矩阵分析第三次作业

课件5 练习6

证明:

考察线性方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ ，显然:

$$\forall x, Ax=0 \Longrightarrow A^TAx=0$$

这说明 $N(A)\subseteq N(A^TA)$ 。另外:

$$\forall x, A^TAx=0 \Longrightarrow x^TA^TAx=(Ax)^2=0 \Longrightarrow Ax=0$$

于是 $N(A^TA)\subseteq N(A)$ 。于是 $N(A^TA)=N(A)$ ，而对于 $Ax=0$ 解空间的维数有 $dimN(A)=n-rank(A)$ ， 两矩阵的列数一样，于是必有 $rank(A^TA)=rank(A)$ 。

另外:

$$\forall x\in N(A^T)\cap R(A) \Longrightarrow A^Tx=0, Ay=0$$

于是:

$$y^TA^Tx=x^Tx=0 \Longrightarrow x=0$$

这说明 $dim(N(A)\cap R(A^T))=0$ 。

于是 $rank(AA^T)=rank(A^T)-dim(N(A)\cap R(A^T))=rank(A^T)$ 。

综上：$rank(A)=rank(A^T)=rank(AA^T)=rank(A^TA)$ 。

计算性证明：对 A, A^TA, AA^T 进行初等变换求秩:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\0&0&2&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}, rank(A)=2$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}6&18&4&-20\\18&54&12&-60\\4&12&6&-20\\-20&-60&-20&80\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&9&2&-10\\3&9&2&-10\\2&6&3&-10\\-1&-3&-1&4\end{pmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}3&4&2&10\\0&0&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&4&2&10\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, rank(A^TA)=2$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}27&-9&54\\-9&11&-18\\54&-18&108\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&6\\-9&11&-18\\3&-1&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&-1&6\\0&8&0\\0&0&0\end{pmatrix}, rank(AA^T)=2$$

课件5 练习 9

解： 使用最小二乘法（LSE），设 $\mathbf{x}_i=(1,x_i,x_i^2,\dots)^T$ ，$y_i=y_i$， $w=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)^T$ ，

$$A=\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2&\dots\\1&x_2&x_2^2&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1, & \mathbf{x}_2 & \dots\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\end{pmatrix}$$

如果使用 $y=w^T\mathbf{x}$ 对数据进行最小二乘拟合，即要求得参数 w 使得误差最小，误差函数：

$$L(w)=\sum_{i=1}^{N}(w^Tx_i-y_i)^2$$

对误差函数进行矩阵化：

$$\begin{aligned}L(w)&=(w^T\mathbf{x}_1-y_1,\cdots,w^T\mathbf{x}_N-y_N)\cdot(w^T\mathbf{x}_1-y_1,\cdots,w^T\mathbf{x}_N-y_N)^T\\&=(w^TA^T-\mathbf{b}^T)\cdot(Aw-\mathbf{b})=w^TA^TXw-Y^TAw-w^TA^TY+\mathbf{b}^T\mathbf{b}\\&=w^TA^TAw-2w^TA^T\mathbf{b}+\mathbf{b}^T\mathbf{b}\end{aligned}$$

最小化 L 求得 $\hat{w}$：

$$\begin{aligned}\hat{w}=\underset{w}{argmin}\,L(w)&\longrightarrow\frac{\partial}{\partial w}L(w)=0\\&\longrightarrow 2A^TA\hat{w}-2A^T\mathbf{b}=0\end{aligned}$$

（如果 A^TA 可逆的话， $\hat{w}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$）

对于本题，**情况1**，使用 $y=\alpha_0+\alpha_1x$ 进行拟合

$$A=\begin{pmatrix}1&-5\\1&-4\\1&-3\\1&-2\\1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix},A^TA=\begin{pmatrix}11&0\\0&110\end{pmatrix}$$

利用公式可以求得 $w=(\alpha_0,\alpha_1)^T=(\frac{106}{11},\frac{2}{11})^T$ ，再带入误差公式 $=w^TA^TAw-2w^TA^T\mathbf{b}+\mathbf{b}^T\mathbf{b}$ ，得到误差为 $L(w)=162.9091$ 。

对于本题，**情况2**，使用 $y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2$ 进行拟合

$$A=\begin{pmatrix}1&-5&25\\1&-4&16\\1&-3&9\\1&-2&4\\1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\\1&5&25\end{pmatrix},A^TA=\begin{pmatrix}11&0&110\\0&110&0\\110&0&1958\end{pmatrix}$$

利用公式可以求得 $w=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)^T=(\frac{1998}{143},\frac{2}{11},-\frac{62}{143})^T$ ，误差为 $L(w)=1.6224$ 。