

Вокруг теоремы Хелли

Определение. Множество M (на плоскости) называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые его две точки, принадлежит M .

Теорема (Хелли). Рассмотрим на плоскости выпуклые множества $M_1, M_2, \dots, M_n, n \geq 3$. Оказалось, что любые три из них пересекаются. Тогда все множества пересекаются.

Следствие. Пусть A — некоторое выпуклое множество, и пусть X_1, \dots, X_n — тоже выпуклые и такие, что каждое из любых трёх из них пересекается с некоторой трансляцией A' (т. е. с некоторым сдвигом множества A на вектор). Тогда найдётся сдвиг A , такой, что все X_i пересекутся с A .

1. Докажите теорему Хелли. Начните с $n = 4$.
2. Выведите следствие из теоремы.
3. На плоскости лежат $n \geq 2$ прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Оказалось, что любые два из них пересекаются. Докажите, что тогда все прямоугольники тоже пересекаются.
4. На плоскости разбросали несколько точек так, что любые три из них можно накрыть кругом радиуса r . Докажите, что тогда все точки можно накрыть кругом радиуса r .
5. Василий по неосторожности просыпа соль на стол. Оказалось, что расстояние между любыми двумя частичками оной не больше 1. Докажите, что Василий всегда сможет прикрыть свою оплошность круглой салфеткой радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
6. Докажите, что любой многоугольник периметра P можно накрыть кругом радиуса $\frac{P}{4}$.