una opción *Call* y una opción *Put* con los mismos valores.

Finalmente, utilizando en conjunto las funciones planteadas en preguntas anteriores, se obtuvo el siguiente resultado:

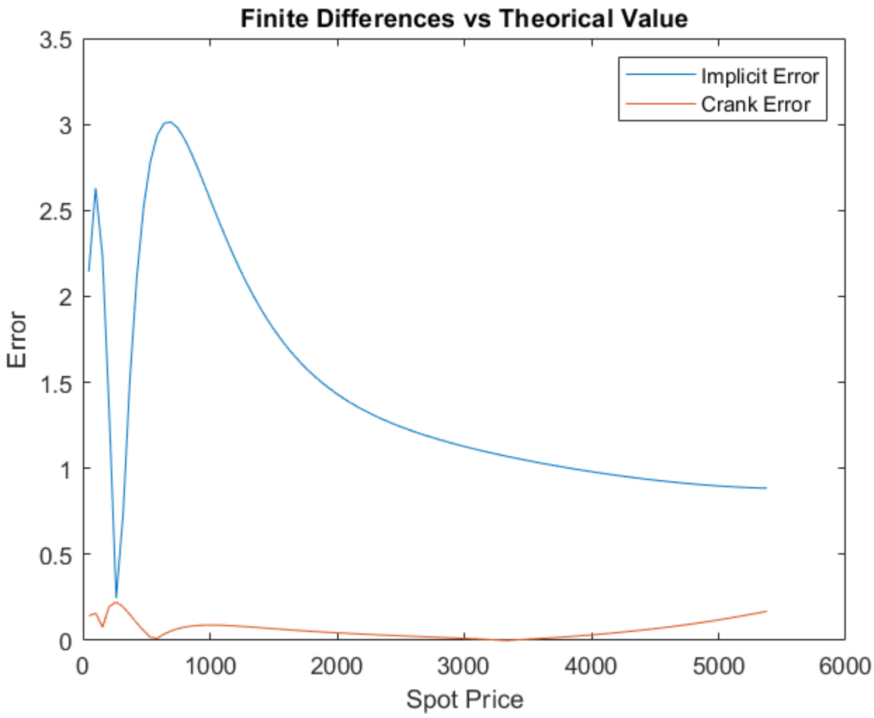

Figura 1: Error de los métodos implícitos y Crank-Nicolson.

Como se puede observar en la figura anterior, el error de la forma implícita resulta mayor en todas las ocasiones al error de la forma utilizando el método *Crank-Nicolson*, por lo cuál podríamos aseverar que el último referido es más certero.

10. Pregunta Nueve

En esta pregunta, se pide replicar los procedimientos hechos en la pregunta anterior para la forma de *Crank-Nicolson*, sin embargo para una opción *American Straddle*. La diferencia respecto a la ecuación anterior consiste en que esta opción se puede ejercer en cualquier momento, mientras que la opción *European Straddle* solo se puede ejercer al final del período. Para realizar el cálculo respectivo de la opción *American Straddle* se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\text{cont}} &= M \cdot \vec{V}_i \\ \vec{V}_{exe} &= \vec{S} - K \\ \vec{V}_{i+1} &= \text{máx}\left[\vec{V}_{\text{cont}}, \vec{V}_{\text{exe}}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Con $\vec{V}_{cont}$ igual al vector de continuación y $\vec{V}_{exe}$ igual al vector de ejecución. El cálculo debe realizarse una cantidad igual de veces al largo de nuestro *Time Grid*, consistente en un vector que llega hasta el *Tenor* (T) con espaciados iguales a Δ_T.

Finalmente, en el gráfico siguiente se presentan las diferencias en los valores de los dos tipos de opción:

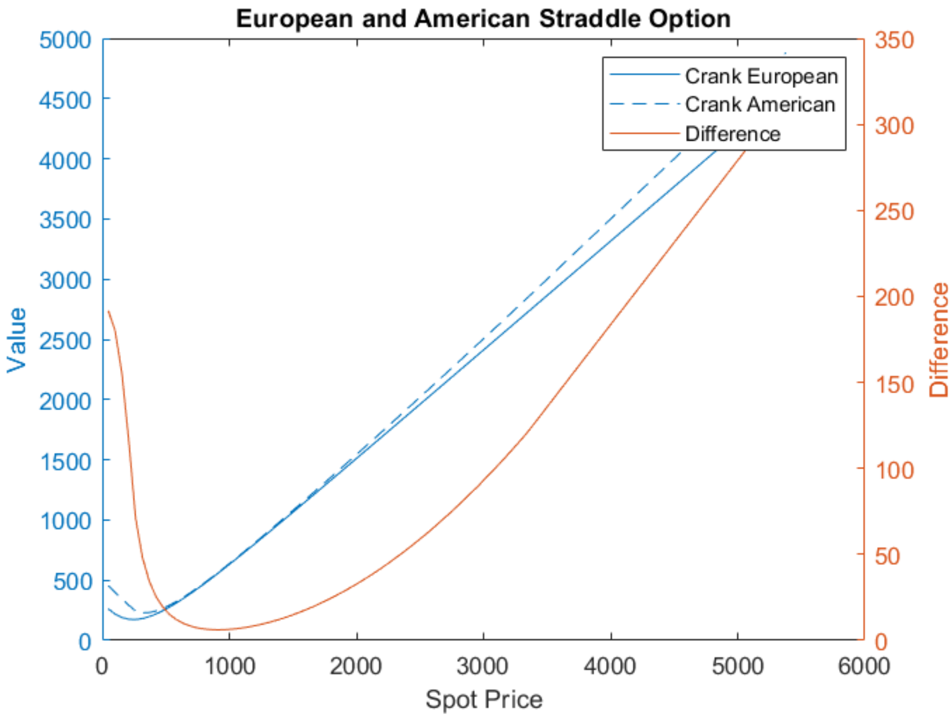

Figura 2: Diferencias por la forma Crank-Nicolson entre las opciones European Straddle y American Straddle.

Como se puede observar en la figura anterior, la opción *American Straddle* es más costosa para la mayoría de los casos que la opción *European Straddle*, esto debido a que la cualidad de la opción *American Straddle* de poder ser ejercida en cualquier momento hace que esta sea más costosa, dado que hay más opciones de estar *In The Money*.

11. Pregunta Diez

Para esta pregunta, se pide identificar la zona de *Early Exercise* de la opción *American Straddle* calculada en la pregunta anterior. Para esto, se identifico aquellos puntos de la matriz resultante de la pregunta anterior, en los cuales el valor del punto era igual al valor de ejecución, resaltándolos a través de un *Mesh* en *Matlab*, obteniendo el siguiente resultado:

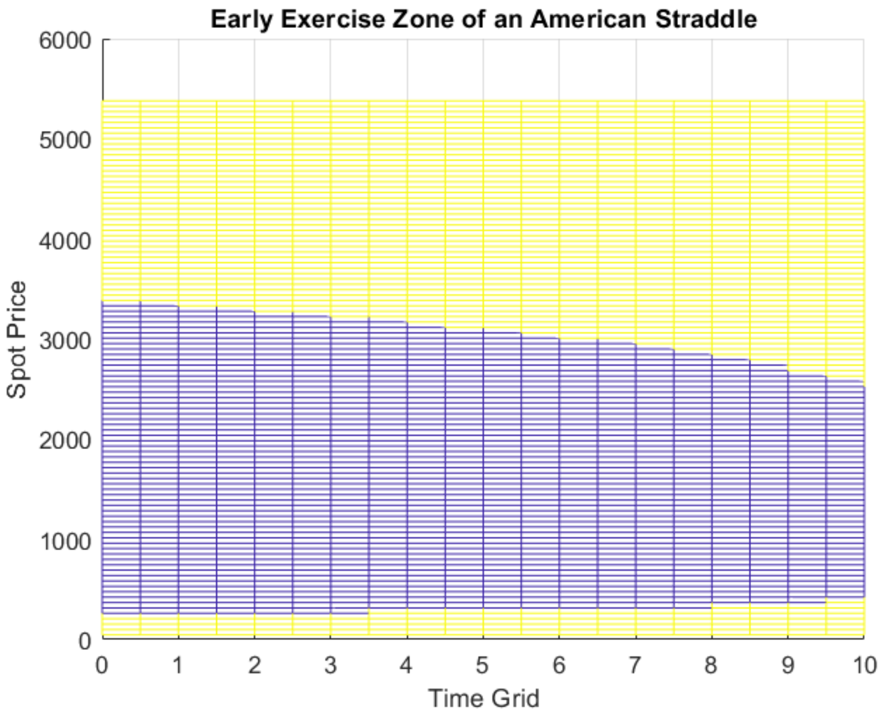

Figura 3: Zona de *Early Exercise* de la opción American Straddle.

Tal como se puede observar en la figura anterior, las zonas de *Early Exercise* de la opción *American Straddle* coinciden con las zonas de *Early Exercise* de las opciones *American Call* y *American Put*, situación esperable dado que la opción *American Straddle* se conforma de estas otras dos opciones, lo que confirma que el cálculo fue realizado de forma correcta.

12. Pregunta Once

Finalmente, en esta pregunta, se pide analizar el comportamiento del valor de la opción calculado en la pregunta anterior respecto a cambios en el *Time Step* Δ_T, disminuyendo cada vez más la cantidad de este, y por ende, aumentando el largo del vector *Time Grid*. Los resultados obtenidos se presentan a continuación:

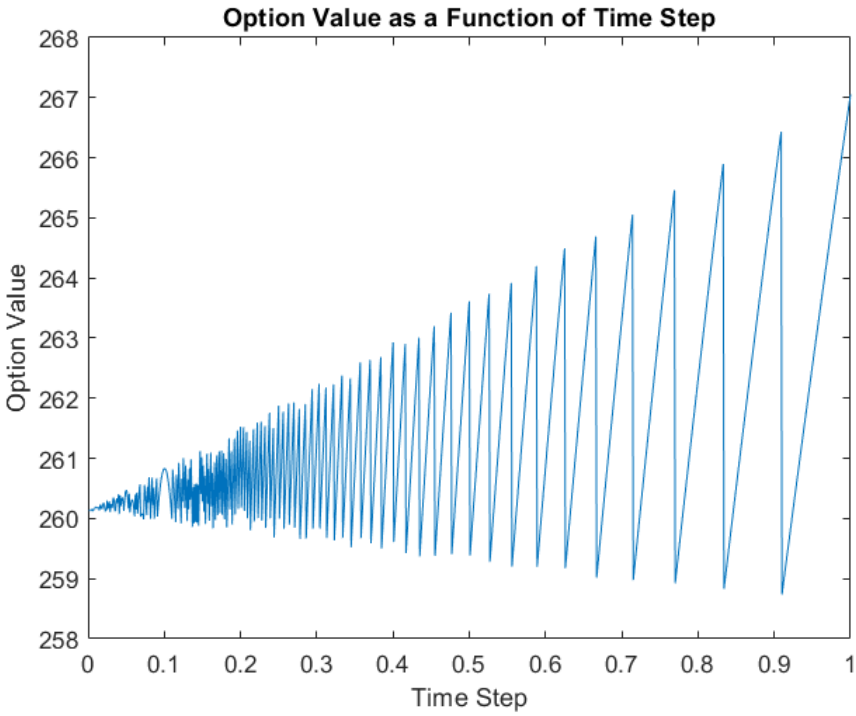

Figura 4: Valor de la opción en función del Time Step Δ_T.

De la figura anterior, se puede concluir que a medida que más diminuto es el *Time Step* Δ_T mayor es la convergencia del valor de la opción, sin embargo, con la contraparte de necesitar aumentar el número de iteraciones para la opción, dado que se necesitarán más *Time Steps* para cubrir el vector *Time Grid*, resultando este último con un mayor largo. Esta situación resulta similar a las simulaciones de *Monte Carlo*, en donde para alcanzar una precisión mayor se necesita aumentar el número de iteraciones significativamente.

13. Pregunta Doce

Esta pregunta no es considerada para esta actividad.