

V46

Der Faraday-Effekt

Jannis Speer

jannis.speer@tu-dortmund.de

Kevin Talits

kevin.talits@tu-dortmund.de

Durchführung: 11.11.19

1. Abgabe: 13.11.19

Korrektur: 20.01.20

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Effektive Masse	3
1.2	Zirkulare Doppelbrechung	4
1.3	Faraday-Effekt	5
2	Aufbau	6
3	Durchführung	8
4	Auswertung	8
4.1	Magnetfeldmessung	8
4.2	Messung mit undotiertem GaAs	11
4.3	Messung mit dotierten GaAs-Proben	12
5	Diskussion	15
	Literatur	15

In diesem Versuch wird der Faraday-Effekt verwendet, um die effektive Masse von Galliumarsenid zu bestimmen. Hierfür werden zwei n-dotierte und eine undotierte Proben des Halbleiters verwendet.

1 Theorie

1.1 Effektive Masse

Die Energieniveaus der einzelnen Atome in einem Kristall überlagern sich und es entsteht eine komplexe Bandstruktur. Hierdurch gestaltet sich eine exakte mathematische Beschreibung meist schwierig und es bedarf einer Approximation. Bei Halbleitern eignet sich als Approximation, die Betrachtung des Leitungsbandes um das Minimum herum (siehe Abb. 1). In der Umgebung um das Minimum kann die Energie des Bandes ε in

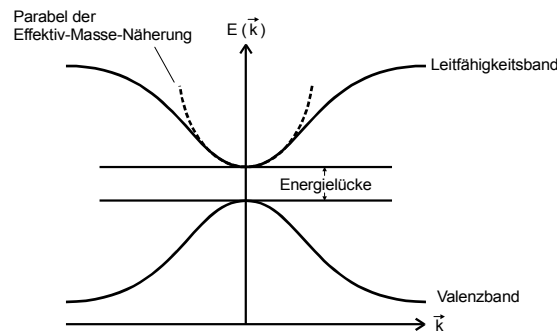


Abbildung 1: Approximationen der Bandstruktur im Halbleiter.

Abhängigkeit mit dem Wellenzahlvektor \vec{k} genähert werden als:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i^2} \right|_{k=0} k_i^2 + \mathcal{O}(k^3) \quad (1)$$

Dieser Term ermöglicht die Einführung der effektiven Masse

$$m_i^* := \frac{\hbar^2}{\left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_i^2} \right|_{k=0}}. \quad (2)$$

Der Vorteil, in der Verwendung der effektiven Masse, liegt in der Tatsache, dass die Definition (2) die Periodizität des Kristallpotentials $V(\vec{r})$ mitberücksichtigt. Dadurch kann der Hamilton Operator für ein Kristallelektron, mit Hilfe der effektiven Masse, in einen Hamilton Operator für ein freies Teilchen überführt werden:

$$\hat{H} : \quad \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2$$

Ein weiterer Vorteil in der Beschreibung der Dynamik mit der effektiven Masse ist, dass eine klassische newtonsche Betrachtung möglich ist unter der Voraussetzung eines kleinen

externen elektrischen und magnetischen Feldes. Diese Eigenschaft wird insbesondere im übernächsten Kapitel von Nutzen sein.

1.2 Zirkulare Doppelbrechung

Wird die Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht $E(z)$ bei der Propagation durch einen Kristall der Länge L gedreht, wird dies als zirkulare Doppelbrechung bezeichnet (vgl. Abb. 2). Phänomenologisch erklären lässt sich dieser Effekt durch die Annahme, dass

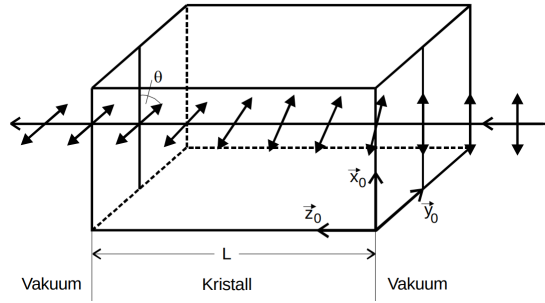


Abbildung 2: Schematische Darstellung von zirkularer Doppelbrechung.

sich im Kristall die Phasengeschwindigkeit für links- und rechtszirkular polarisiertes Licht E_L, E_R unterscheiden. Diese Eigenschaft wirkt sich auf die Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht aus, da dieses als Linearkombination von links- und rechtszirkularen Anteilen dargestellt werden kann:

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{2}(\vec{E}_R(z) + \vec{E}_L(z)), \quad k_R \neq k_L \quad (3)$$

Wobei die links- und rechtszirkularen Felder definiert sind als

$$\begin{aligned} \vec{E}_R(z) &= (E_0 \vec{x}_0 - iE_0 \vec{y}_0) \exp(ik_R z) \\ \vec{E}_L(z) &= (E_0 \vec{x}_0 + iE_0 \vec{y}_0) \exp(ik_L z). \end{aligned} \quad (4)$$

Die Definitionen (4) werden in die Gleichung (3) eingesetzt. Zusätzlich werden die Winkel

$$\begin{aligned} \Psi &:= \frac{L}{2}(k_R + k_L) \\ \vartheta &:= \frac{L}{2}(k_R - k_L) \stackrel{k_i = \frac{n_i \omega}{c_0}}{=} \frac{L\omega}{2c_0} (n_R - n_L) \end{aligned} \quad (5)$$

eingeführt mit dem jeweiligen Brechungsindex n . Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich ein Ausdruck für das aus dem Kristall austretende Licht:

$$\vec{E}(L) = E_0 \exp(i\Psi) (\cos(\vartheta) \vec{x}_0 + \sin(\vartheta) \vec{y}_0)$$

Eine präzisere Beschreibung der zirkularen Doppelbrechung ist durch induzierte Dipole im Kristall möglich. Die Dipole erzeugen eine Polarisation \vec{P} des Kristalls, die für kleine elektrische Felder formuliert werden kann als

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}.$$

Hierbei ist ε_0 die Influenzkonstante und χ die dielektrische Suszeptibilität, welche in anisotropen Kristallen als Tensor $\overline{\overline{\chi}}$ geschrieben wird. Doppelbrechung entsteht genau dann, wenn ein Kristall anisotrope Eigenschaften aufweist. Der Beweis dieser Behauptung wird im Folgenden skizziert. Hierfür wird die folgende dielektrische Suszeptibilität $\overline{\overline{\chi}}$ betrachtet:

$$\overline{\overline{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{yx} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Propagiert ein elektrisches Feld durch Materie, so erfolgt die Änderung des Feldes nach:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(1 + \overline{\overline{\chi}}\right) \vec{E}. \quad (7)$$

Wird nun die Gleichung (7) mit (6) in die homogene Wellengleichung

$$\square \vec{D} = 0$$

eingesetzt, ergibt sich nach einer etwas längeren Rechnung, dass die Drehung der Polarisationssebene ϑ gegeben ist durch:

$$\vartheta \approx \frac{L\omega}{2c_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_{xx}}} \chi_{xy} \approx \frac{L\omega}{2c_0 n} \chi_{xy}. \quad (8)$$

Bei der Herleitung der Gleichung (8), wurde unter anderem angenommen, dass sich die Welle in z -Richtung ausbreitet ($\vec{k} = k\vec{z}_0$).

1.3 Faraday-Effekt

Der Faraday-Effekt beschreibt das Phänomen, dass ein optisches Medium, durch ein externes Magnetfeld, Nebendiagonalelemente im elektrischen Suszeptibilitätstensor erhält. Hierdurch wird die Polarisationssebene eines Lichtfeldes \vec{E} gedreht, das parallel zum Magnetfeld einfällt. Dieses Phänomen kann präziser erfasst werden, durch die Betrachtung von gebundenen Elektronen im Magnetfeld \vec{B} , welche zusätzlich durch ein elektrisches Feld (verursacht durch die Lichtwelle) gestört werden.

$$m\ddot{\vec{r}} + K\vec{r} = -e\vec{E}(\vec{r})_0 - e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \quad (9)$$

Der Vektor \vec{r} bezeichnet die Auslenkung des Elektrons aus der Gleichgewichtslage, die Konstante K bezeichnet die Bindung des Elektrons an seine Umgebung, die Elementarladung ist gegeben durch e_0 und die Feldstärke der einfallenden Lichtwelle wird durch \vec{E} repräsentiert. Unter der Annahme quasifreier Ladungsträger und dass die Messfrequenz wesentlich größer als die Zyklotronfrequenz ist, kann aus der Differentialgleichung (9) ein Ausdruck für den Drehwinkel der Polarisationssebene ϑ abgeleitet werden:

$$\frac{\vartheta}{L} \approx \frac{e^3 \lambda^2 N B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c_0^3} \frac{1}{m^2 \cdot n} = \frac{e^3 \lambda^2 N B}{8\pi^2 \varepsilon_0 c_0^3} \frac{1}{m^{*2} \cdot n} \quad (10)$$

Das Ersetzen von m durch m^* ist durch die in Abschnitt 1.1 besprochene Eigenschaft der effektiven Masse gerechtfertigt. Der Drehwinkel ϑ hängt daraus folgend mit der Ladungsträgerzahl N und dem Magnetfeldstärke B zusammen.

2 Aufbau

Der verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 dargestellt. Das Experiment verwendet

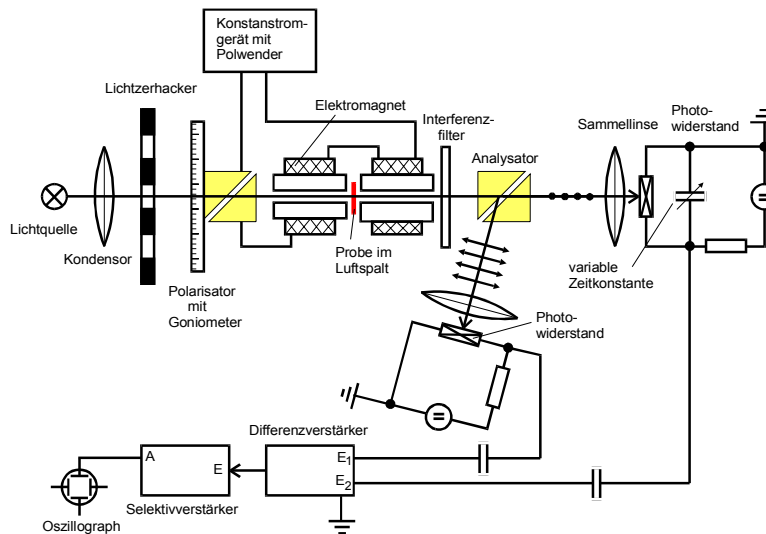


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaues.

als Lichtquelle eine Halogenlampe, deren Emissionsspektrum hauptsächlich im Infrarotbereich liegt. Das emittierte Licht wird von einer Kondensorlinse gesammelt und als paralleler Strahl in den weiteren Versuchsaufbau geleitet (siehe. Abb. 4). Das von der Kondensor-

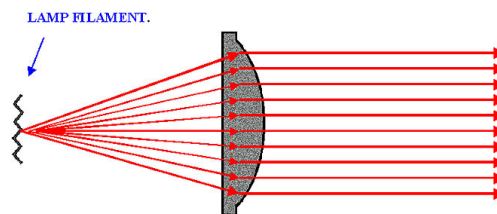


Abbildung 4: Schematische Strahlengang von Licht vor und nach einer Kondensorlinse.

linse gesammelte Licht gelangt über einen Lichtzerhacker in ein Glan-Thompson-Prisma. Dieses Prisma besteht aus Kalkspat und erzeugt das für die Messung notwendige linear polarisierte Licht (vgl. Abb. 5). Das polarisierte Licht trifft auf die Probe, welche sich in einem durch einen Elektromagneten erzeugten Magnetfeld befindet. Zu betonen ist, dass der Wellenvektor des Lichtfeldes parallel zum zeitlich konstanten Magnetfeldvektor liegt. Als Proben werden zwei n-dotierte und ein reiner Galliumarsenid-Kristalle untersucht. Die beiden n-dotierten Kristalle unterscheiden sich in ihrer Dicke und Dotierungsstärke. Nach dem Austreten aus der Probe wird das Wellenlängenspektrum des Lichts mit Hilfe eines Interferenzfilters auf eine Wellenlänge reduziert. Ein Interferenzfilter besteht aus zwei semitransparenten Schichten, die ein transparentes Dielektrikum umgeben (siehe Abb. 6). Das eintretende Licht wird durch die reflektierenden Außenschichten mehrmals

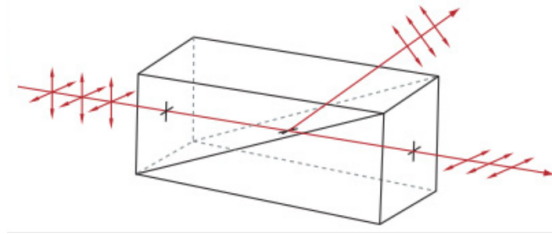


Abbildung 5: Schematische Darstellung eines Glan-Thompson-Prisma als Strahlenteiler. Die Polarisationssebenen der beiden austretenden Strahlen stehen orthogonal aufeinander.

reflektiert, was zu Interferenzen führt. Mit Hilfe dieser Interferenzen ist es möglich, durch Variierung der Dicke des Filters, nur bestimmte Wellenlängen passieren zu lassen. Das

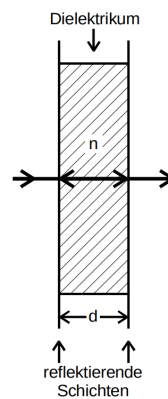


Abbildung 6: Schematischer Aufbau eines Interferenzfilters.

monochromatische Licht trifft anschließend auf ein zweites Glan-Thompson-Prisma, das zwei Teilstrahlen unterschiedlicher Polarisation erzeugt. Die Intensität der beiden ausgehenden Strahlen hängt dabei von der Polarisation des eingehenden Strahls ab. Die beiden Teilstrahlen werden mit Hilfe von Sammellinsen auf jeweils eine Photodiode fokussiert. Die Photodioden wandeln die Intensität des auftretenden Lichtes in einen Strom um. Das Signal der beiden Photodioden wird auf einen Differenzverstärker gegeben, welcher beide Signale voneinander subtrahiert und die resultierende Differenz verstärkt. Die dem Balance Schema folgende Messmethode bietet eine besonders hohe Genauigkeit. Das Signal des Differenzverstärkers wird zu einem Selektivverstärker weitergeleitet. Mit dem Selektivverstärker soll die Genauigkeit der Messung weiter verbessert werden. Hierfür wird die Verstärkerfrequenz des Selektivverstärkers auf die Frequenz des Lichtzerhackers eingestellt. Durch diese Abstimmung verbessert sich signifikant das Signalrauschverhältnis. Abschließend wird das verstärkte Signal in ein Oszilloskop eingespeist.

3 Durchführung

Zu Beginn der Kalibrierung wird überprüft, ob das von den Sammellinsen fokussierte Licht auf den Sensitivbereich der jeweiligen Photodioden fällt. Anschließend werden die Photodioden mit dem Selektivverstärker verbunden. Die Verstärkerfrequenz des Selektivverstärkers wird nun solange variiert, bis eine maximale Signalamplitude auf dem Oszilloskop eingestellt wird.

Die Bestimmung des Polarisationswinkel ϑ erfolgt mit Hilfe eines an dem ersten Glan-Thompson-Prisma angebrachten Goniometer. Nachdem Einsetzen einer Probe und eines Filters, wird das Goniometer so lange variiert, bis ein Signalminimum auf dem Oszilloskop gefunden wird. Der am Goniometer eingestellte Winkel ϑ_1 wird notiert. Eine Änderung des Magnetfeldes um $2B$ kann durch eine Umpolung des Magnetfeldes bewirkt werden. Nach der Umpolung wird ein weiteres Mal mit dem Goniometer ein Minimum gesucht und der dazugehörige Winkel ϑ_2 notiert. Aus den beiden notierten Winkeln ist es nun möglich, den Drehwinkel der Polarisationssebene ϑ über die Relation

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (11)$$

zu bestimmen. Die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 werden nun für verschiedene Interferenzfilter und damit für verschiedene Wellenlängen bestimmt. Nach der Vermessung aller Proben ist es möglich die effektive Masse der Donatorelektronen zu bestimmen. Zum Schluss wird mit Hilfe einer Hallsonde das Magnetfeld im Inneren der Spule vermessen.

4 Auswertung

Im folgenden Abschnitt werden die gemessenen Daten visualisiert und ausgewertet. Die Rechnungen und Ausgleichsrechnungen werden mit python und verschiedener Bibliotheken durchgeführt.

4.1 Magnetfeldmessung

Zur Bestimmung des maximalen Magnetfeldes innerhalb des Elektromagneten werden die gemessenen Werte aus Tabelle 1 in Abbildung 7 dargestellt. Es wird die Verschiebung auf der Symmetrieachse gegen die Magnetfeldstärke abgebildet. Für die alle weiteren Rechnungen wird der maximale gemessene Wert

$$B_{\max} = 409 \text{ mT} \quad (12)$$

als vorherrschendes Magnetfeld an der Position der Probe angenommen.

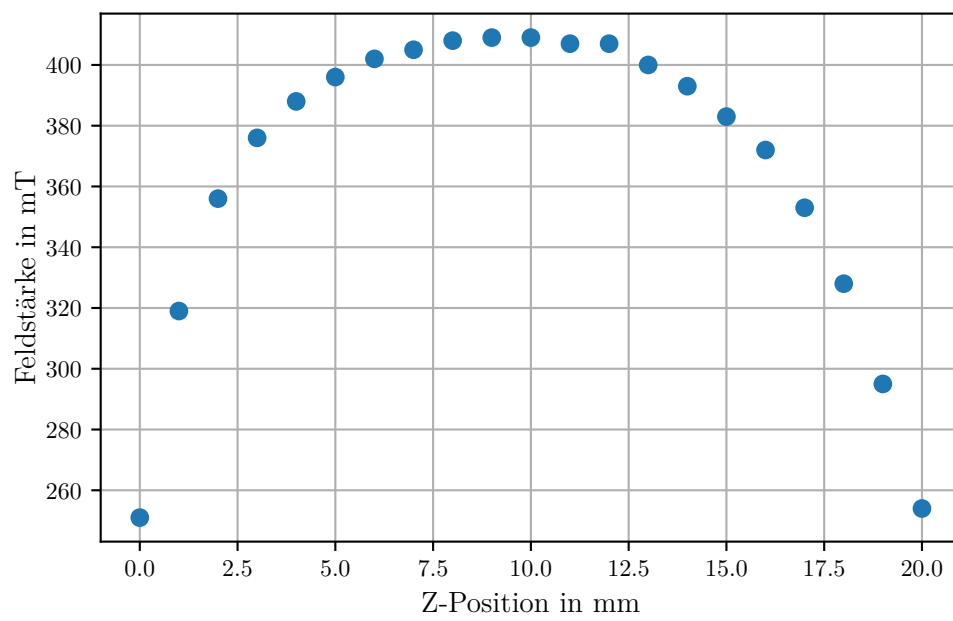


Abbildung 7: Zusammenhang zwischen Magnetfeldstärke und Abstand auf der Symmetrieachse.

Tabelle 1: Magnetfeldmessung.

Position in mm	Magnetfeldstärke in mT
0.0	251.0
1.0	319.0
2.0	356.0
3.0	376.0
4.0	388.0
5.0	396.0
6.0	402.0
7.0	405.0
8.0	408.0
9.0	409.0
10.0	409.0
11.0	407.0
12.0	407.0
13.0	400.0
14.0	393.0
15.0	383.0
16.0	372.0
17.0	353.0
18.0	328.0
19.0	295.0
20.0	254.0

4.2 Messung mit undotiertem GaAs

Die Messung mit der undotierten GaAs-Probe liefert die Ergebnisse in Tabelle 2. Mit der Dicke der Probe von $L = 5.11$ mm und den gemessenen Werten wird ein normierter Wert der Faradayrotation bestimmt und in die Tabelle mit den Messwerten getragen. Diese normierten Werte werden gegen λ^2 aufgetragen und sind in Abbildung 8 zu sehen. Es ist ein deutlich abfallender Trend mit zunehmender Wellenlänge zu erkennen.

Tabelle 2: Undotierte GaAs-Probe und normierte Faradayrotation.

$\lambda/\mu\text{m}$	$\Theta(+B)/^\circ$	$\Theta(-B)/^\circ$	$\Theta_{\text{norm}}/\text{rad/mm}$
1.06	267.0	243.0	0.082
1.29	261.0	248.5	0.043
1.45	261.2	250.0	0.038
1.72	258.0	249.9	0.028
1.96	252.0	244.8	0.025
2.156	248.7	243.5	0.018
2.34	225.6	221.5	0.014
2.51	212.0	208.4	0.012
2.65	177.0	173.4	0.012

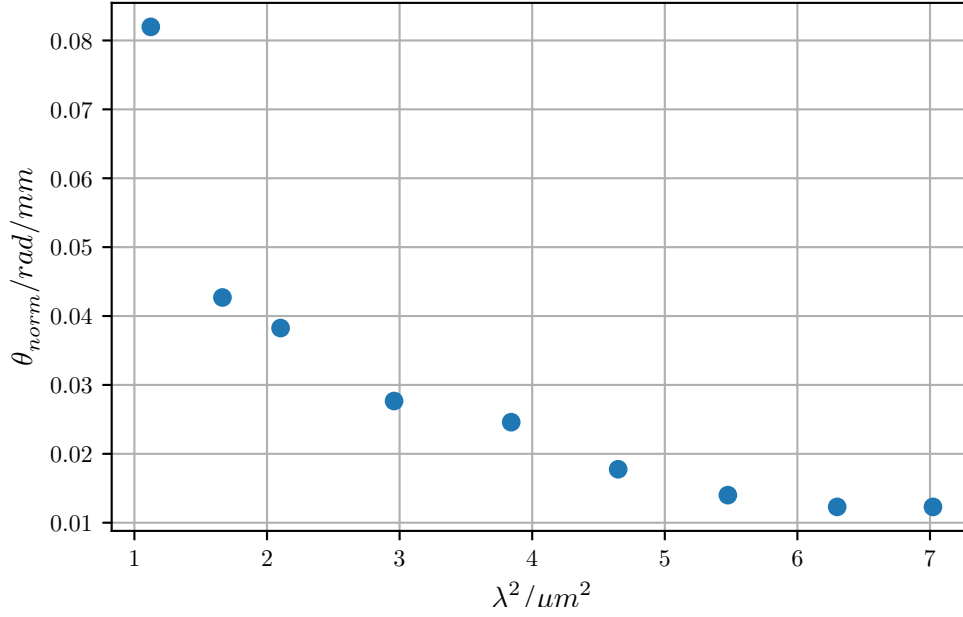


Abbildung 8: Grafische Darstellung der Messwerte aus Tabelle 2.

4.3 Messung mit dotierten GaAs-Proben

Die unterschiedlich dotierten Proben haben eine Konzentration von $N_{\text{leicht}} = 1.2 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ und $N_{\text{hoch}} = 2.8 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ und die Dicken $L_{\text{leicht}} = 1.296 \text{mm}$ und $L_{\text{hoch}} = 1.36 \text{mm}$. Deren Messwerte sind in den Tabellen 4 und 3 aufgeführt. Die Faradayrotation wird jeweils normiert und von diesem Wert für alle Wellenlängen die normierte Faradayrotation der undotierten Probe abgezogen. So kann die Faradayrotation $\Delta\theta_{\text{norm}}$, die durch Leitungselektronen bedingt ist, untersucht werden. Die berechneten Werte sind in Abbildung 9 grafisch dargestellt. In beiden Fällen ist eine lineare Abhängigkeit zu λ^2 ersichtlich, wie mit Gleichung 10 erwartet wird. Bei der leicht dotierten Probe fällt ein Wert weit aus der Reihe und wird nicht für die lineare Ausgleichrechnung berücksichtigt. Ein Fit der Daten wird mit der Funktion

$$\Delta\theta_{\text{norm}} = A\lambda^2 \quad (13)$$

durchgeführt und ergibt für die beiden Proben folgende Parameter:

$$A_{\text{leicht}} = (0.0170526 + / - 0.0000031) \frac{\text{rad}}{\text{mm}\mu m^2}$$

$$A_{\text{hoch}} = (0.0283207 \pm 0.0000036) \frac{\text{rad}}{\text{mm}\mu m^2}$$

Aus der Steigung A lässt sich mit Gleichung 10 die effektive Masse bestimmen. Für den Brechungsindex in GaAs wird nach [1] $n = 3.4$ genutzt. Mit

$$m^* = \sqrt{\frac{e^3 \cdot N \cdot B}{A \cdot 8\pi^2 \epsilon_0 c^3 \cdot n}} \quad (14)$$

ergeben sich die für die effektive Masse mit $m_e = 9.10938356 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ folgende Werte:

$$\begin{aligned} m_{\text{leicht}}^* &= (4.2992 \pm 0.0004) \cdot 10^{-32} \text{ kg} \\ \frac{m_{\text{leicht}}^*}{m_e} &= 0.047195 \pm 0.000004 \\ m_{\text{hoch}}^* &= (5.09582 \pm 0.00032) \cdot 10^{-32} \text{ kg} \\ \frac{m_{\text{hoch}}^*}{m_e} &= 0.055940 \pm 0.000004 \end{aligned}$$

Tabelle 3: Leicht dotierte GaAs-Probe und normierte Faradayrotation.

$\lambda/\mu\text{m}$	$\Theta(+B)/^\circ$	$\Theta(-B)/^\circ$	$\Theta_{\text{norm}}/\text{rad/mm}$
1.06	260.0	251.9	0.022
1.29	259.0	251.0	0.060
1.45	258.7	252.5	0.041
1.72	257.0	250.0	0.062
1.96	252.0	244.3	0.074
2.156	250.1	240.7	0.103
2.34	227.3	219.1	0.091
2.51	206.9	206.0	-0.001
2.65	242.7	235.0	0.087

Tabelle 4: Hoch dotierte GaAs-Probe und normierte Faradayrotation.

$\lambda/\mu\text{m}$	$\Theta(+B)/^\circ$	$\Theta(-B)/^\circ$	$\Theta_{\text{norm}}/\text{rad/mm}$
1.06	161.0	149.5	0.073
1.29	160.5	151.9	0.073
1.45	159.7	151.1	0.078
1.72	163.0	154.0	0.094
1.96	170.1	159.5	0.118
2.156	171.0	161.7	0.107
2.34	194.3	181.3	0.161
2.51	209.5	193.9	0.198
2.65	247.0	233.8	0.165

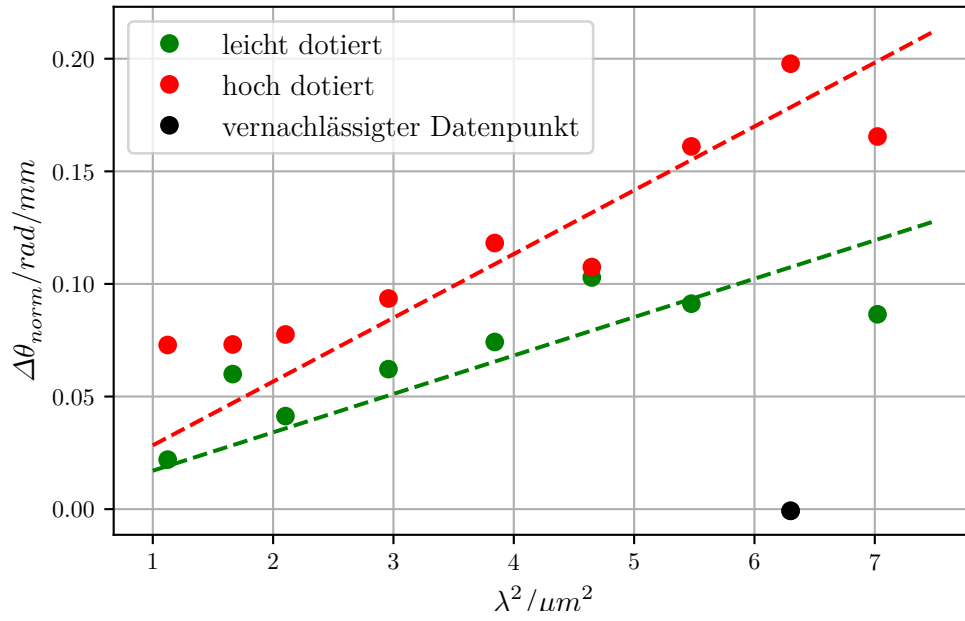


Abbildung 9: Grafische Darstellung der Messwerte aus Tabellen 3 und 4.

5 Diskussion

Der erwartete lineare Zusammenhang der Faradayrotation und dem Quadrat der Wellenlänge des Lichtes konnte in diesem Versuch gezeigt werden (siehe Abbildung 9). Dadurch wird das Konzept der effektiven Masse und das semiklassische Modell für freie Ladungsträger in Halbleitern experimentell bestätigt.

Die berechneten Werte für die effektive Masse von m_{leicht}^* (0.047195 ± 0.000004) m_e und m_{hoch}^* (0.055940 ± 0.000004) m_e liegen im Vergleich mit dem Theoriewert von $m_{\text{eff}}^* = 0.067 m_e$ [2] um 29.56% und 16.51% drüber. Somit liegen beide Werte in der Nähe des Theoriewerts, aber die immernoch große Diskrepanz kann aus dem Messverfahren kommen. Es war nicht möglich einen Nullstrom zu messen und das Minimum am Oszilloskop war oftmals nicht exakt auf eine genaue Winkeleinstellung festzulegen, sondern innerhalb eines kleinen Winkelbereichs konstant. Ein weiteres Problem ist die abnehmende Signalstärke hin zu größeren Wellenlängen, welche die Winkelmessung erschwert und zu dem Fehlpunkt führen könnte. Trotzdem kann der Aufbau als geeignetes Instrument zur Bestimmung der effektiven Masse gewertet werden.

Literatur

- [1] filmetrics. *Brechungsindex GaAs*. URL: <https://www.filmetrics.de/refractive-index-database/GaAs/Gallium-Arsenide> (besucht am 11.11.2019).
- [2] TU Wien. *Effektive Masse der Leitungselektronen in GaAs*. URL: <https://www.iue.tuwien.ac.at/phd/lindorfer/node28.html> (besucht am 11.11.2019).