



UNIVERSIDAD ADOLFO IBÁÑEZ

DERIVADOS AVANZADOS

CALIBRATING AN OPTION PRICING MODEL WITH MARKET DATA

Alumnos:

Felipe Galdames Vial

Felipe Duran Aranda

Profesor:

Prof. Jacques Burrus

Ayudantes:

Alejandro Olguin

Guillermo Sepulveda

Trabajo que busca presentar los análisis, resultados y conclusiones obtenidos para cada uno de los pasos del proyecto Calibrating an Option Pricing Model With Market Data, donde se aplican diversos modelos de valorización teóricos con información financiera real de los mercados

Magíster Ingeniería Financiera
Facultad de Ingeniería y Ciencias

23 de Octubre, 2020

Contenidos

1	Prefacio	3
2	PART I: The data	4
2.1	Step 1	4
2.2	Step 2	6
2.2.1	Step 2.1: Forward Price	7
2.2.2	Step 2.2: Strike Price	8
2.2.3	Step 2.3: Option Fair Value	9
3	PART II: The pricing engine	10
3.1	Step 3: Monte-Carlo	10
3.2	Step 3: Heston	12
3.3	Step 4	14
3.3.1	Step 4.1: Money Market Account	14
3.3.2	Step 4.2: Forward Contract	16
3.4	Step 5	17
3.5	Step 6	18
3.6	Step 7	22
3.7	Step 8	23
4	PART III: The model calibration	25
4.1	Step 9	25
4.2	Step 10	27
4.3	Step 11	28
4.4	Step 12	32
4.5	Step 13	39
4.6	Step 14	40
5	Anexos	41

1 Prefacio

Mediante este informe se busca presentar los análisis, resultados y conclusiones obtenidos para cada uno de los pasos del proyecto *Calibrating an Option Pricing Model With Market Data*, el cual busca aplicar diversos modelos de valorización teóricos utilizando información financiera real de los mercados. Los cálculos necesarios para realizar este propósito se efectuarán principalmente en *Matlab*.

2 PART I: The data

Esta primera parte del proyecto tiene como objetivo realizar un primer acercamiento a los datos, identificando eventos históricos importantes que puedan haber tenido efectos en las series de tiempo en estudio, así como verificar la consistencia de la data que será utilizada posteriormente.

2.1 Step 1

En este primer paso se busca familiarizarse con los datos y series de tiempo que se tienen, respecto al tipo de cambio entre la libra esterlina y el dólar (GBP-USD). Con este motivo, se pide buscar los hechos históricos importantes en el período de estudio que afectaron a los mercados involucrados y el tipo de cambio en juego. A continuación se presenta la variación del tipo de cambio en el transcurso de Enero del año 2016 a Enero del año 2019:

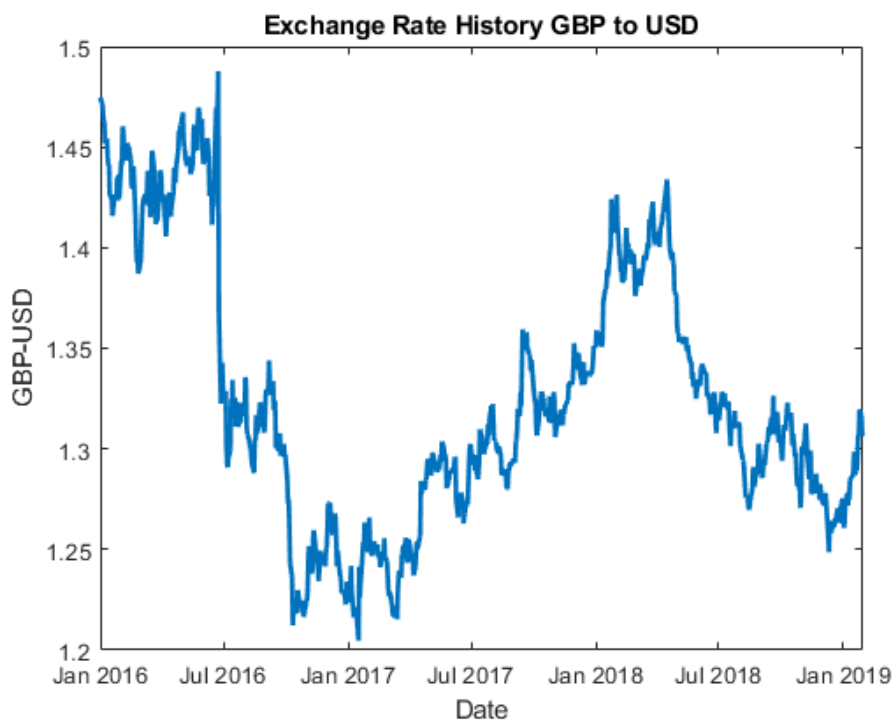


Figura 1: Tipo de cambio GBP-USD entre año 2016 y 2019

En el gráfico anterior se pueden observar diversos tramos en los cuales el tipo de cambio fluctúa, encontrándose la libra esterlina más depreciada o apreciada respecto al dólar. De manera general, estas fluctuaron acorde al proceso de separación que estaba llevando el Reino Unido para dejar de formar parte de la Unión Europea, proceso comúnmente denominado como *Brexit*, lo que se reflejó en una inestabilidad del valor de la libra esterlina durante dicho período. Finalmente, dentro de los hechos históricos importantes acontecidos durante este período tenemos los siguientes:

- Febrero 2016: El alcalde de Londres, Boris Johnson, le otorgó todo su apoyo y voto al *Brexit*, lo que provocó que los inversores vieran un mayor riesgo en el país, que finalmente se tradujo en un retiro de fondos por parte de los inversionistas y por ende una depreciación de la libra esterlina.
- Junio 2016: El referéndum celebrado el 23 de Junio de 2016, con motivo del *Brexit*, presentó una aprobación equivalente al 51,9% de los votantes apoyando la idea de abandonar la *Unión Europea*, por lo cual se procedió a invocar el artículo 50 del *Tratado de la Unión Europea*, con lo que, nuevamente se vieron reflejados los problemas y preocupaciones asociadas a la salida del *Reino Unido* de la *Unión Europea*, provocando nuevamente un retiro de capitales.
- Febrero 2017: Desde este periodo, hasta comienzos del año 2018, se pudo observar como se recuperó la libra esterlina con respecto al dólar, alza que continuó durante dicho año. Lo anterior se debe a que el dolar se estuvo depreciando de forma gradual, desde que Donald Trump asumió como presidente de los Estados Unidos, debido a las malas relaciones que el mandatario llevó a cabo con respecto al comercio exterior, especialmente en la materia referente a China. Asimismo, mientras el dolar se estaba recuperando en Marzo del 2018, el tipo de cambio GBP-USD se precipitó a bajar, como se ve en el gráfico, debido a que el Reino Unido seguía gestionando su salida de la *Unión Europea*.
- Diciembre 2018: Finalmente, el 14 de Diciembre del año 2018, Theresa May (la primera ministra del *Reino Unido*) ganó el voto de confianza entre los parlamentarios, previo a esto, Theresa May fue muy cuestionada, por el acuerdo de salida planteado en ese entonces; el que no cumplía con todas las demandas exigidas por su partido político, lo que trajo mayor incertidumbre en el mercado británico y por ende una depreciación de la moneda local.

2.2 Step 2

Para este segundo paso, se procedió a verificar la consistencia de los datos con los cuales se trabajaran, así como lograr un mayor entendimiento de estos. Este objetivo fue ejecutado en tres pasos, indicados a continuación:

- **Cálculo del *Forward Price*:** Se obtuvo a partir del *Spot Price*, el factor de descuento doméstico y extranjero.
- **Cálculo del *Strike Price*:** Se calculó utilizando el valor *delta* entregado, los *Tenores*, la volatilidad implícita, el factor de descuento doméstico y extranjero.
- **Cálculo del *Option Fair Value*:** Finalmente, este se obtuvo a partir del *Strike Price*, *Spot Price*, la volatilidad implícita, los *Tenores* y los factores de descuento tanto doméstico como extranjero.

A continuación se presentan los cálculos, desarrollo y análisis de los procedimientos realizados. Las comparaciones realizadas se hicieron principalmente con los datos teóricos presentados en el documento *Excel Data Fitting A Quantitative Model Onto A Market Smile GBP-USD*.

2.2.1 Step 2.1: Forward Price

En este apartado, se procedió a calcular el *Forward Price* o precio *Forward*, utilizando los elementos previamente mencionados, a través de la siguiente fórmula:

$$K^{ATMF} = S_0 \cdot \frac{e^{-q \cdot T}}{e^{-r \cdot T}} \quad (1)$$

$q = \text{Tasa de descuento extranjera}$

$r = \text{Tasa de descuento doméstica}$

$S_0 = \text{Precio spot}$

$T = \text{Tiempo}$

Para esta ecuación, el tiempo utilizado corresponde al entregado en los datos como *Working Days*.

Por otra parte, cabe destacar que los datos utilizados presentan los factores de descuento y no las tasas. Para obtener estas últimas; las tasas r (interés doméstico) y q (interés extranjero), se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$r = \frac{-\ln(\text{Factor descuento domestico})}{\text{Tiempo}} \quad (2)$$

$$q = \frac{-\ln(\text{Factor descuento extranjero})}{\text{Tiempo}} \quad (3)$$

Cabe mencionar que la fórmula utilizada para el cálculo de los *Forwards* es válida al considerar la propiedad de un *ATM (At The Money) Forward*, en la cual, para valores *At The Money*, el *Strike Price* coincide con el *Forward Price* o *Precio Forward*.

Finalmente, una vez calculados los precios *Forwards*, se compararon con los valores teóricos entregados en el documento *Excel*. Se puede observar una muestra de los 10 primeros datos obtenidos en el anexo, específicamente en las tablas 1 y 2. Como se puede observar de los datos adjuntos, el valor de los errores resulta relativamente diminuto, cercano a 0, por lo cual se podría decir que el cálculo del precio *Forward* fue realizado de manera correcta.

2.2.2 Step 2.2: Strike Price

En esta etapa, tal como se mencionó con anterioridad, se procede a calcular los *Strike Prices* de los contratos para cada uno de los siguientes Δ (10P, 25P, ATM, 25C, 10C) y *Tenores* T (1 mes, 3 meses, 6 meses, 9 meses, 12 meses), a través de las siguientes ecuaciones:

$$K = S_0 \cdot e^{(r-q) \cdot T} \cdot e^{\frac{\sigma^2 \cdot T}{2} - d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (4)$$
$$d_1 = \epsilon \cdot N^{-1} \left(\frac{\epsilon \cdot \Delta}{\alpha} \right)$$
$$\alpha = e^{-q \cdot T}$$

Donde en la anterior ecuación, usando las propiedades pertinentes, Δ toma los valores de (0.9, 0.75, 0.5, 0.75, 0.9), expresados como Δ para una opción *Call*, por lo que se trabaja con un $\epsilon = 1$. Cabe destacar que se utilizaron valores iguales para los dos últimos Δ y para los primeros dos, debido a que los datos utilizados no contaban con la información correspondiente para ser usados con la forma (0.9, 0.75, 0.5, 0.25, 0.1). En los elementos anexados al final del documento se puede observar, específicamente en las tablas 3 y 4 con 10 filas de muestra, que el error de estimación respecto a los datos teóricos resulta relativamente pequeño, por lo que podríamos decir que el proceso fue ejecutado de manera correcta.

2.2.3 Step 2.3: Option Fair Value

En esta sección, primero se procedió a verificar la consistencia de las volatilidades entregadas (σ), las cuales serán utilizadas posteriormente en el cálculo del precio de las opciones (*Option Fair Value*). Para el caso de las volatilidades, se procedió a descomponer los diferentes σ , en términos de *Risk Reversal* y *Butterfly* utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{Call} = \sigma_{ATM} + \sigma_{BF} + \frac{\sigma_{RR}}{2} \quad (5)$$

$$\sigma_{Put} = \sigma_{ATM} + \sigma_{BF} - \frac{\sigma_{RR}}{2} \quad (6)$$

Las cuales, en términos de sus Δ , son consistentes con las volatilidades entregadas en los datos del documento *Excel*, presentando un error prácticamente de cero, tal como se puede observar en las tablas anexadas 5 y 6.

Una vez obtenidas las volatilidades, se procedió a utilizarlas para calcular el precio de las opciones, tanto para los diferentes *Tenores*, como para los diversos Δ , mediante la formula de Black-Scholes, la cual de forma general se puede expresar como:

$$V_0 = \epsilon \cdot S_0 \cdot e^{-qT} \cdot N(\epsilon \cdot d_1) - \epsilon \cdot K \cdot e^{-rT} \cdot N(\epsilon \cdot d_2) \quad (7)$$

En donde:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - q) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{si es una opción Call} \\ -1 & \text{si es una opción Put} \end{cases}$$

$N = \text{Función de Densidad Acumulada}$

Finalmente, realizando el procedimiento anterior se obtuvo un error promedio de 0.0934, lo que, dado los relativamente diminutos valores de las opciones puede ser considerado un valor a tomar en cuenta, según la comparación entre los valores calculados y los valores teóricos presentados en el documento *Excel*. Estos errores se muestran en las tablas anexadas 7 y 8 respectivamente, con una muestra de 50 valores en conjunto a su error respectivo.

3 PART II: The pricing engine

En esta segunda parte del proyecto, se busca implementar un *Motor de Cálculo* que sea capaz de valorizar diferentes opciones de manera correcta, el cual adicionalmente será probado con distintos modelos. En primera instancia, se utilizarán opciones y modelos simples, tales como procesos deterministas, para luego utilizar modelos más complejos como lo son procesos estocásticos. A continuación se presentan los diversos resultados obtenidos a partir de simulaciones utilizando el método de *Monte-Carlo*.

3.1 Step 3: Monte-Carlo

En este paso del proyecto, se plantean los procedimientos y metodologías utilizados para la confección del motor de cálculo basado en simulaciones de *Monte-Carlo*, sujeto a simular cambios en el *Spot* subyacente a través de un modelo de *Movimiento Browniano Geométrico*. Los cambios y simulaciones en el *Spot* se realizan de la siguiente forma:

$$dS_t = (r - q) \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot dW_t^Q \quad (8)$$

En donde la variación de las fluctuaciones queda sujeto a la volatilidad σ , y en donde W_t^Q corresponde a un proceso de *Wiener*, el cuál entrega aleatoriedad al modelo, convirtiéndolo en un proceso estocástico. Para este caso en particular, se trabajó con el esquema analítico, debido a su fácil implementación, quedando de la siguiente manera:

$$S_{t+1} = S_t \cdot e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta W} \quad (9)$$

Cuya forma es equivalente a:

$$S_{t+1} = S_t \cdot e^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2}) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z} \quad (10)$$

$$\text{Con } Z = \text{Normal}(0, 1)$$

La formulación planteada anteriormente tiene como función el simular diferentes escenarios para el *Spot* subyacente, específicamente realizando 10.000 simulaciones por cada aplicación en nuestro modelo, de la cuál cada una de ellas consta de una trayectoria diferente, determinada por el proceso de *Wiener*. Una vez obtenidas las distintas simulaciones, se procedió a calcular el *Payoff* V_t de las opciones de la siguiente forma:

$$V_t = V(S_t) = \text{Max}(S_t - K, 0) \quad (11)$$

Posteriormente, se procedió a calcular el costo de replicación descontado, conocido también como *Payoff* descontado, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$Y_t = \frac{V_t}{e^{r \cdot t}} \quad (12)$$

Finalmente, se procedió a calcular el precio de la opción V_0 , el cual se obtuvo calculando el promedio de todos los *Payoff* descontados conseguidos, tal como se puede ver en la siguiente expresión:

$$\overline{V_0}(N) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N Y_i \quad (13)$$

O bien en nuestro caso particular:

$$\overline{V_0}(10,000) = \frac{1}{10,000} \cdot \sum_{i=1}^{10,000} Y_i$$

3.2 Step 3: Heston

En este paso se desarrollan y se plantean las metodologías y modelos correspondientes al segundo motor de cálculo utilizado en este proyecto, correspondiente al modelo de *Heston*, con tal de comparar y contrastar los resultados obtenidos respecto al anterior motor de cálculo. Específicamente fue analizado el modelo de volatilidad estocástica de *Heston*. Dicho modelo supone que el precio del activo (*Spot Price*) S_t esta determinado por un proceso estocástico de la forma:

$$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sqrt{\nu_t} \cdot S_t \cdot dW_t^S \quad (14)$$

En donde la varianza instantánea ν_t esta dado por:

$$d\nu_t = \Theta \cdot (\omega - \nu_t) \cdot dt + \xi \cdot \sqrt{\nu_t} \cdot dW_t^\nu \quad (15)$$

Para la cual dW_t^S y dW_t^ν son procesos de Wiener, los cuales están correlacionados de la siguiente manera:

$$dW_t^S dW_t^\nu = \rho dt \quad (16)$$

Por otra parte, el modelo de *Heston* consta con una formula cerrada de valorización, la cual permite una mayor facilidad al momento de hacer cálculos computacionales, los cuales se simplifican a la siguiente ecuación:

$$C_0 = S_0 e^{-qT} P_1 - K e^{-rT} P_2 \quad (17)$$

En la cual P_1 y P_2 son probabilidades definidas por la forma:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\phi=0}^{+\infty} \text{Re} \left\{ \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi | x_0, \nu_0, T)}{i\phi} \right\} d\phi \quad (18)$$

Con:

$$\begin{aligned}
 f_j(\phi \mid x_0, \nu_0, T) &= \exp [C_j(\phi \mid T) + D_j(\phi \mid T)\nu_0 + i\phi x_0] \\
 C_j(\phi \mid T) &= i\phi(r - q)T + \frac{a}{\xi^2} \left[(b_j - i\phi\rho\xi + d_j)T - 2 \ln \frac{1 - g_j e^{d_j T}}{1 - g} \right] \\
 D_j(\phi \mid T) &= \left[\frac{b_j - i\phi\rho\epsilon + d_j}{\xi^2} \right] \left[\frac{1 - e^{d_j T}}{1 - g e^{d_j T}} \right] \\
 g(\phi) &= \frac{b_j - i\phi\rho\xi + d_j}{b_j - i\phi\rho\epsilon - d_j} \\
 d_j(\phi) &= \sqrt{(i\phi\rho\xi - b_j)^2 - \xi^2 (2i\phi u_j - \phi^2)} \\
 u_1 &= \frac{1}{2} \\
 u_2 &= -\frac{1}{2} \\
 a &= \theta\omega \\
 b_1 &= \theta + \psi - \rho\xi \\
 b_2 &= \theta + \psi \\
 \psi &= \theta (\omega^P - \omega^Q) \\
 x_0 &= \ln S_0
 \end{aligned}$$

En donde los parámetros a calibrar son ν_0 (varianza instantánea), θ (reversión a la media), ω (varianza de equilibrio), ξ (volatilidad de la varianza) y ρ (correlación entre los procesos de Wiener).

3.3 Step 4

En este paso se busca poner a prueba el motor de cálculo, utilizando formas deterministas en la metodología de *Monte-Carlo*, implementada en el paso anterior. Para esto se evaluarán principalmente dos opciones, un depósito a plazo (*Money Market Account, MMA*) y un contrato *Forward*. Se utilizará esta misma metodología para justificar el modelo de *Heston*.

3.3.1 Step 4.1: Money Market Account

En primera instancia, tenemos el depósito a plazo, cuya forma es determinista, dado que el comportamiento de este contrato es conocido, correspondiendo a la siguiente forma:

$$V_0 = D^{DOM}(T) = e^{-r \cdot t} \quad (19)$$

$$Con Payoff = 1$$

Posteriormente, se procedió a realizar las respectivas simulaciones de *Monte-Carlo*, moviéndonos a través de los diferentes *Tenores* para el mismo pilar *Delta C10*. Con tal de probar que el modelo funcionara de manera correcta de forma determinista, se definió la volatilidad $\sigma = 0$. Por otra parte, al tratarse de un depósito a plazo, el *Payoff* siempre resulta igual a 1, por lo que el *Strike Price* pierde importancia en esta situación.

El resultado esperado de este computo es que el valor empírico entregado por la simulación coincida con el valor teórico que se obtiene con la fórmula 19, lo que para nuestro caso resulta un error prácticamente inexistente, específicamente del 7.3352e-15%.

Luego, se procedió a crear un intervalo de confianza con un nivel de confiabilidad del 99%, en el cual se busca que los valores calculados anteriormente, se encuentren dentro de los límites del intervalo de confianza, una vez estandarizados utilizando la siguiente ecuación:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (20)$$

Por consiguiente, una vez realizados los procedimientos anteriormente mencionados, se obtuvo un porcentaje de datos dentro del intervalo de confianza del 100%.

En el caso de *Heston*, se pudo observar que se obtuvo un 0% de error, es decir, los valores en su totalidad coincidieron con el factor de descuento al

aplicar la fórmula de *Heston*. Lo anterior, puede atribuirse a como fue construida la función para el cálculo de *Heston*. Por otra parte, se puede observar que, aplicando la misma metodología que para *Monte-Carlos*, se obtuvo un 100% de los datos dentro del intervalo de confianza.

3.3.2 Step 4.2: Forward Contract

En segunda instancia, se analizó el caso de un contrato *Forward*.. A diferencia del caso anterior, en esta oportunidad el *Strike Price* si toma importancia, dado que es necesario para el cálculo del *Payoff*, que viene dado por la siguiente ecuación:

$$V(S_t) = \max(S_t - K, 0) \quad (21)$$

A su vez, también conocemos la forma del valor teórico de la opción *Forward*, el cuál viene dado por la fórmula cerrada:

$$V_0 = D^{FOR}(T) \cdot S - D^{DOM}(T) \cdot K = e^{-r \cdot T} \cdot S - e^{-q \cdot T} \cdot K \quad (22)$$

A continuación, tomando estos puntos en consideración, se procedió a realizar las simulaciones de *Monte-Carlo*, nuevamente utilizando una volatilidad $\sigma = 0$, para mantener los cálculos de forma determinista. Los cálculos fueron realizados nuevamente para todos los *Tenores* con el mismo pilar *Delta C10*. De manera similar a la pregunta anterior, se obtuvo un error pequeño, específicamente del 0.082052%.

Por consiguiente, se volvió a comprobar que los valores obtenidos empíricamente estuvieran dentro de un intervalo de confianza del 99%, replicando el procedimiento de la pregunta anterior, en el cuál se obtuvo que un 99.9502% de los datos se encontraban dentro del intervalo de confianza.

Para el caso de *Heston*, aplicando la misma metodología que para *Monte-Carlos*, se obtuvo un error respecto al valor *Forward* teórico de un 2.9181%, superior en dos ordenes de magnitud al presentado con la metodología de *Monte-Carlos*. Por otra parte, se obtuvo 100% de los datos dentro del intervalo de confianza, presentando un resultado similar al obtenido para la *Money Market Account MMA*.

3.4 Step 5

El objetivo de este paso consiste en incorporar una volatilidad constante al modelo planteado en preguntas anteriores, específicamente para opciones *European Vanilla Call*, en donde se busca que los valores obtenidos a través de las simulaciones de *Monte-Carlo* y con el Modelo de Heston coincidan con los valores teóricos de la fórmula de *Black-Scholes* (7). Con este propósito, se utilizaron volatilidades constantes de 5%, 10%, 20% y 50%, realizando simulaciones para todos los *Tenores* posibles, manteniendo el mismo pilar *Delta C10*, para todas las volatilidades anteriormente mencionadas. Así mismo se utilizaron las tasas de descuento y *Strike Price* correspondientes.

Cabe mencionar, que para encontrar una coincidencia entre los valores teóricos y empíricos, bajo el modelo de *Heston*, fue necesario ajustar los parámetros iniciales entregados, extrayéndolos de diferentes documentos académicos (*Papers*), correspondiendo a los siguientes valores: $\nu_t = 0.01$, $\theta = 0.015$, $\omega = 0.01$, $\xi = 0.25$ y $\rho = 0.05$. Utilizando los parámetros anteriormente planteados, se cumple que las volatilidades permanecen relativamente constantes a lo largo de los diversos *Tenores*, lo que nos permite comparar los resultados de manera más eficiente con aquellos obtenidos por la fórmula de *Black-Scholes*.

Posteriormente, se realizaron simulaciones con los modelos de *Monte-Carlos* y *Heston* para las diversas volatilidades, *Tenores*, y pilares *Delta C10* mencionados anteriormente. Los resultados se muestran en la siguiente tabla a continuación:

Motor de Cálculo	Error
Simulaciones de Monte-Carlo	0.92959%
Modelo de Heston	0.83849%

Table 1: Errores de los motores de cálculo respecto al Fair Value

Podemos observar que el modelo de *Heston* tiene una mayor precisión al momento de compararlo con la fórmula de *Black-Scholes*, con un error de 0.83849%.

3.5 Step 6

En este sexto apartado, se busca ver como los diferentes parámetros del modelo de Heston, afectan la formula cerrada de este ultimo y las simulaciones de Monte-Carlo. Para este caso en particular, se le hizo una modificación al modelo de Monte-Carlo, donde ahora la volatilidad también sigue un proceso estocástico de la forma descrita en la ecuación 15, mientras que también el precio spot sigue un proceso probabilístico, el cual ya fue descrito con anterioridad en la formula 14. Por otra parte, para la ejecución de este paso, se procedió a trabajar con los primeros 100 días y el tenor de a un mes.

Los parámetros usados se muestran a continuación en la siguiente tabla:

Parámetros	Valores
ν_0	0.9
Θ	0.06
ω	0.02
ξ	0.5
ρ	-0.8

Table 2: Parámetros iniciales Step 6

asi también, se muestran a continuación los errores obtenidos entre los diferentes modelos:

Modelos	Errores
Heston & Black-Scholes	135.39%
Monte-Carlo y Black-Scholes	473.37%
Heston y Monte-Carlo	58.94%

Table 3: Errores entre modelos

Por otra parte y mediante la ayuda de un artículo académico, se determino el rango de valores para cada uno de los parámetros del modelo de Heston, los cuales se muestran a continuación:

$$0 \leq \nu \leq 1$$

$$0 \leq \Theta \leq 100$$

$$0 \leq \omega \leq 1$$

$$0 \leq \xi \leq 0.5$$

$$-0.9 \leq \rho \leq 0.9$$

Finalmente, se procedió a usar la metodología *Ceteris-Paribus* para ver como cada uno de los diferentes parámetros afectan el valor de la opción V_0 al moverse entre el rango de valores ya menciona anteriormente. Los gráficos se muestran a continuación:

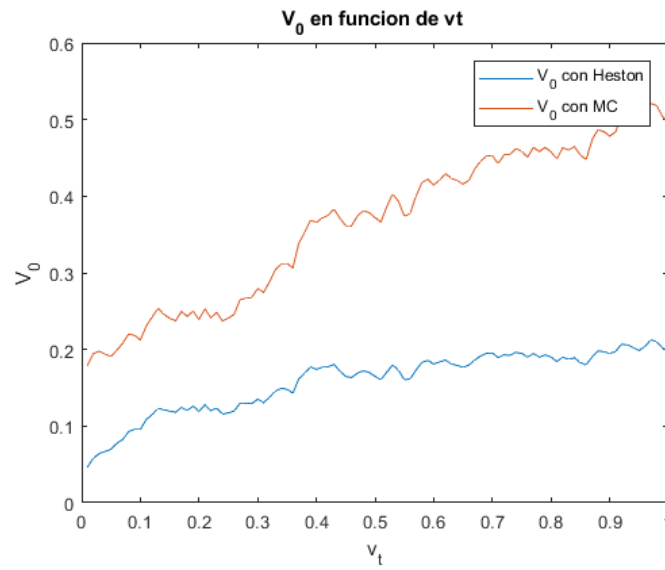


Figura 2: V_0 en función de ν

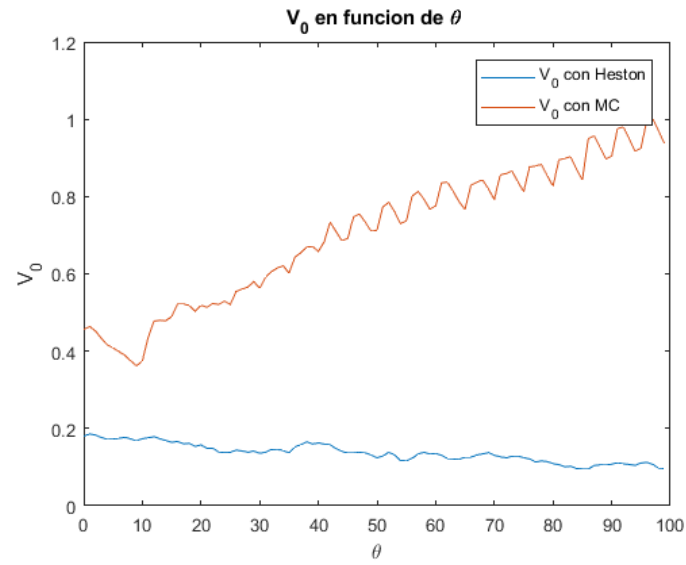


Figura 3: V_0 en función de Θ

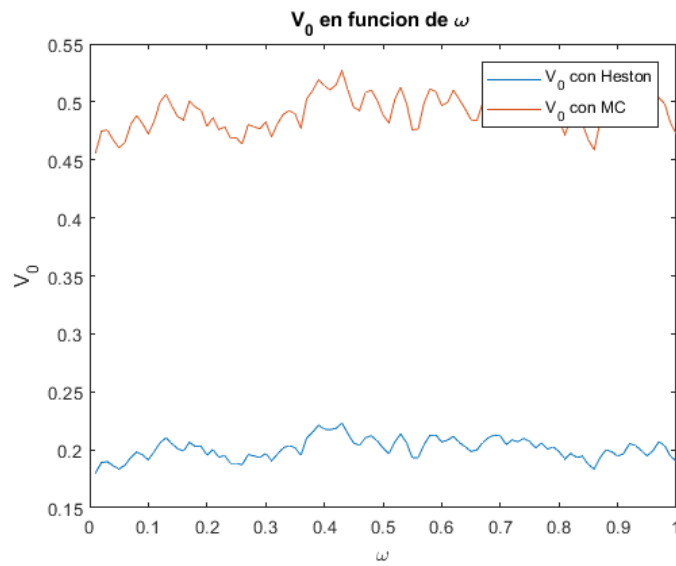


Figura 4: V_0 en función de ω

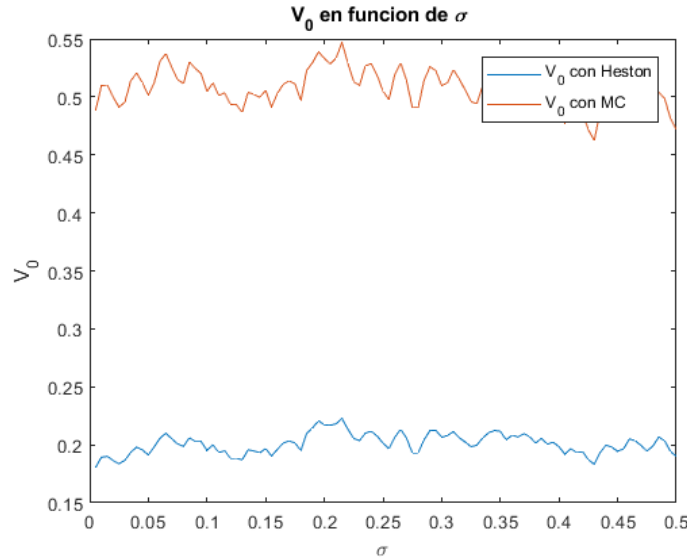


Figura 5: V_0 en función de ξ

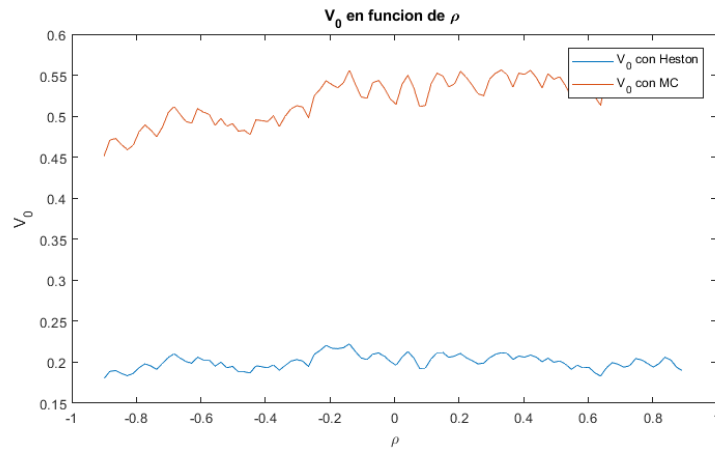


Figura 6: V_0 en función de ρ

De los gráficos, podemos ver como en general los valores V_0 no se alejan mucho entre si, a excepción de cuando cambiamos los valores de ν y θ , donde se observa que a medida que aumentamos estos, el valor de la opción tiende a aumentar también.

3.6 Step 7

En este paso, se utilizaron los valores empíricos obtenidos en el *Step 5* para calcular las volatilidades implícitas de dichos resultados y poder analizar los distintos parámetros que influyen en la curva *Smile*.

Con tal de obtener aquellas volatilidades citadas con anterioridad se utilizó el algoritmo de *Newton-Raphson*, el cual a partir de un σ inicial, la fórmula de *Black-Scholes* (7) y el valor del *Greek Vega*, itera la volatilidad inicial hasta obtener la volatilidad implícita en el modelo. Cabe mencionar que el valor del *Greek Vega* viene dado por la siguiente ecuación:

$$V'^{BS} = \frac{\partial V^{BS}}{\partial \sigma} = S_0 \cdot e^{-qT} \cdot n(d1) \cdot \sqrt{T} \quad (23)$$

En donde además, las iteraciones de la volatilidad, en cada ciclo del algoritmo de *Newton-Raphson*, vienen determinados por la siguiente ecuación:

$$\sigma_{N+1} = \sigma_N + \frac{C_0 - V_0(\sigma_N)}{V'^{BS}(\sigma_N)} \quad (24)$$

Posteriormente, una vez aplicado el algoritmo de *Newton-Raphson* tanto para la simulaciones de *Monte-Carlos* como para el modelo de *Heston*, con una precisión (*Accuracy*) de 10pb, se pudo apreciar que los valores de las volatilidades implícitas obtenidas convergen a valores cercanos a las indicadas en el *Step 5*, es decir, aquellas volatilidades constantes de 5%, 10%, 20% y 50%.

A continuación se muestra la tabla de errores, donde se puede observar el error porcentual, para cada motor de cálculo, al comparar las volatilidades implícitas con las volatilidades constantes anteriormente mencionadas:

Motor de Cálculo	Errores
Simulaciones de Monte-Carlo	4.5148%
Modelo de Heston	1.4114%

Table 4: Error de la volatilidad implícita

Finalmente, podemos observar, como el modelo de *Heston* tiene una mayor precisión al estimar las volatilidades implícitas que existen en el mercado, constando con aproximadamente un 3% menos de error que el presente en las simulaciones de *Monte-Carlos*.

3.7 Step 8

En esta última sección de la *Parte II* del proyecto, se busca comparar las volatilidades implícitas obtenidas a partir del uso del modelo de *Monte-Carlos*, así como de las obtenidas utilizando el modelo de *Heston*, sin embargo, a diferencia de la sección anterior, utilizando las volatilidades del mercado, con el fin de escoger solo uno de estos modelos para realizar la calibración.

Como medida de decisión entre los modelos se utilizará la velocidad computacional respecto a una misma función, es decir, la cantidad de pasos que se deba realizar para obtener una precisión deseada en cada modelo. Esto será realizado para el pilar *At The Money ATM* con un *Tenor* de 3 meses, utilizando la información de mercado disponible. Para el modelo de *Heston* se utilizaron los mismos parámetros planteados para los cálculos en el *Step 5*.

En primera instancia, se procedió a calcular los valores de las opciones tanto con el modelo de *Monte-Carlos* como con la fórmula de *Heston*. En el anexo se puede observar una tabla con algunos valores a modo de ejemplo. Luego, mediante el algoritmo de *Newton-Raphson*, y cambiando la precisión a 20pb, por problemas de convergencia, se procedió a calcular las volatilidades implícitas del mercado, buscando similitudes con aquellas entregadas en los datos de mercado. A continuación, se presenta una tabla resumen con el tiempo computacional y el error porcentual de cada uno de los modelos.

Motor de Cálculo	Tiempo computacional	Error
Simulaciones de Monte-Carlo	5611	20.6442%
Modelo de Heston	4575	29.8921%

Table 5: Comparación entre los modelos utilizados para los motores de cálculo

Tal como se puede observar en la tabla, ambos modelos presentan errores elevados, sin embargo, la simulación de *Monte-Carlos* presenta un menor error, pero a costa de necesitar un mayor tiempo computacional. Por otra parte, el modelo de *Heston* presenta un mayor error que el modelo de *Monte-Carlos*, sin embargo, necesitando una cantidad considerablemente menor de tiempo computacional.

En vista de esto, hemos elegido el modelo de *Heston*, dado que los resultados hasta el momento parecen satisfactorios, y apuntan a que podría verse una mejora considerable respecto a *Monte-Carlos* una vez el modelo de *Heston* sea calibrado en base a los datos de mercado disponibles.

4 PART III: The model calibration

4.1 Step 9

En este paso, se busca encontrar un conjunto de parámetros iniciales razonables con los cuales realizar la calibración completa del modelo, ajustando este conjunto inicial en caso de ser necesario.

Dado que nuestro modelo, el modelo de *Heston*, sigue un proceso de volatilidad estocástica, se computó una regresión lineal, con tal de minimizar el error cuadrático medio. Esta regresión se realizó considerando la volatilidad al cuadrado del primer *Tenor* de 1 mes en el pilar delta *ATM* como variable independiente, mientras que como variable dependiente se utilizó la diferencia de volatilidades al cuadrado entre t y $(t + 1)$, quedando el modelo de la siguiente forma:

$$\Delta V = A + B \cdot \sigma_{ATM}^2 \quad (25)$$

En donde:

$$\begin{aligned} A &= \Theta \cdot V_{\infty} \cdot \Delta t \\ B &= -\Theta \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Una vez realizada la regresión lineal, utilizando las ecuaciones anteriormente mencionadas, se obtuvo un conjunto de parámetros iniciales, el cual se procedió a analizar en mayor profundidad.

Para el caso de Θ , por ejemplo, se obtuvo un valor negativo, el cual fue remplazado por un valor de 0.01 para conservar la congruencia del modelo, según como se plantea en diferentes artículos académicos.

Por otra parte, se procedió a aproximar la volatilidad de la volatilidad ξ mediante la siguiente expresión:

$$\xi = \psi^2 \cdot \Delta t \cdot \nu_t \quad (26)$$

Finalmente, para el cálculo de ρ se realizó nuevamente una regresión lineal, pero en este caso, entre la diferencia del precio spot S_0 y la diferencia entre las volatilidades σ . Como resultado final, se obtuvieron los siguientes parámetros:

Parámetros	Valores
ν_0	0.028821 ²
Θ	0.010000
ω	0.009691
ξ	6.3086e-07
ρ	-0.296780

Table 6: Parámetros iniciales

4.2 Step 10

En esta sección se busca plantear los elementos necesarios para lograr la calibración del modelo. En primera instancia, se planteó la ecuación objetivo a minimizar en el problema de optimización, buscando reducir el error de las volatilidades calculadas utilizando la fórmula de *Heston* y los datos de mercado, como se puede observar en la siguiente ecuación:

$$\epsilon = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i,j} |\sigma_{ij}^{market} - \sigma_{ij}^{model}| \quad (27)$$

Esta misma función fue diseñada en *Matlab* como *ErrorPromedio*, en donde arroja el error de las volatilidades que componen la curva *Smile* para una misma fecha. Esta función luego es utilizada para los algoritmos iterativos de calibración del modelo.

4.3 Step 11

En esta sección se busca minimizar el error promedio del primer día para las volatilidades de cada pilar *Delta*, mediante la ecuación 27 planteada anteriormente.

Para este caso, se hará uso de los parámetros iniciales previamente estimados para la primera iteración, utilizando el modelo de *Heston* para calcular los precios, para posteriormente, utilizando el algoritmo de *Newton-Raphson*, lograr obtener las volatilidades implícitas de nuestro modelo, para finalmente calcular el valor del error ϵ .

Una vez obtenido dicho error, se procedió a iterar el algoritmo utilizando un optimizador, el cual para este caso resultó ser *Fmincon*, disponible en *Matlab*, con tal de encontrar el conjunto de parámetros que minimizan ϵ , y a su vez, entreguen valores coherentes. Cabe destacar que para la minimización del error, se consideraron las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \nu \leq 1 \\ 0 &\leq \Theta \leq 100 \\ 0 &\leq \omega \leq 1 \\ 0 &\leq \xi \leq 0.5 \\ -0.9 &\leq \rho \leq 0.9 \end{aligned}$$

Los parámetros obtenidos para el primer día se muestran en la siguiente tabla:

Parámetros	Valores
ν_1	0.0097 ²
Θ	0.6593
ω	0.0243
ξ	0.2869
ρ	-0.0141

Table 7: Parámetros t_1

Por otra parte, el error promedio calculado utilizando la formula 27 es de 0.0096, mientras que el mismo error medido de forma porcentual toma un valor de 9.633%. Para el cálculo del error en este ultimo caso, se utilizó la siguiente formula:

$$\epsilon_{\%} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i,j} \left| \frac{\sigma_{ij}^{model}}{\sigma_{ij}^{market}} - 1 \right| \quad (28)$$

Finalmente se muestra la curva Smile para los diferentes tenores, utilizando la volatilidad de nuestro modelo como la de mercado, obteniendo las siguientes gráficas:

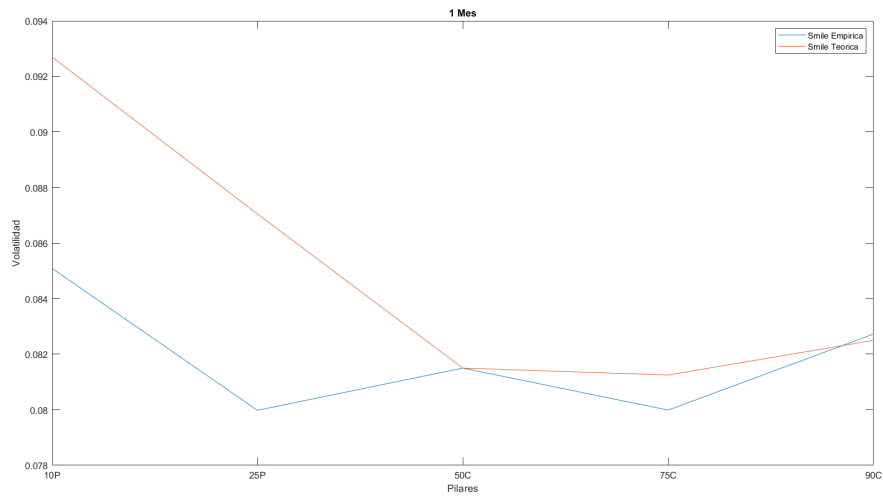


Figura 7: Curva Smile 1 Mes

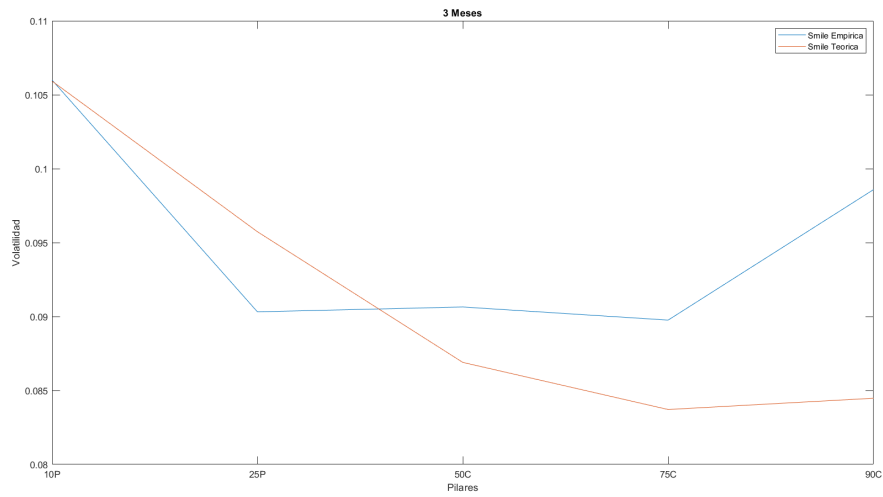


Figura 8: Curva Smile 3 Meses

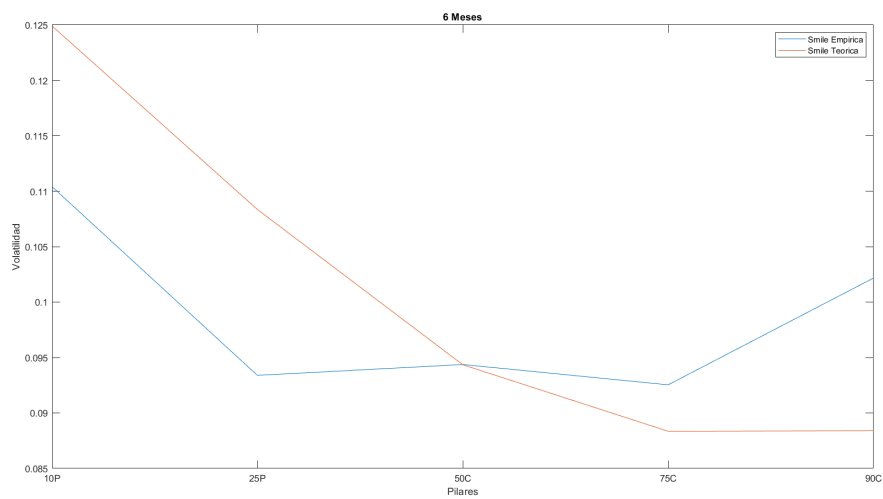


Figura 9: Curva Smile 6 Meses

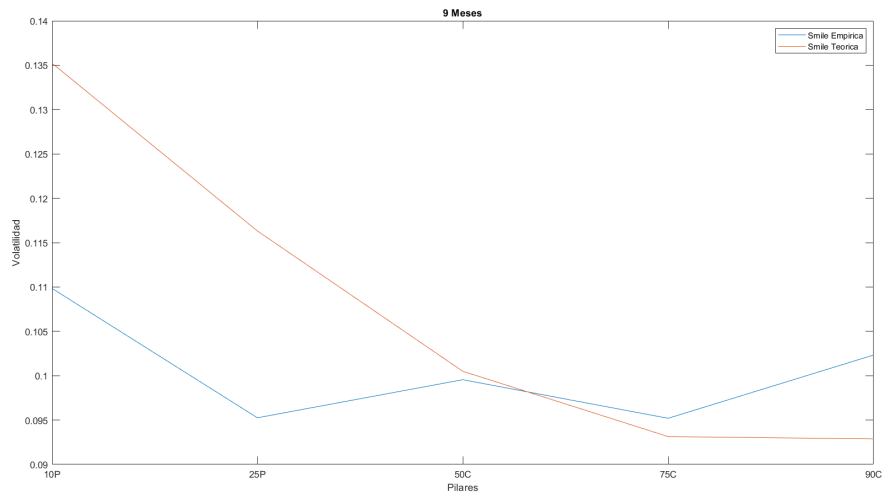


Figura 10: Curva Smile 9 Meses

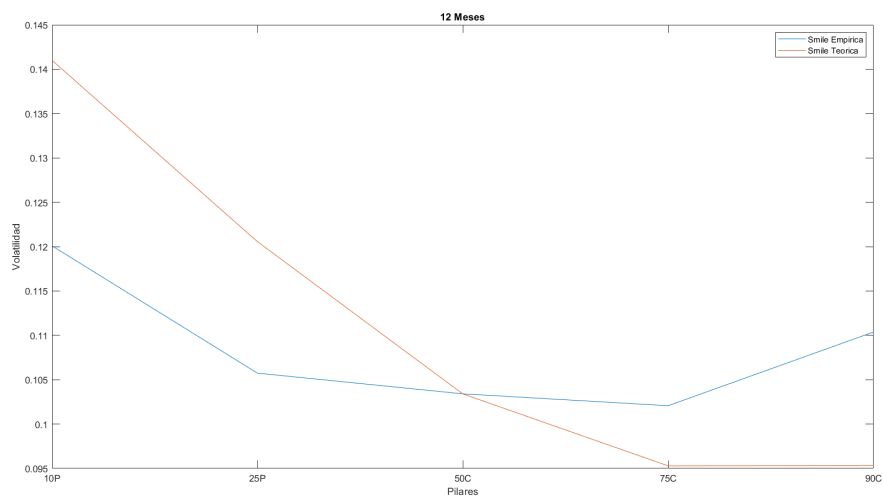


Figura 11: Curva Smile 12 Meses

4.4 Step 12

En este paso se procedió a realizar la calibración completa de los datos una vez realizada la calibración del primer día en el paso anterior. Para este caso, como parámetros iniciales X_0 para calibrar el día t , se utilizaron los parámetros óptimos obtenidos en el día anterior ($t - 1$).

El modelo fue calibrado obteniendo un conjunto de parámetros para cada de las fechas de los datos de mercado. A continuación se muestra como varía cada uno de los parámetros a través del tiempo:

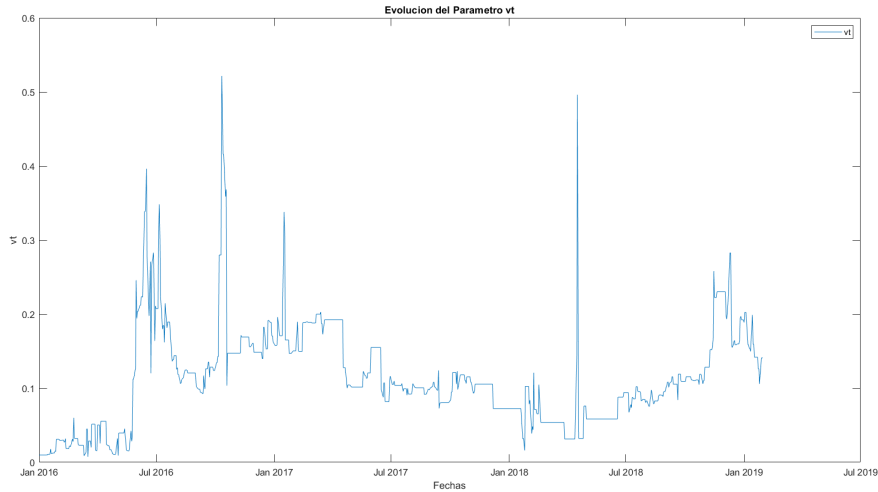


Figura 12: ν_t en el tiempo

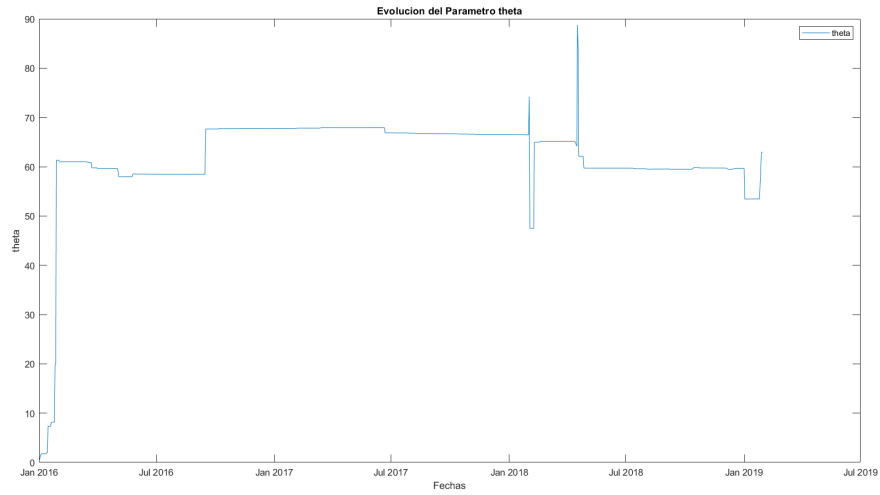


Figura 13: Θ en el tiempo

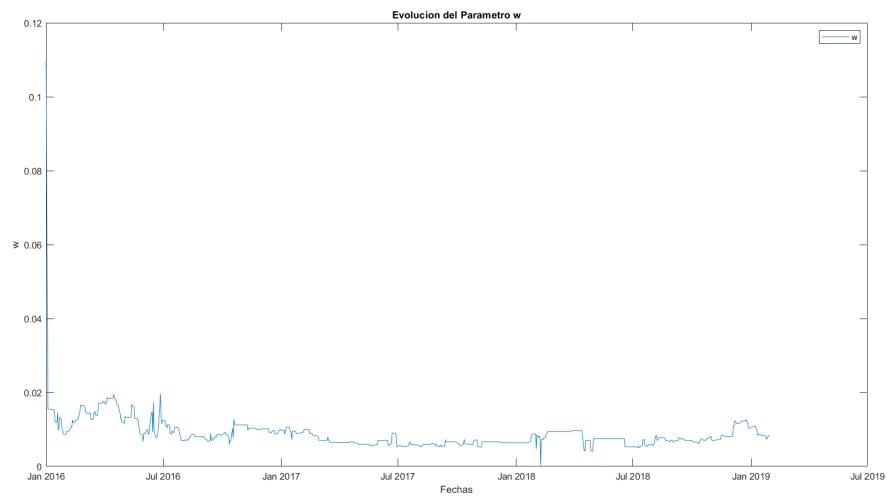


Figura 14: ω en el tiempo

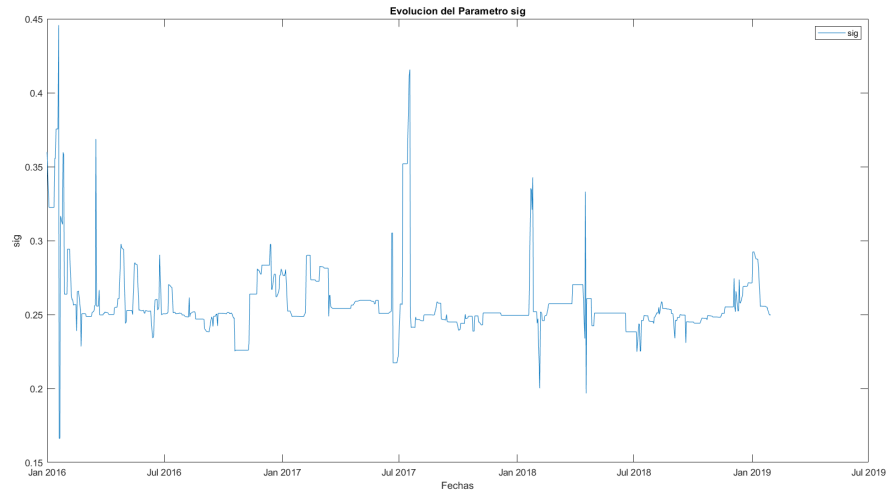


Figura 15: ξ en el tiempo

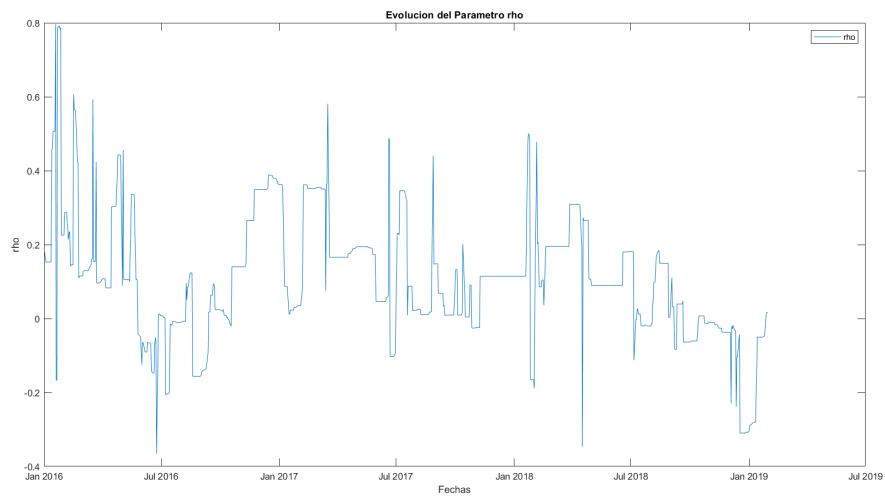


Figura 16: ρ en el tiempo

Por otra parte, se presentan las curvas *Smile* para los diferentes tenores, tanto como para la volatilidad del modelo como la del mercado. A continuación, se muestran las diferentes curvas Smile:

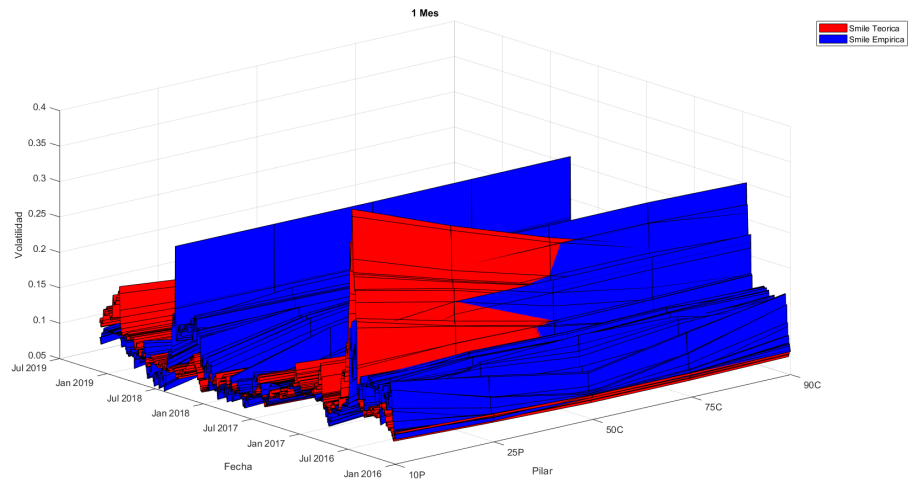


Figura 17: Curva Smile para 1 Mes

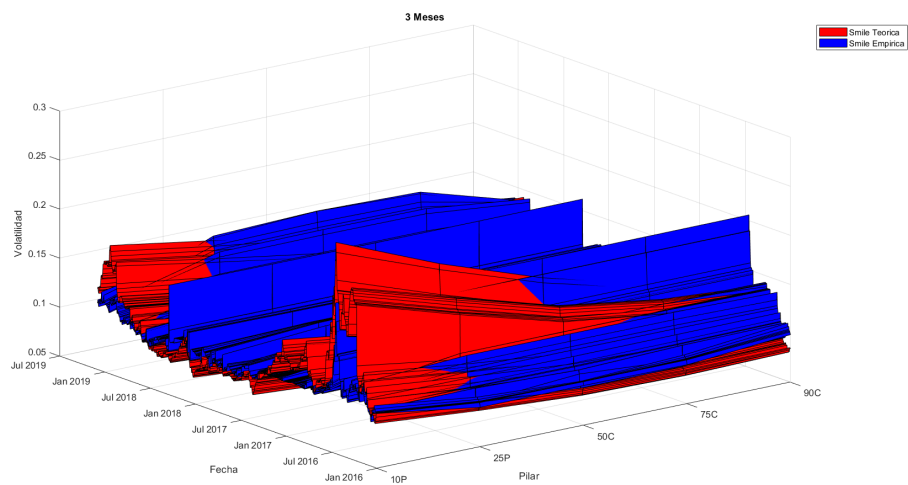


Figura 18: Curva Smile para 3 Meses

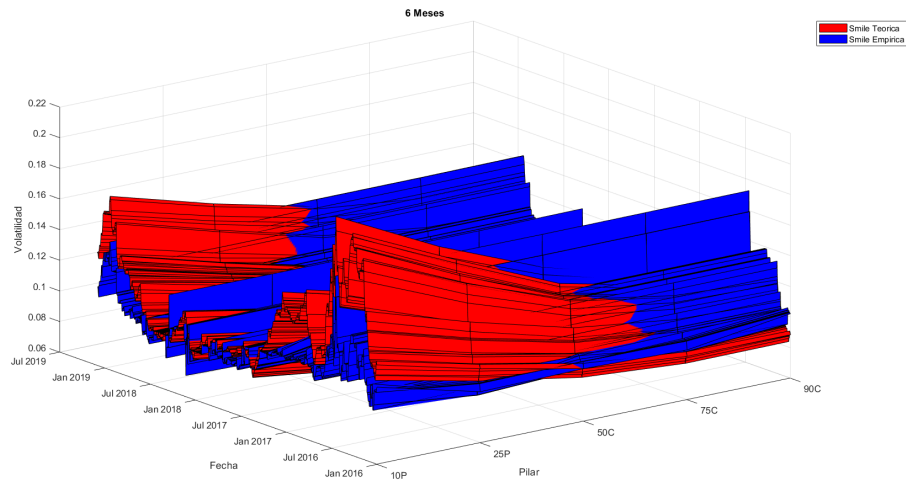


Figura 19: Curva Smile para 6 Meses

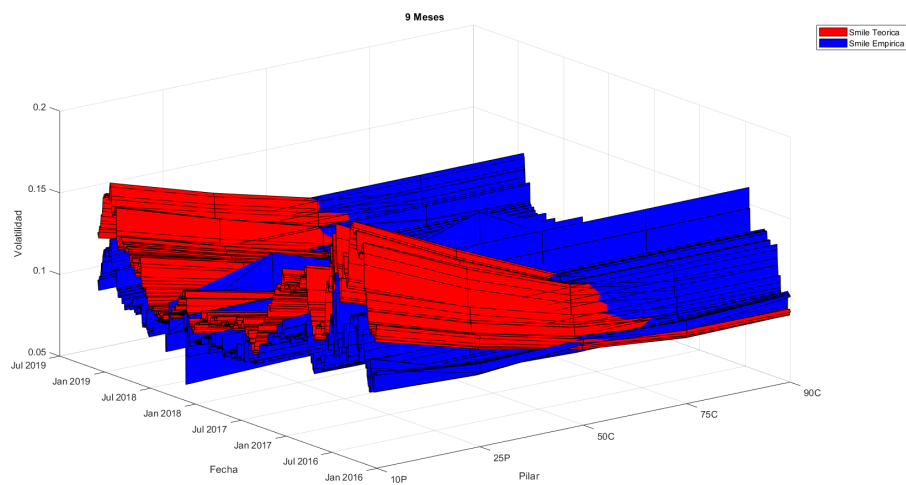


Figura 20: Curva Smile para 9 Meses

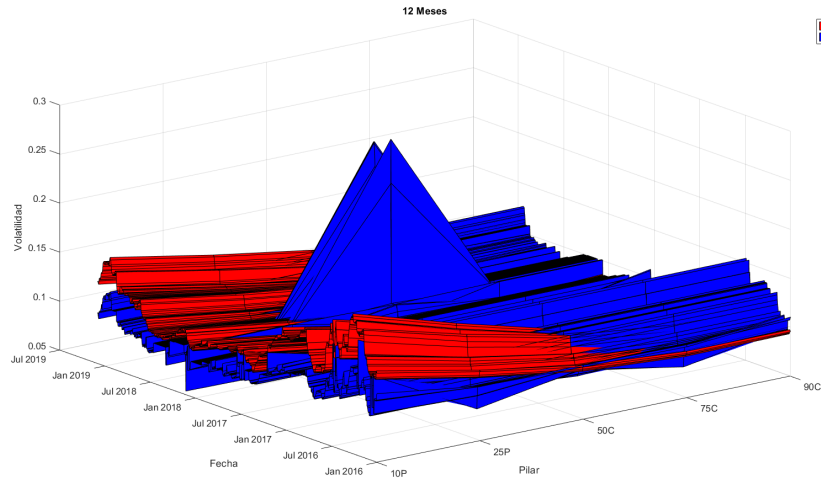


Figura 21: Curva Smile para 12 Meses

Por otra parte, también se calcularon los errores obtenidos para todo el conjunto de datos, en el cual existe un error promedio de 0.015251, correspondiente a un error promedio porcentual del 14.7394%.

Finalmente, se graficó como se comporta el error promedio ϵ para cada uno de los 804 días, entregando la siguiente gráfica:

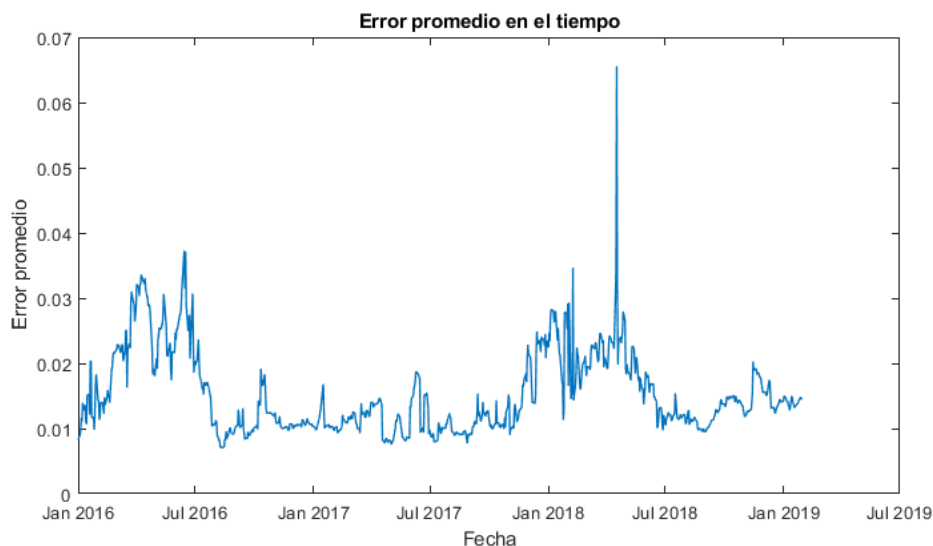


Figura 22: Error promedio en el tiempo

Como se puede observar, existe un periodo cercano a Julio del 2018 donde ϵ alcanza un máximo local. Dicho error se lo podemos atribuir a como cambia de forma drástica el *Spot Price* en este periodo, lo cual se puede observar en la siguiente figura:

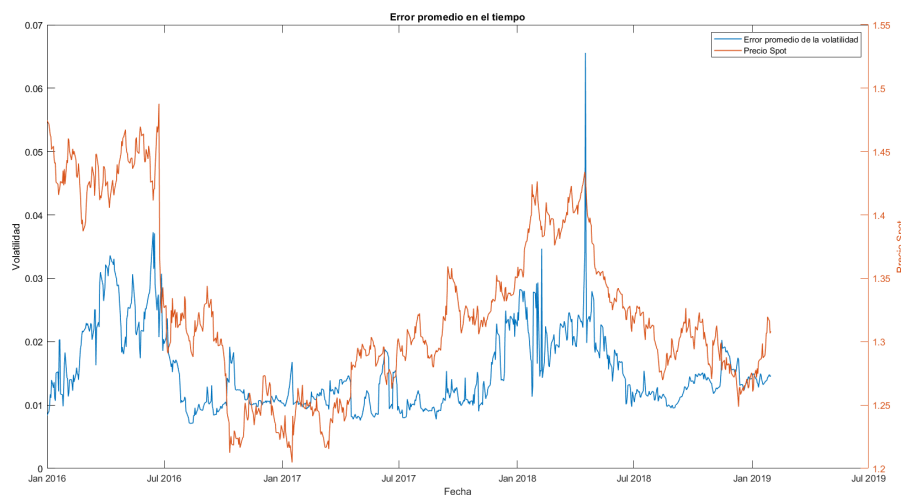


Figura 23: Error promedio volatilidad y Precio Spot

4.5 Step 13

Este paso no es considerado para esta actividad.

4.6 Step 14

Existen muchas formas de calibrar un modelo, cada uno contando con diversas estrategias y herramientas de calibración, así como un comportamiento y reacción específicas a las volatilidades y precios de mercado.

En este trabajo, se presentó una de muchas formas existentes para valorizar derivados financieros, sin embargo, tal como se muestra en los resultados expuestos en este informe, no se logra llegar a los mismos resultados que los de mercado, esto debido a que el mercado no se guía por reglas específicas al momento de la valorización de estos instrumentos, aunque sin embargo, siguen comportamientos racionales que pueden ser parcialmente plasmados en ecuaciones tales como las estudiadas en este curso, como lo pueden ser el modelo de *Black-Scholes*, o como el modelo de volatilidad estocástica estudiado en este informe, el modelo de *Heston*. Como conclusión, podemos decir que la importancia de entender estos diversos fenómenos y modelos financieros no radica en obtener un modelo que logre valorizar opciones de igual manera, sino entender como podemos plasmar las pautas que siguen los mercados para valorizar estos activos en las matemáticas, entender como se guían los distintos tipos de movimientos que toman los instrumentos financieros, y saber que herramientas son más útiles para describir como se comportan estos, ya sea según el requerimiento que sera necesario computacionalmente para realizar estos cálculos, o así como el costo en el que se deberá incurrir para obtener estos, siendo uno de los principales puntos abordados en este informe.

5 Anexos

A continuación se presentan los documentos anexados, señalados con anterioridad:

1.4759	1.4770	1.4835	1.4988	1.5070
1.4696	1.4710	1.4773	1.4862	1.4978
1.4610	1.4623	1.4684	1.4778	1.4898
1.4520	1.4536	1.4606	1.4715	1.4842
1.4493	1.4508	1.4584	1.4687	1.4803
1.4293	1.4309	1.4382	1.4488	1.4616
1.4346	1.4364	1.4437	1.4543	1.4678
1.4160	1.4179	1.4254	1.4357	1.4499
1.4078	1.4097	1.4166	1.4269	1.4393
1.4090	1.4109	1.4169	1.4263	1.4378

Table 8: Forward Price Calculado

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 9: Error Forward Price Calculado Respecto Teórico

1.4251	1.4501	1.4750	1.4517	1.4304
1.4191	1.4456	1.4721	1.4472	1.4245
1.4170	1.4424	1.4679	1.4438	1.4218
1.4169	1.4401	1.4633	1.4413	1.4208
1.4162	1.4392	1.4621	1.4403	1.4200
1.4085	1.4303	1.4519	1.4314	1.4122
1.4073	1.4309	1.4546	1.4321	1.4111
1.3950	1.4200	1.4451	1.4211	1.3988
1.3930	1.4169	1.4410	1.4180	1.3967
1.3954	1.4184	1.4416	1.4195	1.3991

Table 10: Strike Prices Calculados

0.0088	0.0053	0.0008	0.0050	0.0080
0.0059	0.0023	0.0025	0.0020	0.0051
0.0014	0.0022	0.0069	0.0024	0.0006
0.0037	0.0070	0.0113	0.0072	0.0043
0.0052	0.0085	0.0128	0.0087	0.0058
0.0151	0.0185	0.0226	0.0187	0.0157
0.0120	0.0155	0.0201	0.0157	0.0126
0.0204	0.0242	0.0292	0.0244	0.0210
0.0247	0.0284	0.0332	0.0286	0.0253
0.0243	0.0280	0.0325	0.0282	0.0250

Table 11: Error Strike Price Calculado Respecto Teórico

0.0927	0.0871	0.0815	0.0813	0.0825
0.0948	0.0892	0.0847	0.0836	0.0848
0.0914	0.0862	0.0822	0.0812	0.0824
0.0853	0.0804	0.0767	0.0761	0.0778
0.0861	0.0809	0.0772	0.0769	0.0787
0.0818	0.0767	0.0730	0.0727	0.0745
0.0857	0.0806	0.0771	0.0767	0.0785
0.0914	0.0864	0.0827	0.0823	0.0841
0.0895	0.0846	0.0807	0.0806	0.0824
0.0878	0.0828	0.0792	0.0787	0.0805

Table 12: Volatilidades Calculadas

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 13: Error Volatilidades Calculadas

0.0437	0.0263	0.0133	0.0245	0.0389
0.0492	0.0303	0.0161	0.0285	0.0444
0.0512	0.0325	0.0179	0.0309	0.0468
0.0512	0.0335	0.0194	0.0322	0.0476
0.0520	0.0344	0.0202	0.0332	0.0486
0.0588	0.0414	0.0264	0.0403	0.0556
0.0599	0.0412	0.0255	0.0400	0.0565
0.0706	0.0505	0.0330	0.0494	0.0673
0.0726	0.0532	0.0358	0.0522	0.0695
0.0705	0.0517	0.0350	0.0507	0.0673

Table 14: Valor Calculado De La Opción

0.0010	0.0015	0.0017	0.0106	0.0301
0.0040	0.0040	0.0035	0.0137	0.0350
0.0077	0.0071	0.0058	0.0165	0.0377
0.0114	0.0103	0.0083	0.0190	0.0392
0.0127	0.0115	0.0093	0.0202	0.0403
0.0217	0.0198	0.0162	0.0280	0.0477
0.0194	0.0176	0.0142	0.0265	0.0479
0.0278	0.0255	0.0210	0.0350	0.0582
0.0316	0.0292	0.0244	0.0384	0.0607
0.0310	0.0287	0.0240	0.0375	0.0589

Table 15: Error Valor Calculado De La Opción Respecto Teórico