



UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

DERIVADOS AVANZADOS

CALIBRATING AN OPTION PRICING MODEL WITH MARKET DATA

Autores:

Felipe Durán Aranda

Felipe Galdames Vial

Profesor:

Prof. Jacques Burrus

Ayudantes:

Alejandro Olguin

Guillermo Sepulveda

Trabajo que busca presentar los análisis, resultados y conclusiones obtenidos para cada uno de los pasos del proyecto Calibrating an Option Pricing Model With Market Data, donde se aplican diversos modelos de valorización teóricos con información financiera real de los mercados.

Magíster Ingeniería Financiera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

18 de Agosto, 2020

Contenidos

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Prefacio | 3 |
| 2 | PART I: The data | 4 |
| 2.1 | Step 1 | 4 |
| 2.2 | Step 2 | 6 |
| 2.2.1 | Step 2.1: Forward Price | 7 |
| 2.2.2 | Step 2.2: Strike Price | 8 |
| 2.2.3 | Step 2.3: Option Fair Value | 9 |
| 3 | PART II: The pricing engine | 10 |
| 3.1 | Step 3 | 10 |
| 3.2 | Step 4 | 10 |
| 3.3 | Step 5 | 10 |
| 3.4 | Step 6 | 10 |
| 3.5 | Step 7 | 10 |
| 3.6 | Step 8 | 10 |
| 4 | PART III: The model calibration | 10 |
| 4.1 | Step 9 | 10 |
| 4.2 | Step 10 | 10 |
| 4.3 | Step 11 | 10 |
| 4.4 | Step 12 | 10 |
| 4.5 | Step 13 | 10 |
| 4.6 | Step 14 | 10 |
| 5 | Anexos | 11 |

1 Prefacio

Mediante este informe se busca presentar los análisis, resultados y conclusiones obtenidos para cada uno de los pasos del proyecto *Calibrating an Option Pricing Model With Market Data*, el cual busca aplicar diversos modelos de valorización teóricos utilizando información financiera real de los mercados. Los cálculos necesarios para realizar este propósito se efectuarán principalmente en *Matlab*.

2 PART I: The data

Esta primera parte del proyecto tiene como objetivo realizar un primer acercamiento a los datos, identificando eventos históricos importantes que puedan haber tenido efectos en las series de tiempo en estudio, así como verificar la consistencia de la data que será utilizada posteriormente.

2.1 Step 1

En este primer paso se busca familiarizarse con los datos y series de tiempo que se tienen, respecto al tipo de cambio entre la libra esterlina y el dólar (GBP-USD). Con este motivo, se pide buscar los hechos históricos importantes en el período de estudio que afectaron a los mercados involucrados y el tipo de cambio en juego. A continuación se presenta la variación del tipo de cambio en el transcurso de Enero del año 2016 a Enero del año 2019:

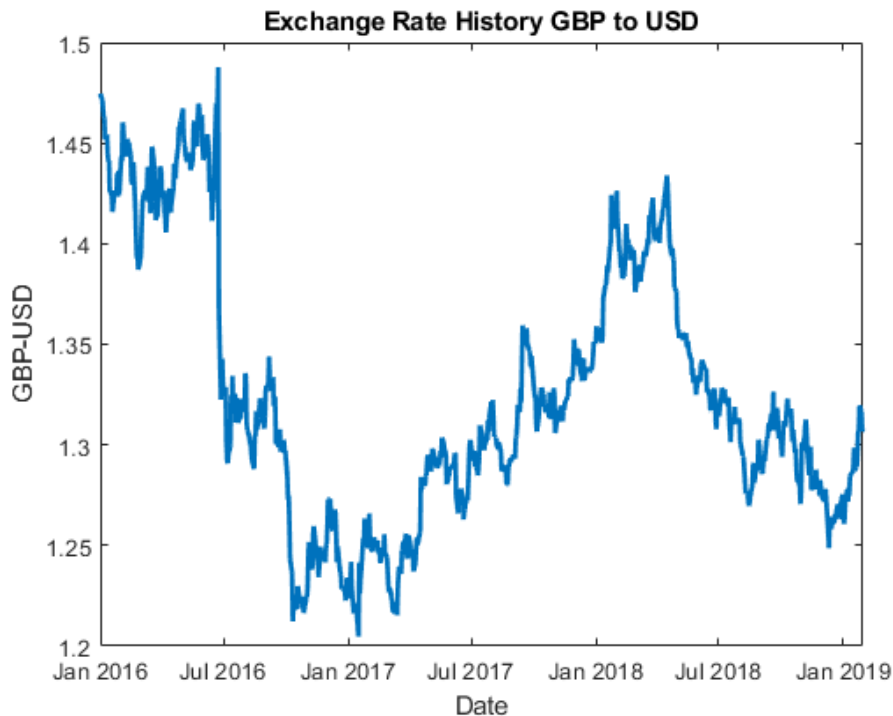


Figura 1: Tipo de cambio GBP-USD entre año 2016 y 2019

En el gráfico anterior se pueden observar diversos tramos en los cuales el tipo de cambio fluctúa, encontrándose la libra esterlina más depreciada o apreciada respecto al dólar. De manera general, estas fluctuaron acorde al proceso de separación que estaba llevando el Reino Unido para dejar de formar parte de la Unión Europea, proceso comúnmente denominado como *Brexit*, lo que se reflejó en una inestabilidad del valor de la libra esterlina durante dicho período. Finalmente, dentro de los hechos históricos importantes acontecidos durante este período tenemos los siguientes:

- Febrero 2016: El alcalde de Londres, Boris Johnson, le otorgó todo su apoyo y voto al *Brexit*, lo que provocó que los inversores vieran un mayor riesgo en el país, que finalmente se tradujo en un retiro de fondos por parte de los inversionistas y por ende una depreciación de la libra esterlina.
- Junio 2016: El referéndum celebrado el 23 de Junio de 2016, con motivo del *Brexit*, presentó una aprobación equivalente al 51,9% de los votantes apoyando la idea de abandonar la *Unión Europea*, por lo cual se procedió a invocar el artículo 50 del *Tratado de la Unión Europea*, con lo que, nuevamente se vieron reflejados los problemas y preocupaciones asociadas a la salida del *Reino Unido* de la *Unión Europea*, provocando nuevamente un retiro de capitales.
- Febrero 2017: Desde este periodo, hasta comienzos del año 2018, se pudo observar como se recuperó la libra esterlina con respecto al dólar, alza que continuó durante dicho año. Lo anterior se debe a que el dolar se estuvo depreciando de forma gradual, desde que Donald Trump asumió como presidente de los Estados Unidos, debido a las malas relaciones que el mandatario llevó a cabo con respecto al comercio exterior, especialmente en la materia referente a China. Asimismo, mientras el dolar se estaba recuperando en Marzo del 2018, el tipo de cambio GBP-USD se precipitó a bajar, como se ve en el gráfico, debido a que el Reino Unido seguía gestionando su salida de la *Unión Europea*.
- Diciembre 2018: Finalmente, el 14 de Diciembre del año 2018, Theresa May (la primera ministra del *Reino Unido*) ganó el voto de confianza entre los parlamentarios, previo a esto, Theresa May fue muy cuestionada, por el acuerdo de salida planteado en ese entonces; el que no cumplía con todas las demandas exigidas por su partido político, lo que trajo mayor incertidumbre en el mercado británico y por ende una depreciación de la moneda local.

2.2 Step 2

Para este segundo paso, se procedió a verificar la consistencia de los datos con los cuales se trabajaran, así como lograr un mayor entendimiento de estos. Este objetivo fue ejecutado en tres pasos, indicados a continuación:

- **Cálculo del *Forward Price*:** Se obtuvo a partir del *Spot Price*, el factor de descuento doméstico y extranjero.
- **Cálculo del *Strike Price*:** Se calculó utilizando el valor *delta* entregado, los *Tenores*, la volatilidad implícita, el factor de descuento doméstico y extranjero.
- **Cálculo del *Option Fair Value*:** Finalmente, este se obtuvo a partir del *Strike Price*, *Spot Price*, la volatilidad implícita, los *Tenores* y los factores de descuento tanto doméstico como extranjero.

A continuación se presentan los cálculos, desarrollo y análisis de los procedimientos realizados. Las comparaciones realizadas se hicieron principalmente con los datos teóricos presentados en el documento *Excel Data Fitting A Quantitative Model Onto A Market Smile GBP-USD*.

2.2.1 Step 2.1: Forward Price

En este apartado, se procedió a calcular el *Forward Price* o precio *Forward*, utilizando los elementos previamente mencionados, a través de la siguiente fórmula:

$$K^{ATMF} = S_0 \cdot \frac{e^{-q \cdot T}}{e^{-r \cdot T}} \quad (1)$$

$q = \text{Tasa de descuento extranjera}$

$r = \text{Tasa de descuento doméstica}$

$S_0 = \text{Precio spot}$

$T = \text{Tiempo}$

Para esta ecuación, el tiempo utilizado corresponde al entregado en los datos como *Working Days*.

Por otra parte, cabe destacar que los datos utilizados presentan los factores de descuento y no las tasas. Para obtener estas últimas; las tasas r (interés doméstico) y q (interés extranjero), se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$r = \frac{-\ln(\text{Factor descuento domestico})}{\text{Tiempo}} \quad (2)$$

$$q = \frac{-\ln(\text{Factor descuento extranjero})}{\text{Tiempo}} \quad (3)$$

Cabe mencionar que la fórmula utilizada para el cálculo de los *Forwards* es válida al considerar la propiedad de un *ATM (At The Money) Forward*, en la cual, para valores *At The Money*, el *Strike Price* coincide con el *Forward Price* o *Precio Forward*.

Finalmente, una vez calculados los precios *Forwards*, se compararon con los valores teóricos entregados en el documento *Excel*. Se puede observar una muestra de los 10 primeros datos obtenidos en el anexo, específicamente en las tablas 1 y 2. Como se puede observar de los datos adjuntos, el valor de los errores resulta relativamente diminuto, cercano a 0, por lo cual se podría decir que el cálculo del precio *Forward* fue realizado de manera correcta.

2.2.2 Step 2.2: Strike Price

En esta etapa, tal como se mencionó con anterioridad, se procede a calcular los *Strike Prices* de los contratos para cada uno de los siguientes Δ (10P, 25P, ATM, 25C, 10C) y *Tenores* T (1 mes, 3 meses, 6 meses, 9 meses, 12 meses), a través de las siguientes ecuaciones:

$$K = S_0 \cdot e^{(r-q) \cdot T} \cdot e^{\frac{\sigma^2 \cdot T}{2} - d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (4)$$
$$d_1 = \epsilon \cdot N^{-1} \left(\frac{\epsilon \cdot \Delta}{\alpha} \right)$$
$$\alpha = e^{-q \cdot T}$$

Donde en la anterior ecuación, usando las propiedades pertinentes, Δ toma los valores de (0.9, 0.75, 0.5, 0.75, 0.9), expresados como Δ para una opción *Call*, por lo que se trabaja con un $\epsilon = 1$. Cabe destacar que se utilizaron valores iguales para los dos últimos Δ y para los primeros dos, debido a que los datos utilizados no contaban con la información correspondiente para ser usados con la forma (0.9, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1). En los elementos anexados al final del documento se puede observar, específicamente en las tablas 3 y 4 con 10 filas de muestra, que el error de estimación respecto a los datos teóricos resulta relativamente pequeño, por lo que podríamos decir que el proceso fue ejecutado de manera correcta.

2.2.3 Step 2.3: Option Fair Value

En esta sección, primero se procedió a verificar la consistencia de las volatilidades entregadas (σ), las cuales serán utilizadas posteriormente en el cálculo del precio de las opciones (*Option Fair Value*). Para el caso de las volatilidades, se procedió a descomponer los diferentes σ , en términos de *Risk Reversal* y *Butterfly* utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{Call} = \sigma_{ATM} + \sigma_{BF} + \frac{\sigma_{RR}}{2} \quad (5)$$

$$\sigma_{Put} = \sigma_{ATM} + \sigma_{BF} - \frac{\sigma_{RR}}{2} \quad (6)$$

Las cuales, en términos de sus Δ , son consistentes con las volatilidades entregadas en los datos del documento *Excel*, presentando un error prácticamente de cero, tal como se puede observar en las tablas anexadas 5 y 6.

Una vez obtenidas las volatilidades, se procedió a utilizarlas para calcular el precio de las opciones, tanto para los diferentes *Tenores*, como para los diversos Δ , mediante la formula de Black-Scholes, la cual de forma general se puede expresar como:

$$V_0 = \epsilon \cdot S_0 \cdot e^{-qT} \cdot N(\epsilon \cdot d_1) - \epsilon \cdot K \cdot e^{-rT} \cdot N(\epsilon \cdot d_2) \quad (7)$$

En donde:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - q) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{si es una opción Call} \\ -1 & \text{si es una opción Put} \end{cases}$$

$N = \text{Función de Densidad Acumulada}$

Finalmente, realizando el procedimiento anterior se obtuvo un error promedio de 0.0934, lo que, dado los relativamente diminutos valores de las opciones puede ser considerado un valor a tomar en cuenta, según la comparación entre los valores calculados y los valores teóricos presentados en el documento *Excel*. Estos errores se muestran en las tablas anexadas 7 y 8 respectivamente, con una muestra de 50 valores en conjunto a su error respectivo.

3 PART II: The pricing engine

3.1 Step 3

3.2 Step 4

3.3 Step 5

3.4 Step 6

3.5 Step 7

3.6 Step 8

4 PART III: The model calibration

4.1 Step 9

4.2 Step 10

4.3 Step 11

4.4 Step 12

4.5 Step 13

4.6 Step 14

5 Anexos

A continuación se presentan los documentos anexados, señalados con anterioridad:

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.4759 | 1.4770 | 1.4835 | 1.4988 | 1.5070 |
| 1.4696 | 1.4710 | 1.4773 | 1.4862 | 1.4978 |
| 1.4610 | 1.4623 | 1.4684 | 1.4778 | 1.4898 |
| 1.4520 | 1.4536 | 1.4606 | 1.4715 | 1.4842 |
| 1.4493 | 1.4508 | 1.4584 | 1.4687 | 1.4803 |
| 1.4293 | 1.4309 | 1.4382 | 1.4488 | 1.4616 |
| 1.4346 | 1.4364 | 1.4437 | 1.4543 | 1.4678 |
| 1.4160 | 1.4179 | 1.4254 | 1.4357 | 1.4499 |
| 1.4078 | 1.4097 | 1.4166 | 1.4269 | 1.4393 |
| 1.4090 | 1.4109 | 1.4169 | 1.4263 | 1.4378 |

Table 1: Forward Price Calculado

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Table 2: Error Forward Price Calculado Respecto Teórico

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.4251 | 1.4501 | 1.4750 | 1.4517 | 1.4304 |
| 1.4191 | 1.4456 | 1.4721 | 1.4472 | 1.4245 |
| 1.4170 | 1.4424 | 1.4679 | 1.4438 | 1.4218 |
| 1.4169 | 1.4401 | 1.4633 | 1.4413 | 1.4208 |
| 1.4162 | 1.4392 | 1.4621 | 1.4403 | 1.4200 |
| 1.4085 | 1.4303 | 1.4519 | 1.4314 | 1.4122 |
| 1.4073 | 1.4309 | 1.4546 | 1.4321 | 1.4111 |
| 1.3950 | 1.4200 | 1.4451 | 1.4211 | 1.3988 |
| 1.3930 | 1.4169 | 1.4410 | 1.4180 | 1.3967 |
| 1.3954 | 1.4184 | 1.4416 | 1.4195 | 1.3991 |

Table 3: Strike Prices Calculados

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0088 | 0.0053 | 0.0008 | 0.0050 | 0.0080 |
| 0.0059 | 0.0023 | 0.0025 | 0.0020 | 0.0051 |
| 0.0014 | 0.0022 | 0.0069 | 0.0024 | 0.0006 |
| 0.0037 | 0.0070 | 0.0113 | 0.0072 | 0.0043 |
| 0.0052 | 0.0085 | 0.0128 | 0.0087 | 0.0058 |
| 0.0151 | 0.0185 | 0.0226 | 0.0187 | 0.0157 |
| 0.0120 | 0.0155 | 0.0201 | 0.0157 | 0.0126 |
| 0.0204 | 0.0242 | 0.0292 | 0.0244 | 0.0210 |
| 0.0247 | 0.0284 | 0.0332 | 0.0286 | 0.0253 |
| 0.0243 | 0.0280 | 0.0325 | 0.0282 | 0.0250 |

Table 4: Error Strike Price Calculado Respecto Teórico

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0927 | 0.0871 | 0.0815 | 0.0813 | 0.0825 |
| 0.0948 | 0.0892 | 0.0847 | 0.0836 | 0.0848 |
| 0.0914 | 0.0862 | 0.0822 | 0.0812 | 0.0824 |
| 0.0853 | 0.0804 | 0.0767 | 0.0761 | 0.0778 |
| 0.0861 | 0.0809 | 0.0772 | 0.0769 | 0.0787 |
| 0.0818 | 0.0767 | 0.0730 | 0.0727 | 0.0745 |
| 0.0857 | 0.0806 | 0.0771 | 0.0767 | 0.0785 |
| 0.0914 | 0.0864 | 0.0827 | 0.0823 | 0.0841 |
| 0.0895 | 0.0846 | 0.0807 | 0.0806 | 0.0824 |
| 0.0878 | 0.0828 | 0.0792 | 0.0787 | 0.0805 |

Table 5: Volatilidades Calculadas

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Table 6: Error Volatilidades Calculadas

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0437 | 0.0263 | 0.0133 | 0.0245 | 0.0389 |
| 0.0492 | 0.0303 | 0.0161 | 0.0285 | 0.0444 |
| 0.0512 | 0.0325 | 0.0179 | 0.0309 | 0.0468 |
| 0.0512 | 0.0335 | 0.0194 | 0.0322 | 0.0476 |
| 0.0520 | 0.0344 | 0.0202 | 0.0332 | 0.0486 |
| 0.0588 | 0.0414 | 0.0264 | 0.0403 | 0.0556 |
| 0.0599 | 0.0412 | 0.0255 | 0.0400 | 0.0565 |
| 0.0706 | 0.0505 | 0.0330 | 0.0494 | 0.0673 |
| 0.0726 | 0.0532 | 0.0358 | 0.0522 | 0.0695 |
| 0.0705 | 0.0517 | 0.0350 | 0.0507 | 0.0673 |

Table 7: Valor Calculado De La Opción

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0010 | 0.0015 | 0.0017 | 0.0106 | 0.0301 |
| 0.0040 | 0.0040 | 0.0035 | 0.0137 | 0.0350 |
| 0.0077 | 0.0071 | 0.0058 | 0.0165 | 0.0377 |
| 0.0114 | 0.0103 | 0.0083 | 0.0190 | 0.0392 |
| 0.0127 | 0.0115 | 0.0093 | 0.0202 | 0.0403 |
| 0.0217 | 0.0198 | 0.0162 | 0.0280 | 0.0477 |
| 0.0194 | 0.0176 | 0.0142 | 0.0265 | 0.0479 |
| 0.0278 | 0.0255 | 0.0210 | 0.0350 | 0.0582 |
| 0.0316 | 0.0292 | 0.0244 | 0.0384 | 0.0607 |
| 0.0310 | 0.0287 | 0.0240 | 0.0375 | 0.0589 |

Table 8: Error Valor Calculado De La Opción Respecto Teórico