Топологические инварианты конечно определённых групп

§1 Введение

Д. Кан и У. Тёрстон доказали ([4], 1976), что (ко)гомологии классифицирующего пространства $K(G,1) =: TX$ дискретной группы G могут быть такими, как у произвольного линейно связного пространства X. Причём отображение $t : TX \to X$ естественно по X, и T является функтором.

В той же работе было отмечено, что функтор T и функтор плюс-конструкции Квиллена $(\cdot)^+$ в некотором смысле взаимно обратны. Они устанавливают эквивалентность категории гомотопий CW-комплексов и локализации категории GP. Объектами последней являются пары (G, P), где P — совершенная нормальная подгруппа группы G, а морфизмами являются такие гомомофризмы $f : (G, P) \to (G', P')$, что $f(P) < P'$. Локализация происходит по тем морфизмам категории GP, которые индуцируют изоморфизмы на фактор группах $G/P \to G'/P'$ и на гомологиях $H(G; A) \to H(G'; A)$. Таким образом, теория гомотопий CW-комплексов восстанавливается из теории дискретных групп.

Классифицирующие пространства групп имеют большое значение в топологии и алгебре. Известное множество их конструкций: например, конструкция Милнора [18], конструкция Милграма [17], категорный подход через симплициальные множества [12] и др. Интересно было бы найти обозримую симплициальную функториальную конструкцию классифицирующих пространств групп. Это бы позволило, например, подойти к определению торических (ко)гомологий конечно определённых групп: их можно было бы определить, как (ко)гомологии момент-угол комплекса, построенного по симплициальному классифицирующему пространству данной группы.

Важно заметить также, что имеются модификации конструкция Кана — Тёрстона, которые для конечных CW-комплексов дают дискретные группы, классифицирующие пространства которых являются конечными клеточными комплексами [2], [6]. Проблема геометрической размерности дискретных групп имеет давнюю историю. Известная теорема Эйленберга — Ганея [19] утверждает, что для любой конечно определённой группы G когомологической размерности не больше n, где $n \geqslant 3$, существует асферичный n-мерный CW-комплекс $X = K(G,1)$. Для $n = 2$ — это гипотеза, открытая и по настоящее время.

С конструкцией Кана-Тёрстона тесно связаны ацикличные дискретные группы. Они могут возникать, как фундаментальные группы n-узлов, гомологических сфер, как группы гомеоморфизмов многообразий, возникают в теории слоений [20] и др. Большой интерес представляют конечно определённые ацикличные группы. Одним из простейших нетривиальных примеров [5] являются группы Хигмана Hig_n, $n = 4, 5, ...,$. Эти группы замечательны ещё и тем, что они имеют конечную геометрическую размерность: их классифицирующим пространством может быть выбран конечный двумерный клеточный комплекс [2]. Ацикличные пространства и группы дают надежду на обобщение классических конструкций топологии. Например, можно попробовать обобщить конструкции, в которых участвуют стягиваемые пространства, заменив последние некоторым образом на ацикличные пространства.

Можно задаться вопросом о том, когда данная ацикличная группа имеет конечную геометрическую размерность. Дополнительную сложность задаче придаёт то, что когомологическая размерность равна 0. Однако, как показали Уолл и Милнор, препятствием пространству X быть гомотопически эквивалентным конечному комплексу служит так называемое кручение Уайтхеда $\mathrm{Wh}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ группового кольца $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$.

Близким к данному кругу вопросов являются вопросы о классифицирующих пространствах моноидов. В этом контексте можно упомянуть гипотезу Арнольда-Тома-Фама [21] и проблему Бёрнсайда [22].

§2 Напоминание о гомологиях дискретных групп

По данной дискретной группе G можно, как известно, построить стягиваемый симплициальный комплекс EG со свободным действием G. Факторпространство $BG := {}^{EG}/_{G}$ называется *классифицирующим пространством* группы G.

Классифицирующее пространство дискретной группы G имеет тип $K(G,1)$.

Определение 1. Гомологиями дискретной группы G с тривиальными коэффициентами в $\mathbb{Z}$ называются гомологии (симплициальные, клеточные и др.) классифицирующего пространства группы G, то есть $H_i(G;\mathbb{Z}) := H_i(BG;\mathbb{Z})$. В случае локальных коэффициентов в G-модуле M это гомологии с локальными коэффициентами $H_i(BG;M)$.

Существуют различные конструкции классифицирующих пространств для топологических и дискретных групп. Сюда относится конструкция с джойнами

Милнора, бар-конструкция, конструкция Милграма, категорная конструкция через геометрическую реализацию некоторого симплициального множества и др.

Также гомологии группы G могут быть определены чисто алгебраическим путём.

Определение 2. Гомологиями дискретной группы с коэффициентами в G-модуле M называются группы $H_n(G, M) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

Утверждение 1. *Два определения гомологий групп равносильны.*

§3 Ацикличные группы

Имеется интересный класс групп, гомологии которых в $\mathbb{Z}$ устроены, как гомологии точки. Такие группы называются *ацикличными.*

Заметим, что ацикличных групп в любой локальной системе коэффициентов не существует, поскольку имеет место

Теорема 1 (Столлингс ???). *Если когомологическая размерность конечно порождённой группы G не превосходит 1, то G является свободной (т. е. $K(G, 1)$ гомотопически эквивалентно букету окружностей).*

3.1 Примеры ацикличных дискретных групп

В этом параграфе приводятся два примера конечно представленных ацикличных групп, классифицирующие пространства которых могут быть реализованы двумерными симплициальными комплексами.

Группа $\mathfrak{A}$. Рассмотрим простой пример нетривиальной ацикличной группы — группу $\mathfrak{A}$ из статьи [2].

Для её построения сначала введём две группы:

$$F = \langle a, b \rangle,$$

$$C = \langle u = a,\ v = b^{-1}a^{-1}bab,\ w = b^{-2}ab^{-1}a^{-2}bab^2,\ x = b^{-3}ab^{-1}a^{-2}bab^3 \rangle.$$

Группа F — свободная на двух образующих, а группа C — свободная на четырёх образующих.

При помощи F и C мы можем получить группу

$$\mathfrak{A} = \{F_1 \star F_2; C_1 \cong_\varphi C_2\},$$

где $F_1,\ F_2$ — две копии группы F, а C_1, C_2 — копии группы C, причём склейка происходит вдоль изоморфизма $\varphi : C_1 \to C_2$, такого, что

$$u_1 \mapsto x_2,\ v_1 \mapsto w_2,\ w_1 \mapsto v_2,\ x_1 \mapsto u_2.$$

Утверждение 2. *Группа $\mathfrak{A}$ нетривиальна.*

Доказательство. Как известно, свободные группы нетривиальны. Но результат амальгамированного произведения двух нетривиальных групп по их общей подгруппе будет нетривиальной группой. Последнее следует, например, из теории Басса-Серра (см., например, [???]). □

Утверждение 3 ([2])**.** *Группа $\mathfrak{A}$ является ацикличной.*

Доказательство. По построению группа $\mathfrak{A}$ является совершенной.

Кроме того, пространство $K(\mathfrak{A}, 1)$ можно реализовать в виде конечного клеточного двумерного комплекса, поскольку он является пушаутом двух копий пространства $K(F, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ вдоль пространства $K(C, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, то есть

$$K(\mathfrak{A}, 1) = K(F, 1) \sqcup_{K(C,1)} K(F, 1).$$

Имеет место точная последовательность Майера-Виеториса с постоянными коэффициентами в $\mathbb{Z}$

$$... \to H_{n+1}\mathfrak{A} \to H_nC \to H_nF_1 \oplus H_nF_2 \to H_n\mathfrak{A} \to ...$$

В силу того, что $K(F, 1)$ и $K(C, 1)$ — букеты окружностей, сразу получается, что $H_n\mathfrak{A} = 0$ при $n > 2$. Рассмотрим теперь участок точной последовательности для случая $n = 2$:

$$0 \to H_2\mathfrak{A} \to H_1C \to H_1F_1 \oplus H_1F_2 \to 0.$$

Но обе свободные абелевы группы H_1C и $H_1F_1 \oplus H_1F_2$ имеют ранг 4. Следовательно, они изоморфны, и $H_2\mathfrak{A} = 0$ в силу точности.

□

Для дальнейшего нам понадобится важная

Теорема 2 (Дж. Уайтхед, 1939)**.** *Пусть группа G является pushout'ом в категории* Grp *в следующей диаграмме*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Тогда следующая диаграмма является pushout'ом в категории Top

$$\begin{tikzcd} K(C,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(A,1) \arrow[d] \\ K(B,1) \arrow[r] & K(G,1) \end{tikzcd}$$

Следствие 2.1 ([2]). *Если $G = A \star_C B$ является амальгамой групп A и B, для которых существуют конечные симплициальные реализации пространств $K(A,1)$, $K(B,1)$ и $K(C,1)$, тогда $K(G,1)$ тоже может быть реализовано в виде конечного симплициального комплекса. Причём имеет место оценка на размерности*

$$\dim G \leqslant \max(\dim A, \dim B, 1 + \dim C).$$

Доказательство. Вложениям $C \hookrightarrow A$ и $C \hookrightarrow B$ соответствуют отображения классифицирующих пространств $K(C,1) \to K(A,1)$ и $K(C,1) \to K(B,1)$. Возьмём цилиндры этих отображений и склеим их вдоль комплекса $K(C,1)$. □

Отсюда получается

Утверждение 4. *Группа $\mathfrak{A}$ является ацикличной относительно тривиальной системы коэффициентов в $\mathbb{Z}$ и может быть реализована в виде конечного двумерного клеточного комплекса.*

Группы Хигмана Hig_n**.** Эти группы были придуманы Г. Хигманом в работе [5], 1951, как примеры конечно определённых групп, не имеющих подгрупп конечного индекса.

Рассмотрим сначала группу

$$\mathrm{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}dc = d^2, d^{-1}ad = a^2 \rangle.$$

Опишем, как можно получить эту группу при помощи операций HNN-расширения и амальгамированного свободного произведения.

Рассмотрим группу Баумслага-Солитера:

$$\mathrm{BS}(1,2) = K = \langle a, b | a^{-1}ba = b^2 \rangle.$$

Можно заметить, что группа K является HNN-расширением группы $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ при помощи изоморфизма подгрупп $\langle b \rangle \cong \langle b^2 \rangle$. В первую очередь, группа K ненулевая по лемме Бриттона, поскольку в неё вкладывается группа $\langle a \rangle$.

Дайер и Васкез показали, что верна

Теорема 3 (E. Dyer, A. T. Vasquez, 1972, [8]). *Пусть $P = \langle A \mid R \rangle$ — представление группы G с одним соотношением. Тогда клеточный 2-комплекс, получаемый обычной приклейкой 2-клетки к букету окружностей, биективно соответствующих образующим из A вдоль слова R, асферичен.*

Следствие 3.1. *В качестве классифицирующего пространства группы K можно взять 2-комплекс, получаемый из букета двух окружностей некоторой приклейкой 2-клетки.*

Из теорем Хопфа очевидно следует, что $H_2(K) = 0$ и $H_1(K) = \mathbb{Z}$. Следовательно, мы знаем гомологии группы K:

Предложение 1. *Гомологии группы K устроены следующим образом:*

$$\begin{cases} H_n(K) = 0, & n \geqslant 2, \\ H_1(K) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Построим группу

$$L = K_1 \star_{\mathbb{Z}} K_2 = \langle a, b, c \mid a^b = a^2, b^c = b^2 \rangle,$$

где $K_i \cong K$, и склейка происходит вдоль вложений $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \hookrightarrow L$, $\mathbb{Z} \cong \langle b \rangle \hookrightarrow L$. Очевидно, что $H_1(L) = \mathbb{Z}$, и из точной последовательности Майера-Виеториеса и предложения выше следует, что $H_n(L) = 0$ при $n \geqslant 2$.

Снова беря амальгаму $L_1 \star_{\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}} L_2$, где $L_i \cong L$, получающуюся склейкой $\langle a_1, c_1 \rangle \cong \langle a_2, c_2 \rangle$, мы получаем группу Хигмана Hig_4. Аналогичные рассуждения с точной последовательностью Майера-Виеториеса показывают, что Hig_4 ациклична.

Из приведённой конструкции группы Hig_n следует, что в ней отсутствует кручение, поскольку оно отсутствовало на каждом шаге в силу свойств HNN-расширений и амальгамы (теория Басса-Серра).

Теперь рассмотрим обобщённую группу Хигмана

$$\mathrm{Hig}_n = \langle x_i,\ i \in \mathbb{Z}/_n \mid [x_{i-1}, x_i] = x_i \rangle,$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Утверждение 5 ([5]). *Для $n \leqslant 3$ группа* Hig_n *тривиальна.*

Доказательство. Случай $n = 2$ очевиден. Для $n = 3$ достаточно выразить одну из образующих x_3 через x_1, x_2, тогда $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\}$ — здесь имеется в виду равенство подгрупп, порождённых соответствующими элементами. Но, с одной стороны, очевидно, что $\{x_1, x_2, x_3\}' = \{x_1, x_2, x_3\}$. А с другой, $\{x_1, x_2\}' = 0$. □

Утверждение 6. *При $n \geqslant 4$ группа* Hig_n *нетривиальна.*

Данное утверждение будет следовать из конструкции Hig_n ниже. Дело в том, что конструкцию последовательных амальгам для Hig_4 можно обобщить на случай Hig_n ($n \geqslant 4$).

Будем обозначать через K_i группы, изоморфные группе

$$K = \langle x, h \mid [h, x] = x \rangle,$$

буквы алфавита которых такие же, как у K но с индексами i. Также обозначим

$$L = \langle K_0, K_1 \mid x_0 = h_1 \rangle.$$

Тогда группа Хигмана Hig_n следующего порядка получается из группы

$$G_{n-1} = \langle K_2, ..., K_{n-1} \mid x_2 = h_3, ..., x_{n-2} = h_{n-1} \rangle$$

амальгамой с группой L:

$$\mathrm{Hig}_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z}\star\mathbb{Z}} L,$$

где склейка происходит вдоль свободных подгрупп $\langle h_0, x_1 \rangle$ и $\langle x_{n-1}, h_2 \rangle$ ($h_0 \sim x_{n-1}$, $x_1 \sim h_2$).

Заметим, что

$$G_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z}} K$$

с отождествлением $x_{n-1} = h_n$.

Заметим, что из следствия к теореме [8], описанной конструкции построения группы Hig_n при помощи амальгам и групп K и в силу утверждения 4 классифицирующее пространство группы Хигмана может быть выбрано конечным комплексом. А именно, следует

Теорема 4. *Пространство $K(\mathrm{Hig}_n, 1)$ можно взять в виде 2-комплекса с одной нуль-клеткой, n один-клетками и n два-клетками.*

Таким образом, ацикличность групп Hig_n в размерностях, больших двойки, получается из предыдущей теоремы. При помощи последовательности Майера-Вйеториеса можно показать нулёвость гомологий в оставшихся размерностях. Для этого докажем лемму:

Лемма 1. *Группы G_k имеют следующие гомологии:*

$$H_n(G_k) = 0, \;\; k \geqslant 2,$$

$$H_1(G_k) = \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Будем вести индукцию по k для G_k. База: при $k = 3$ группа G_3 изоморфна группе L, которую мы рассмотрели выше.

Допустим, что теорема выполняется для группы G_{k-1}. Рассмотрим $G_k = G_{k-1} \star_{\mathbb{Z}} K$ и напишем точную последовательность Майера-Виеториеса. Из неё или из соображения геометрической размерности очевидно будет следовать, что $H_n(G_k) = 0$ при $n \geqslant 3$. Рассмотрим случай $n = 2$:

$$0 \to H_2(G_k) \to \mathbb{Z} \to H_1(G_{k-1}) \oplus H_1(K) \to H_1(G_k) \to 0.$$

Абеленизация группы G_k равна $\mathbb{Z}$ в силу того, что в каждом слагаемом L_i элемент x_i является коммутатором, а элемент h_i склеивается с элементом x_{i-1} для всех $i = 3, ..., n$. Только элемент h_n не склеится ни с каким коммутатором, и, следовательно, будет образующим абеленизации. Но тогда в силу точности $H_2(G_k) = 0$. □

Следствие 4.1. *Группы Хигмана* Hig_n *ацикличны.*

Доказательство. Очевидно, что Hig_n совершенна. По теореме 4 группа Hig_n имеет геометрическую размерность 2. Осталось показать, что $H_2(\mathrm{Hig}_n) = 0$. Имеем

$$0 \to H_2(\mathrm{Hig}_n) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(G_{n-1}) \oplus H_1(L) \to H_1(\mathrm{Hig}_n).$$

По предложению выше $H_1(G_{n-1}) = \mathbb{Z}$ и $H_1(L) = \mathbb{Z}$. Следовательно, третья стрелка — изоморфизм. Значит, $H_2(\mathrm{Hig}_n) = 0$ из точности. Дальнейшее аналогично следует из предложения выше. □

Классифицирующее пространство любой группы Хигмана Hig_n является двумерным комплексом, поэтому группа Hig_n не имеет кручения. Но это также может быть выведено из свойств операций амальгамированного произведения и HNN-расширения. А именно, справедливы следующие теоремы:

Теорема 5 ([16], [26])**.** *Пусть $K := G \star_{\varphi} H$ является амальгамированным произведением, $\varphi : A \to B$ – склеивающий изоморфизм между подгруппами $A < G$ и $B < H$. Тогда каждый элемент конечного порядка в K сопряжён элементу из G или H.*

Теорема 6 ([16], [26])**.** *Пусть $H := G\star_{\varphi_1,...,\varphi_n}$ – HNN-расширение группы G, где $\varphi_i : A_i \to B_i$ являются изоморфизмами некоторых подгруппы групп A и B. Тогда каждый элемент кручения H сопряжён элементу G.*

3.2 Групповая надстройка

В теории гомологий групп имеется аналог конструкции надстройки из топологии. В этом параграфе мы следуем статье [2].

Определение 3. Пусть группа G вкладывается в ацикличную группу CG — будем называть её *групповым конусом* G. Тогда группа

$$\Sigma G = CG \star_G CG$$

называется *групповой надстройкой* над G.

Из точной последовательности Майера-Виеториеса легко следует важный аналог свойства обычной надстройки в категории топологических пространств:

Утверждение 7 (Изоморфизм надстройки)**.**

$$H_1(\Sigma G; \mathbb{Z}) = 0 \text{ и } H_{i+1}(\Sigma G; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}) \text{ для } i \geqslant 1.$$

Заметим, что конструкция групповой надстройки даёт нам конструкцию гомологической надстройки при переходе от дискретных групп к их пространствам Эйленберга-Маклейна. А именно справедливо

Утверждение 8. *Пространство*

$$W = K(CG, 1) \sqcup_{K(G,1)} K(CG, 1)$$

имеет гомотопический тип пространства

$$K(CG \star_G CG, 1)$$

и более того,

$$H_{i+1}(W; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}), \ i \geqslant 1, \ H_1(W; \mathbb{Z}) = 0.$$

Доказательство. Асферичность пространства W следует из теоремы Уайтхеда 2. Изоморфизмы для гомологий следуют из изоморфизмов групповой надстройки. □

Конструкция CG при помощи алгебраического пополнения группы. В этом параграфе мы следуем статье [2].

Оказывается, для любой группы G существует ацикличная группа CG, в которую G вкладывается, причём C является функтором.

Определение 4. Группа A называется *супергруппой* группы B, если $B < A$.

Определение 5. Супергруппа M группы B называется митозисом B, если существуют элементы $s,\ d$ в M, такие, что

1. $M = \langle B, s, d\rangle$,

2. $b^d = bb^s$ для любого $b \in B$,

3. $[b', b^s] = 1$ для любых $b, b' \in B$.

Здесь $b^s := s^{-1}bs$.

Теперь определим важный класс групп:

Определение 6. Группа M называется митотической, если она содержит митозис любой её подгруппы.

Митотические группы обладают очень важным свойством:

Теорема 7. *Митотические группы ацикличны.*

Примером митотических групп могут служить алгебраически замкнутые группы.

Определение 7. Группа G называется алгебраически замкнутой, если для любой конечной системы уравнений

$$f_i(g_1, ..., g_n, x_1, ..., x_m) = 1,\ i = 1, ..., k$$

(относительно переменных $x_1, ..., x_m$ и постоянных $g_1, ..., g_n \in G$), для которой существует решение в супергруппе группы G, существует также решение и в самой группе G.

Теорема 8. *Алгебраическое замыкание любой группы является митотической группой.*

Имеется следующий результат:

Утверждение 9. *Всякая бесконечная группа может быть вложена в алгебраически замкнутую группу той же мощности.*

Из утверждения 9 и теорем 7 и 8 следует

Теорема 9. *Всякая бесконечная группа может быть вложена в ацикличную группу той же мощности.*

Конструкция группового конуса Кана-Тёрстона. Кан и Тёрстон в своей оригинальной работе [4] построили функтор группового конуса C, опираясь на результат Мозера [???] следующим образом.

Обозначим через $G^{\mathbb{Q}}$ группу функций $\mathbb{Q} \to G$, которые имеют компактный носитель, то есть каждая такая функция принимает тождественное значение 1 вне некоторого конечного интервала. Группа гомеоморфизмов рациональных чисел с компактными носиетлями $\mathrm{Homeo}\,\mathbb{Q}$ действует на группе $G^{\mathbb{Q}}$ композициями. Тогда определим алгебраический конус CG, как полупрямое произведение $G^{\mathbb{Q}} \rtimes \mathrm{Homeo}\,\mathbb{Q}$ с умножением

$$(b, a)(b', a') = (ba(b'), aa'),\ b, b' \in G^{\mathbb{Q}},\ a, a' \in \mathrm{Homeo}\,\mathbb{Q}.$$

Очевидно, что данная конструкция функториальна, и, кроме того, имеется вложение группы $G \hookrightarrow CG$ нормальным делителем: $g \mapsto (b_g, \mathrm{id}) \in CG$, где $b_g r = g$, если $r = 0$, и $b_g r = 0$, иначе.

Утверждение 10. *Группа CG из конструкции Кана-Тёрстона является ацикличной.*

Доказательство. Утверждение получается из результата Мозера о том, что группа гомеоморфизмов прямой с компактным носителем ациклична и спектральной последовательности Хохшильда-Серра, применённой к расширению

$$1 \to G^{\mathbb{Q}} \to G^{\mathbb{Q}} \rtimes \mathrm{Homeo}\,\mathbb{Q} \to \mathrm{Homeo}\,\mathbb{Q} \to 1.$$

$\square$

Замечание. Обычно группа CG имеет несчётный порядок. Тем не менее, имеется подконус $C'G \subset CG$, имеющий ту же мощность, что и G за исключением случая конечной G, в котором группа $C'G$ будет счётной.

3.3 Построение ацикличных групп из гомологических сфер

М. Кервер в работе [13], 1969 получил полный ответ на вопрос из введения к настоящей работе о гомологических сферах.

Прежде, чем его сформулировать, для удобства введём

Определение 8. Конечно представленная группа G *реализуема* гомологической n-сферой, если существует некоторая целочисленная гомологическая n-сфера с фундаментальной группой G.

Пусть π — некоторая группа с g образующими и r соотношениями. Чтобы π была реализуема гомологической n-сферой, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: π конечно представима, $H_1(\pi) = 0$, $H_2(\pi) = 0$. Последнее соотношение следует из известной теоремы Х. Хопфа:

Теорема 10 (Х. Хопф). *Пусть X — связный CW-комплекс. Тогда имеется точная последовательность групп:*

$$\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X;\mathbb{Z}) \to H_2(\pi_1(X);\mathbb{Z}) \to 0,$$

где h — гомоморфизм Гуревича, а действие $\mathbb{Z} \rightharpoonup \pi_1(X)$ тривиально.

Доказательство. В силу того, что пространство $K(\pi_1(X), 1)$ получается из пространства X приклеиванием клеток размерности не меньше 3, отсюда сразу же следует сюръективность. Дальнейшее очевидно. $\square$

Определение 9. Если группа π удовлетворяет соотношению $H_1(\pi) = 0$, то она называется *совершенной*. Если π удовлетворяет сразу двум соотношениям $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$, то она называется *суперсовершенной*.

Теорема 11 (М. Кервер, 1969, [13]). *Пусть π — суперсовершенная конечно представимая группа, и пусть $n \geqslant 5$. Тогда существует гладкая гомологическая n-сфера с фундаментальной группой π.*

Приведём здесь схему доказательства, которая следует из конструкции, используемой С. П. Новиковым при решении вопроса о распознавании гомологических сфер (об этом ещё будет сказано несколько позже, см. §**??**)

Схема доказательства. (С. П. Новиков, [15] 1962) По представлению группы π образующими и соотношениями построим $n+1$-мерное многообразие с краем

$$M^{n+1} = \left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1,\ldots,g_k} \mathbb{D}^n_j \times \mathbb{D}^1_j\right) \bigcup_{r_1,\ldots,r_\ell} \mathbb{D}^{n-1}_q \times \mathbb{D}^2,$$

где склейка происходит со стандартным сглаживанием по отображениям

$$g_j : \mathbb{D}^n_j \times \partial\mathbb{D}^1_j \to \partial\mathbb{D}^{n+1},$$

$$r_q : \mathbb{D}^{n-1}_q \times \partial\mathbb{D}^2_q \to \partial\left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1,\ldots,g_k} \mathbb{D}^n_j \times \mathbb{D}^1_j\right),$$

которые соответствуют образующим и соотношениям группы π.

По условию $H_2(\pi) = 0$, поэтому в группе $H_2(\partial M)$ по теореме Хопфа, сформулированной выше, все циклы являются сферическими. Реализуем свободный базис $H_2(\partial M)$ сферами $\mathbb{S}^2_\alpha \times \mathbb{D}^{n-2}_\alpha \subset \partial M$ и сделаем вдоль них хирургию. Тогда мы убьём вторую гомотопическую группу (здесь существенно, что $n \geqslant 5$) и, следовательно, получим нулевые вторые гомологии для многообразия ∂M. По построению и исходя из клеточных гомологий, у M не могут быть гомологии в остальных размерностях (кроме размерности n). Стало быть, мы имеем гомологическую сферу ∂M. $\square$

Замечание. Из теоремы Паункаре для старших размерностей (результат Смейла) следует, что если многообразие M из приведённой схемы доказательства односвязно, то ∂M — это стандартная сфера.

Рассуждение С. П. Новикова позволяет строить гомологические сферы Σ^n ($n \geqslant 5$) для произвольных суперсовершенных конечно определённых групп. Тогда ацикличный комплекс получится, если из этой гомологической сферы выколоть точку $\Sigma^n \backslash \{\mathrm{pt}\}$. Теперь, чтобы получить ацикличную группу, достаточно взять фундаментальную группу от конструкции Кана-Тёрстона от полученного пространства $\pi_1(T(\Sigma^n \backslash \{\mathrm{pt}\}), x_0)$.

Суперсовершенных групп довольно много. Например, известен следующий результат:

Теорема 12 ([14])**.** *При $n \geqslant 3$ группа*

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q) \text{ — суперсовершенная,}$$

за исключением трёх случаев:

$$\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}(4, \mathbb{F}_2),\ \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4).$$

Группы из теоремы являются конечными, а потому они, как известно, из теоремы Свана ниже, не могут быть ацикличными.

Теорема 13 (R. G. Swan, 1960)**.** *Пусть G — конечная группа и H — нетривиальная подгруппа в G. Тогда индуцированное отображение $H_i(G) \to H_i(H)$ нетривиально для бесконечного числа значений $i > 0$.*

Итак, приведённые выше группы являются суперсовершенными, но не ацикличными.

3.4 Универсальная ацикличная конечно определённая группа

В работе [2], 1980, был поставлен вопрос о том, всякая ли конечно определённая группа вкладывается в ацикличную конечно определённую группу. Позднее ответ на этот вопрос был дан в [25], 1983: оказалось, что верна следующая

Теорема 14 ([25], 1983)**.** *Существует ацикличная конечно определённая группа, содержащая изоморфные копии всех конечно определённых групп.*

Доказательство. Пусть U — универсальная конечно определённая группа Хигмана, то есть такая, что она содержит все конечно определённые подгруппы. Но группу U можно вложить в конечно порождённую ацикличную группу V с рекурсивно перечислимым представлением. Вложим V в изоморфную копию $\overline{U}$ группы U при помощи изоморфизма $\overline{u} \mapsto u$ для каждого $u \in U$. Рассмотрим HNN-расширение

$$E = \left\langle \overline{U}, t \mid t\overline{u}t^{-1} = u,\ u \in U \right\rangle.$$

Подгруппа B группы E, являющаяся нормальным замыканием группы $\overline{U}$, является возрастающим объединением ацикличных групп

$$V < t^{-1}Vt < t^{-2}Vt < \ldots$$

Это действительно так, поскольку из того, что $U \hookrightarrow V \hookrightarrow \overline{U}$, $t\overline{U}t^{-1} = U$ следует $V \hookrightarrow \overline{U} = t^{-1}Ut \hookrightarrow t^{-1}Vt$. Но копредел коммутирует с функтором гомологий, поскольку в абелевой категории функтор копредела является точным. Следовательно, B ацикличная. Факторгруппа E/B является бесконечной циклической. Короткой точной последовательности $1 \to B \to E \to \mathbb{Z} \to 1$ отвечает спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\mathbb{Z}, H_q(B, \mathbb{Z})) \Rightarrow H_*(E, \mathbb{Z}).$$

Она вырождается во втором члене, и поэтому мы имеем изоморфыизмы

$$H_1E \cong \mathbb{Z},\ H_nE = 0,\ n > 1.$$

Теперь возьмём свободное произведение группы E и любой конечно определённой ацикличной группы A вдоль бесконечной циклической подгруппы. В качестве A можно, например, взять группу Хигмана Hig_4. Ацикличность полученной группы очевидным образом следует из точной последовательности Майера-Виеториеса. Тогда для произвольной конечно определённой группы G композиция следующих вложений будет искомой:

$$G \hookrightarrow U \hookrightarrow E \hookrightarrow E \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4\,.$$

Первое вложение имеет место в силу основного свойства универсальной группы Хигмана, а второе и третье – в силу свойств амальгамы.

$\square$

Эквивалентно, теорема говорит о том, что всякая конечно определённая группа вкладывается в некоторый групповой гомологический конус над ней.

В силу того, что конечные группы вкладываются в универсальную группу Хигмана и свойств амальгам и HNN-расширений, мы получаем

Следствие 14.1. *Существует конечно определённая группа с элементами конечного порядка.*

Заметим, что рассматривавшиеся выше ацикличные конечно определённые группы не имели элементов конечного порядка.

Явному заданию группы Хигмана образующими и соотношениями посвящено не так много работ. Из работы [???] известен пример такой группы с 8 образующими и 26 соотношениями.

Интересным представляется вопрос о единственности (с точностью до изоморфизма) универсальной группы Хигмана. Если U_1 и U_2 – две такие группы, то мы имеем вложения $U_1 \hookrightarrow U_2$ и $U_2 \hookrightarrow U_1$. Однако это не означает, что $U_1 \cong U_2$. Действительно, рассмотрим, например, свободные группы F_p и F_q различных рангов $p, q \geqslant 2$. Они вкладываются друг в друга, поскольку каждая из них содержит свободную группу со счётным числом образующих – коммутант, однако F_p не изоморфно F_q (т. к. эти группы имеют неизоморфные абеленизации).

§4 Ацикличные пространства

Важную роль в топологии играют так называемые *ацикличные пространства*, то есть такие пространства, гомологии которых с постоянными коэффициентами в $\mathbb{Z}$ тривиальны. Заметим, что такие нетривиальные пространства, в силу теоремы Гуревича и теоремы Уайтхеда, обязаны иметь нетривиальную фундаментальную группу.

Сформулируем здесь обобщение теоремы Уайтхеда на неодносвязный случай. Этот результат нам пригодится в дальнейшем.

Теорема 15 ([23]). *Пусть отображение $f : X \to Y$ между отмеченными клеточными комплексами индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и изоморфизм гомологий с любыми локальными коэффициентами $\mathcal{A}$, т. е.*

$$H_*(X; f^*\mathcal{A}) \cong H_*(Y; \mathcal{A}).$$

Тогда f является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Будем считать, что X и Y связные. Поднимем отображение f на универсальное накрытие так, чтобы $\widetilde{f}(\widetilde{x_0}) = \widetilde{y_0}$, где $\widetilde{x_0}$ и $\widetilde{y_0}$ — некоторые поднятия отмеченных точек x_0 и y_0. В силу классической теоремы Уайтхеда для односвязного случая и в силу теоремы Гуревича, достаточно показать, что $\widetilde{f}$ индуцирует изоморфизм в гомологиях $H_*(\widetilde{X};\mathbb{Z}) \cong H_*(\widetilde{Y};\mathbb{Z})$. Запишем спектральные последовательности Лере для универсальных накрытий p_1 и p_2 над пространствами X и Y, рассматриваемых, как расслоения с дискретным слоем:

$$H_p(X; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\widetilde{X}),$$

$$H_p(Y; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\widetilde{Y}),$$

где $G = \pi_1(X)$.

В силу дискретности G, спектральные последовательности вырождаются во втором члене, и поэтому мы имеем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_n(X; p_{1*}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(\widetilde{X};\mathbb{Z}) \arrow[d, "\widetilde{f}_*"] \\
H_n(Y; p_{2*}\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & H_n(\widetilde{Y};\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

□

Здесь через $p_{1*}\mathbb{Z}$ и $p_{2*}\mathbb{Z}$ обозначены (возможно разные) G-модули $\mathbb{Z}$. Но $f^*(p_{2*}\mathbb{Z}) = p_{1*}\mathbb{Z}$. Следовательно, по условию f_* в левом столбце диграммы индуцирует изоморфизм. А значит, мы имеем искомы изоморфизм в правом столбце диграммы.

4.1 Функтор Дрора

Можно задаться вопросом о том, вся

Дрор в работе [????] показал, что в категории симплициальных множеств с отмеченной точкой sSet_* имеется эндофунктор

$$A : \mathsf{sSet}_* \to \mathsf{sSet}_*$$

и естественное отображение

$$a : AX \to X,$$

такое, что

1. AX ациклично для любого симплициального X;

2. Отображение $a : AX \to X$ универсально с точностью до гомотопии среди всех отображений из ацикличного пространства в X;

3. Пусть $H_j(X) \cong 0$ для любого $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда гомотопический слой отображения $a : AX \to X$ является $(n-1)$-связным. В частности, если X ациклично, то a — слабая эквивалентность.

4. Если X является j-простым пространством для некоторого $j \geqslant 1$ (т. е. действие $\pi_1(X)$ на $\pi_j(X)$ тривиально), то таково же и AX.

Функтор A задаётся на пространстве X, как предел

$$AX = \varprojlim A_n X,$$

башни расслоений

$$\ldots \to A_n X \to \ldots \to A_1 X \to A_0 X = X.$$

Башня строится индуктивно. Отображение $p_1 : A_1 X \to X$ получается, как накрытие над X, соответствующее максимальной совершенной нормальной подгруппе $\pi_1(X)$. Далее, $A_n X$ получается, как pullback в диаграмме

$$\begin{tikzcd} A_n X \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \arrow[d] \\ A_{n-1} X \arrow[r] & P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \end{tikzcd} \tag{1}$$

В этой диаграмме Λ — функтор путей; $\mathbb{Z}$ — функтор, ассоциирующий с симплициальным множеством Y симплициальную абелеву группу $\mathbb{Z}Y$, её n-симплексами служат все возможные линейные комбинации n-симплексов из Y_n; P_n — функтор, сопоставляющий симплициальному множеству его n-ый этаж системы Мура-Постникова. При этом $P_n X$ определяется, как факторпространство X по отношениям эквивалентности $\sim_n$, при которых $x_1 \sim_n x_2$ (здесь x_1 и x_2 некоторые q-мерные симплексы), если ограничения симплексов x_1 и x_2 на n-мерные остовы совпадают.

4.2 Симплициальные разбиения ацикличных комплексов

Имеется ряд интересных вопросов о симплициальных разбиениях классифицирующих пространств ацикличных групп.

Вопрос 1. *Как определять или строить ацикличные конечно определённые группы?*

Вопрос 2. *Каковы оценки на число симплексов минимальной триангуляции классифицирующего пространства ацикличной конечно определённой группы в терминах числа образующих и соотношений?*

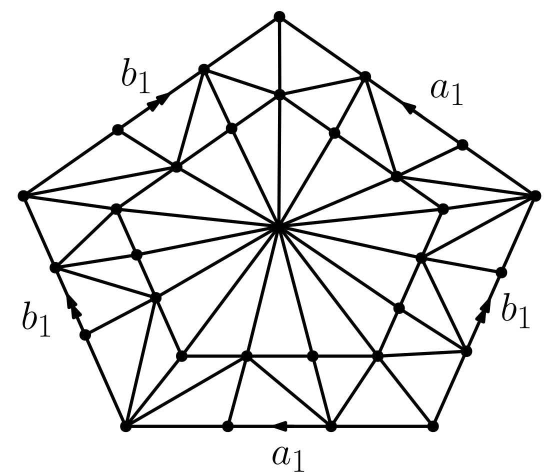
Полные ответы на данные вопросы неизвестны.

Приведём здесь явную конструкцию ацикличного симплициального комплекса на основе описанной выше конструкции группы Хигмана Hig_4.

Пример 1. Приведём здесь явную конструкцию симплициального комплекса, являющегося классифицирующим пространством группы Хигмана Hig_4.

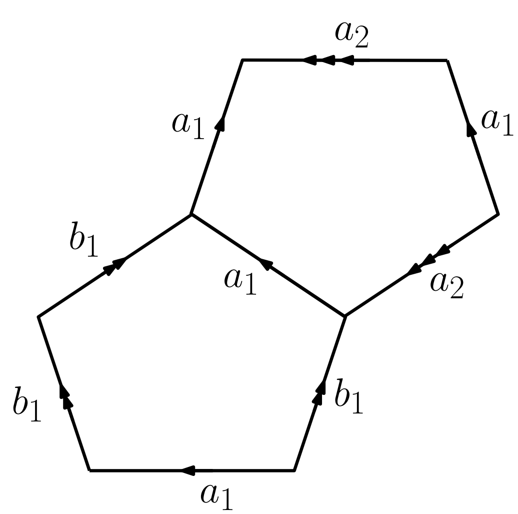
Будем строить комплекс, следуя описанной конструкции групп Хигмана (см. соответствующий параграф).

Сначала построим симплициальный комплекс для $K(BS(1,2),1)$.



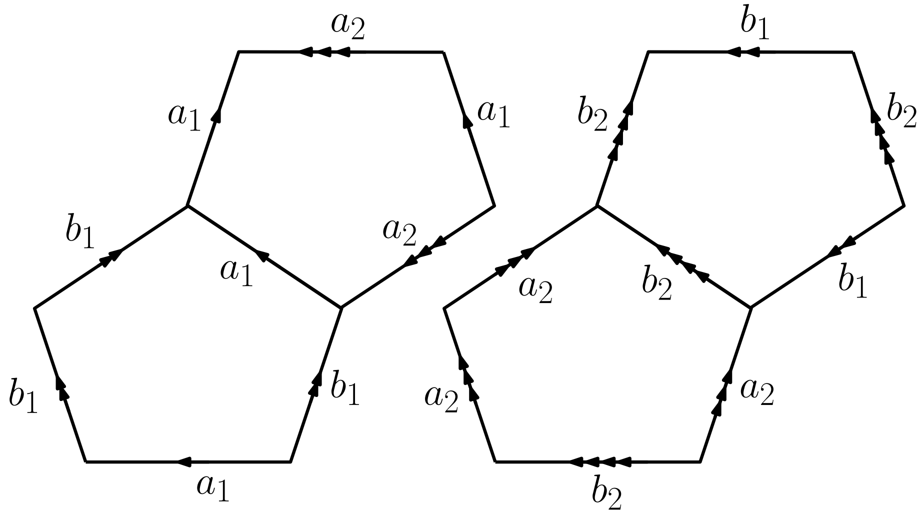
$$BS(1,2) = \langle a_1, b_1 \mid b_1^{a_1} = b_1^2 \rangle$$

Теперь возьмём 2 копии таких триангулированных пятиугольников и склеим из них $K(L,1)$.



$$L = \langle b_1, a_1, a_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2,\ a_1^{a_2} = a_1^2 \rangle$$

Наконец, возьмём 2 копии комплексов $K(L, 1)$ и склеим их.



$$\mathrm{Hig}_4 = \{a_1, b_1, a_2, b_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2,\ a_1^{a_2} = a_1^2,\ a_2^{b_2} = a_2^2,\ b_2^{b_1}\}$$

§5 Конструкция Кана-Тёрстона

Д. Кан и У. Тёрстон получили (1976) следующий результат:

Теорема 16 (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [4])**.** *Для любого линейно связного симплициального множества $X : \mathsf{sSet}_*$ с отмеченной точкой существует расслоение Серра*

$$t : TX \to X,$$

естественное по X и обладающее следующими свойствами.

(*i*) *Естественное преобразование функторов $t : T \to \mathrm{Id}$ индуцирует изоморфизм групп сингулярных гомологий и когомологий с коэффициентами в произвольной локальной системе $\mathcal{A}$ на X, т. е.*

$$H_*(TX; t^*\mathcal{A}) \cong H_*(X; \mathcal{A}),\ H^*(TX; t^*\mathcal{A}) \cong H^*(X; \mathcal{A}).$$

(*ii*) *Пространство TX асферично, т. е. $TX \simeq K(G_X, 1)$, и отображение $t_*\pi_1 : G_X \to \pi_1 X$ — эпиморфизм.*

(*iii*) *Ядро P_X отображения $t_*\pi_1$ является совершенной нормальной подгруппой в G_X.*

(*iv*) *Гомотопический тип пространства X полностью определяется парой групп (G_X, P_X). А именно, пространство X может быть получено с* *точностью до гомотопии применением к пространству $K(G_X,1)$ функтора $(-)^+$ плюс-конструкции Квиллена относительно совершенной нормальной подгруппы P_X. Эквивалентно, X может быть получено применением функтора послойного $\mathbb{Z}$-пополнения Боусфилда и Кана (см. [???]) к расслоению Серра $K(G_X,1)\to K(G_X/P_X,1)$.*

(*v*) *Универсальное накрытие $\widetilde{X}$ над X может быть получено с точностью до гомотопии применением функтора $\mathbb{Z}$-пополнения к $K(P_X,1)$.*

(*vi*) *Ацикличный слой расслоения Серра $TX\to X$ получается с точностью до гомотопии применением функтора Дрора к $K(P_X,1)$.*

Приведём доказательства последних четырёх пунктов, поскольку они опущены в оригинальной статье Кана-Тёрстона.

Доказательство. (*iii*). Для точной последовательности

$$1\to P_X\to G_X\to \pi_1 X\to 1$$

имеет место спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\pi_1 X; H_q(P_X;\mathbb{Z}))\to H_{p+q}(\pi_1 X;\mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}$ — тривиальный $\pi_1 X$-модуль.

Запишем точную пятичленную последовательность

$$H_2(\pi_1 X)\to E^2_{2,0}\xrightarrow{d_2} E^2_{0,1}\to H_1(\pi_1 X)\to E^2_{1,0}\to 0.$$

Имеем: $E^2_{2,0}=H_2(\pi_1 X)$. Далее,

$$E^2_{0,1}=H_0(\pi_1 X;H_1(P_X))=H_1(P_X)_{\pi_1 X}=H_1(P_X),$$

поскольку индуцированное действие $\pi_1 X$ на $\ker(G_X\to\pi_1 X)$ тривиально. Наконец,

$$E^2_{1,0}=H_1(\pi_1 X;H_0(P_X))=H_1(\pi_1 X).$$

Из первого свойства функтора Кана-Тёрстона следует, что $H_2(G_X)\cong H_2(X)$, $H_1(G)\cong H_1(X)$. Кроме того, $H_1(\pi_1 X)\cong H_1(X)$ (постоянные коэффициенты в $\mathbb{Z}$). Стало быть, мы получаем

$$H_2(X)\twoheadrightarrow H_2(\pi_1 X)\xrightarrow{0} H_1(P_X)\xrightarrow{0} H_1(G_X)\xrightarrow{\cong} H_1(X)\to 0.$$

Стрелка слева является эпиморфизмом в силу теоремы Хопфа. Значит, в силу сказанного выше, мы получаем, что $H_1(G_X)=0$.

(iv). Покажем, что плюс-конструкция Квиллена однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности, восстанавливает X по TX и совершенной нормальной подгруппе P_X в $G_X = \pi_1(TX)$. Применим функтор Квиллена к отображению $t : TX \to X$, и мы получим отображение

$$t^+ : (TX, P_X)^+ \to X.$$

Легко видеть, что отображение t^+ будет индуцировать изоморфизм на фундаментальных группах. Кроме того, по свойству плюс-конструкции мы будем также иметь и изоморфизм в любой системе локальных коэффициентов $\mathcal{A}$. Значит, по теореме Уайтхеда 15 для неодносвязных пространств мы получаем, что f — гомотопическая эквивалентность.

Теперь докажем, что X можно получить из TX применением функтора $\mathbb{Z}_\infty$. Применив послойный функтор $\mathbb{Z}$-пополнения к расслоению Серра $TX \to X$, мы получим отображение

$$f : \dot{\mathbb{Z}}_\infty TX \to X.$$

Покажем, что f индуцирует гомотопическую эквивалентность. Для этого мы воспользуемся теоремой Уайтхеда 15 для неодносвязного случая. Из рассмотрения точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \to \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \to K(\pi_1 X, 1),$$

берущегося из основного свойства функтора послойного $\mathbb{Z}$-пополнения, получается, что f индуцирует изоморфизм на фундаментальных группах

$$f_* : \pi_1(\dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1)) \cong \pi_1(X),$$

поскольку $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1)) = 1$, см. [24].

Рассмотрим морфизм расслоений Серра

$$\begin{tikzcd}
K(P_X,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(G_X,1) \arrow[r] \arrow[d] & K(\pi_1 X,1) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z}_\infty K(P_X,1) \arrow[r] & \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G,1) \arrow[r] & K(\pi_1 X,1)
\end{tikzcd}$$

Этот морфизм индуцирует морфизм спектральных последовательностей Лере. Для доказательства того, что f индуцирует изоморфизм в когомологиях с локальными коэффициентами, достаточно в силу теоремы Зимана показать, что для любой локальной системы $\mathcal{A}$ на X

$$H_*(K(P,1); i^* \circ t^*\mathcal{A}) \cong H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X,1); \mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^*\mathcal{A}),$$

где $i^* \circ t^*$ и $\mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^*$ являются композициями гомоморфизмов фундаментальных групп в данных расслоениях. Заметим, что эти композиции гомоморфизмов тривиальны, поэтому участвующие коэффициенты получаются тривиальными. Но

$$H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}) \cong H_*(K(P_X, 1); \mathbb{Z}),$$

поскольку пространство $K(P_X, 1)$ является $\mathbb{Z}$-хорошим в терминах работы Боусфилда и Кана. Последнее верно в силу совершенности группы P_X.

(v). Этот пункт следует из предыдущего и точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \to \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \simeq X \to K(\pi_1 X, 1).$$

(vi). Мы имеем отображение $f : UX \to K(P_X, 1)$, где UX является гомотопическим слоем расслоения Серра $TX \to X$. Применяя к f функтор Дрора A и учитывая, что UX ациклично (это следует из спектральной последовательности Лере для данного расслоения и того, что TX и X имеют одинаковые гомологии), мы получаем отображение

$$Af : UX \to AK(P_X, 1).$$

Очевидно, Af индуцирует изоморфизм в гомологиях между полученными ациклическими пространствами. Из свойства функтора Дрора следует, что $\pi_1(AK(P_X, 1)) = \pi_1(AP_1 K(P_X, 1)) = N$, где $P_1(P_X)$ — первый этаж системы Постникова пространства $K(P_X, 1)$, а N — максимальная совершенная подгруппа в группе P_X, т. е. $N = P_X$. Кроме того, $\pi_1(UX) \cong P_X$ из точной последовательности расслоения выше. Значит, f индуцирует изоморфизм и на фундаментальных группах. Дальнейшее следует из теоремы Уайтхеда.

□

5.1 Пример: случай сфер

Для конкретного случая сфер $\mathbb{S}^n$ построим явно пространство $T\mathbb{S}^n$ типа $K(\pi, 1)$ и отображение

$$t : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n,$$

такие, что на (ко)гомологиях индуцируются изоморфизмы. В этом параграфе мы следуем статье [2].

5.1.1 Двумерная сфера

Пусть вначале мы имели пространство $X = \mathbb{S}^1$. Мы хотим получить из него пространство типа $K(\pi, 1)$, которое бы имело те же гомологии, что и $\mathbb{S}^2$.

Возьмём в качестве группового конуса $C\mathbb{Z}$ группу Хигмана Hig_4. Это вложение индуцирует отображение

$$\mathbb{S}^1 \simeq K(\mathbb{Z},1) \to K(\mathrm{Hig}_4,1) \tag{$\star$}$$

Склеив две копии цилиндра отображения ($\star$) вдоль окружности, мы получим согласно утверждению 8 искомое пространство

$$K(\mathrm{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4, 1).$$

На построенном пространстве можно ввести структуру 2-мерного симплициального комплекса, взяв в качестве $K(\mathrm{Hig}_4,1)$, например, триангуляцию, построенную ранее. Для построения отображения

$$t : K(\mathrm{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4, 1) \to \mathbb{S}^2$$

отправим каждый цилиндр в треугольник так, чтобы 2-мерный симплициальный комплекс $K(\mathrm{Hig}_4,1)$ отправился в барицентр этого треугольника, а на исходной окружности возьмём t тождественным.

5.1.2 n-мерная сфера

После построения пространства $T\mathbb{S}^2$ можно продолжить процесс, используя следующую теорему

Теорема 17. *Пусть имеется вложение $F \to G$, где G — ацикличная. Тогда амальгама $G \star_F G$ вкладывается в ацикличную группу*

$$(A \times F) \star_F G$$

где A — любая нетривиальная ацикличная группа.

Эта замечательная теорема позволяет нам продолжить индуктивное построение пространств $T\mathbb{S}^n$.

Пусть $n = 3$. Возьмём в качестве гомоморфизма в лемме отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{Hig}_4$. Тогда мы будем иметь вложение в ацикличную группу

$$\mathrm{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4 \hookrightarrow (\mathrm{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4$$

и снова образуем при помощи таких вложений гомологическую надстройку:

$$T\mathbb{S}^3 = [(\mathrm{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4] \underset{\mathrm{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4}{\star} [(\mathrm{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hig}_4]$$

Теперь на каждом следующем шаге n будем брать в качестве вложения $F \to G$ из леммы вложение групп из предыдущего шага $n-1$.

Причём для каждого n будет получаться n-мерный конечный симплициальный комплекс по утверждению 4, в силу того, что геометрическая размерность группы Хигмана равна 2, а группы $\mathbb{Z}$ — равна 1.

§6 Метод Маундера построения пространства Кана-Тёрстона

Изложим здесь довольно простое доказательство части утверждений теоремы Кана-Тёрстона, найденное Маундером в [6].

Теорема 18 (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [4]). *Для каждого линейно связного пространства X с отмеченной точкой существует пространство TX и отображение*

$$TX \xrightarrow{t} X,$$

естественное по X и обладающее свойствами:

1. *Отображение t индуцирует изоморфизм в (сингулярных) гомологиях и когомологиях*

$$H_\bullet(TX; t^*\mathcal{A}) \cong H_\bullet(X; \mathcal{A})$$

для любой локальной системы коэффициентов $\mathcal{A}$ на X;

2. *$\pi_i(TX)$ тривиальна для $i \neq 1$, и отображение на фундаментальных группах $\pi_1 t$ — эпиморфизм;*

3. *Если исходным пространством был конечный симплициальный комплекс X, то TX может быть выбрано конечным.*

Доказательство (C. R. F. Maunder, 1981, [6]). Сначала докажем утверждение для конечных симплициальных комплексов индукцией по числу сиплексов. Пусть для любого комплекса L с не более, чем $N-1$ симплексами отображение $t : TL \to L$ удовлетворяет пунктам теоремы. Предположим также, что на подкомплексах $M \subset L, TM = t^{-1}M$, и $\pi_1(TM) \to \pi_1(TL)$ является инъекцией. Поскольку всякий 1-мерный комплекс является пространством типа $K(\pi, 1)$, то отображение t может быть выбрано тождественным, если $\dim L \leqslant 1$.

Пусть теперь K получается из L приклеиваением n-симплекса σ к $\partial\sigma \subset L$, где $\dim \sigma \geqslant 2$. Тогда $T(\partial\sigma)$ является подпространством TL, и если $f : \sigma \to \Delta^n$ — симплициальный гомеоморфизм на стандартный n-симплекс, то отображение $Tf : T(\partial\sigma) \to T(\partial\Delta^n)$ является гомеоморфизмом. Кроме того, $T(\partial\Delta^n)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ по предположению индукции.

Вложение группы π в ацикличное пространство $C\pi$ индуцирует отображение классифицирующих пространств $g : T(\partial\Delta^n) \to K(C\pi, 1)$.

Тогда можно приклеить цилиндр отображения $g \circ Tf$ вдоль $T(\partial\sigma)$ к TL, а отображение t можно продолжить до отображения $t : TK \to K$, отправляя $K(C\pi, 1)$ в барицентр симплекса σ.

Проверим теперь, что отображение $t : TK \to K$ — искомое:

1. Рассмотрим две точные последовательности Майера-Виеториса для пространства
$$TK = \mathrm{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$$
и для пространства
$$K = \sigma \sqcup_{\partial\sigma} L.$$
Тогда по предположению индукции и по 5-лемме мы будем иметь изоморфизм $H_n(TK; A) \cong H_n(K; A)$.

2. Склеиваемые пространства являются асферичными и склейка происходит вдоль асферичного пространства, также в фундаментальные группы пространств TL и $K(C\pi, 1)$ вкладывается группа π, поэтому по теореме Уайтхеда пространство $TK = \mathrm{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$ будет иметь тип $K(\pi_1(TK), 1)$, где $\pi_1(TK) = \pi_1(TL) \star_\pi C\pi$. Кроме того, отображение $t_\star : \pi_1(TK) \to \pi_1(K)$ является эпиморфизмом, поскольку $\pi_1(K) = \pi_1(L) \star_{\pi_1(\partial\sigma)} \pi_1(\sigma)$ и в силу предположения индукции.

Заметим, что конструкция пространства TK является естественной относительно симплициальных отображений, сохраняющих строгий порядок. Таким образом, для конечных симплициальных комплексов теорема доказана. Беря копредел по конечным подкомплексам, можно получить результат для бесконечных сиплициальных комплексов.

В общем случае, если X — произвольное линейно связное пространство, мы можем положить
$$TX = T(|SX|''),$$
где SX — сингулярный комплекс, рассматриваемый, как симплициальное множество, $|\cdot|$ — реализация симплициального множества, а двойной штрих — второе барицентрическое подразделение. Эта конструкция также является естественной.

Докажем последний пункт теоремы. Пусть изначально X было конечным симплициальным комплексом.

Будем строить индукцией по размерности и числу клеток пару конечных симплициальных пространств (UK, TK) и отображение пар $t : (UK, TK) \to (CK, K)$, где CK — конус над K, такое, что ограничение t на TK является искомым отображением. Предположим, что мы уже построили $t : (UL, TL) \to (CL, L)$, такое, что

(i) (UL, TL) является конечной симплициальной парой, $\dim UL = n + 1$, $\dim TL = n$;

(ii) Для любого связного r-мерного подкомплекса M комплекса L выполнено: $t^{-1}(CM)$ и $t^{-1}(M)$ являются $(r+1)$- и r-мерными подкомплексами UL и TL соответственно, ограничения $t : t^{-1}(CM) \to CM$, $t : t^{-1}(M) \to M$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы. Более того, пусть $\pi_1 t^{-1}(CM) \to \pi_1 UL$, $\pi_1 t^{-1}(M) \to \pi_1 TL$ и $\pi_1 t^{-1}(M) \to \pi_1 t^{-1}(CM)$ являются инъекциями.

База индукции — нульмерный остов. На нём полагаем t тождественным отображением, $UL = CL$. Теперь пусть K получен приклейкой симплекса σ, размерности $n \geqslant 1$. Тогда по предположению индукции $t^{-1}(C\partial\sigma)$ и $t^{-1}(\partial\sigma)$ являются подкомплексами UL и TL соответственно. Пусть TK получается из TL приклейкой копии $t^{-1}(C\partial\sigma)$ вдоль $t^{-1}(\partial\sigma)$. Продолжение $t : TK \to K$ будет отправлять $t^{-1}(C\partial\sigma)$ в $C\partial\sigma$, причём $C\partial\sigma$ отождествляется с σ так, что вершина симплекса $C\partial\sigma$ идёт в барицентр $\hat{\sigma}$ симплекса σ (а дальше отображение продолжается по линейности). Для построения UK рассмотрим комплекс

$$X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma).$$

Тогда X будет пространством типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = G \star_F G$, $G = \pi_1(t^{-1}(C\partial\sigma))$ и ясно, что $\dim X = \dim \sigma = n$. Рассмотрим следующее образование:

$$UK := (UL \cup TK) \sqcup_X \mathrm{Cyl},$$

где Cyl — это цилиндр отображения $X = K(G \star_F G, 1) \to K((A \times F) \star_F G, 1)$, в котором A — нетривиальная геометрически конечная ацикличная группа с $\dim K(A, 1) = 2$ (например, группа Хигмана Hig_4). Отображение t продолжается на UK отправлением $K((A \times F) \star_F G, 1)$ в барицентр конуса $C\sigma$. Если $\dim \sigma = 1$, нужно вместо $G \star_F G$ взять группу $\mathbb{Z}$, которая должна вкладываться в A вместо $(A \times F) \star_F G$.

Пространство $K((A \times F) \star_F G, 1)$ является ацикличным относительно системы коэффициентов $t^*\mathcal{A}$, поскольку последняя тривиальна. Действительно, она получается из системы $\mathcal{A}$ на X pullback'ом вдоль отображения $t : t^{-1}(C\partial\sigma) \to C\partial\sigma$, но конус $C\partial\sigma$ стягиваем, и значит, система $\mathcal{A}$ на нём тривиальна.

Далее, из доказательства утверждения [??] получается, что $\dim K((A \times F) \star_F G, 1) = n + 1$.

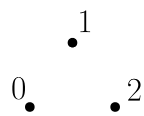
Заметим, что на каждом шаге цилиндры отображения можно представить в виде симплициального разбиения, поэтому мы получаем конечный симплициальный комплекс с требеумыми свойствами. Эта конструкция также естественна по пространству X.

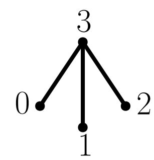
$\square$

Пример 2. Приведём здесь пошаговое построение конструкции Маундера пространства Кана-Тёрстона для 2-мерного диска $\mathbb{D}^2$.

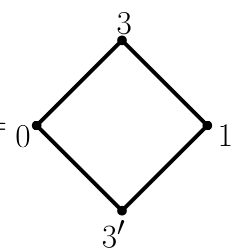
Шаг 0. Сначала мы имели нульмерный остов, состоящий из 3 вершин $L = \{[0],[1],[2]\}$. В этом случае конус является объединением трёх отрезков: $CL = \{[3,0],[3,1],[3,2]\}$. Конструкция Кана-Тёрстона TL совпадёт с L и пространство UL совпадёт с CL. Отображение пар $t : (UL, TL) \to (CL, L)$ будет тождественным.

Шаг 1. Приклеим 1-симплекс $\sigma = [0,1]$ к комплексу L и получим комплекс K. Тогда $C\partial\sigma$ будет «рогом» $[3,0] \cup [3,1]$, $t^{-1}(C\partial\sigma) = [3,0] \cup [3,1]$, и $t^{-1}(\partial\sigma) = [0] \cup [1]$. Значит, $TK = TL \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3',0] \cup [3',1] \cup [2]$ — это объединение двух отрезков и точки, причём при отображении $t : TK \to K$ вершина $[3]$ отображается в середину отрезка $[0,1]$.

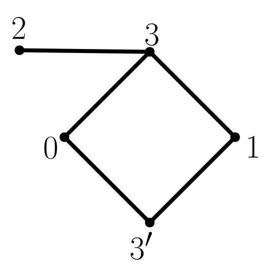
$L = TL =$ 

$CL = UL =$ 

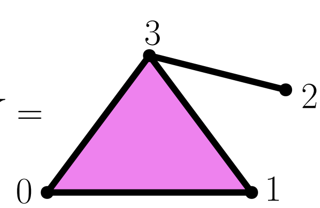
Пространство $X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3,0] \cup [3,1] \cup [3',0] \cup [3',1]$ — это окружность $K(\mathbb{Z}, 1)$.

$X =$ 

Далее, мы должны приклеить к объединение $UL \cup TK$ к пространству X. В результате получится:

$UL \cup TK =$ 

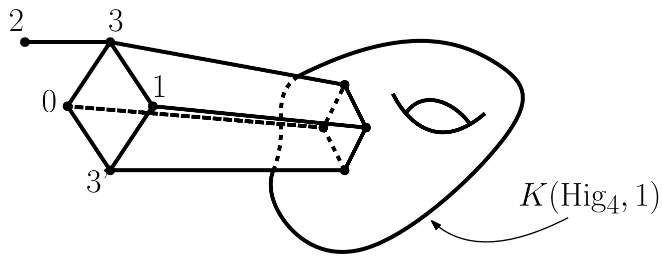
Комплекс CK будет выглядеть так:

$CK =$ 

Теперь нужно приклеить к пространству $UL \cup TK$ цилиндр отображения $X \simeq K(\mathbb{Z}, 1) \to K(\mathrm{Hig}_4, 1)$, и мы получим пространство UK.

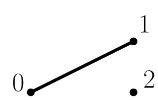
Отображение $t : TK \to K$ будет отображать комплекс $K(\mathrm{Hig}_4, 1)$ в барицентр $[4]$ треугольника $[0, 3, 1]$. При этом грани «призмы», примыкающие к сторонам $[3, 0]$ и $[3, 1]$ отобразятся на треугольник $[4, 0, 1]$. Две другие грани «призмы», примыкающие к отрезкам $[0, 3]$ и $[3, 1]$ отобразятся на треугольники $[4, 0, 3]$ и $[4, 3, 1]$ соответсвенно.

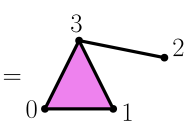
Обозначим для удобства дальнейшего изложения получившееся образование за $A := UK$.

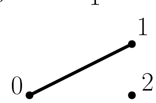
$UK =$ 

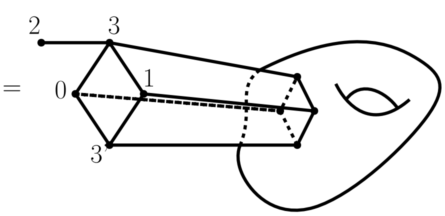
Шаг 2. Переобозначим полученную пару комплексов через (UL, TL) и будем приклеивать следующий 1-симплекс $[1, 2]$.

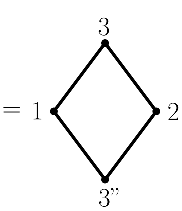
Пока мы имеем такие данные:

$L =$ 

$CL =$ 

$TL =$ 

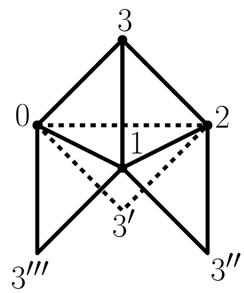
$UL =$ 

$X =$ 

Пространство TK будет представлять собою $[0, 1] \cup [3'', 1] \cup [3'', 2]$ и будет отображаться в K, отправляя точку $3''$ в барицентр отрезка $[1, 2]$. В качестве пространства UK будет выступать объединение отрезка $[0,1]$ и пространства с двумя склеенными копиями A, причём вторая копия A будет подклеиваться к «рогу» $[3,2] \cup [3,1]$.

Шаг 3. Приклеим третье ребро $[0,2]$. В результате, к UL подклеится ещё одна копия пространства типа A с прошлого шага, но уже к рогу $[3,2] \cup [3,0]$, также к UL подклеится отрезок $[1,2]$. Пространство Кана-Тёрстона будет $[0,1] \cup [1,2] \cup [3''',2] \cup [3''',0]$ — окружность.

Шаг 4. Подклейка двумерной клетки к границе треугольника. Комплекс $T\Delta^2$ будет представлять собой три образования типа A, склеенных вдоль трёх рогов с общей вершиной $[3]$ и остальными вершинами $[0],[1],[2]$. Приведём здесь схему расположения «рогов»:



Как устроено отображение $t : TK \to K$? Конус над границей треугольника $[0,1,2]$ с вершиной $[3]$ переходит в треугольник $[0,1,2]$ так, что вершина $[3]$ отображается в барицентр треугольника $[0,1,2]$, а остальные вершины конуса переходят тождественно в вершины этого треугольника. На другие точки этого конуса отображение t продолжается по линейности. На каждом из трёх подклееных цилиндров отображение t уже задано.

Полученное пространство $T\mathbb{D}^2$ имеет в качестве фундаментальной группы свободное произведение трёх групп Хигмана Hig_4. То есть для стягиваемых пространств конструкция Маундера даёт нестягиваемые ацикличные пространства. Это наглядно иллюстрирует тот факт, что функтор Кана-Тёрстона не является гомотопическим.

6.1 Важное следствие: эквивалентность категорий

В работе [4] Кана и Тёрстона утверждается, что в конструкции возможно и обратное построение. А именно, исходное пространство X может быть восстановлено с точностью до гомотопии из пары (G_X, P_X) при помощи плюс-конструкции Квиллена, где $G_X = \pi_1(TX)$, $P_X = \ker \pi_1 tX$ — нормальная совершенная подгруппа G_X. То есть $X = (G_X, P_X)^+$.

Напомним здесь вкратце плюс-конструкцию Квиллена. Она позволяет по данному комплексу X и данной совершенной нормальной подгруппе P фундаментальной группы $\pi_1(X)$ строить комплекс X^+ с теми же гомологиями и с убитой подгруппой P в фундаментальной группе.

А именно, существует пространство X^+ и отображение $i : X \to X^+$, для которых

i) имеет место точная последовательность

$$1 \to P \to \pi_1(X) \xrightarrow{i_\star} \pi_1(X^+) \to 1;$$

ii) если группа $\pi_1(X^+)$ действует на коммутативной группе A, то для локальной системы $\mathcal{A}$ над X^+ и индуцированной системы $\mathcal{A}^*$ над X гомоморфизм $i^* : H^*(X^+;\mathcal{A}) \to H^*(X;\mathcal{A}^*)$ является изоморфизмом.

Следствие 18.1 (Д. Кан, У. Тёрстон, [4])**.** *Имеет место эквивалентность категорий*

$$\mathrm{Ho}\,\mathscr{CW} \cong \mathscr{GP}[\Gamma^{-1}]$$

Здесь категория $\mathrm{Ho}\,\mathscr{CW}$ *состоит из* CW*-комплексов и классов гомотопий отображений между пространствами. Объектами категории* $\mathscr{GP}$ *служат пары дискретных групп* (G,P)*, где* P *— совершенная нормальная подгруппа* G*, отображения — гомоморфизмы* $f : (G,P) \to (G',P')$*, для которых* $f(P) \subset P'$*,* Γ *состоит из тех морфизмов* $f : (G,P) \to (G',P')$ *из* $\mathrm{Mor}(\mathscr{GP})$*, что* $f : G/P \cong G'/P'$ *и* $f_* : H_*(G;A) \cong H_*(G';A)$ *для любого* G'/P'*-модуля* A*.*

Схема доказательства [3]. Эта эквивалентность следует из того, что конструкция Кана-Тёрстона «обратна» плюс-конструкции Квиллена. Имеется следующая диаграмма категорий и функторов между ними:

$$\mathrm{Ho}\,\mathscr{CW} \underset{\mathrm{Ho}()^+}{\overset{\mathrm{Ho}\,J}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}\,\mathscr{XP} \xleftarrow{\mathrm{Ho}} \mathscr{XP} \underset{I}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathscr{AP} \xrightarrow{\mathrm{Ho}} \mathrm{Ho}\,\mathscr{AP} \underset{B}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathscr{GP}$$

Здесь

- $\mathscr{XP}$ — категория пар (X,P), $P \lhd \pi_1(X)$, P совершенна
- $\mathscr{AP}$ категория пар (X,P), $P \lhd \pi_1(X)$, X асферично, P совершенна
- $\mathscr{GP}$ — категория пар (G,P), $P \lhd G$, P совершенна

Переходом к подходящим локализациям можно добиться того, чтобы все стрелки в диаграмме стали обратимыми, и тогда мы получим цепочку эквивалентностей категорий, из которой будет следовать требуемое. $\square$

§7 Группы, свободно действующие на ациклич- ных пространствах

Рассмотренные выше функторы дают надежду на обобщение понятия универсального расслоения. А именно, для данной группы G зададимся поиском ацикличного, но не стягиваемого пространства $\mathcal{E}G$, на котором дискретная группа G действует свободно.

Естественность функтора Дрора давала надежду на то, что он переводит накрытия симплициальных множеств в накрытия. Другая гипотеза состояла в том, что композиция $A\widetilde{X} \to \widetilde{X} \to X$ является накрытием.

Однако обе эти гипотезы неверны, поскольку имеет место следующее

Утверждение 11. *Если $\mathcal{E}G \to \mathcal{B}G$ — G-накрытие с гомологически тривиальным $\mathcal{E}G$, то $\mathcal{B}G$ имеет такие же гомологии с коэффициентами в тривиальном G-модуле $\mathbb{Z}$, как и BG.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Картана-Лере

$$H_p(G; H_q(\mathcal{E}G)) \Rightarrow H_*(\mathcal{B}G).$$

Она вырождается во втором члене, поэтому

$$H_n(\mathcal{B}G) \cong H_n(G; H_0(\mathcal{E}G)) = H_n(G; \mathbb{Z}) = H_n(G).$$

Последнее равенство верно в силу тривиальности G-модуля $\mathbb{Z}$. □

После чего возникла третья гипотеза, связанная уже с применением функтора Кана-Тёрстона: если $\widetilde{X} \to X$ является универсальным G-накрытием, то $T\widetilde{X} \to TX$ является G-накрытием.

§8 Классифицирующие пространства моноидов

Как мы знаем, по любой дискретной группе G можно построить классифицирующее пространство BG, рассмотрев бар-конструкцию.

Но можно построить BG как реализацию нерва некоторой категории. А именно, пусть $\mathscr{G}$ — категория, состоящая из одного объекта и морфизмов, соответствующих элементам группы G. Нервом категории $\mathscr{G}$ будет являться симплициальное множество, n-симплекс которого являет собой последовательность

$$\bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \to \ldots \to \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet$$

Оператор грани d_i будет сопоставлять данной последовательности следующую:

$$\bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \to \ldots \to \bullet \xrightarrow{g_{i+1}g_i} \bullet \to \ldots \to \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet$$

Отображение вырождения s_i будет вставлять на место i тождественный морфизм, соответствующий единице группы.

Предложение 2. *Бар-конструкция для G и геометрическая реализация нерва $|\mathcal{N}(\mathscr{G})|$ построенной выше категории $\mathscr{G}$ гомеоморфны.*

Симплициальную конструкцию классифицирующего пространства безболезненно можно перенести на случай любого моноида M. Но в этом случае не следует ожидать, что BM будет слабо гомотопически эквивалентно пространству $K(G,1)$, где G — некоторая дискретная группа. Это следует из такого замечательного результата:

Теорема 19 (D. McDuff, 1978, [10])**.** *Любое линейно связное пространство слабо гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству BM некоторого дискретного моноида M.*

Можно задаться вопросом о том, в каких случаях всё же $BM \simeq K(G,1)$. Естественно ожидать, чтобы группа G была в некотором смысле близка к исходному моноиду M. Для любого моноида можно построить такую универсальную группу G, и она называется *группофикацией* моноида M. Рассмотрим свободную группу Γ, натянутую на элементы моноида M и формально обратные к ним и профакторизуем Γ по наименьшей нормальной подгруппе N, содержащей соотношения вида $xy = z$, если такое равенство имело место в исходном моноиде M. Тогда Γ/N называется группофикацией моноида M.

Определение 10. Группофикацией моноида M называется такая группа G с гомомоморфизмом φ, что для любой группы H и любого гомоморфизма $\psi : G \to H$ существует единственный гомоморфизм $f : M \to H$, замыкающий диаграмму до коммутативной:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Пример 3 (А. Мальцев, 1937, [11], [12])**.** Рассмотрим свободный моноид

$$F = \langle a, b, c, d, x, y, u, v \rangle$$

и его фактор $\mathcal{M}$ по отождествлениям (ax, by), (cx, dy) и (au, bv). Мальцев показал, что $cu \neq dv$ и что моноид $\mathcal{M}$ несокращаемый. Откуда получается, что $\mathcal{M}$

нельзя вложить ни в какую группу, иначе было бы: $[d^{-1}c] = [yx^{-1}] = [b^{-1}a] = [vu^{-1}]$. Значит, $[cu] = [dv]$

Этот пример показывает, что не всегда моноид вкладывается в свою группофикацию. Однако в некоторых случаях вложение имеет место:

Утверждение 12. *Отображение в группофикацию коммутативного сокращаемого моноида является вложением.*

Здесь под *сокращаемым моноидом* понимается такой моноид M, в котором из $xy = xz$ следует, что $y = z$ и из $yx = zx$ следует, что $y = z$.

Список литературы

[1] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015

[2] G. Baumslag, E. Dyer & A. Heller, *The topology of discrete groups*, J. of Pure and Appl. Alg. 16 (1980), 1- 47. | MR 549702 | Zbl 0419.20026

[3] A. Deleanu, *On a theorem of Baumslag, Dyer and Heller linking group theory and topology*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, no 3 (1982), p. 231-242

[4] D. Kan and W. Thurston, *Every connected space has the homology of a* $K(\pi, 1)$, Topology Vol. 15. pp. 253–258, 1976.

[5] G. Higman, *A Finitely Generated Infinite Simple Group*, Volume s1-26, Issue 1 p. 61-64 Journal of the London Mathematical Society. Notes and Papers.

[6] C. R. F. Maunder, *A Short Proof of a Theorem of Kan and Thurston*, Bulletin of the London Mathematical Society, Volume 13, Issue 4, July 1981, Pages 325–327, https://doi.org/10.1112/blms/13.4.325

[7] Berrick, Hillman, *Perfect and acyclic subgroups of finitely presentable groups*, J. London Math. Soc. (2) 68 (2003) 683–698

[8] Dyer, E., Vasquez, A. (1973), *Some small aspherical spaces*, Journal of the Australian Mathematical Society, 16(3), 332-352. doi:10.1017/S1446788700015147

[9] N. Monod, *Variations on a theme by Higman*, https://arxiv.org/abs/1604.05454

[10] Dusa McDuff, *On the classifying spaces of discrete monoids*, Topology, Volume 18, Issue 4, 1979, Pages 313-320

[11] A. Malcev, 1937, *On the Immersion of an Algebraic Ring into a Field*, Mathematische Annalen, vol. 113, no. 1, pp. 686 — 691.

[12] O. Lenz, *The classifying space of a monoid*, Thesis submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Master of Science in Mathematics, 2011, Advisor: Dr. Lenny D.J. Taelman

[13] Kervaire M., *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Transactions of the American Mathematical Society. 144: 67–72, 1969

[14] Milnor J., *On simply connected 4-manifolds*, Symposium intemacional de topologia algebraica, Universidad Nacional Autnoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958, pp. 122-128. MR 21 #2240

[15] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, О пробле- ме алгоритмического распознавания стандартной трех- мерной сферы, УМН, 1974, том 29, выпуск 5(179), 71–168

[16] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и определяющих соотношений*, М.: Наука, 1974.

[17] R. Milgram, *The bar construction and abelian H-spaces*, Illinois J. Math. 11 (1967), 242-250.

[18] John Milnor, *Construction of Universal Bundles*, I, Ann. of Math. 63:2 (1956) 272-284

[19] Eilenberg, Samuel; Ganea, Tudor (1957). *On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups.* Annals of Mathematics. 2nd Ser. 65 (3): 517–518

[20] A. J. Berrick, *A topologist's view of perfect and acyclic groups*, Invitations to Geometry and Topology, ed. M. R. Bridson, S. M. Salamon, Oxford Graduate Texts in Math. 5, Oxford Univ. Press (Oxford, 2002), ch. 1: 1–28.

[21] Н. Э. Добринская, *Гипотеза Арнольда–Тома–Фама и классифицирующее пространство положительного моноида Артина*, УМН, 57:6(348) (2002), 181–182; Russian Math. Surveys, 57:6 (2002), 1215–1217

[22] Новиков П. С., Адян С. И., *О бесконечных периодических группах.* I // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1968. — Т. 32, выпуск 1. — С. 212—244.

[23] Daniel G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967

[24] Aldridge K. BousfieldDaniel M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Mathematics book series (LNM, volume 304), 1972

[25] G. Baumslag, E. Dyer, C.F. Miller, *On the integral homology of finitely presented groups*, Topology, Volume 22, Issue 1, 1983, Pages 27-46

[26] Stilwell, J., Serre, J.P., *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2002