Klient: Lista 3 zadanie 3

Dzień bilansowy ....

Temat ....

Sporządził: ....

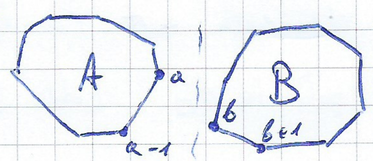
Sprawdził: ....

Podpis | Data

Algorytm łączenia dwóch otoczek wypukłych w jedną:

a ← najbardziej po prawej punkt A

b ← najbardziej po lewej punkt B



while T=ab nie jest dolną styczną A i B:

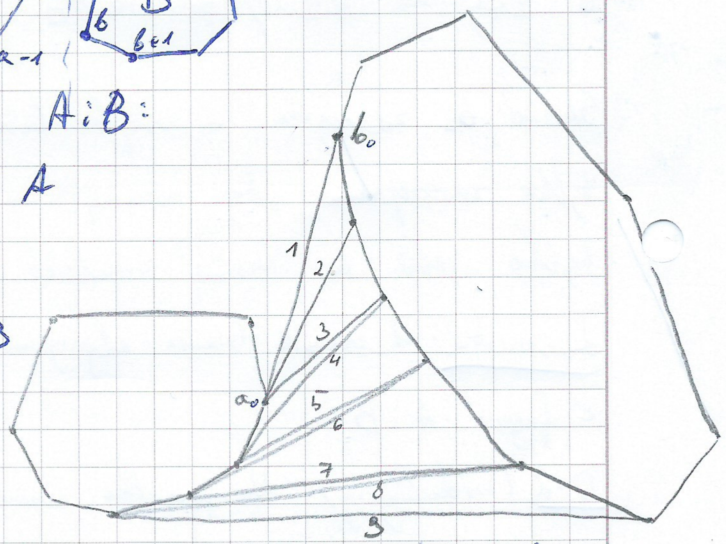
  while T nie jest dolną styczną A

    a ← a−1

  while T nie jest dolną styczną B

    b ← b+1

Dla górnej stycznej analogicznie



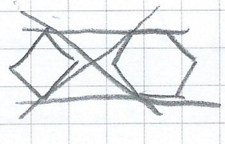
Obrazek jak algorytm zadziała dla przykładowych otoczek

Dowód:

Musimy pokazać dwie rzeczy.

1 Zewnętrzna pętla zawsze się zakończy

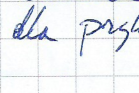
2. Algorytm zawsze znajdzie właściwą z 4 stycznych



Pokażemy to wszystko dla dolnej stycznej. Dla górnej jest analogicznie.

Lemat 1:

Dolna styczna T=ab dotyka A i B w ich dolnych połowach. Zarówno a jak i b leżą na fragmentach swoich figur z najbardziej lewego elementu do najbardziej prawego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara



D-d:

Ta własność to konsekwencja podziału A i B. Niech L to ~~prosta~~, pionowa linia, która dzieli A i B. Jeśli B jest bardzo wysoko ponad A, to T dąży do L a a dąży do najbardziej prawego el. A.

Klient .... Podpis Data

Dzień bilansowy .... Sporządził: ....

Temat .... Sprawdził: ....

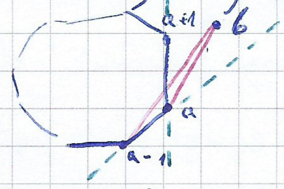
Analogicznie, jeśli B jest bardzo nisko pod A, to a dąży do najbardziej lewego elementu A. Pomiędzy tymi skrajnymi przypadkami a leży na dolnej połowie A □ (dla B i b analogicznie)

Skoro a zaczyna w najbardziej prawym elemencie A oraz jest tylko zmniejszane, to wewnętrzna pętla A może iść w nieskończoność tylko jeśli a może znaleźć się „za" najbardziej lewym punktem A.

Lemat 2: W czasie trwania algorytmu, ab nigdy nie przebije wnętrza żadnej z figur A i B

D-d (indukcyjny): Na początku działania algorytmu lemat jest prawdziwy. Załóżmy, że jest prawdziwy po k-1szym kroku i załóżmy, bez straty ogólności, że w k-tym kroku zmniejszamy a, czyli T=ab nie jest dolną styczną do A. Po kroku k otrzymamy T'=(a-1, b)

T' może przeciąć A tylko gdy b będzie na lewo od (a-1, a)



Ale b nie może być po lewej (a, a+1), gdyż wtedy T przeciąłby A w k-tym kroku, co jest sprzeczne z zał. ind. Czyli skoro następny krok spowodowałby przecięcie A, T musi być dolną styczną do A co jest sprzeczne z założeniem i krok k nie zostałby wykonany □

Czyli skoro T nigdy nie przebije wnętrza A i b jest po prawej od L, a nie może zgodnie z ruchem wskazówek zegara przejść za najbardziej lewy punkt A. Dla B dowód jest analogiczny. Skoro tak, to obie pętle muszą się zakończyć, ponieważ ~~nie~~ mogą przesuwać swoje indeksy tylko w jedną stronę i są ograniczone jak daleko mogą ~~je~~ przesuwać. A skoro obie pętle się kończą, to kończą się w momencie gdy T jest styczną zarówno do A jak i do B, co oczywiście jest dolną styczną