课程作业参考答案

作业一

1. 使用 5 个有效数字计算时，$rank(\mathbf{A})=1, rank(\mathbf{A}|\mathbf{b})=2$，方程组不可解；使用 6 个有效数字，$rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A}|\mathbf{b})=2$，方程组可解。

2.$\mathbf{A}\mathbf{e_j}=\mathbf{A}_{*j}$， $\mathbf{e_i}^T\mathbf{A}\mathbf{e_j}=a_{ij}$.

3. 先证明对于任意两个 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 和 $\mathbf{B}=[b_{ij}]$，都有 $trace(\mathbf{AB})=trace(\mathbf{BA})$. 证明如下：

$$
\begin{aligned}
trace(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n}[\mathbf{AB}]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}\\
&=\sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j}=\sum_{i=1}^{n}[\mathbf{BA}]_{jj}=trace(\mathbf{BA}).
\end{aligned}
$$

由上面的结果，记 $\mathbf{BC}=\mathbf{D}$，由上面的结果可得：

$$trace(\mathbf{ABC})=trace(\mathbf{AD})=trace(\mathbf{DA})=trace(\mathbf{BCA}).$$

4. 设 $\mathbf{A}=[a_{ij}], \mathbf{B}=[b_{ij}]$ 为上三角矩阵, 即: 对于 $i>j, a_{ij}=0, b_{ij}=0$. 记 $\mathbf{C}=[c_{ij}]=\mathbf{AB}$, 那么当 $i>j$ 时，我们有

$$c_{ij}=\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*j}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j+1}^{n}a_{ik}b_{kj}=0+0=0,$$

从而矩阵 $\mathbf{C}$ 也为上三角矩阵。同理可证下三角矩阵的情形。

5. 略

作业二

1.

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&3&-1\\-1&-4&2\end{pmatrix}.$$

2.

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix},\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}124&-40&14\\-42&15&-6\\10&-4&2\end{pmatrix}.$$

3.

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}3&6&-12&3\\0&2&-2&6\\0&0&8&16\\0&0&0&-5\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

4. 当 $\xi=0,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}$ 时，矩阵 $\mathbf{A}$ 不存在 LU 分解。

作业三

1.(1) 证明：对于任意 $\mathbf{b} \in R(\mathbf{AB})$，都存在一个 $\mathbf{x}$，使得 $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$ 成立。如果记 $\mathbf{Bx} = \mathbf{y}$，可得 $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$，即：$\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$，从而有 $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) 证明：对于任意 $\mathbf{x} \in N(\mathbf{B})$，也就是 $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$，从而有 $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$，即：$N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$ 成立。

2. 由定义直接可以证明，题中给出的矩阵集合线性无关。

3. 略

4. 由线性变换的定义可以证明 (1)、(2) 和 (3) 为线性变换。

作业四

1. 由定义，$[\mathbf{T}]_S$ 的第 j 列为：

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e_j})]_S = [\mathbf{A}e_j]_S = \mathbf{A}_{*j},$$

从而所证成立。

2.$[\mathbf{T}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, [\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3.$[\mathbf{A}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4. 对任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$，有 $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, 0, 0)$, 这里 $\alpha, \beta \in R$. 由题意可得：

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\alpha, \beta, 0, 0) = (\alpha + \beta, \beta, 0, 0) \in \mathcal{X},$$

即：$\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，直接计算可得 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. 分别记

$$\mathbf{U_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{U_2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{U_3}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{U_4}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

直接计算可得:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{U_1})&=\mathbf{U_1}+0\mathbf{U_2}+0\mathbf{U_3}+0\mathbf{U_4},\\ \mathbf{T}(\mathbf{U_2})&=0\mathbf{U_1}+\tfrac{1}{2}\mathbf{U_2}+\tfrac{1}{2}\mathbf{U_3}+0\mathbf{U_4},\\ \mathbf{T}(\mathbf{U_3})&=0\mathbf{U_1}+\tfrac{1}{2}\mathbf{U_2}+\tfrac{1}{2}\mathbf{U_3}+0\mathbf{U_4},\\ \mathbf{T}(\mathbf{U_4})&=0\mathbf{U_1}+0\mathbf{U_2}+0\mathbf{U_3}+\mathbf{U_4}.\end{aligned}$$

从而可知:

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

作业五

1.

$$\|\mathbf{A}\|_F=\sqrt{10},\ \|\mathbf{A}\|_1=4,\ \|\mathbf{A}\|_2=\sqrt{10},\ \|\mathbf{A}\|_\infty=3.$$

$$\|\mathbf{B}\|_F=\sqrt{3},\ \|\mathbf{B}\|_1=1,\ \|\mathbf{B}\|_2=1,\ \|\mathbf{B}\|_\infty=1.$$

$$\|\mathbf{C}\|_F=3,\ \|\mathbf{C}\|_1=10,\ \|\mathbf{C}\|_2=9,\ \|\mathbf{C}\|_\infty=10.$$

2.（1）由内积定义直接验证。

(2)记 $\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, 由标准正交的定义，可以验证 $\mathcal{B}$ 为标准正交基，且

$$\mathbf{A}=\sqrt{2}\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_4.$$

（3）略

3. $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$

再由 $\mathbf{Rx}=\mathbf{Q^Tb}$ 可得：$\mathbf{x}=(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0)^T$.

4. 使用传统的 Gram-Schmidt 正交化方法，可以得到：

$$\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.709 \\ -0.709 \end{pmatrix}\right\}$$

使用修改后的 Gram-Schmidt 正交化方法，可以得到：

$$\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

作业六

1. 由酉矩阵的定义，可以直接验证 $\mathbf{U}^*\mathbf{U}=I_{2\times 2}$ 成立，所以该矩阵是酉矩阵。

2. 由题意，令 $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\|\mathbf{x}\|\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，由此可得

$$\mathbf{R}=\mathbf{I}-\frac{2\mathbf{uu^T}}{\mathbf{u^Tu}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 由题意 $\mathbf{Rx}=\mathbf{x}$ 可得：$2\mathbf{uu^Tx}=\mathbf{0}$，由于 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$，从而有 $\mathbf{u^Tx}=\mathbf{0}$，所证成立。

4. 由 Givens reduction 方法，直接计算可得：

$$\mathbf{P}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P_{12}A}=\begin{pmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{13}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P_{13}P_{12}A}=\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{23}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}A}=\begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=\mathbf{T},$$

并且 $\mathbf{P}=\mathbf{P_{23}P_{13}P_{12}}=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}.$

5. 由 Householder reduction 可得：

$$\mathbf{R_2R_1A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}=\mathbf{R},$$

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R_2R_1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}.$$

作业七

1. 略

2.(1) 记 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 直接计算可得:

$$rank[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]=rank\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=3,$$

这说明 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cup\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一组基，再由 $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}\cap\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\emptyset$ 可知：$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间。

(2) 直接计算得:

$$\mathbf{P}=[\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&-2\\0&3&-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{Q}=\mathbf{I}-\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-2&2\\0&-3&3\end{pmatrix}$$

3. 对于任意 $n\times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$，我们都有 $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{K}$ 成立，这里 $\mathbf{S}=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}\in\mathcal{S}$, $\mathbf{K}=\frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}{2}\in\mathcal{K}$，即任意矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

下面说明这种表示具有唯一性。使用反证法，假设对任意矩阵 $\mathbf{A}$ 存在两个不同的表示，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}_1+\mathbf{K}_1,\quad \mathbf{A}=\mathbf{S}_2+\mathbf{K}_2,$$

$$\Longrightarrow \mathbf{S}_1+\mathbf{K}_1=\mathbf{S}_2+\mathbf{K}_2\Longrightarrow \mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1,$$

由于 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 为对称矩阵，而 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 为反对称矩阵，从而可以得到 $\mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1=\mathbf{0}$, 即：$\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2$, $\mathbf{K}_1=\mathbf{K}_2$，唯一性得证。

综上可得：$\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立。

4. 直接计算可得：$rank(\mathbf{A})=2$，$rank(\mathbf{A^2})=1$，$rank(\mathbf{A^3})=1$，由此可知：$index(\mathbf{A})=2$. 由 core-nilpotent 分解可知，矩阵 $\mathbf{Q}=[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]$，这里 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 分别为 $R(\mathbf{A^2})$ 和 $N(\mathbf{A^2})$ 的一组基。从而直接计算可得，

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-8\\12\\8\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

由此可得

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}-8&-1&0\\12&1&0\\8&0&1\end{pmatrix},$$

且有

$$\mathbf{Q^{-1}AQ}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-3&-2&0\\-2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&-4\\4&2&4\\3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8&-1&0\\12&1&0\\8&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&4\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

也就是 $\mathbf{Q^{-1}AQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{N}\end{pmatrix}$，这里 $\mathbf{C}=(2)$，$\mathbf{N}=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\end{pmatrix}$. Drazin inverse 为

$$\mathbf{A}^D=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}\mathbf{C^{-1}}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{Q^{-1}}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\\1&1&0\end{pmatrix}.$$