



Изометрии плоскости. Теоремы Шаля и Наполеона

Некоторые определения и конструкции вы можете посмотреть в выложенных записях с занятия.

Задача 1 (Лемма о трёх гвоздях). Пусть некоторая изометрия f имеет 3 неподвижные точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что $f = \text{id}$, т. е. f — тождественное преобразование плоскости.

Задача 2. а) Образами скольких точек однозначно задаётся изометрия плоскости?

б) Тот же вопрос для изометрий трёхмерного пространства.

Задача 3. Что получится при композиции:

а) симметрии и поворота?

б) поворота и параллельного переноса?

Задача 4. Докажите, что все изометрии плоскости образуют группу относительно операции композиции.

Задача 5. а) На плоскости нарисован многоугольник (необязательно выпуклый) с нечётным числом сторон. Отразим произвольную точку P на плоскости последовательно относительно всех середин последовательных сторон многоугольника, в результате получим точку P' . Докажите, что серединой отрезка PP' является вершина многоугольника.

б) На плоскости нарисовали выпуклый 2021-угольник. После чего отметили середины всех его сторон, а сам многоугольник стёрли. При помощи циркуля и линейки восстановите исходный многоугольник по отмеченным точкам.

Задача 6. Будет ли верна теорема Наполеона, если строить правильные треугольники не наружу, а вовнутрь? А если часть из них построить вовнутрь, а часть наружу? Найдите во всех случаях углы треугольников с вершинами в центрах правильных треугольников.

Задача 7. а) (Теорема Ван Обеля о 4-угольнике). На сторонах четырёхугольника (необязательно выпуклого) построены в внешнюю сторону квадраты. Докажите, что у четырёхугольника с вершинами в центрах этих квадратов диагонали перпендикулярны и равны.

б) (Теорема Тебо). Пусть исходный четырёхугольник из предыдущего пункта — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в центрах этих квадратов — это квадрат.

Задача 8 (Московская математическая олимпиада, 2018). На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1 , BCD_1 , CDE_1 , DEF_1 , EFA_1 и FAB_1 . Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.