

Топологические инварианты конечно определённых групп

§1 Введение

Д. Кан и У. Тёрстон доказали ([4], 1976), что (ко)гомологии классифицирующего пространства $K(G, 1) =: TX$ дискретной группы G могут быть такими, как у произвольного линейно связного пространства X . Причём отображение $t : TX \rightarrow X$ естественно по X , и T является функтором.

В той же работе было отмечено, что функтор T и функтор плюс-конструкции Квиллена $(\cdot)^+$ в некотором смысле взаимно обратны. Они устанавливают эквивалентность категории гомотопий CW-комплексов и локализации категории GP . Объектами последней являются пары (G, P) , где P — совершенная нормальная подгруппа группы G , а морфизмами являются такие гомоморфизмы $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$, что $f(P) < P'$. Локализация происходит по тем морфизмам категории GP , которые индуцируют изоморфизмы на фактор группах $G/P \rightarrow G'/P'$ и на гомологиях $H(G; A) \rightarrow H(G'; A)$. Таким образом, теория гомотопий CW-комплексов восстанавливается из теории дискретных групп.

Классифицирующие пространства групп имеют большое значение в топологии и алгебре. Известное множество их конструкций: например, конструкция Милнора [18], конструкция Милграма [17], категорный подход через симплициальные множества [12] и др. Интересно было бы найти обозримую симплициальную функториальную конструкцию классифицирующих пространств групп. Это бы позволило, например, подойти к определению торических (ко)гомологий конечно определённых групп: их можно было бы определить, как (ко)гомологии момент-угол комплекса, построенного по симплициальному классифицирующему пространству данной группы.

Важно заметить также, что имеются модификации конструкция Кана — Тёрстона, которые для конечных CW-комплексов дают дискретные группы, классифицирующие пространства которых являются конечными клеточными комплексами [2], [6]. Проблема геометрической размерности дискретных групп имеет давнюю историю. Известная теорема Эйленберга — Ганея [19] утверждает,

что для любой конечно определённой группы G кохомологической размерности не больше n , где $n \geq 3$, существует асферичный n -мерный CW-комплекс $X = K(G, 1)$. Для $n = 2$ — это гипотеза, открытая и по настоящее время.

С конструкцией Кана-Тёрстона тесно связаны ациклические дискретные группы. Они могут возникать, как фундаментальные группы n -узлов, гомотопических сфер, как группы гомеоморфизмов многообразий, возникают в теории слоений [20] и др. Большой интерес представляют конечно определённые ациклические группы. Одним из простейших нетривиальных примеров [5] являются группы Хигмана Hig_n , $n = 4, 5, \dots$. Эти группы замечательны ещё и тем, что они имеют конечную геометрическую размерность: их классифицирующим пространством может быть выбран конечный двумерный клеточный комплекс [2]. Ациклические пространства и группы дают надежду на обобщение классических конструкций топологии. Например, можно попробовать обобщить конструкции, в которых участвуют стягиваемые пространства, заменив последние некоторым образом на ациклические пространства.

Можно задаться вопросом о том, когда данная ациклическая группа имеет конечную геометрическую размерность. Дополнительную сложность задаче придаёт то, что кохомологическая размерность равна 0. Однако, как показали Уолл и Милнор, препятствием пространству X быть гомотопически эквивалентным конечному комплексу служит так называемое кручение Уайтхеда $\text{Wh}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ группового кольца $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$.

Близким к данному кругу вопросов являются вопросы о классифицирующих пространствах моноидов. В этом контексте можно упомянуть гипотезу Арнольда-Тома-Фама [21] и проблему Бёрнсайда [22].

§2 Напоминание о гомологиях дискретных групп

По данной дискретной группе G можно, как известно, построить стягиваемый симплициальный комплекс EG со свободным действием G . Факторпространство $BG := EG/G$ называется *классифицирующим пространством* группы G .

Классифицирующее пространство дискретной группы G имеет тип $K(G, 1)$.

Определение 1. Гомологиями дискретной группы G с тривиальными коэффициентами в \mathbb{Z} называются гомологии (симплициальные, клеточные и др.) классифицирующего пространства группы G , то есть $H_i(G; \mathbb{Z}) := H_i(BG; \mathbb{Z})$. В случае локальных коэффициентов в G -модуле M это гомологии с локальными коэффициентами $H_i(BG; M)$.

Существуют различные конструкции классифицирующих пространств для топологических и дискретных групп. Сюда относится конструкция с джойнами

Милнора, бар-конструкция, конструкция Милграма, категорная конструкция через геометрическую реализацию некоторого симплициального множества и др.

Также гомологии группы G могут быть определены чисто алгебраическим путём.

Определение 2. Гомологиями дискретной группы с коэффициентами в G -модуле M называются группы $H_n(G, M) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

Утверждение 1. Два определения гомологий групп равносильны.

Имеется интересный класс групп, гомологии которых в \mathbb{Z} устроены, как гомологии точки. Такие группы называются *ациклическими*.

Заметим, что ациклических групп в любой локальной системе коэффициентов не существует, поскольку имеет место

Теорема 1 (Столлингс ???). *Если кохомологическая размерность конечно порождённой группы G не превосходит 1, то G является свободной (т. е. $K(G, 1)$ гомотопически эквивалентно букету окружностей).*

В силу этого замечания, если не оговорено противное, под ациклическостью будет пониматься именно ациклическость в гомологиях с тривиальными коэффициентами в \mathbb{Z} .

§3 Примеры ациклических дискретных групп

В этом параграфе приводятся два примера конечно представленных ациклических групп, классифицирующие пространства которых могут быть реализованы двумерными симплициальными комплексами.

3.1 Группа \mathfrak{A}

Рассмотрим простой пример нетривиальной ациклической группы — группу \mathfrak{A} из статьи [2].

Для её построения сначала введём две группы:

$$F = \langle a, b \rangle,$$

$$C = \langle u = a, v = b^{-1}a^{-1}bab, w = b^{-2}ab^{-1}a^{-2}bab^2, x = b^{-3}ab^{-1}a^{-2}bab^3 \rangle.$$

Группа F — свободная на двух образующих, а группа C — свободная на четырёх образующих.

При помощи F и C мы можем получить группу

$$\mathfrak{A} = \{F_1 \star F_2; C_1 \cong_{\varphi} C_2\},$$

где F_1, F_2 — две копии группы F , а C_1, C_2 — копии группы C , причём склейка происходит вдоль изоморфизма $\varphi : C_1 \rightarrow C_2$, такого, что

$$u_1 \mapsto x_2, v_1 \mapsto w_2, w_1 \mapsto v_2, x_1 \mapsto u_2.$$

Утверждение 2. *Группа \mathfrak{A} нетривиальна.*

Доказательство. Как известно, свободные группы нетривиальны. Но результат амальгамированного произведения двух нетривиальных групп по их общей подгруппе будет нетривиальной группой. Последнее следует, например, из теории Басса-Серра (см., например, [27]). \square

Утверждение 3 ([2]). *Группа \mathfrak{A} является ациклической.*

Доказательство. По построению группа \mathfrak{A} является совершенной.

Кроме того, пространство $K(\mathfrak{A}, 1)$ можно реализовать в виде конечного клеточного двумерного комплекса, поскольку он является пушаутом двух копий пространства $K(F, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ вдоль пространства $K(C, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, то есть

$$K(\mathfrak{A}, 1) = K(F, 1) \sqcup_{K(C, 1)} K(F, 1).$$

Имеет место точная последовательность Майера-Виеториса с постоянными коэффициентами в \mathbb{Z}

$$\dots \rightarrow H_{n+1}\mathfrak{A} \rightarrow H_n C \rightarrow H_n F_1 \oplus H_n F_2 \rightarrow H_n \mathfrak{A} \rightarrow \dots$$

В силу того, что $K(F, 1)$ и $K(C, 1)$ — букеты окружностей, сразу получается, что $H_n \mathfrak{A} = 0$ при $n > 2$. Рассмотрим теперь участок точной последовательности для случая $n = 2$:

$$0 \rightarrow H_2 \mathfrak{A} \rightarrow H_1 C \rightarrow H_1 F_1 \oplus H_1 F_2 \rightarrow 0.$$

Но обе свободные абелевы группы $H_1 C$ и $H_1 F_1 \oplus H_1 F_2$ имеют ранг 4. Следовательно, они изоморфны, и $H_2 \mathfrak{A} = 0$ в силу точности. \square

Для дальнейшего нам понадобится важная

Теорема 2 (Дж. Уайтхед, 1939). Пусть группа G является *pushout*-ом в категории **Grp** в следующей диаграмме

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & G \end{array}$$

Тогда следующая диаграмма является *pushout*-ом в категории **Top**

$$\begin{array}{ccc} K(C, 1) & \longrightarrow & K(A, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(B, 1) & \longrightarrow & K(G, 1) \end{array}$$

Следствие 2.1 ([2]). Если $G = A \star_C B$ является амальгамой групп A и B , для которых существуют конечные симплициальные реализации пространств $K(A, 1)$, $K(B, 1)$ и $K(C, 1)$, тогда $K(G, 1)$ тоже может быть реализовано в виде конечного симплициального комплекса. Причём имеет место оценка на размерности

$$\dim G \leq \max(\dim A, \dim B, 1 + \dim C).$$

Доказательство. Вложениям $C \hookrightarrow A$ и $C \hookrightarrow B$ соответствуют отображения классифицирующих пространств $K(C, 1) \rightarrow K(A, 1)$ и $K(C, 1) \rightarrow K(B, 1)$. Возьмём цилиндры этих отображений и склеим их вдоль комплекса $K(C, 1)$. \square

Отсюда получается

Утверждение 4. Группа \mathfrak{A} является ациклической относительно тривиальной системы коэффициентов в \mathbb{Z} и может быть реализована в виде конечного двумерного клеточного комплекса.

3.2 Группы Хигмана Hig_n

Эти группы были придуманы Г. Хигманом в работе [5], 1951, как примеры конечно определённых групп, не имеющих подгрупп конечного индекса.

Рассмотрим сначала группу

$$\text{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}dc = d^2, d^{-1}ad = a^2 \rangle.$$

Опишем, как можно получить эту группу при помощи операций HNN-расширения и амальгамированного свободного произведения.

Рассмотрим группу Баумслага-Солитера:

$$\text{BS}(1, 2) = K = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \rangle.$$

Можно заметить, что группа K является HNN-расширением группы $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$ при помощи изоморфизма подгрупп $\langle b \rangle \cong \langle b^2 \rangle$. В первую очередь, группа K ненулевая по лемме Бриттона, поскольку в неё вкладывается группа $\langle a \rangle$.

Дайер и Васкез показали, что верна

Теорема 3 (Е. Dyer, А. Т. Vasquez, 1972, [8]). Пусть $P = \langle S \mid r \rangle$ — представление группы G с одним соотношением $r \in F(S)$, и r не является степенью (большей 1) никакого слова. Тогда клеточный 2-комплекс, получаемый обычной приклейкой 2-клетки к букету окружностей, биективно соответствующих образующим из S вдоль слова r , асферичен.

Следствие 3.1. В качестве классифицирующего пространства группы K можно взять 2-комплекс, получаемый из букета двух окружностей некоторой приклейкой 2-клетки.

Из теорем Хопфа очевидно следует, что $H_2(K) = 0$ и $H_1(K) = \mathbb{Z}$. Следовательно, мы знаем гомологии группы K :

Предложение 1. Гомологии группы K устроены следующим образом:

$$\begin{cases} H_n(K) = 0, & n \geq 2, \\ H_1(K) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Построим группу

$$L = K_1 \star_{\mathbb{Z}} K_2 = \langle a, b, c \mid a^b = a^2, b^c = b^2 \rangle,$$

где $K_i \cong K$, и склейка происходит вдоль вложений $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \hookrightarrow L$, $\mathbb{Z} \cong \langle b \rangle \hookrightarrow L$. Очевидно, что $H_1(L) = \mathbb{Z}$, и из точной последовательности Майера-Виеториеса и предложения выше следует, что $H_n(L) = 0$ при $n \geq 2$.

Снова беря амальгаму $L_1 \star_{\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}} L_2$, где $L_i \cong L$, получающуюся склейкой $\langle a_1, c_1 \rangle \cong \langle a_2, c_2 \rangle$, мы получаем группу Хигмана Hig_4 . Аналогичные рассуждения с точной последовательностью Майера-Виеториеса показывают, что Hig_4 ациклична.

Из приведённой конструкции группы Hig_n следует, что в ней отсутствует кручение, поскольку оно отсутствовало на каждом шаге в силу свойств HNN-расширений и амальгамы (теория Басса-Серра).

Теперь рассмотрим обобщённую группу Хигмана

$$\text{Hig}_n = \langle x_i, i \in \mathbb{Z}/n \mid [x_{i-1}, x_i] = x_i \rangle,$$

где $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Утверждение 5 ([5]). Для $n \leq 3$ группа Hig_n тривиальна.

Доказательство. Случай $n = 2$ очевиден. Для $n = 3$ достаточно выразить одну из образующих x_3 через x_1, x_2 , тогда $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\}$ — здесь имеется в виду равенство подгрупп, порождённых соответствующими элементами. Но, с одной стороны, очевидно, что $\{x_1, x_2, x_3\}' = \{x_1, x_2, x_3\}$. А с другой, $\{x_1, x_2\}' = 0$. \square

Утверждение 6. При $n \geq 4$ группа Hig_n нетривиальна.

Данное утверждение будет следовать из конструкции Hig_n ниже. Дело в том, что конструкцию последовательных амальгам для Hig_4 можно обобщить на случай Hig_n ($n \geq 4$).

Будем обозначать через K_i группы, изоморфные группе

$$K = \langle x, h \mid [h, x] = x \rangle,$$

буквы алфавита которых такие же, как у K но с индексами i . Также обозначим

$$L = \langle K_0, K_1 \mid x_0 = h_1 \rangle.$$

Тогда группа Хигмана Hig_n следующего порядка получается из группы

$$G_{n-1} = \langle K_2, \dots, K_{n-1} \mid x_2 = h_3, \dots, x_{n-2} = h_{n-1} \rangle$$

амальгамой с группой L :

$$\text{Hig}_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}} L,$$

где склейка происходит вдоль свободных подгрупп $\langle h_0, x_1 \rangle$ и $\langle x_{n-1}, h_2 \rangle$ ($h_0 \sim x_{n-1}$, $x_1 \sim h_2$).

Заметим, что

$$G_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z}} K$$

с отождествлением $x_{n-1} = h_n$.

Заметим, что из следствия к теореме [8], описанной конструкции построения группы Hig_n при помощи амальгам и групп K и в силу утверждения 4 классифицирующее пространство группы Хигмана может быть выбрано конечным комплексом. А именно, следует

Теорема 4. Пространство $K(\text{Hig}_n, 1)$ можно взять в виде 2-комплекса с одной нуль-клеткой, n один-клетками и n два-клетками.

Таким образом, адикличность групп Hig_n в размерностях, больших двойки, получается из предыдущей теоремы. При помощи последовательности Майера-Вьеториеса можно показать нулёвость гомологий в оставшихся размерностях. Для этого докажем лемму:

Лемма 1. *Группы G_k имеют следующие гомологии:*

$$H_n(G_k) = 0, \quad k \geq 2,$$

$$H_1(G_k) = \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Будем вести индукцию по k для G_k . База: при $k = 3$ группа G_3 изоморфна группе L , которую мы рассмотрели выше.

Допустим, что теорема выполняется для группы G_{k-1} . Рассмотрим $G_k = G_{k-1} \star_{\mathbb{Z}} K$ и напомним точную последовательность Майера-Виеториеса. Из неё или из соображения геометрической размерности очевидно будет следовать, что $H_n(G_k) = 0$ при $n \geq 3$. Рассмотрим случай $n = 2$:

$$0 \rightarrow H_2(G_k) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_1(G_{k-1}) \oplus H_1(K) \rightarrow H_1(G_k) \rightarrow 0.$$

Абеленизация группы G_k равна \mathbb{Z} в силу того, что в каждом слагаемом L_i элемент x_i является коммутатором, а элемент h_i склеивается с элементом x_{i-1} для всех $i = 3, \dots, n$. Только элемент h_n не склеится ни с каким коммутатором, и, следовательно, будет образующим абеленизации. Но тогда в силу точности $H_2(G_k) = 0$. \square

Следствие 4.1. *Группы Хигмана Hig_n ациклически.*

Доказательство. Очевидно, что Hig_n совершенна. По теореме 4 группа Hig_n имеет геометрическую размерность 2. Осталось показать, что $H_2(\text{Hig}_n) = 0$. Имеем

$$0 \rightarrow H_2(\text{Hig}_n) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(G_{n-1}) \oplus H_1(L) \rightarrow H_1(\text{Hig}_n).$$

По предложению выше $H_1(G_{n-1}) = \mathbb{Z}$ и $H_1(L) = \mathbb{Z}$. Следовательно, третья стрелка — изоморфизм. Значит, $H_2(\text{Hig}_n) = 0$ из точности. Дальнейшее аналогично следует из предложения выше. \square

Классифицирующее пространство любой группы Хигмана Hig_n является двумерным комплексом, поэтому группа Hig_n не имеет кручения. Но это также может быть выведено из свойств операций амальгамированного произведения и HNN-расширения. А именно, справедливы следующие теоремы:

Теорема 5 ([16], [27]). *Пусть $K := G \star_{\varphi} H$ является амальгамированным произведением, $\varphi : A \rightarrow B$ — склеивающий изоморфизм между подгруппами $A < G$ и $B < H$. Тогда каждый элемент конечного порядка в K сопряжён элементу из G или H .*

Теорема 6 ([16], [27]). *Пусть $H := G \star_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}$ — HNN-расширение группы G , где $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$ являются изоморфизмами некоторых подгруппы групп A и B . Тогда каждый элемент кручения H сопряжён элементу G .*

§4 Групповой конус и групповая надстройка дискретной группы

В теории гомологий групп имеется аналог конструкций конуса и надстройки из топологии. Дадим следующие два определения:

Определение 3 ([2]). Пусть группа G вкладывается в ациклическую группу CG . Будем называть группу CG *ациклическим групповым конусом* (или сокращённо: групповым конусом) для группы G .

Определение 4. Для группы G назовём группу

$$\Sigma G = CG \star_G CG$$

ациклической групповой надстройкой (или сокращённо: групповой надстройкой) над G .

Групповой конус и надстройка является гомологическими аналогами обычных конуса и надстройки в категории **Тор**.

Из точной последовательности Майера-Вьеториса легко следует важный аналог свойства обычной надстройки в категории топологических пространств:

Утверждение 7 (Изоморфизм надстройки).

$$H_1(\Sigma G; \mathbb{Z}) = 0 \text{ и } H_{i+1}(\Sigma G; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}) \text{ для } i \geq 1.$$

Заметим, что конструкция групповой надстройки даёт нам конструкцию гомологической надстройки при переходе от дискретных групп к их пространствам Эйленберга-Маклейна. А именно справедливо

Утверждение 8. *Пространство*

$$W = K(CG, 1) \sqcup_{K(G, 1)} K(CG, 1)$$

имеет гомотопический тип пространства

$$K(CG \star_G CG, 1)$$

и более того,

$$H_{i+1}(W; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}), \quad i \geq 1, \quad H_1(W; \mathbb{Z}) = 0.$$

Доказательство. Асферичность пространства W следует из теоремы Уайтхеда 2. Изоморфизмы для гомологий следуют из изоморфизмов групповой надстройки. \square

4.1 Конструкция группового конуса дискретной группы при помощи алгебраического пополнения группы

В этом параграфе мы следуем статье [2].

Оказывается, для любой группы G существует ацикличная группа CG , в которую G вкладывается, причём C является функтором.

Определение 5. Группа A называется *супергруппой* группы B , если $B < A$.

Определение 6. Супергруппа M группы B называется *митозисом* B , если существуют элементы s, d в M , такие, что

1. $M = \langle B, s, d \rangle$,
2. $b^d = bb^s$ для любого $b \in B$,
3. $[b', b^s] = 1$ для любых $b, b' \in B$.

Здесь $b^s := s^{-1}bs$.

Теперь определим важный класс групп:

Определение 7. Группа M называется *митотической*, если она содержит митозис любой её подгруппы.

Митотические группы обладают очень важным свойством:

Теорема 7. *Митотические группы ацикличны.*

Примером митотических групп могут служить алгебраически замкнутые группы.

Определение 8. Группа G называется *алгебраически замкнутой*, если для любой конечной системы уравнений

$$f_i(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_m) = 1, \quad i = 1, \dots, k$$

(относительно переменных x_1, \dots, x_m и постоянных $g_1, \dots, g_n \in G$), для которой существует решение в супергруппе группы G , существует также решение и в самой группе G .

Теорема 8. *Алгебраическое замыкание любой группы является митотической группой.*

Имеется следующий результат:

Утверждение 9. *Всякая бесконечная группа может быть вложена в алгебраически замкнутую группу той же мощности.*

Из утверждения 9 и теорем 7 и 8 следует

Теорема 9. *Всякая бесконечная группа может быть вложена в ациклическую группу той же мощности.*

4.2 Конструкция группового конуса Кана-Тёрстона

Кан и Тёрстон в своей оригинальной работе [4] построили функтор группового конуса C , опираясь на результат Мозера [31], следующим образом.

Обозначим через $G^{\mathbb{Q}}$ группу функций $\mathbb{Q} \rightarrow G$, которые имеют компактный носитель, то есть каждая такая функция принимает тождественное значение 1 вне некоторого конечного интервала. Группа гомеоморфизмов рациональных чисел с компактными **носиетлями** $\text{Homeo } \mathbb{Q}$ действует на группе $G^{\mathbb{Q}}$ композициями. Тогда определим алгебраический конус CG , как полупрямое произведение $G^{\mathbb{Q}} \rtimes \text{Homeo } \mathbb{Q}$ с умножением

$$(b, a)(b', a') = (ba(b'), aa'), \quad b, b' \in G^{\mathbb{Q}}, \quad a, a' \in \text{Homeo } \mathbb{Q}.$$

Очевидно, что данная конструкция функториальна, и, кроме того, имеется вложение группы $G \hookrightarrow CG$ нормальным делителем: $g \mapsto (b_g, \text{id}) \in CG$, где $b_g r = g$, если $r = 0$, и $b_g r = 0$, иначе.

Утверждение 10. *Группа CG из конструкции Кана-Тёрстона является ациклической.*

Доказательство. Утверждение получается из результата Мозера о том, что группа гомеоморфизмов прямой с компактным носителем ациклическа и спектральной последовательности Хохшильда-Серра, применённой к расширению

$$1 \rightarrow G^{\mathbb{Q}} \rightarrow G^{\mathbb{Q}} \rtimes \text{Homeo } \mathbb{Q} \rightarrow \text{Homeo } \mathbb{Q} \rightarrow 1.$$

□

Замечание. Обычно группа CG имеет несчётный порядок. Тем не менее, имеется подконус $C'G \subset CG$, имеющий ту же мощность, что и G за исключением случая конечной G , в котором группа $C'G$ будет счётной.

4.3 Построение ациклических групп из гомологических сфер

Прежде всего дадим сначала

Определение 9. *Гомологической n -сферой* называется гладкое замкнутое n -мерное многообразие Σ^n , гомологии которого в \mathbb{Z} устроены так же, как у стандартной сферы \mathbb{S}^n , то есть $H_*(\Sigma^n; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$.

М. Кервер в работе [13], 1969 получил полный ответ на вопрос о том, какие фундаментальные группы могут быть у гомологических n -сфер при $n \geq 5$.

Прежде, чем его сформулировать, для удобства введём

Определение 10. Конечно представленная группа G *реализуема* гомологической n -сферой, если существует некоторая гомологическая n -сфера с фундаментальной группой G .

Пусть π — некоторая группа с g образующими и r соотношениями. Чтобы π была реализуема гомологической n -сферой, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия: π имеет конечное копредставление, $H_1(\pi) = 0$, $H_2(\pi) = 0$. Последнее соотношение следует из известной теоремы Х. Хопфа:

Теорема 10 (Х. Хопф). *Пусть X — связный CW-комплекс. Тогда имеется точная последовательность групп:*

$$\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\pi_1(X); \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

где h — гомоморфизм Гуревича, а действие $\pi_1(X) \curvearrowright \mathbb{Z}$ тривиально.

Доказательство. В силу того, что пространство $K(\pi_1(X), 1)$ получается из пространства X приклеиванием клеток размерности не меньше 3, отсюда сразу же следует сюръективность. То, что имеется точность в во втором члене следует из того, что образ фундаментального класса двумерной сферы любого сфероида из $\pi_2(X)$ является границей некоторой трёхмерной клетки в $K(\pi_1(X), 1)$. \square

Определение 11. Если группа π удовлетворяет соотношению $H_1(\pi) = 0$, то она называется *совершенной*. Если π удовлетворяет сразу двум соотношениям $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$, то она называется *суперсовершенной*.

Теорема 11 (М. Кервер, 1969, [13]). *Пусть π — суперсовершенная конечно представимая группа, и пусть $n \geq 5$. Тогда существует гладкая гомологическая n -сфера с фундаментальной группой π .*

Приведём здесь схему доказательства, которая следует из конструкции, использовавшейся С. П. Новиковым при решении вопроса о распознавании гомологических сфер.

Схема доказательства. (С. П. Новиков, [15] 1962) По представлению группы π образующими и соотношениями построим $n + 1$ -мерное многообразие с краем

$$M^{n+1} = \left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1, \dots, g_k} \mathbb{D}_j^n \times \mathbb{D}_j^1 \right) \bigcup_{r_1, \dots, r_\ell} \mathbb{D}_q^{n-1} \times \mathbb{D}^2,$$

где склейка происходит со стандартным сглаживанием по отображениям

$$g_j : \mathbb{D}_j^n \times \partial \mathbb{D}_j^1 \rightarrow \partial \mathbb{D}^{n+1},$$

$$r_q : \mathbb{D}_q^{n-1} \times \partial \mathbb{D}_q^2 \rightarrow \partial \left(\mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1, \dots, g_k} \mathbb{D}_j^n \times \mathbb{D}_j^1 \right),$$

которые соответствуют образующим и соотношениям группы π .

По условию $H_2(\pi) = 0$, поэтому в группе $H_2(\partial M)$ по теореме Хопфа, сформулированной выше, все циклы являются сферическими. Реализуем свободный базис $H_2(\partial M)$ сферами $\mathbb{S}_\alpha^2 \times \mathbb{D}_\alpha^{n-2} \subset \partial M$ и сделаем вдоль них хирургию. Тогда мы убьём вторую гомотопическую группу (здесь существенно, что $n \geq 5$) и, следовательно, получим нулевые вторые гомологии для многообразия ∂M . По построению и исходя из клеточных гомологий, у M не могут быть гомологии в остальных размерностях (кроме размерности n). Стало быть, мы имеем гомологическую сферу ∂M . \square

Замечание. Из теоремы Паункаре для старших размерностей (результат Смейла) следует, что если многообразие M из приведённой схемы доказательства односвязно, то ∂M — это стандартная сфера.

Рассуждение С. П. Новикова позволяет построить пример ациклического пространства, не имеющего тип $K(\pi, 1)$.

Теорема 12. *Существуют ациклические пространства, не имеющие типа $K(\pi, 1)$*

Доказательство. Возьмём любую конечную суперсовершенную группу π . Например, бинарную группу икосаэдра $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \langle a, b \mid (ab)^2 = a^3 = b^5 \rangle$.

Построим компактное гладкое многообразие: гомологический диск с фундаментальной группой π при помощи конструкции С. П. Новикова выше. Он будет искомым ациклическим пространством, поскольку его фундаментальная группа конечна (и следовательно, не может иметь своим классифицирующим пространством компактное многообразие). \square

Суперсовершенных групп довольно много. Бесконечное семейство примеров, например, дают специальные линейные группы над полями:

Теорема 13 ([14]). При $n \geq 3$ группа

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q) \text{ — суперсовершенная,}$$

за исключением трёх случаев:

$$\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_2), \mathrm{SL}(4, \mathbb{F}_2), \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4).$$

Группы из теоремы являются конечными, а потому они, как известно, из теоремы Свана ниже, не могут быть ациклическими.

Теорема 14 (R. G. Swan, 1960). Пусть G — конечная группа и H — нетривиальная подгруппа в G . Тогда индуцированное отображение $H_i(G) \rightarrow H_i(H)$ нетривиально для бесконечного числа значений $i > 0$.

Итак, приведённые выше группы являются суперсовершенными, но не ациклическими.

§5 Универсальная ациклическая конечно определённая группа

В работе [2], 1980, был поставлен вопрос о том, всякая ли конечно определённая группа вкладывается в ациклическую конечно определённую группу. Позднее положительный ответ на этот вопрос был дан в [26], 1983. Но перед тем, как привести доказательство данного результата, остановимся на обсуждении так называемых универсальных групп Хигмана.

Как показано в работе [28] Хигмана, существует конечно определённая группа U , содержащая все конечно определённые группы. Однако это группа задаётся в работе неявным образом. Более явное описание содержится в работе [29] — в ней приводится описание копредставления такой группы с 8 образующими и 26 соотношениями. Опишем схематично построения группы U .

Предположим, что мы хотим вложить произвольную конечно определённую группу A . Для этого вложим сначала её в универсальную конечно порождённую группу Хигмана C на двух образующих (см. [30]). Далее рассмотрим свободное произведение $K_1 = C \star G$ для некоторой конечно определённой группы G (мы не останавливаемся на её определении, см. подробности в [29]). Рассматривается некоторая последовательность HNN-расширений

$$K_1 \rightsquigarrow K_2 \rightsquigarrow K_3 \rightsquigarrow K_4.$$

Далее замечается, что соотношения в группе C (которых бесконечное множество) автоматически выполняются в группе K_4 . В результате, получается, что

K_4 имеет 13 образующих и 33 соотношения: 2 образующие берутся из группы Хигмана C ; 7 образующих и 14 соотношений — из группы G ; 4 образующие и 19 соотношений берутся из последовательности трёх HNN-расширений $C \star G \rightsquigarrow K_4$. Затем применяется некоторое наблюдение, позволяющее сократить число образующих и соотношений до 8 и 26 соответственно.

Интересным представляется вопрос о единственности (с точностью до изоморфизма) универсальной группы Хигмана. Если U_1 и U_2 — две такие группы, то мы имеем вложения $U_1 \hookrightarrow U_2$ и $U_2 \hookrightarrow U_1$. Однако это не означает, что $U_1 \cong U_2$. Действительно, рассмотрим, например, свободные группы F_p и F_q различных рангов $p, q \geq 2$. Они вкладываются друг в друга, поскольку каждая из них содержит свободную группу со счётным числом образующих — коммутант, однако F_p не изоморфно F_q (т. к. эти группы имеют неизоморфные абелизации).

Теорема 15 ([26], 1983). *Существует ациклическая конечно определённая группа, содержащая изоморфные копии всех конечно определённых групп.*

Доказательство. Пусть U — универсальная конечно определённая группа Хигмана, то есть такая, что она содержит все конечно определённые подгруппы. Но группу U можно вложить в конечно порождённую ациклическую группу V с рекурсивно перечислимым представлением. Вложим V в изоморфную копию \bar{U} группы U при помощи изоморфизма $\bar{u} \mapsto u$ для каждого $u \in U$. Рассмотрим HNN-расширение

$$E = \langle \bar{U}, t \mid t\bar{u}t^{-1} = u, u \in U \rangle.$$

Подгруппа B группы E , являющаяся нормальным замыканием группы \bar{U} , является возрастающим объединением ациклических групп

$$V < t^{-1}Vt < t^{-2}Vt < \dots$$

Это действительно так, поскольку из того, что $U \hookrightarrow V \hookrightarrow \bar{U}$, $t\bar{U}t^{-1} = U$ следует $V \hookrightarrow \bar{U} = t^{-1}Ut \hookrightarrow t^{-1}Vt$. Но копредел коммутирует с функтором гомологий, поскольку в абелевой категории функтор копредела является точным. Следовательно, B ациклическая. Факторгруппа E/B является бесконечной циклической. Короткой точной последовательности $1 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ отвечает спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\mathbb{Z}, H_q(B, \mathbb{Z})) \Rightarrow H_*(E, \mathbb{Z}).$$

Она вырождается во втором члене, и поэтому мы имеем изоморфизмы

$$H_1 E \cong \mathbb{Z}, \quad H_n E = 0, \quad n > 1.$$

Теперь возьмём свободное произведение группы E и любой конечно определённой ациклической группы A вдоль бесконечной циклической подгруппы. В качестве A можно, например, взять группу Хигмана Hig_4 . Ациклическость полученной группы очевидным образом следует из точной последовательности Майера-Виеториеса. Тогда для произвольной конечно определённой группы G композиция следующих вложений будет искомой:

$$G \hookrightarrow U \hookrightarrow E \hookrightarrow E \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4.$$

Первое вложение имеет место в силу основного свойства универсальной группы Хигмана, а второе и третье — в силу свойств амальгамы. \square

Эквивалентно, теорема говорит о том, что всякая конечно определённая группа вкладывается в некоторый групповой гомологический конус над ней.

В силу того, что конечные группы вкладываются в универсальную группу Хигмана и свойств амальгам и HNN-расширений, мы получаем

Следствие 15.1. *Существует конечно определённая группа с элементами конечного порядка.*

Заметим, что рассматривавшиеся выше ациклические конечно определённые группы не имели элементов конечного порядка.

Также комбинация теоремы 15 с явной конструкцией универсальной группы U даёт

Следствие 15.2. *Всякая конечно определённая группа вкладывается в универсальную ациклическую группу \mathcal{U} с 12 образующими и 38 соотношениями.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 15 искомая группа имеет копредставление

$$\langle \overline{U}, t \mid t \bar{u} t^{-1} = u, u \in U \rangle \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4.$$

Для копредставления группы E мы имеем $8+1 = 9$ образующих и $26+8 = 34$ соотношений. Для копредставления искомой группы тогда мы имеем $9+3 = 12$ образующих и $34+4 = 38$ соотношений, поскольку группа Hig_4 имеет 4 образующих и 4 соотношения. \square

§6 Ациклические пространства

Важную роль в топологии играют так называемые *ациклические пространства*, то есть такие пространства, гомологии которых с постоянными коэффициентами в \mathbb{Z} тривиальны. Заметим, что такие нетривиальные пространства,

в силу теоремы Гуревича и теоремы Уайтхеда, обязаны иметь нетривиальную фундаментальную группу.

Сформулируем здесь обобщение теоремы Уайтхеда на неодносвязный случай. Этот результат нам пригодится в дальнейшем.

Теорема 16 ([23]). *Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ между отмеченными клеточными комплексами индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и изоморфизм гомологий с любыми локальными коэффициентами \mathcal{A} , т. е.*

$$H_*(X; f^* \mathcal{A}) \cong H_*(Y; \mathcal{A}).$$

Тогда f является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Будем считать, что X и Y связные. Поднимем отображение f на универсальное накрытие так, чтобы $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$, где \tilde{x}_0 и \tilde{y}_0 — некоторые поднятия отмеченных точек x_0 и y_0 . В силу классической теоремы Уайтхеда для односвязного случая и в силу теоремы Гуревича, достаточно показать, что \tilde{f} индуцирует изоморфизм в гомологиях $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$. Запишем спектральные последовательности Лере для универсальных накрытий p_1 и p_2 над пространствами X и Y , рассматриваемых, как расслоения с дискретным слоем:

$$H_p(X; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\tilde{X}),$$

$$H_p(Y; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\tilde{Y}),$$

где $G = \pi_1(X)$.

В силу дискретности G , спектральные последовательности вырождаются во втором члене, и поэтому мы имеем следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; p_{1*}\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \\ f_* \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_* \\ H_n(Y; p_{2*}\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\tilde{Y}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

□

Здесь через $p_{1*}\mathbb{Z}$ и $p_{2*}\mathbb{Z}$ обозначены (возможно разные) G -модули \mathbb{Z} . Но $f^*(p_{2*}\mathbb{Z}) = p_{1*}\mathbb{Z}$. Следовательно, по условию f_* в левом столбце диграммы индуцирует изоморфизм. А значит, мы имеем искомого изоморфизм в правом столбце диграммы.

6.1 Функтор Дрора

Можно задаться вопросом о том, вся

Дрор в работе [25] показал, что в категории симплициальных множеств с отмеченной точкой \mathbf{sSet}_* имеется эндифунктор

$$A : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sSet}_*$$

и естественное отображение

$$a : AX \rightarrow X,$$

такое, что

1. AX ациклично для любого симплициального X ;
2. Отображение $a : AX \rightarrow X$ универсально с точностью до гомотопии среди всех отображений из ациклического пространства в X ;
3. Пусть $H_j(X) \cong 0$ для любого $1 \leq j \leq n$. Тогда гомотопический слой отображения $a : AX \rightarrow X$ является $(n-1)$ -связным. В частности, если X ациклично, то a — слабая эквивалентность.
4. Если X является j -простым пространством для некоторого $j \geq 1$ (т. е. действие $\pi_1(X)$ на $\pi_j(X)$ тривиально), то таково же и AX .

Функтор A задаётся на пространстве X , как предел

$$AX = \varprojlim A_n X,$$

башни расслоений

$$\dots \rightarrow A_n X \rightarrow \dots \rightarrow A_1 X \rightarrow A_0 X = X.$$

Башня строится индуктивно. Отображение $p_1 : A_1 X \rightarrow X$ получается, как накрытие над X , соответствующее максимальной совершенной нормальной подгруппе $\pi_1(X)$. Далее, $A_n X$ получается, как pullback в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A_n X & \longrightarrow & \Lambda P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{n-1} X & \longrightarrow & P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \end{array} \quad (1)$$

В этой диаграмме Λ — функтор путей; \mathbb{Z} — функтор, ассоциирующий с симплициальным множеством Y симплициальную абелеву группу $\mathbb{Z}Y$, её n -симплексами служат все возможные линейные комбинации n -симплексов из Y_n ;

P_n — функтор, сопоставляющий симплициальному множеству его n -ый этаж системы Мура-Постникова. При этом $P_n X$ определяется, как факторпространство X по отношениям эквивалентности \sim_n , при которых $x_1 \sim_n x_2$ (здесь x_1 и x_2 некоторые q -мерные симплексы), если ограничения симплексов x_1 и x_2 на n -мерные остовы совпадают.

6.2 Симплициальные разбиения ациклических комплексов

Имеется ряд интересных вопросов о симплициальных разбиениях классифицирующих пространств ациклических групп.

ВОПРОС 1. *Как определять или строить ациклические конечно определённые группы?*

ВОПРОС 2. *Каковы оценки на число симплексов минимальной триангуляции классифицирующего пространства ациклической конечно определённой группы в терминах числа образующих и соотношений?*

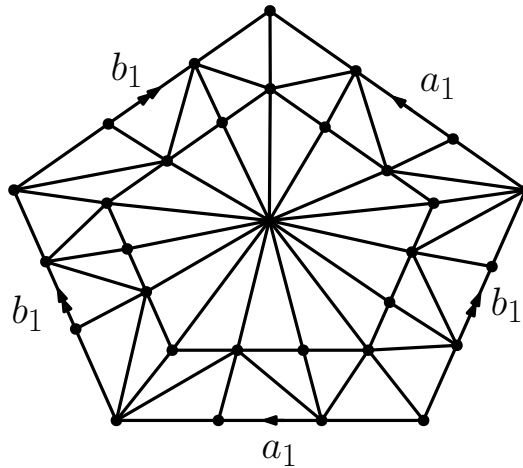
Полные ответы на данные вопросы неизвестны.

Приведём здесь явную конструкцию ациклического симплициального комплекса на основе описанной выше конструкции группы Хигмана Hig_4 .

Пример 1. Приведём здесь явную конструкцию симплициального комплекса, являющегося классифицирующим пространством группы Хигмана Hig_4 .

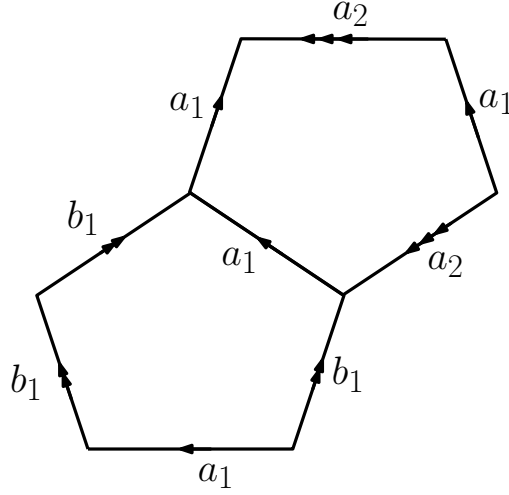
Будем строить комплекс, следуя описанной конструкции групп Хигмана (см. соответствующий параграф).

Сначала построим симплициальный комплекс для $K(BS(1, 2), 1)$.



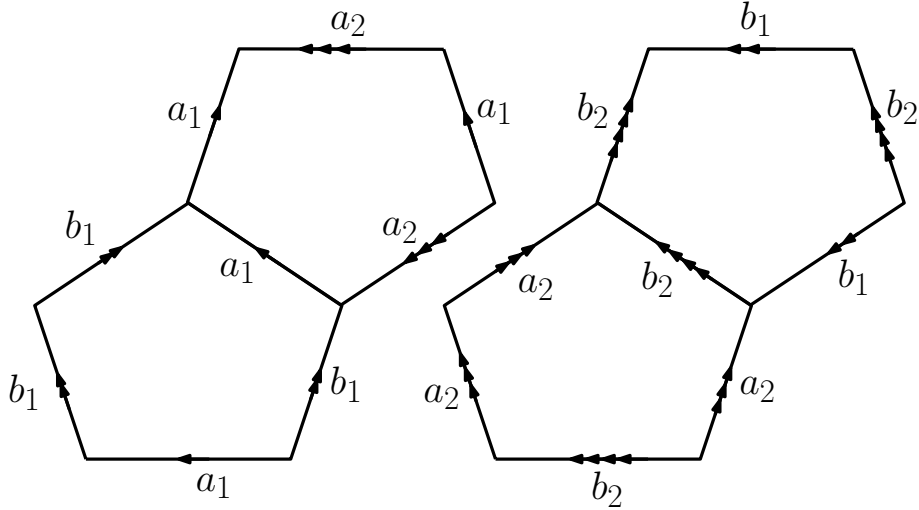
$$BS(1, 2) = \langle a_1, b_1 \mid b_1^{a_1} = b_1^2 \rangle$$

Теперь возьмём 2 копии таких триангулированных пятиугольников и склеим из них $K(L, 1)$.



$$L = \langle b_1, a_1, a_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2, a_1^{a_2} = a_1^2 \rangle$$

Наконец, возьмём 2 копии комплексов $K(L, 1)$ и склеим их.



$$\text{Hig}_4 = \{a_1, b_1, a_2, b_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2, a_1^{a_2} = a_1^2, a_2^{b_2} = a_2^2, b_2^{b_1} = b_2^2\}$$

§7 Конструкция Кана-Тёрстона

Д. Кан и У. Тёрстон получили (1976) следующий результат:

Теорема 17 (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [4]). *Для любого линейно связного симплициального множества $X : \mathbf{sSet}_*$ с отмеченной точкой существует расслоение Серра*

$$t : TX \rightarrow X,$$

естественное по X и обладающее следующими свойствами.

- (i) Естественное преобразование функторов $t : T \rightarrow \text{Id}$ индуцирует изоморфизм групп сингулярных гомологий и когомологий с коэффициентами в произвольной локальной системе \mathcal{A} на X , т. е.
- $$H_*(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H_*(X; \mathcal{A}), \quad H^*(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H^*(X; \mathcal{A}).$$
- (ii) Пространство TX асферично, т. е. $TX \simeq K(G_X, 1)$, и отображение $t_* \pi_1 : G_X \rightarrow \pi_1 X$ — эпиморфизм.
 - (iii) Ядро P_X отображения $t_* \pi_1$ является совершенной нормальной подгруппой в G_X .
 - (iv) Гомотопический тип пространства X полностью определяется парой групп (G_X, P_X) . А именно, пространство X может быть получено с точностью до гомотопии применением к пространству $K(G_X, 1)$ функтора $(-)^+$ плюс-конструкции Квиллена относительно совершенной нормальной подгруппы P_X . Эквивалентно, X может быть получено применением функтора послойного \mathbb{Z} -пополнения Боусфилда и Кана (см. [24]) к расслоению Серра $K(G_X, 1) \rightarrow K(G_X/P_X, 1)$.
 - (v) Универсальное накрытие \tilde{X} над X может быть получено с точностью до гомотопии применением функтора \mathbb{Z} -пополнения к $K(P_X, 1)$.
 - (vi) Ациклический слой расслоения Серра $TX \rightarrow X$ получается с точностью до гомотопии применением функтора Дрора (см. [25]) к $K(P_X, 1)$.

Построение функтора T и отображения t в оригинальной работе Д. Кана и У. Тёрстона осуществляется при помощи техники симплициальных множеств. В силу того, что существует более простая конструкция функтора T (см. ниже), мы не будем приводить здесь явное описание T и доказывать первый пункт теоремы. Однако приведём доказательства последних четырёх пунктов, поскольку они выполняются для всех конструкций функторов T , то есть при их доказательстве не используется явная конструкция функтора T . Кроме того, в оригинальной статье Кана-Тёрстона эти доказательства опущены и оставлены в качестве несложных задач. В доказательстве мы будем опираться на работу Боусфилда и Кана [24], в которой подробно определяется операция R -пополнения для коммутативных колец R и обсуждаются её свойства. За основными свойствами функтора Дрора отсылаем читателя к §6.1 или к оригинальной статье [25].

Доказательство. (iii). Для точной последовательности

$$1 \rightarrow P_X \rightarrow G_X \rightarrow \pi_1 X \rightarrow 1$$

имеет место спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\pi_1 X; H_q(P_X; \mathbb{Z})) \rightarrow H_{p+q}(\pi_1 X; \mathbb{Z}),$$

где \mathbb{Z} — тривиальный $\pi_1 X$ -модуль.

Запишем точную пятичленную последовательность

$$H_2(\pi_1 X) \rightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_2} E_{0,1}^2 \rightarrow H_1(\pi_1 X) \rightarrow E_{1,0}^2 \rightarrow 0.$$

Имеем: $E_{2,0}^2 = H_2(\pi_1 X)$. Далее,

$$E_{0,1}^2 = H_0(\pi_1 X; H_1(P_X)) = H_1(P_X)_{\pi_1 X} = H_1(P_X),$$

поскольку индуцированное действие $\pi_1 X$ на $\ker(G_X \rightarrow \pi_1 X)$ тривиально. Наконец,

$$E_{1,0}^2 = H_1(\pi_1 X; H_0(P_X)) = H_1(\pi_1 X).$$

Из первого свойства функтора Кана-Тёрстона следует, что $H_2(G_X) \cong H_2(X)$, $H_1(G_X) \cong H_1(X)$. Кроме того, $H_1(\pi_1 X) \cong H_1(X)$ (постоянные коэффициенты в \mathbb{Z}). Стало быть, мы получаем

$$H_2(X) \twoheadrightarrow H_2(\pi_1 X) \xrightarrow{0} H_1(P_X) \xrightarrow{0} H_1(G_X) \xrightarrow{\cong} H_1(X) \rightarrow 0.$$

Стрелка слева является эпиморфизмом в силу теоремы Хопфа. Значит, в силу сказанного выше, мы получаем, что $H_1(G_X) = 0$.

(iv). Покажем, что плюс-конструкция Квиллена однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности, восстанавливает X по TX и совершенной нормальной подгруппе P_X в $G_X = \pi_1(TX)$. Применим функтор Квиллена к отображению $t : TX \rightarrow X$, и мы получим отображение

$$t^+ : (TX, P_X)^+ \rightarrow X.$$

Легко видеть, что отображение t^+ будет индуцировать изоморфизм на фундаментальных группах. Кроме того, по свойству плюс-конструкции мы будем также иметь и изоморфизм в любой системе локальных коэффициентов \mathcal{A} . Значит, по теореме Уайтхеда 16 для неодносвязных пространств мы получаем, что f — гомотопическая эквивалентность.

Теперь докажем, что X можно получить из TX применением функтора \mathbb{Z}_∞ . Применив послойный функтор \mathbb{Z} -пополнения к расслоению Серра $TX \rightarrow X$, мы получим отображение

$$f : \dot{\mathbb{Z}}_\infty TX \rightarrow X.$$

Покажем, что f индуцирует гомотопическую эквивалентность. Для этого мы воспользуемся теоремой Уайтхеда 16 для неодносвязного случая. Из рассмотрения точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \rightarrow \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \rightarrow K(\pi_1 X, 1),$$

берущегося из основного свойства функтора послойного \mathbb{Z} -пополнения, получается, что f индуцирует изоморфизм на фундаментальных группах

$$f_* : \pi_1(\dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1)) \cong \pi_1(X),$$

поскольку $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1)) = 1$, см. [24].

Рассмотрим морфизм расслоений Серра

$$\begin{array}{ccccc} K(P_X, 1) & \longrightarrow & K(G_X, 1) & \longrightarrow & K(\pi_1 X, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) & \longrightarrow & \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) & \longrightarrow & K(\pi_1 X, 1) \end{array}$$

Этот морфизм индуцирует морфизм спектральных последовательностей Лере. Для доказательства того, что f индуцирует изоморфизм в когомологиях с локальными коэффициентами, достаточно в силу теоремы Зимана показать, что для любой локальной системы \mathcal{A} на X

$$H_*(K(P, 1); i^* \circ t^* \mathcal{A}) \cong H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^* \mathcal{A}),$$

где $i^* \circ t^*$ и $\mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^*$ являются композициями гомоморфизмов фундаментальных групп в данных расслоениях. Заметим, что эти композиции гомоморфизмов тривиальны, поэтому участвующие коэффициенты получаются тривиальными. Но

$$H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}) \cong H_*(K(P_X, 1); \mathbb{Z}),$$

поскольку пространство $K(P_X, 1)$ является \mathbb{Z} -хорошим в терминах работы Бусфилда и Кана. Последнее верно в силу совершенности группы P_X .

(v). Этот пункт следует из предыдущего и точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \rightarrow \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \simeq X \rightarrow K(\pi_1 X, 1).$$

(vi). Мы имеем отображение $f : UX \rightarrow K(P_X, 1)$, где UX является гомотопическим слоем расслоения Серра $TX \rightarrow X$. Применяя к f функтор Дрора A

и учитывая, что UX ациклично (это следует из спектральной последовательности Лере для данного расслоения и того, что TX и X имеют одинаковые гомологии), мы получаем отображение

$$Af : UX \rightarrow AK(P_X, 1).$$

Очевидно, Af индуцирует изоморфизм в гомологиях между полученными ациклическими пространствами. Из свойства функтора Дрора следует, что $\pi_1(AK(P_X, 1)) = \pi_1(AP_1K(P_X, 1)) = N$, где $P_1(P_X)$ — первый этаж системы Постникова пространства $K(P_X, 1)$, а N — максимальная совершенная подгруппа в группе P_X , т. е. $N = P_X$. Кроме того, $\pi_1(UX) \cong P_X$ из точной последовательности расслоения выше. Значит, f индуцирует изоморфизм и на фундаментальных группах. Дальнейшее следует из теоремы Уайтхеда. □

Оригинальный функтор Кана-Тёрстона

7.1 Конструкция Кана-Тёрстона для сфер

Для конкретного случая сфер \mathbb{S}^n построим явно пространство $T\mathbb{S}^n$ типа $K(\pi, 1)$ и отображение

$$t : T\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

такие, что на (ко)гомологиях индуцируются изоморфизмы. В этом параграфе мы следуем статье [2].

7.1.1 Двумерная сфера

Пусть вначале мы имели пространство $X = \mathbb{S}^1$. Мы хотим получить из него пространство типа $K(\pi, 1)$, которое бы имело те же гомологии, что и \mathbb{S}^2 .

Возьмём в качестве группового конуса $C\mathbb{Z}$ группу Хигмана Hig_4 . Это вложение индуцирует отображение

$$\mathbb{S}^1 \simeq K(\mathbb{Z}, 1) \rightarrow K(\text{Hig}_4, 1) \tag{*}$$

Склеив две копии цилиндра отображения $(*)$ вдоль окружности, мы получим согласно утверждению 8 искомое пространство

$$K(\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4, 1).$$

На построенном пространстве можно ввести структуру 2-мерного симплициального комплекса, взяв в качестве $K(\text{Hig}_4, 1)$, например, триангуляцию, построенную ранее. Для построения отображения

$$t : K(\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$$

отправим двумерный комплекс $K(\text{Hig}_4, 1)$ на конце каждого из двух цилиндров в вершины обычных верхнего и нижнего конусов $C\mathbb{S}^2$ и продолжим это отображение по линейности на остальные точки так, чтобы t было тождественным на вложенной окружности $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow T\mathbb{S}^2$.

7.1.2 n -мерная сфера

После построения пространства $T\mathbb{S}^2$ можно продолжить процесс, используя следующую теорему

Теорема 18. *Пусть имеется вложение $F \rightarrow G$, где G — ациклическая. Тогда амальгама $G \star_F G$ вкладывается в ациклическую группу*

$$(A \times F) \star_F G$$

где A — любая нетривиальная ациклическая группа.

Эта замечательная теорема позволяет нам продолжить индуктивное построение пространств $T\mathbb{S}^n$.

Пусть $n = 3$. Возьмём в качестве гомоморфизма в лемме отображение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \text{Hig}_4$. Тогда мы будем иметь вложение в ациклическую группу

$$\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4 \hookrightarrow (\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4$$

и снова образуем при помощи таких вложений гомологическую надстройку:

$$T\mathbb{S}^3 = [(\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4]_{\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4} \star [(\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4].$$

Отображение t будет переводить трёхмерные комплексы $(\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4$ на концах цилиндров в соответственно вершины верхнего и нижнего конусов $C\mathbb{S}^2$.

Теперь на каждом следующем шаге n будем брать в качестве вложения $F \rightarrow G$ из леммы вложение групп из предыдущего шага $n - 1$. Причём для каждого n будет получаться n -мерный конечный симплициальный комплекс по утверждению 4, в силу того, что геометрическая размерность группы Хигмана равна 2, а группы \mathbb{Z} — равна 1. Отображение t будет отправлять n -мерные комплексы на концах цилиндров в вершины обычных верхних и нижних конусов $C\mathbb{S}^{n-1}$.

7.2 Важное следствие: эквивалентность категорий

В работе [4] Кана и Тёрстона утверждается, что в конструкции возможно и обратное построение. А именно, исходное пространство X может быть восстановлено с точностью до гомотопии из пары (G_X, P_X) при помощи плюсконструкции Квиллена, где $G_X = \pi_1(TX)$, $P_X = \ker \pi_1 tX$ — нормальная совершенная подгруппа G_X . То есть $X = (G_X, P_X)^+$.

Напомним здесь вкратце плюс-конструкцию Квиллена. Она позволяет по данному комплексу X и данной совершенной нормальной подгруппе P фундаментальной группы $\pi_1(X)$ строить комплекс X^+ с теми же гомологиями и с убитой подгруппой P в фундаментальной группе.

А именно, существует пространство X^+ и отображение $i : X \rightarrow X^+$, для которых

- i) имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow P \rightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X^+) \rightarrow 1;$$

- ii) если группа $\pi_1(X^+)$ действует на коммутативной группе A , то для локальной системы \mathcal{A} над X^+ и индуцированной системы \mathcal{A}^* над X гомоморфизм $i^* : H^*(X^+; \mathcal{A}) \rightarrow H^*(X; \mathcal{A}^*)$ является изоморфизмом.

Следствие 18.1 (Д. Кан, У. Тёрстон, [4]). *Имеет место эквивалентность категорий*

$$\text{Ho } \mathcal{CW} \cong \mathcal{GP}[\Gamma^{-1}]$$

Здесь категория $\text{Ho } \mathcal{CW}$ состоит из CW -комплексов и классов гомотопий отображений между пространствами. Объектами категории \mathcal{GP} служат пары дискретных групп (G, P) , где P — совершенная нормальная подгруппа G , отображения — гомоморфизмы $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$, для которых $f(P) \subset P'$, Γ состоит из тех морфизмов $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$ из $\text{Mor}(\mathcal{GP})$, что $f : G/P \cong G'/P'$ и $f_* : H_*(G; A) \cong H_*(G'; A)$ для любого G'/P' -модуля A .

Схема доказательства [3]. Эта эквивалентность следует из того, что конструкция Кана-Тёрстона «обратна» плюс-конструкции Квиллена. Имеется следующая диаграмма категорий и функторов между ними:

$$\text{Ho } \mathcal{CW} \xrightleftharpoons[\text{Ho}(\cdot)^+]{\text{Ho } J} \text{Ho } \mathcal{XP} \xleftarrow{\text{Ho}} \mathcal{XP} \xrightleftharpoons[I]{T} \mathcal{AP} \xrightarrow{\text{Ho}} \text{Ho } \mathcal{AP} \xrightleftharpoons[B]{\pi} \mathcal{GP}$$

Здесь

- \mathcal{XP} — категория пар (X, P) , $P \triangleleft \pi_1(X)$, P совершенна
- \mathcal{AP} категория пар (X, P) , $P \triangleleft \pi_1(X)$, X асферично, P совершенна
- \mathcal{GP} — категория пар (G, P) , $P \triangleleft G$, P совершенна

Переходом к подходящим локализациям можно добиться того, чтобы все стрелки в диаграмме стали обратимыми, и тогда мы получим цепочку эквивалентностей категорий, из которой будет следовать требуемое. \square

§8 Метод Маундера построения пространства Кана-Тёрстона

Изложим здесь довольно простую конструкцию функтора Кана-Тёрстона, найденную Маундером в [6].

8.1 Непосредственно конструкция Маундера

Теорема 19 (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [4]). *Для каждого линейно связного пространства X с отмеченной точкой существует пространство TX и отображение*

$$TX \xrightarrow{t} X,$$

естественное по X и обладающее свойствами:

1. *Отображение t индуцирует изоморфизм в (сингулярных) гомологиях и ко-гомологиях*

$$H_{\bullet}(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H_{\bullet}(X; \mathcal{A})$$

для любой локальной системы коэффициентов \mathcal{A} на X ;

2. *$\pi_i(TX)$ тривиальна для $i \neq 1$, и отображение на фундаментальных группах $\pi_1 t$ — эпиморфизм;*

3. *Если исходным пространством был конечный симплициальный комплекс X , то TX может быть выбрано конечным.*

Доказательство (С. R. F. Maunder, 1981, [6]). Приведём здесь два варианта конструкции Маундера. Первый вариант является универсальным и годится для любого симплициального комплекса (и даже для произвольного линейно связного пространства), а второй вариант конструкции нужен для построения конечного комплекса TX по конечному комплексу X — для удовлетворения пункта 3 теоремы.

Первый вариант конструкции Маундера (для всех симплициальных комплексов). Сначала докажем утверждение для конечных симплициальных комплексов индукцией по числу симплексов. Пусть для любого комплекса L с не более, чем $N - 1$ симплексами отображение $t : TL \rightarrow L$ удовлетворяет пунктам теоремы. Предположим также, что на подкомплексах $M \subset L$, $TM = t^{-1}M$, и $\pi_1(TM) \rightarrow \pi_1(TL)$ является инъекцией. Поскольку всякий 1-мерный комплекс является пространством типа $K(\pi, 1)$, то отображение t может быть выбрано тождественным, если $\dim L \leq 1$.

Пусть теперь K получается из L приклеиванием n -симплекса σ к $\partial\sigma \subset L$, где $\dim \sigma \geq 2$. Тогда $T(\partial\sigma)$ является подпространством TL , и если $f : \sigma \rightarrow \Delta^n$ — симплициальный гомеоморфизм на стандартный n -симплекс, то отображение $Tf : T(\partial\sigma) \rightarrow T(\partial\Delta^n)$ является гомеоморфизмом. Кроме того, $T(\partial\Delta^n)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ по предположению индукции.

Вложение группы π в ациклическое пространство $C\pi$ индуцирует отображение классифицирующих пространств $g : T(\partial\Delta^n) \rightarrow K(C\pi, 1)$.

Тогда можно приклеить цилиндр отображения $g \circ Tf$ вдоль $T(\partial\sigma)$ к TL , а отображение t можно продолжить до отображения $t : TK \rightarrow K$, отправляя $K(C\pi, 1)$ в барицентр симплекса σ .

Проверим теперь, что отображение $t : TK \rightarrow K$ — искомое:

1. Рассмотрим две точные последовательности Майера-Виеториса для пространства

$$TK = \text{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$$

и для пространства

$$K = \sigma \sqcup_{\partial\sigma} L.$$

Тогда по предположению индукции и по 5-лемме мы будем иметь изоморфизм $H_n(TK; A) \cong H_n(K; A)$.

2. Склеиваемые пространства являются асферичными и склейка происходит вдоль асферичного пространства, также в фундаментальные группы пространств TL и $K(C\pi, 1)$ вкладывается группа π , поэтому по теореме Уайтхеда пространство $TK = \text{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$ будет иметь тип $K(\pi_1(TK), 1)$, где $\pi_1(TK) = \pi_1(TL) \star_{\pi} C\pi$. Кроме того, отображение $t_{\star} : \pi_1(TK) \rightarrow \pi_1(K)$ является эпиморфизмом, поскольку $\pi_1(K) = \pi_1(L) \star_{\pi_1(\partial\sigma)} \pi_1(\sigma)$ и в силу предположения индукции.

Заметим, что конструкция пространства TK является естественной относительно симплициальных отображений, сохраняющих строгий порядок. Таким образом, для конечных симплициальных комплексов теорема доказана. Беря копредел по конечным подкомплексам, можно получить результат для бесконечных симплициальных комплексов.

В общем случае, если X — произвольное линейно связное пространство, мы можем положить

$$TX = T(|SX|^{\prime\prime}),$$

где SX — сингулярный комплекс, рассматриваемый, как симплициальное множество, $|\cdot|$ — реализация симплициального множества, а двойной штрих — второе барицентрическое подразделение. Эта конструкция также является естественной.

Второй вариант конструкции Маундера (для конечных симплициальных комплексов). Докажем последний пункт теоремы. Пусть изначально X было конечным симплициальным комплексом.

Будем строить индукцией по размерности и числу клеток пару конечных симплициальных пространств (UK, TK) и отображение пар $t : (UK, TK) \rightarrow (CK, K)$, где CK — конус над K , такое, что ограничение t на TK является искомым отображением. Предположим, что мы уже построили $t : (UL, TL) \rightarrow (CL, L)$, такое, что

- (i) (UL, TL) является конечной симплициальной парой, $\dim UL = n + 1$, $\dim TL = n$;
- (ii) Для любого связного r -мерного подкомплекса M комплекса L выполнено: $t^{-1}(CM)$ и $t^{-1}(M)$ являются $(r+1)$ - и r -мерными подкомплексами UL и TL соответственно, ограничения $t : t^{-1}(CM) \rightarrow CM$, $t : t^{-1}(M) \rightarrow M$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы. Более того, пусть $\pi_1 t^{-1}(CM) \rightarrow \pi_1 UL$, $\pi_1 t^{-1}(M) \rightarrow \pi_1 TL$ и $\pi_1 t^{-1}(M) \rightarrow \pi_1 t^{-1}(CM)$ являются инъекциями.

База индукции — нульмерный остов. На нём полагаем t тождественным отображением, $UL = CL$. Теперь пусть K получен приклеивкой симплекса σ , размерности $n \geq 1$. Тогда по предположению индукции $t^{-1}(C\partial\sigma)$ и $t^{-1}(\partial\sigma)$ являются подкомплексами UL и TL соответственно. Пусть TK получается из TL приклеивкой копии $t^{-1}(C\partial\sigma)$ вдоль $t^{-1}(\partial\sigma)$. Продолжение $t : TK \rightarrow K$ будет отправлять $t^{-1}(C\partial\sigma)$ в $C\partial\sigma$, причём $C\partial\sigma$ отождествляется с σ так, что вершина симплекса $C\partial\sigma$ идёт в барицентр $\hat{\sigma}$ симплекса σ (а дальше отображение продолжается по линейности). Для построения UK рассмотрим комплекс

$$X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma).$$

Тогда X будет пространством типа $K(\pi, 1)$, где $\pi = G \star_F G$, $G = \pi_1(t^{-1}(C\partial\sigma))$ и ясно, что $\dim X = \dim \sigma = n$. Рассмотрим следующее образование:

$$UK := (UL \cup TK) \sqcup_X \text{Cyl},$$

где Cyl — это цилиндр отображения $X = K(G \star_F G, 1) \rightarrow K((A \times F) \star_F G, 1)$, в котором A — нетривиальная геометрически конечная ацикличная группа с $\dim K(A, 1) = 2$ (например, группа Хигмана Hig_4). Отображение t продолжается на UK отправлением $K((A \times F) \star_F G, 1)$ в барицентр конуса $C\sigma$. Если $\dim \sigma = 1$, нужно вместо $G \star_F G$ взять группу \mathbb{Z} , которая должна вкладываться в A вместо $(A \times F) \star_F G$.

Пространство $K((A \times F) \star_F G, 1)$ является ацикличным относительно системы коэффициентов $t^* \mathcal{A}$, поскольку последняя тривиальна. Действительно, она

получается из системы \mathcal{A} на X pullback'ом вдоль отображения $t : t^{-1}(C\partial\sigma) \rightarrow C\partial\sigma$, но конус $C\partial\sigma$ стягиваем, и значит, система \mathcal{A} на нём тривиальна.

Далее, из доказательства утверждения [??] получается, что $\dim K((A \times F) \star_F G, 1) = n + 1$.

Заметим, что на каждом шаге цилиндры отображения можно представить в виде симплицеального разбиения, поэтому мы получаем конечный симплицеальный комплекс с требуемыми свойствами. Эта конструкция также естественна по пространству X .

□

8.2 Конструкция Маундера для двумерного симплекса

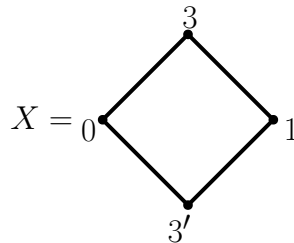
Приведём здесь пошаговое построение конструкции Маундера пространства Кана-Тёрстона для 2-мерного диска \mathbb{D}^2 .

Шаг 0. Сначала мы имели нульмерный остов, состоящий из 3 вершин $L = \{[0], [1], [2]\}$. В этом случае конус является объединением трёх отрезков: $CL = \{[3, 0], [3, 1], [3, 2]\}$. Конструкция Кана-Тёрстона TL совпадёт с L и пространство UL совпадёт с CL . Отображение пар $t : (UL, TL) \rightarrow (CL, L)$ будет тождественным.

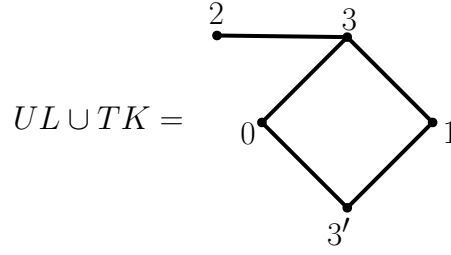
Шаг 1. Приклеим 1-симплекс $\sigma = [0, 1]$ к комплексу L и получим комплекс K . Тогда $C\partial\sigma$ будет «рогом» $[3, 0] \cup [3, 1]$, $t^{-1}(C\partial\sigma) = [3, 0] \cup [3, 1]$, и $t^{-1}(\partial\sigma) = [0] \cup [1]$. Значит, $TK = TL \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3', 0] \cup [3', 1] \cup [2]$ — это объединение двух отрезков и точки, причём при отображении $t : TK \rightarrow K$ вершина $[3]$ отображается в середину отрезка $[0, 1]$.



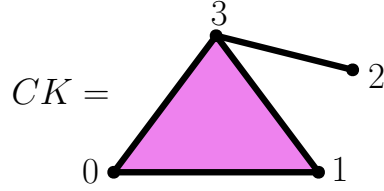
Пространство $X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3, 0] \cup [3, 1] \cup [3', 0] \cup [3', 1]$ — это окружность $K(\mathbb{Z}, 1)$.



Далее, мы должны приклеить к объединению $UL \cup TK$ к пространству X . В результате получится:



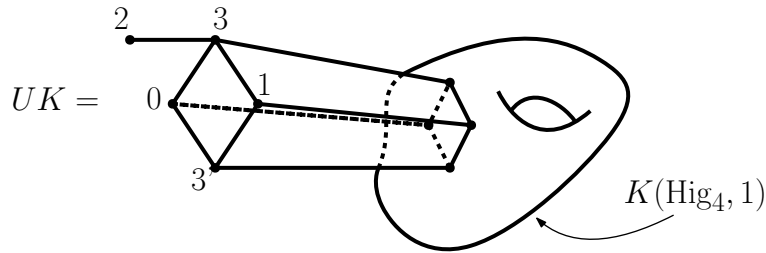
Комплекс CK будет выглядеть так:



Теперь нужно приклеить к пространству $UL \cup TK$ цилиндр отображения $X \simeq K(\mathbb{Z}, 1) \rightarrow K(\text{Hig}_4, 1)$, и мы получим пространство UK .

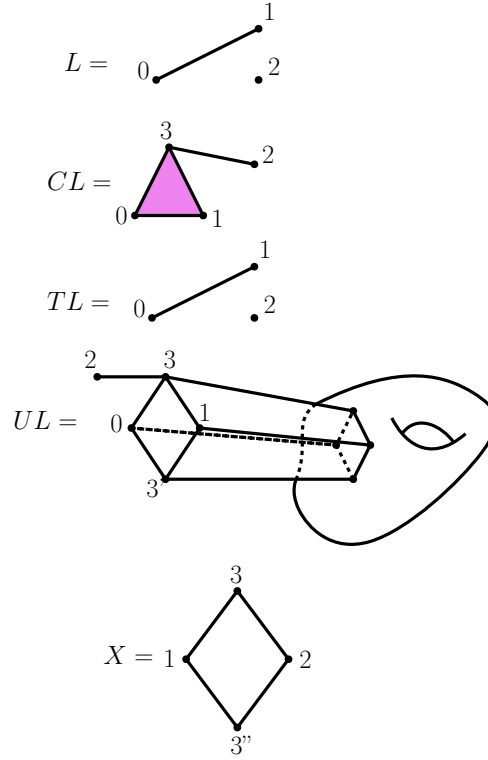
Отображение $t : TK \rightarrow K$ будет отображать комплекс $K(\text{Hig}_4, 1)$ в барицентр $[4]$ треугольника $[0, 3, 1]$. При этом грани «призмы», примыкающие к сторонам $[3, 0]$ и $[3, 1]$ отобразятся на треугольник $[4, 0, 1]$. Две другие грани «призмы», примыкающие к отрезкам $[0, 3]$ и $[3, 1]$ отобразятся на треугольники $[4, 0, 3]$ и $[4, 3, 1]$ соответственно.

Обозначим для удобства дальнейшего изложения получившееся образование за $A := UK$.



Шаг 2. Переобозначим полученную пару комплексов через (UL, TL) и будем приклеивать следующий 1-симплекс $[1, 2]$.

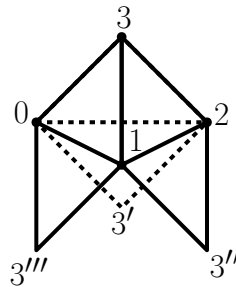
Пока мы имеем такие данные:



Пространство TK будет представлять собою $[0, 1] \cup [3'', 1] \cup [3'', 2]$ и будет отображаться в K , отправляя точку $3''$ в барицентр отрезка $[1, 2]$. В качестве пространства UK будет выступать объединение отрезка $[0, 1]$ и пространства с двумя склеенными копиями A , причём вторая копия A будет подклеиваться к «рогу» $[3, 2] \cup [3, 1]$.

Шаг 3. Приклеим третье ребро $[0, 2]$. В результате, к UL подклеится ещё одна копия пространства типа A с прошлого шага, но уже к рогу $[3, 2] \cup [3, 0]$, также к UL подклеится отрезок $[1, 2]$. Пространство Кана-Тёрстона будет $[0, 1] \cup [1, 2] \cup [3''', 2] \cup [3''', 0]$ — окружность.

Шаг 4. Подклейка двумерной клетки к границе треугольника. Комплекс $T\Delta^2$ будет представлять собой три образования типа A , склеенных вдоль трёх рогов с общей вершиной $[3]$ и остальными вершинами $[0], [1], [2]$. Приведём здесь схему расположения «рогов»:



Как устроено отображение $t : TK \rightarrow K$? Конус над границей треугольника $[0, 1, 2]$ с вершиной $[3]$ переходит в треугольник $[0, 1, 2]$ так, что вершина

[3] отображается в барицентр треугольника $[0, 1, 2]$, а остальные вершины конуса переходят тождественно в вершины этого треугольника. На другие точки этого конуса отображение t продолжается по линейности. На каждом из трёх подклеенных цилиндров отображение t уже задано.

Полученное пространство $T\mathbb{D}^2$ имеет в качестве фундаментальной группы свободное произведение трёх групп Хигмана Hig_4 . То есть для стягиваемых пространств конструкция Маундера даёт нестягиваемые ациклические пространства. Это наглядно иллюстрирует тот факт, что функтор Кана-Тёрстона не является гомотопическим.

8.3 Модификация конструкции Маундера

Из следствия 15.2 теоремы 15 получается, что в первой конструкции Маундера в качестве гомологического конуса будет годиться универсальная конечно определённая ациклическая группа \mathfrak{U} (см. §5). В обозначениях этой конструкции $\pi_1(T\partial\sigma) = \pi$ вкладывается в $\mathfrak{U} = C\pi$ и затем к $T\partial\sigma$ приклеивается цилиндр отображения $T(\partial\sigma) \rightarrow K(\mathfrak{U}, 1)$.

Однако если исходно мы имели конечный симплициальный комплекс X , то в результате получится бесконечномерный симплициальный комплекс TX с конечным числом клеток каждой размерности, поскольку группа \mathfrak{U} имеет кручение (см. §5).

8.4 Проблема однозначности конструкции Маундера

Рассмотренные функторы типа Кана-Тёрстона T существенным образом зависят от симплициального разбиения исходного пространства X , а также от выбора групповых конусов. Рассмотренный выше пример конструкции Маундера $T\delta^2$ показывает, что T не является гомотопическим функтором. Однако если зафиксировать выбор вложения в групповой конус (например, вкладывать группы в универсальную ациклическую группу Хигмана \mathfrak{U}), то фундаментальная группа пространства TX некоторым образом характеризует комбинаторику исходного симплициального комплекса X .

§9 Группы, свободно действующие на ациклических пространствах

Рассмотренные выше функторы Дрора A , Кана-Тёрстона T дают надежду на обобщение понятия универсального расслоения. А именно, для данной груп-

пы G зададимся поиском ациклического, но не стягиваемого пространства $\mathcal{E}G$, на котором дискретная группа G действует свободно.

Естественность функтора Дрора давала надежду на то, что он переводит накрытия симплициальных множеств в накрытия. Другая гипотеза состояла в том, что композиция $A\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \rightarrow X$ является накрытием. Однако обе эти гипотезы неверны, поскольку имеет место следующее

Утверждение 11. *Если $\mathcal{E}G \rightarrow \mathcal{B}G$ — G -накрытие с гомологически тривиальным $\mathcal{E}G$, то $\mathcal{B}G$ имеет такие же гомологии с коэффициентами в тривиальном G -модуле \mathbb{Z} , как и BG .*

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Картана-Лере

$$H_p(G; H_q(\mathcal{E}G)) \Rightarrow H_*(\mathcal{B}G).$$

Она вырождается во втором члене, поэтому

$$H_n(\mathcal{B}G) \cong H_n(G; H_0(\mathcal{E}G)) = H_n(G; \mathbb{Z}) = H_n(G).$$

Последнее равенство верно в силу тривиальности G -модуля \mathbb{Z} . □

После чего при работе возникла гипотеза, связанная уже с применением функтора Кана-Тёрстона: существует ли такая конструкция функтора Кана-Тёрстона T , что если $\tilde{X} \rightarrow X$ является универсальным G -накрытием, то $T\tilde{X} \rightarrow TX$ тоже является G -накрытием. Модификация первой конструкции Маундера, рассмотренная в параграфе 8.3 является искомой, то есть справедлива

Теорема 20. *Существует функтор типа Кана-Тёрстона, переводящий G -накрытия в G -накрытия.*

Доказательство. Пусть отображение симплициальных комплексов $Y \rightarrow X$ является G -накрытием, т. е. на пространстве Y задано свободное симплициальное действие дискретной группы G , такое, что в факторе Y/G получается пространство X . Покажем, что по действию $G \curvearrowright Y$ можно построить действие $G \curvearrowright TY$. Поскольку $\text{sk}^1 TY = Y$, то на одномерном скелете действие G уже задано. Предположим теперь, что мы подклеиваем к комплексу $L \subset Y$ некоторую клетку σ и мы смогли уже задать действие G на TL . Приклейте клетки σ соответствует приклейка цилиндра $\text{Cyl} = \text{Cyl}(T(\partial\sigma) \rightarrow K(C\pi_1(T\partial\sigma), 1))$ к TL . Пусть элемент g переводит $T\partial\sigma$ в $T\partial\sigma'$. Тогда будет считать, что g будет переводить подклеивающийся цилиндр Cyl в его копию Cyl' , которая будет подклеиваться к $T\sigma'$. Таким образом можно продолжить действие с орбиты $T\sigma$ на подклеенные цилиндры и значит, в конечном счёте на всё пространство TY . □

Следствие 20.1. *Для любой дискретной группы G существует ациклическое нестягиваемое пространство $\mathcal{E}G$ с дискретным действием группы G . Факторпространство по этому действию будет представлять собой пространство $\mathcal{B}G$, гомологически эквивалентное классифицирующему пространству BG группы G .*

Доказательство. Достаточно применить теорему 20 к универсальному накрытию $\mathcal{E}G \rightarrow \mathcal{B}G$. Гомологическая эквивалентность $\mathcal{B}G$ и BG следует из утверждения 11. \square

§10 Классифицирующие пространства моноидов

Как мы знаем, по любой дискретной группе G можно построить классифицирующее пространство BG , рассмотрев бар-конструкцию.

Но можно построить BG как реализацию нерва некоторой категории. А именно, пусть \mathcal{G} — категория, состоящая из одного объекта и морфизмов, соответствующих элементам группы G . Нервом категории \mathcal{G} будет являться симплициальное множество, n -симплекс которого является последовательность

$$\bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet$$

Оператор грани d_i будет сопоставлять данной последовательности следующую:

$$\bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{g_{i+1}g_i} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet$$

Отображение вырождения s_i будет вставлять на место i тождественный морфизм, соответствующий единице группы.

Предложение 2. *Бар-конструкция для G и геометрическая реализация нерва $|\mathcal{N}(\mathcal{G})|$ построенной выше категории \mathcal{G} гомеоморфны.*

Симплициальную конструкцию классифицирующего пространства безболезненно можно перенести на случай любого моноида M . Но в этом случае не следует ожидать, что BM будет слабо гомотопически эквивалентно пространству $K(G, 1)$, где G — некоторая дискретная группа. Это следует из такого замечательного результата:

Теорема 21 (D. McDuff, 1978, [10]). *Любое линейно связное пространство слабо гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству BM некоторого дискретного моноида M .*

Можно задаться вопросом о том, в каких случаях всё же $BM \simeq K(G, 1)$. Естественно ожидать, чтобы группа G была в некотором смысле близка к исходному моноиду M . Для любого моноида можно построить такую универсальную группу G , и она называется *группификацией* моноида M . Рассмотрим свободную группу Γ , натянутую на элементы моноида M и формально обратные к ним и профакторизуем Γ по наименьшей нормальной подгруппе N , содержащей соотношения вида $xy = z$, если такое равенство имело место в исходном моноиде M . Тогда Γ/N называется группификацией моноида M .

Определение 12. Группификацией моноида M называется такая группа G с гомоморфизмом φ , что для любой группы H и любого гомоморфизма $\psi : G \rightarrow H$ существует единственный гомоморфизм $f : M \rightarrow H$, замыкающий диаграмму до коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & G \\ & \searrow f & \downarrow \psi \\ & & H \end{array}$$

Пример 2 (А. Мальцев, 1937, [11], [12]). Рассмотрим свободный моноид

$$F = \langle a, b, c, d, x, y, u, v \rangle$$

и его фактор \mathcal{M} по отождествлениям (ax, by) , (cx, dy) и (au, bv) . Мальцев показал, что $cu \neq dv$ и что моноид \mathcal{M} несокращаемый. Откуда получается, что \mathcal{M} нельзя вложить ни в какую группу, иначе было бы: $[d^{-1}c] = [yx^{-1}] = [b^{-1}a] = [vu^{-1}]$. Значит, $[cu] = [dv]$

Этот пример показывает, что не всегда моноид вкладывается в свою группификацию. Однако в некоторых случаях вложение имеет место:

Утверждение 12. *Отображение в группификацию коммутативного сокращаемого моноида является вложением.*

Здесь под *сокращаемым моноидом* понимается такой моноид M , в котором из $xy = xz$ следует, что $y = z$ и из $yx = zx$ следует, что $y = z$.

Список литературы

- [1] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015

- [2] G. Baumslag, E. Dyer & A. Heller, *The topology of discrete groups*, J. of Pure and Appl. Alg. 16 (1980), 1- 47. | MR 549702 | Zbl 0419.20026
- [3] A. Deleanu, *On a theorem of Baumslag, Dyer and Heller linking group theory and topology*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, no 3 (1982), p. 231-242
- [4] D. Kan and W. Thurston, *Every connected space has the homology of a $K(\pi, 1)$* , Topology Vol. 15. pp. 253–258, 1976.
- [5] G. Higman, *A Finitely Generated Infinite Simple Group*, Volume s1-26, Issue 1 p. 61-64 Journal of the London Mathematical Society. Notes and Papers.
- [6] C. R. F. Maunder, *A Short Proof of a Theorem of Kan and Thurston*, Bulletin of the London Mathematical Society, Volume 13, Issue 4, July 1981, Pages 325–327, <https://doi.org/10.1112/blms/13.4.325>
- [7] Berrick, Hillman, *Perfect and acyclic subgroups of finitely presentable groups*, J. London Math. Soc. (2) 68 (2003) 683–698
- [8] Dyer, E., Vasquez, A. (1973), *Some small aspherical spaces*, Journal of the Australian Mathematical Society, 16(3), 332-352. doi:10.1017/S1446788700015147
- [9] N. Monod, *Variations on a theme by Higman*, <https://arxiv.org/abs/1604.05454>
- [10] Dusa McDuff, *On the classifying spaces of discrete monoids*, Topology, Volume 18, Issue 4, 1979, Pages 313-320
- [11] A. Malcev, 1937, *On the Immersion of an Algebraic Ring into a Field*, Mathematische Annalen, vol. 113, no. 1, pp. 686 — 691.
- [12] O. Lenz, *The classifying space of a monoid*, Thesis submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Master of Science in Mathematics, 2011, Advisor: Dr. Lenny D.J. Taelman
- [13] Kervaire M., *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Transactions of the American Mathematical Society. 144: 67–72, 1969
- [14] Milnor J., *On simply connected 4-manifolds*, Symposium internacional de topologia algebraica, Universidad Nacional Autnoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958, pp. 122-128. MR 21 #2240
- [15] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трех- мерной сферы, УМН, 1974, том 29, выпуск 5(179), 71–168

- [16] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и определяющих соотношений*, М.: Наука, 1974.
- [17] R. Milgram, *The bar construction and abelian H-spaces*, Illinois J. Math. 11 (1967), 242-250.
- [18] John Milnor, *Construction of Universal Bundles*, I, Ann. of Math. 63:2 (1956) 272-284
- [19] Eilenberg, Samuel; Ganea, Tudor (1957). *On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups*. Annals of Mathematics. 2nd Ser. 65 (3): 517–518
- [20] A. J. Berrick, *A topologist's view of perfect and acyclic groups*, Invitations to Geometry and Topology, ed. M. R. Bridson, S. M. Salamon, Oxford Graduate Texts in Math. 5, Oxford Univ. Press (Oxford, 2002), ch. 1: 1–28.
- [21] Н. Э. Добринская, *Гипотеза Арнольда–Тома–Фама и классифицирующее пространство положительного моноида Артина*, УМН, 57:6(348) (2002), 181–182; Russian Math. Surveys, 57:6 (2002), 1215–1217
- [22] Новиков П. С., Адян С. И., *О бесконечных периодических группах*. I // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1968. — Т. 32, выпуск 1. — С. 212–244.
- [23] Daniel G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967
- [24] Aldridge K. Bousfield Daniel M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Mathematics book series (LNM, volume 304), 1972
- [25] E. Dror, *Acyclic spaces*, Vol. II, pp. 339-348, Pergamon Press, 1972
- [26] G. Baumslag, E. Dyer, C.F. Miller, *On the integral homology of finitely presented groups*, Topology, Volume 22, Issue 1, 1983, Pages 27-46
- [27] Stilwell, J., Serre, J.P., *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2002
- [28] Higman Graham, *Subgroups of finitely presented groups*, Proc. R. Soc. Lond. A262455–475, 1961
- [29] <https://arxiv.org/abs/1610.00977>

- [30] G. Higman, B. H. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. 24 (1949) 247–254.
- [31] J. N. Mather, *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Vol. 10, pp. 197-298, 1971.