Aufgabe8

November 8, 2018

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        from random import *
        from scipy import optimize
        import time
```

Bestimmung der Normierungskonstante N:

$$f(x) = N\frac{x^3}{e^x - 1} \tag{1}$$
$$1 = \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$
$$1 = N\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x \tag{3}$$
$$1 = N \cdot \frac{\pi^4}{15} \tag{4}$$
$$N = \frac{15}{\pi^4} \tag{5}$$
$$f(x) = \frac{15}{\pi^4}\frac{x^3}{e^x - 1} \tag{6}$$

```
In [2]: def f(x):
            return (15*x**3)/((np.pi)**4*(np.exp(x)-1))
```

Bestimmung der Extrema:

$$f'(x) = 0 \tag{7}$$
$$f'(x) = \frac{15}{\pi^4}\frac{(e^x(x-3)+3)\cdot x^2}{(e^x-1)^2} = 0 \tag{8}$$

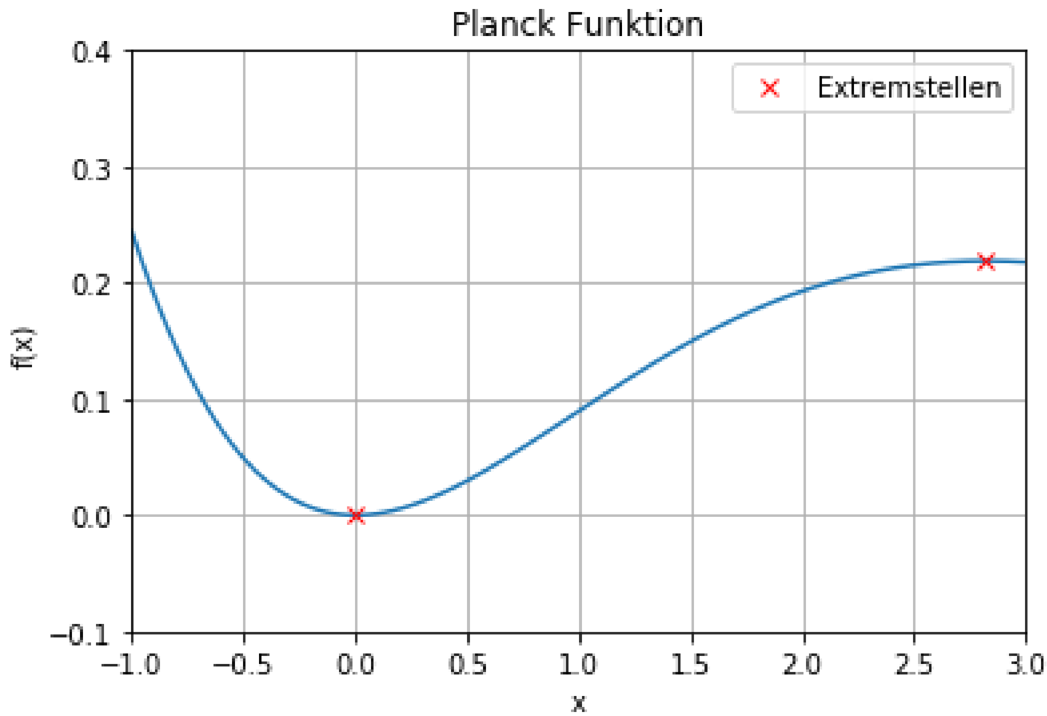
Das ist nicht analytisch lösbar, also mit scipy.optimize.brentq Nullstelle suchen.

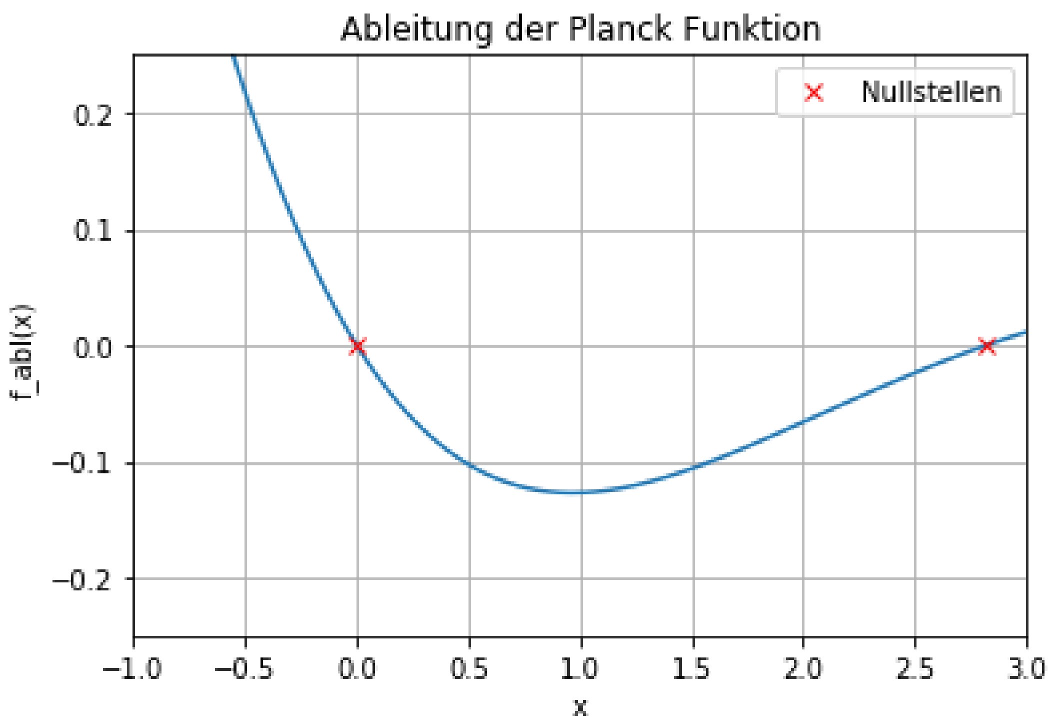
```
In [3]: def f_abl(x):
            return (15*(np.exp(x)*(x-3)+3)*x**2)/(np.pi**4*(np.exp(x)-1)**2)
```

```
In [4]: a=optimize.brentq(f_abl,-1,1)
        b=optimize.brentq(f_abl,2,3)
        print('Extrema 1: ',a)
        print('Extrema 2: ',b)
```

```
Extrema 1:  -0.00025024744684609993
Extrema 2:  2.8214393721220787


D:\Anaconda3\lib\site-packages\ipykernel_launcher.py:2: RuntimeWarning: invalid value encounte
```

```
In [5]: x = np.linspace(-5,5,10000)

        plt.plot(x,f(x))
        plt.grid()
        plt.title('Planck Funktion')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('f(x)')
        plt.plot(a,f(a),'rx',label='Extremstellen')
        plt.legend()
        plt.plot(b,f(b),'rx')
        plt.ylim(-0.1,0.4)
        plt.xlim(-1,3)
        plt.show()

        plt.plot(x,f_abl(x))
        plt.plot(a,f_abl(a),'rx',label='Nullstellen')
        plt.plot(b,f_abl(b),'rx')
        plt.title('Ableitung der Planck Funktion')
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('f_abl(x)')
        plt.ylim(-0.25,0.25)
        plt.xlim(-1,3)
        plt.grid()
        plt.legend()
        plt.show()
```





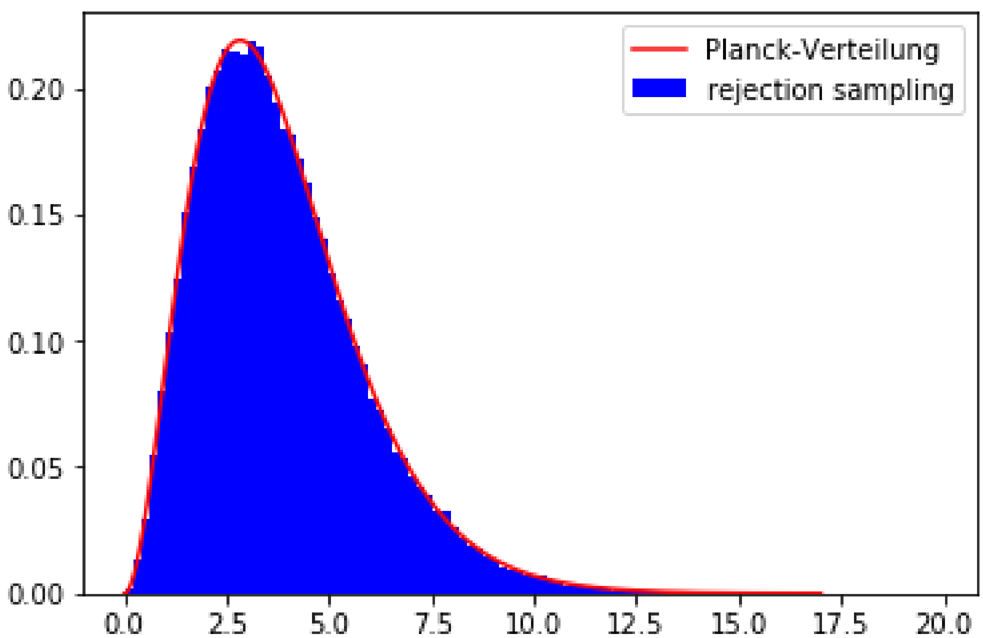
$\Rightarrow$ Bei $x = 2.82144$ ist ein Maximum und bei $x = -0.00025$ ein Minimum

```
In [6]: y_max = f(b)
        x_cut = 20
        print('Maximum f(x_max) =',y_max)
```

```
Maximum f(x_max) = 0.218886470091
```

```
In [7]: rnd_planck = []
        i_verworfen = 0
        start = time.time()
        for k in range(10**5):
            v = np.random.uniform(0,x_cut)
            u = np.random.uniform(0,y_max)
            while(u>f(v)):
                v = np.random.uniform(0,x_cut)
                u = np.random.uniform(0,y_max)
                i_verworfen += 1 #Wenn man in der Schleife ist wurde die erste Zahl verworfen
                #jeden weiteren Durchlauf wird eine weitere verworfen
            rnd_planck.append(v)
        end = time.time()
```

```
In [8]: y = np.linspace(10**-5,17,100000)

        plt.hist(rnd_planck,color='b',bins=100,normed=True,label='rejection sampling')
        plt.plot(y,f(y),'r',label='Planck-Verteilung')
        plt.legend()
        plt.show()
```



1 b)

Durch das zerlegen in Majoranten ist es nun möglich die beiden stetigen Funktionen zu invertieren. Somit können nun mit importance sampling Zufallszahlen für diese Verteilung gezogen werden.

$g_1(x) = y_{max}$ für $x < x_s$
$g_2(x) = 200N \cdot x^{-0.1} \cdot e^{-x^{0.9}}$ für $x > x_s$
$G_1(x) = \int_0^x g_1(x)\mathrm{d}x = y_{max} \cdot x$
$G_2(x) = \int_{x_s}^x g_2(x)\mathrm{d}x + \int_0^{x_s} g_1(x)\mathrm{d}x = y_{max} \cdot x_s + \frac{2000N}{9}(e^{-x_s^{0.9}} - e^{-x^{0.9}})$
$G_1^{-1}(u) = \frac{1}{y_{max}}u$
$G_2^{-1}(u) = x_s - \ln(-\frac{9}{2000N}y_{max}x_s - u)^{\frac{10}{9}}$

```
In [9]: def g_schnitt(x):
            return ((200*(15/(np.pi**4))*x**(-0.1)*np.exp(-x**(0.9)))-0.218886470091)
```

```
In [10]: x_s = optimize.brentq(g_schnitt,5,6) #Schnittpunkt der beiden Majoranten
         print('Schnittpunkt von g1 und g2:',x_s)
         print('Schnittpunkt der Inversen:',y_max*x_s)

         limG2 = y_max*x_s+(2000*15/(9*np.pi**4))*np.exp(-x_s**(9/10))
```

```
Schnittpunkt von g1 und g2: 5.678208598338173
Schnittpunkt der Inversen: 1.24288303653
```

```
In [11]: def g(x,x_s,y_max):
             if x <= x_s:
                 return y_max
             else:
                 return (200*15/np.pi**4)*x**(-0.1)*np.exp(-x**0.9)
```

```
In [12]: def G1(x,y_max):
             return y_max * x
```

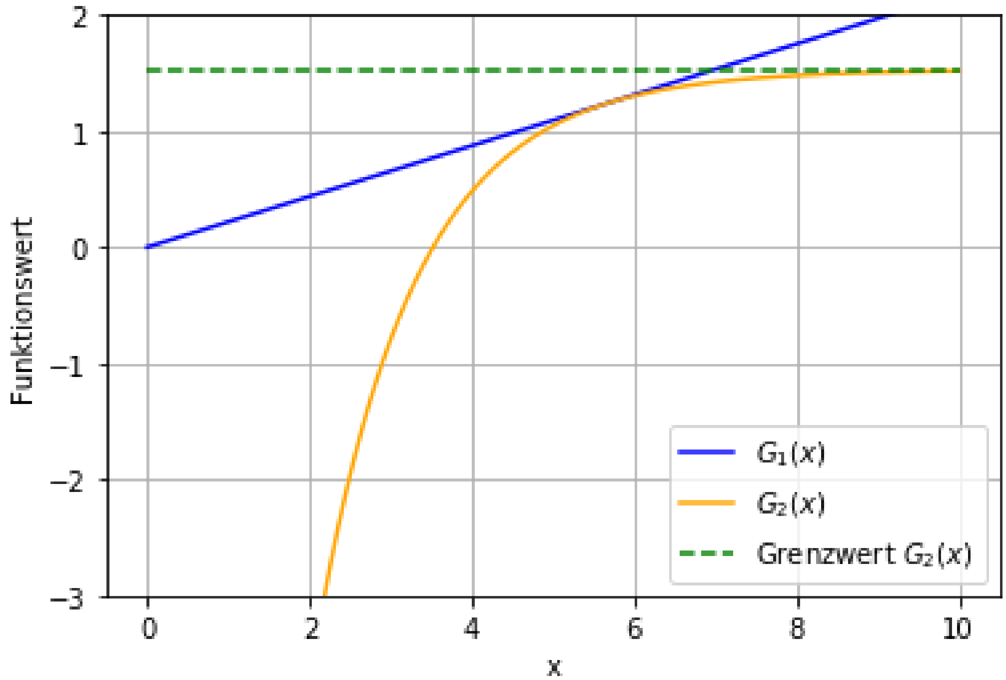
```
In [13]: def G2(x,x_s,y_max):
             return y_max*x_s+(2000*15/(9*np.pi**4))*(np.exp(-x_s**(9/10))-np.exp(-x**(9/10)))
```

```
In [14]: def G1_inv(x,y_max):
             return 1/y_max * x
```

```
In [15]: def G2_inv(x,x_s,y_max):
             return (-np.log((y_max*x_s-x)/(2000/9*15/np.pi**4)+np.exp(-x_s**(9/10))))**(10/9)
```

```
In [16]: def InverseG(x,x_s,y_max):
             if x <= y_max*x_s:
                 return 1/y_max * x
             else:
                 return (-np.log((y_max*x_s-x)/(2000/9*15/np.pi**4)+np.exp(-x_s**(9/10))))**(1
```

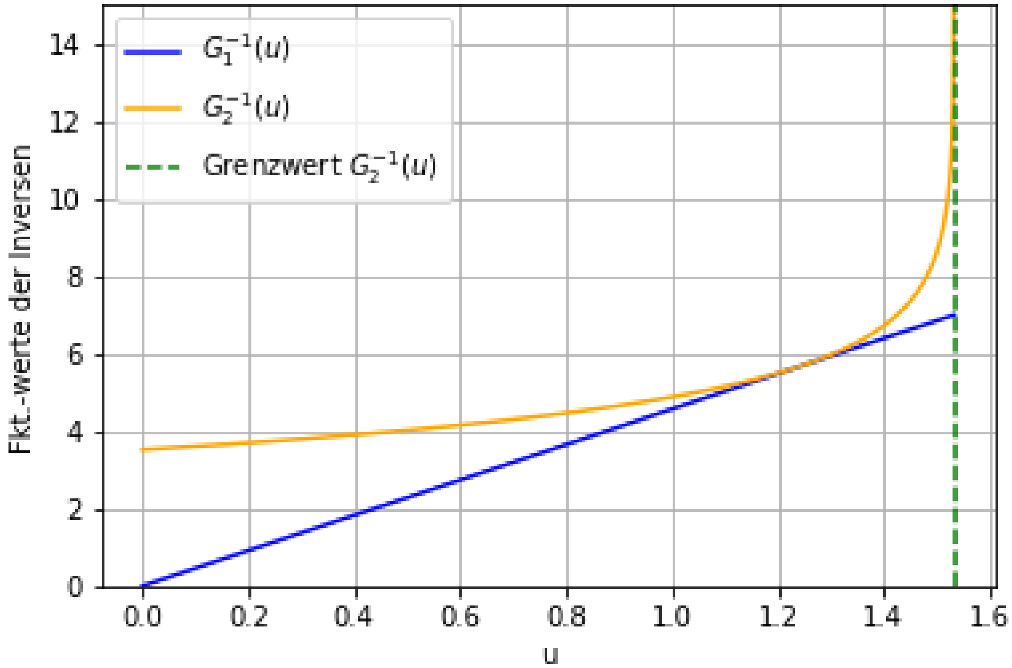
In [17]:
```
z = np.linspace(0,10,10**5)
plt.plot(z,G1(z,y_max),'blue',label=r'$G_1(x)$')
plt.plot(z,G2(z,x_s,y_max),'orange',label=r'$G_2(x)$')
plt.plot([0,10],[limG2,limG2],'g--',label='Grenzwert 'r'$G_2(x)$')
plt.legend()
plt.ylim(-3,2)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('Funktionswert')
plt.grid()
plt.show()

print('Grenzwert für G2:',limG2) #Dieser wird benötigt um festzulegen
                                 #in welchem Bereich die Zufallszahlen gezogen werden
```



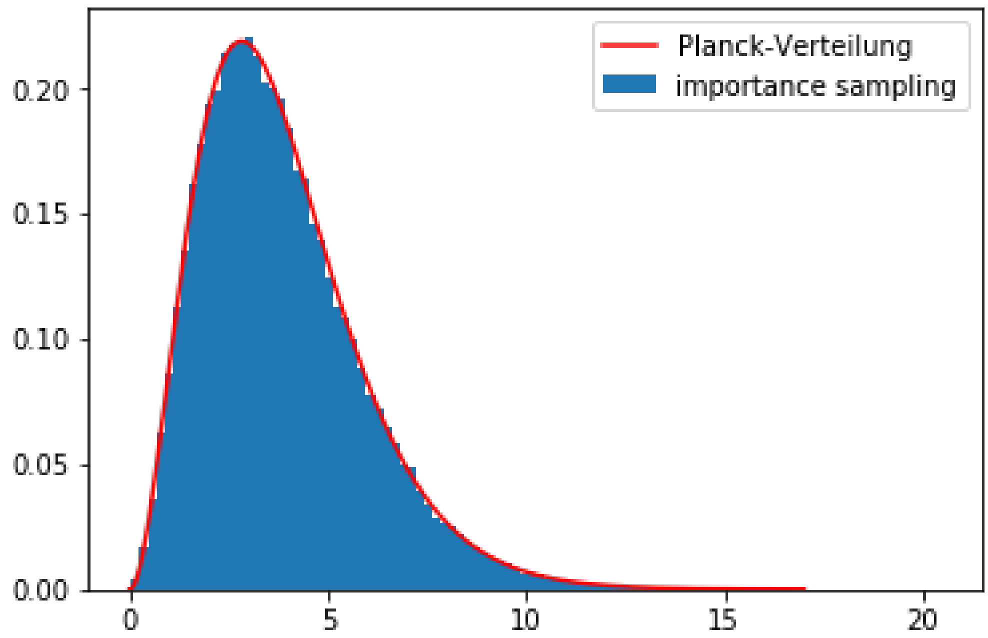

```
Grenzwert für G2: 1.53221575162
```

In [18]:
```
z2 = np.linspace(0,limG2,10**5)
plt.plot(z2,G1_inv(z2,y_max),'blue',label=r'$G_1^{-1}(u)$')
plt.plot(z2,G2_inv(z2,x_s,y_max),'orange',label=r'$G_2^{-1}(u)$')
plt.plot([limG2,limG2],[0,15],'g--',label='Grenzwert 'r'$G_2^{-1}(u)$')
plt.legend()
plt.ylim(0,15)
plt.xlabel('u')
plt.ylabel('Fkt.-werte der Inversen')
```

```
plt.grid()
plt.show()
```

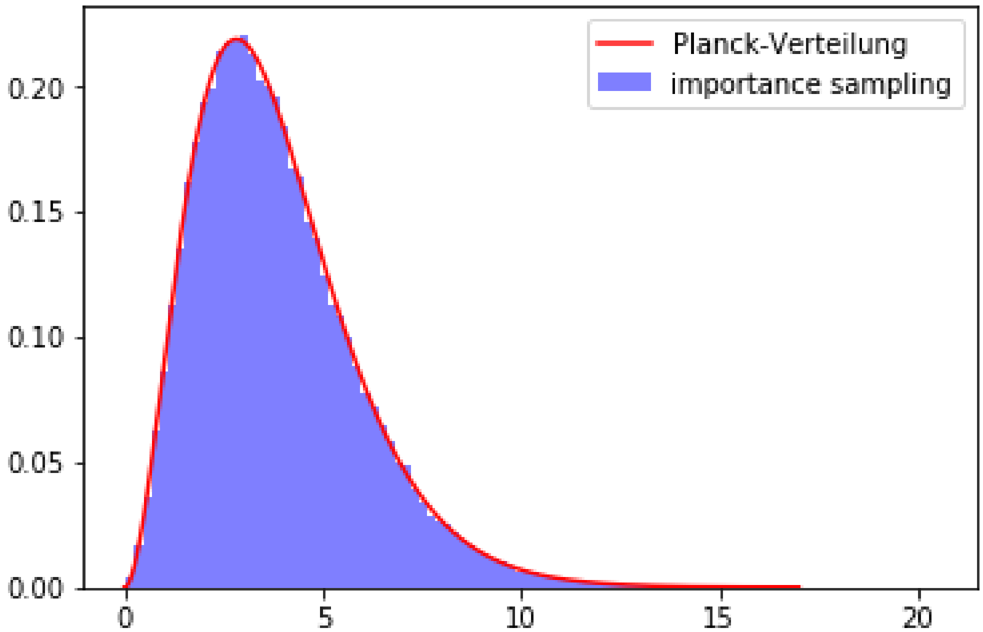


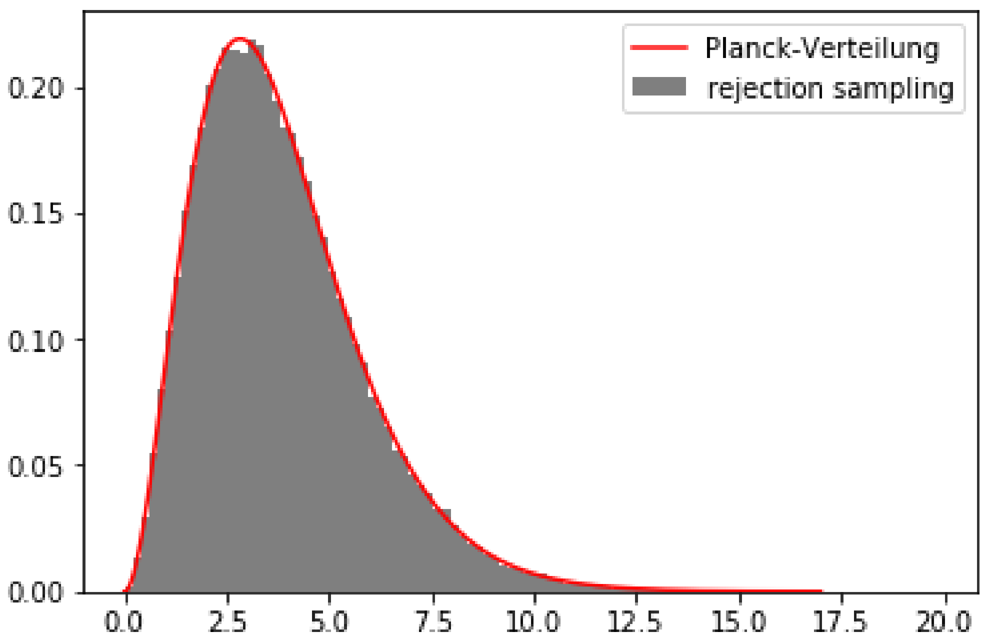

```
In [19]: inv_list = []
         i_imp = 0
         i = 0
         start_b = time.time()
         while i in range(10**5):
             u = np.random.uniform(0,limG2)
             v = np.random.uniform(0,limG2)
             u2 = InverseG(u,x_s,y_max) #transformieren der Zufallszahl
             if g(u2,x_s,y_max)*v <= f(u2): #Akzeptanz-Kriterium für importance sampling
                 inv_list.append(InverseG(u,x_s,y_max))
                 i += 1
             else:
                 i_imp += 1
         end_b = time.time()

In [20]: plt.hist(inv_list,bins=100,normed=True,label='importance sampling')
         plt.plot(y,f(y),'r',label='Planck-Verteilung')
         plt.legend()
         plt.show()
```



2 c)

```
In [21]: plt.hist(inv_list,color='b',bins=100,normed=True,label='importance sampling', alpha=0
         plt.plot(y,f(y),'r',label='Planck-Verteilung')
         plt.legend()
         plt.show()

         plt.hist(rnd_planck,color='k',bins=100,normed=True,label='rejection sampling', alpha=(
         plt.plot(y,f(y),'r',label='Planck-Verteilung')
         plt.legend()
         plt.show()
```






```
In [22]: print('Verworfene Zahlen aus a):',i_verworfen)
         print('Zeit für a):', end-start, 's')
         print('Verworfene Zahlen aus b):',i_imp)
         print('Zeit für a):', end_b-start_b, 's')
```

```
Verworfene Zahlen aus a): 338214
Zeit für a): 17.477941513061523 s
Verworfene Zahlen aus b): 134440
Zeit für a): 16.450377702713013 s
```

Das generieren der Zufallszahlen mit dem importance sampling zeigt zeitlich kaum unterschiede. Viel interessanter und wichtiger ist, dass es nur ca. $\frac{1}{3}$ der Werte vom rejection sampling verworfen hat dabei.