Przybliżanie stałej matematycznej e

Sprawozdanie do zadania P.1.2

Kacper Kulczak 279079

Wrocław, 11 listopada 2016

1 Wstęp

Wybrane przeze mnie zadanie polega na przybliżaniu stałej matematycznej e (podstawy logarytmu naturalnego). Celem sprawozdania jest porównanie efektywności wybranych przeze mnie metod.

W §2 przedstawiono wyniki obliczeń przy korzystaniu z definicji liczby e. Metoda ta, została zasugerowana w treści zadania. W §3-4 sprawdzono inne sposoby na przybliżenie stałej e, §5 natomiast, zawiera porównanie efektywność wybranych przeze mnie metod.

Efektywność metod sprawdzano przez wyznaczenie ilość cyfr dokładnych do stałej (eu) w języku programowania Julia, za pomocą wyrażenia $-\log_{10}|e - eu|$

Wszystkie testy numeryczne przeprowadzone są przy użyciu programu **program.jl** w języku **Julia**, symulując tryb precyzji 256-bitowej. Plik **program.ipnyb** zawiera czytelną prezentacje uzyskanych wyników.

2 Definicja stałej e

Jak wiadomo definicja stałej matematycznej e to:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{1}$$

W programie **program.jl**, dołączonym do sprawozdania, zgodnie z treścią zadania obliczano stałą e podstawiając pod n kolejne potęgi ósemki. Algorytm wyliczał $1+\frac{1}{n}$, a następnie używał algorytmu szybkiego potęgowania . Wyniki przedstawiono w Tabeli 1.

Po 8^{30} iteracji otrzymujemy jedynie 27 cyfr dokładnych. Nie jest to wynik dobry, dlatego, też powinniśmy się przyjrzeć się innym metodom.

n	Liczba cyfr dokładnych
8	1
8^2	2
$\vdots$	$\vdots$
8^{29}	26
8^{30}	27

Tablica 1: Liczba cyfr dokładnych przy przybliżaniu stałej e z definicji (1)

3 Ułamek łańcuchowy

Stałą matematyczną e można obliczyć również za pomocą prostego ułamka łańcuchowego Eulera [1].

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} \tag{2}$$

Ułamek (2) można zapisać również w bardziej czytelnej notacji: $e = [2; 1; 2; 1; 1; 4; 1; 1; 6; 1; 1; 8...]$ W Tabeli 2 przedstawiony liczbę cyfr dokładnych wyliczoną dla kolejnych n. Algorytm, zastosowany w programie dołączonym do sprawozdania, w jednym kroku pętli oblicza $[1, 1, 2i]$, a następnie zmniejsza iterator o 2.

n	Liczba cyfr dokładnych
2	3
3	6
$\vdots$	$\vdots$
20	66
21	70

Tablica 2: Liczba cyfr dokładnych, przy przybliżaniu stałej e, za pomocą prostego ułamka łańcuchowego Eulera

Na podstawie wyników, możemy zauważyć, że ułamek łańcuchowy daje 70 cyfr dokładnych przy 21-ej iteracji. Możemy założyć, że algorytm daje nam około 3 cyfry dokładne, na iteracje.

4 Szeregi

W matematyce występuje wiele szeregów zbieżnych do e. W tym sprawozdaniu wybrałem do testów dosłownie parę z nich: [2]

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \tag{3}$$

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3i+1}{(3i)!} \tag{4}$$

$$e = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{4i+3}{2^{2i+1}\,(2i+1)!} \right)^2 \tag{5}$$

W Tabeli 3 przedstawiono, liczbę cyfr dokładnych, wyliczonych na podstawie dołączonego skryptu. Algorytm używał funkcji z biblioteki standardowej Julii "factorial(n)"do obliczania silni i sumował składniki od najmniejszego do największego.

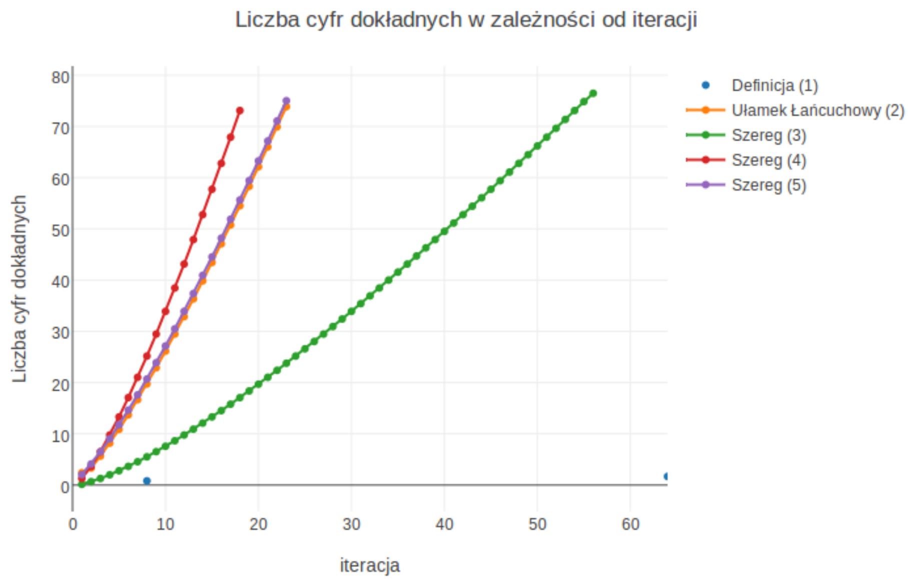
n	Szereg (3)	Szereg (4)	Szereg (5)
2	1	4	4
3	1	7	6
⋮	⋮	⋮	⋮
17	16	68	52
18	17	73	56

Tablica 3: Liczba cyfr dokładnych przy przybliżeniu stałej e, za pomocą szeregów, dla odpowiedniej iteracji n

Najlepsze wyniki uzyskano korzystając z szeregu (4), zyskując około 4 cyfry dokładne na jedną iteracje. Natomiast szereg (3), zbiega powoli do e, zyskując około 1 cyfrę dokładną na iteracje.

5 Porównanie metod

Na rysunku 1 przedstawiono w czytelny sposób wyniki doświadczeń zawartych w dołączonym do sprawozdania skrypcie.



Rysunek 1: Wykres porównujący liczbę cyfr dokładny w zależności od iteracji dla wzorów: (1) (2) (3) (4) (5)

Łatwo zauważyć, że najlepiej sprawdzającym się algorytmem jest szereg (4). Natomiast definicja (1) nie nadaje się do przybliżania stałej e.

Jednak jedna iteracja metody (1) zawiera w sobie mniej operacji matematycznych niż iteracja metody (2) Dlatego, też zliczono ilość mnożeń oraz dzieleń, dla pojedynczej iteracji każdej z użytych metod. Dzięki temu uzyskano wiarygodniejsze porównanie.

5.1 Ilość operacji mnożenie i dzielenia dla jednej iteracji

W poniższym wyliczeniu przedstawiono sposób obliczenia ilości mnożeń i dzieleń przy jednej iteracji.

(1) Na początku wykonujemy dzielenie $\frac{1}{n}$, a następnie przy użyciu, algorytmu szybkiego potęgowania wykonujemy $\log_2 n$ mnożeń

$$1 + \log_2 n$$

(2) W każdym wywołaniu pętli obliczamy $[1, 1, 2k]$. Są to 3 dzielenia, co przy n krokach daje nam :

$$3n$$

(3) Załóżmy, że zliczamy szereg pamiętając wyniki tymczasowe poprzedniego składnika. Wtedy wyliczenie $(n+1)!$ kosztuje nas tylko jedno mnożenie, bo $(n+1)! = n! * (n+1)$.

W takim wypadku przy pamiętanym $(n-1)!$, dla każdego składnika, potrzebujemy 1 mnożenia i 1 dzielenia, co daje nam:

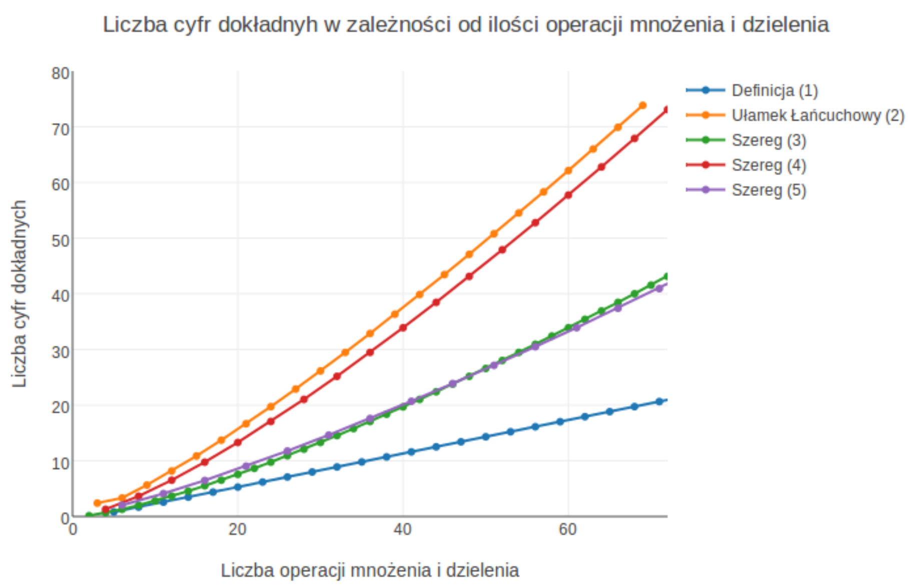
$$2n$$

(4) Zakładamy, że licznik zwiększany o 3 i dzięki temu unikamy mnożenia w liczniku. Obliczenie silni, kolejnego składnika, kosztuje nas 3 mnożenia. Trzeba wykonać jeszcze 1 dzielenie. Powtarzamy to dla każdego składnika, więc otrzymujemy:

$$4n$$

(5) Zakładamy, że nowy licznik to poprzedni powiększony o 4 (unikamy mnożenia). Silnia kolejnego składnika kosztuje nas 2 mnożenia. W mianowniku wykonujemy jeszcze dodatkowe 2 mnożenia (4 i potęga dwójki poprzedniego składnika). Do tego 1 dzielenie. Powtarzamy dla każdego składnika oraz ostatnie podniesienie do kwadratu, więc otrzymujemy :

$$5n+1$$



Rysunek 2: Wykres porównujący ilość wymaganych operacji mnożenia i dzielenia, do uzyskania określonej liczby cyfr dokładnych, przy użyciu następujących wzorów: (1) (2) (3) (4) (5)

Z rysunku 2 wynika, że to ułamek łańcuchowy (2) najefektywniej przybliża stałą matematyczną e. Ilość operacji, ukrytych w jednej iteracji, w szeregu (5) sprawia, że wcale nie jest tak efektywny, jak wynikałoby z rysunku 1. Warto też zauważyć, że mimo bardzo dobrej złożoności, definicja (1) wciąż jest gorsza od każdej z wymienionych metod.

6 Wnioski

Zgodnie z podejrzeniami, w wyniku doświadczeń, pokazano niewielką przydatność definicji (1) do przybliżania stałej matematycznej e.

Okazało się również że prosty ułamek łańcuchowy (2) jest efektywniejszym sposobem na przybliżenie wartości e, od przedstawionych w sprawozdaniu szeregów.

Sprawozdanie obrazuje również, że nieprecyzyjny sposób porównywania efektywności , może prowadzić do błędnych wniosków.

Literatura

[1] `http://mathworld.wolfram.com/EulersContinuedFraction.html` (ostatni dostęp do strony 11 listopada 2016).

[2] `http://mathworld.wolfram.com/e.html` (ostatni dostęp do strony 11 listopada 2016).