Universidad Adolfo Ibañez

Derivados Avanzados

BLACK-SCHOLES FORMULA AND MONTE CARLO SIMULATIONS

Alumno:
Felipe Ignacio Durán Aranda

Profesor:
Jacques Burrus

Ayudantes:
- Alejandro Olguín
- Guillermo Sepúlveda

February 25, 2021

Contenidos

1 Prefacio

Mediante este informe se busca exponer los resultados conseguidos en las múltiples simulaciones de *Monte Carlo* para varios tipos de opciones, obtenidos a través de *Matlab*, planteados en la actividad *Black-Scholes Formula*, presentando también los resultados para los distintos *momentos* de estas, así como el error que comprenden respecto a su valor teórico.

2 Pregunta Uno

Para esta pregunta, se pide calcular el *costo de replicación* de una opción *European Vanilla Call*, considerando las siguientes características:

$$\begin{aligned} S_0 &= 100 \\ K &= 100 \\ r &= 0.10 \\ q &= 0.05 \\ \sigma &= 0.30 \end{aligned} \tag{1}$$

Con *"r"* siendo la tasa libre de riesgo doméstica, *"q"* la tasa libre de riesgo extranjera,*"S"* el *Spot Price* y *"K"* el *Strike Price* (ϵ call/put flag).

Para calcular este valor, se utilizó el modelo de valorización para opciones *FX Garman–Kohlhagen*, expresado a continuación:

$$V_0 = \epsilon \cdot S_0 \cdot e^{-qT} \cdot N(\epsilon \cdot d_1) - \epsilon \cdot K \cdot e^{-rT} \cdot N(\epsilon \cdot d_2) \tag{2}$$

En donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{\ln S_0/K + (r-q)T}{\sigma\sqrt{T}} + \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{3}$$

Y *"N"* representando la función de densidad acumulada de una normal estándar.
Utilizando el proceso anteriormente mencionado se obtuvo un valor de replicación para la opción (V_0) de 13.5372.

Adicionalmente, en la pregunta, se pide crear una simulación de *Monte Carlo* con 10.000 *paths*, aplicando la siguiente fórmula:

$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{\left(r-q-\sigma^2/2\right)(t_2-t_1)+\sigma\sqrt{(t_2-t_1)}\cdot z} \tag{4}$$

En donde *"z"* equivale a una variable aleatoria normal estándar.

3 Pregunta Dos

El objetivo de esta pregunta consiste en computar el costo de replicación a través del método *Black-Scholes* utilizando los 10.000 *paths* obtenidos en la simulación de *Monte Carlo*. Con este objetivo, se calculó el *payoff* de cada uno de los *paths* utilizando la siguiente fórmula:

$$V_0 = E_0^Q \left[\frac{\max\left(\epsilon \cdot \left(S_T - K\right), 0\right)}{e^{rT}} \right] \tag{5}$$

Una vez calculados los *payoff*, se procedió a calcular el valor de la opción utilizando acumuladores para obtener los dos primeros momentos de esta, a través de las siguientes fórmulas:

$$\begin{gathered} a_0 + = 1 \\ a_1 + = Y_n \\ a_2 + = Y_n^2 \\ \bar{V}_0 = \mathbb{E}[\vec{Y}] = \tfrac{a_1}{a_0} \\ \Delta\bar{V}_0 = \tfrac{\sqrt{V_{ar}[\vec{Y}]}}{\sqrt{N}} = \tfrac{1}{\sqrt{a_0}}\sqrt{\tfrac{a_2}{a_0} - \left(\bar{V}_0\right)^2} \end{gathered} \tag{6}$$

En donde "Y_N" es el *payoff* descontado. Aplicando el proceso y fórmulas anteriormente mencionados, con un total de 10.000 *paths*, se obtuvo una convergencia en los siguientes valores: 13.3597 para el valor de replicación de la *call* y 0.2171 para su *accuracy*.

4 Pregunta Tres

De manera similar a la pregunta anterior, se pide esta vez realizar la simulación de *Monte Carlo* con 1.000.000 de *paths*, y obtener los dos primeros momentos variando el número de *paths* de 10 a 1.000.000, para luego comparar el valor estimado de la opción con su valor teórico. Los momentos fueron calculados a partir de la ecuación seis.

Finalmente, de dicho procedimiento se obtiene el siguiente gráfico para la diferencia de la estimación del valor con su valor teórico (error):

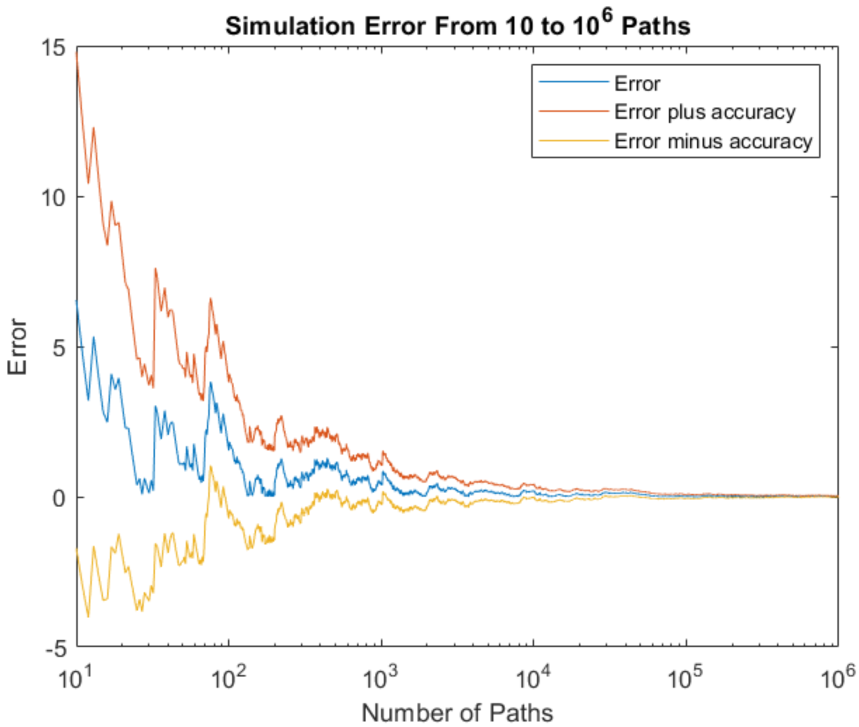

Figura 1: Error de estimación simulación de *Monte Carlo*

Tal como se puede observar en el gráfico, a partir de la simulación de 10.000 *paths* se puede empezar a ver una convergencia hacia el valor 0 para el error, así mismo, a partir de la simulación de 100.000 se puede ver como disminuye todavía más el error de la estimación, convergiendo prácticamente de manera absoluta a 0. Finalmente, podemos observar que aumentar aún más el número de simulaciones no genera una mejoría de la misma magnitud que las anteriores, siendo progresivamente más costoso el aumentar la precisión de la estimación.

5 Pregunta Cuatro

Para esta pregunta, se pide simular 10.000 *paths* de una simulación de *Monte Carlo*, utilizando la misma ecuación y forma de la pregunta dos, sin embargo esta vez con distintas opciones, específicamente opciones *Asian* y *Lookback*. Adicionalmente, para realizar la valorización se pide realizar la simulación en 12 *Steps*, que representarían los meses de un año, utilizando todo para valorizar el *Spot Price* según la formula (4). A continuación se presentan las fórmulas necesarias:

$$\begin{aligned} &t_1 = 1/12 \\ &t_2 = 2/12 \\ &\cdots \\ &t_{12} = T = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

$$A = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} S_{t_1} \tag{8}$$

$$L = \max S_{t_i} \tag{9}$$

Una vez obtenidos los *Spot Price* respectivos para cada opción, se procede a valorizarlos utilizando la fórmula (5). Para la opción *Asian*, se obtuvo una valorización a través de *Black Scholes* de 8.0158 con un *accuracy* de 0.1205, mientras que para la opción *Lookback* se obtuvieron valores de 21.5936 y 0.2231 respectivamente.

Sobre los resultados computados, podemos concluir que la opción *Asian* presenta un menor valor al de la opción *European Vanilla Call* calculada en la pregunta 1 utilizando la formula de *Garman-Kohlhagen*, o la misma calculada con simulación de *Monte Carlo* en la pregunta 2. Lo anterior, se debe a la característica de la opción *Asian* de ser un promedio de los *Spot Price* de cada *Step*, lo que disminuye la volatilidad de la opción y, por ende, su *payoff*, reflejándose esta condición en el precio del instrumento.

Por otra parte, podemos observar que la opción *Lookback* resulta con un precio significativamente mayor comparado con el de la opción *European Vanilla Call*, debido a que la opción toma el máximo *Spot Price* obtenido dentro de los 12 *Step* de la simulación, lo que aumenta de manera significativa la probabilidad de que el contrato se encuentre *In the Money* al momento de ejercer dicha opción. Esta misma cualidad también aumenta los posibles *payoffs* esperados de la opción, al aumentar la posibilidad de encontrar *Spot Prices* significativamente mayores al *Strike Price*, lo cuál también se refleja en el incremento del valor del contrato.

6 Pregunta Cinco

En esta pregunta se pide calcular el *Delta* correspondiente a los *Greeks* para *Black Scholes*, dentro de un rango de posibles *Spot Price* iniciales; tanto de forma analítica como de forma numérica, para luego comparar los resultados y obtener el error presente en la estimación numérica respecto al valor teórico esperado. Primero, se realizó un vector espaciado uniformemente con un ΔS igual a 1. Para calcular los límites inferior y superior del rango se utilizó la siguiente fórmula:

$$S_{\max/min} = S_0 e^{\left(r-q-\sigma^2/2\right)T \pm 2\sigma\sqrt{T}} \tag{10}$$

Luego, se procedió a calcular el valor de *Delta* de forma analítica, utilizando la siguiente formula, en conjunto con la ecuación (3):

$$\Delta_0 = \epsilon \cdot e^{-qT} \cdot N\left(\epsilon \cdot d_1\right) \tag{11}$$

Para obtener el valor de *Delta* de forma numérica, se utilizó el método de diferencias finitas, el cual para el caso del computo de *Delta* se realiza con la siguiente fórmula:

$$\Delta_0 = \frac{V\left(S + \frac{1}{2}\Delta S\right) - V\left(S - \frac{1}{2}\Delta S\right)}{\Delta S} \tag{12}$$

Finalmente, se computó el error de estimación utilizando el valor absoluto entre los resultados obtenidos por el método de diferencias finitas y a través de la forma analítica. Los resultados obtenidos se presentan en el gráfico a continuación:

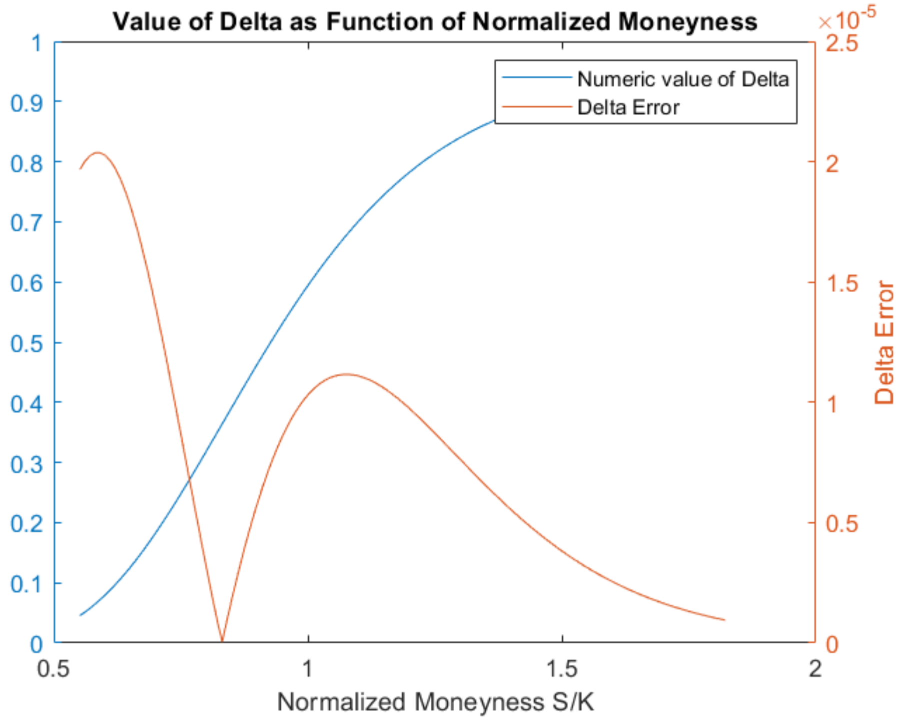

Figura 2: Delta en función de la proporción de Moneyness

Podemos observar que el error de estimación entre ambos métodos resulta poco significativo, llegando a la quinta potencia decimal, manifestándose principalmente en los tramos inferiores y centrales de la función, que debiese ser similar a una función de probabilidad acumulada de una distribución normal, representando el error la diferencia entre este modelo y los resultados obtenidos empíricamente. Por otra parte, podemos observar como la función se relaciona con la probabilidad de que la opción termine *Out the Money (OTM)*, *At the Money (ATM)* o *In the Money (ITM)*, respecto a la proporción del *Spot Price* sobre el *Strike Price*, ratio también llamado *Moneyness*.

Cuando el *Spot Price* se encuentra en gran medida sobre el *Strike Price*, podemos observar que el *Delta* crece, convergiendo a 1, indicando que la probabilidad de que el contrato termine *ITM* es casi del 100%. Por otra parte, cuando el *Spot Price* es inferior en proporción al *Strike Price*, podemos observar que el *Delta*, converge a 0, indicando que la probabilidad de que el contrato termine *ITM* es casi nula, o de forma equivalente, indicando que la probabilidad de que el contrato termine *OTM* es casi segura. Finalmente, podemos observar que cuando el contrato se encuentra *ATM*, la probabilidad de que termine *ITM* tiende a ser del 50%, sin embargo, y tal como se puede observar en los resultados obtenidos, con un ligero sesgo hacia valores superiores para *Long Calls*.

7 Pregunta Seis

En esta pregunta, se pide rehacer el procedimiento y metodologías utilizados para la pregunta anterior, cuya finalidad esta vez es calcular el *Gamma* de los indicadores *Greeks*. Para realizar esto, se utilizó la siguiente fórmula, en conjunto con la fórmula (3), para el valor analítico de *Gamma*:

$$\Gamma_0 = e^{-qT} \cdot \frac{n\left(d_1\right)}{S_0 \cdot \sigma\sqrt{T}} \tag{13}$$

En donde n es la función densidad de probabilidad. Para obtener el valor numérico de *Gamma*, se hizo uso nuevamente de diferencias finitas, utilizando la siguiente fórmula:

$$\Gamma_0 = \frac{V(S+\Delta S) - 2V(S) + V(S-\Delta S)}{(\Delta S)^2} \tag{14}$$

Para el cálculo del error nuevamente se utilizó el valor absoluto entre los cómputos por diferencias finitas y el valor teórico obtenido de forma analítica. Los resultados obtenidos se presentan en el siguiente gráfico:

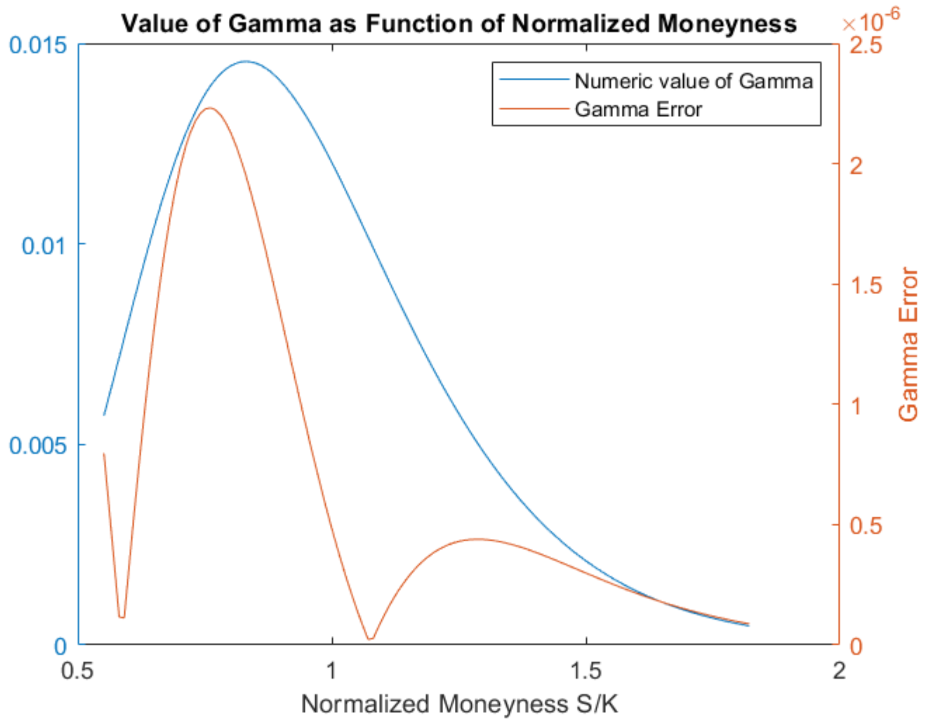

Figura 3: Gamma en función de la proporción de Moneyness

Nuevamente, podemos observar que el error de estimación entre ambos métodos resulta ínfimo, llegando a la quinta potencia decimal. Por otra parte, podemos ver que este error resulta menor a medida que el valor de *Gamma* converge a 0. Así mismo, podemos ver que *Gamma* tiende a ser mayor a medida que nos acercamos a relaciones *Spot Price Strike Price At the Money* (*Moneyness igual a 1*), esto debido a la propiedad de *Gamma* de reflejar la razón de cambio de *Delta*, siendo mayor a medida que *Delta* se encuentra en valores *At the Money*, y menor a medida que nos alejamos del *Strike Price.*

Finalmente, podemos concluir que los indicadores *Greeks* reflejan los cambios del instrumento en función del *Spot Price*, dando indicios tanto de la volatilidad del contrato como de la probabilidad de que este termine *In the Money.*