

# Топологические инварианты конечно определённых групп

## §1 Введение

Д. Кан и У. Тёрстон доказали ([4], 1976), что (ко)гомологии классифицирующего пространства  $K(G, 1) =: TX$  дискретной группы  $G$  могут быть такими, как у произвольного линейно связного пространства  $X$ . Причём отображение  $t : TX \rightarrow X$  естественно по  $X$ , и  $T$  является функтором.

В той же работе было отмечено, что функтор  $T$  и функтор плюс-конструкции Квиллена  $(\cdot)^+$  в некотором смысле взаимно обратны. Они устанавливают эквивалентность категории гомотопий CW-комплексов и локализации категории  $GP$ . Объектами последней являются пары  $(G, P)$ , где  $P$  — совершенная нормальная подгруппа группы  $G$ , а морфизмами являются такие гомоморфизмы  $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$ , что  $f(P) < P'$ . Локализация происходит по тем морфизмам категории  $GP$ , которые индуцируют изоморфизмы на фактор группах  $G/P \rightarrow G'/P'$  и на гомологиях  $H(G; A) \rightarrow H(G'; A)$ . Таким образом, теория гомотопий CW-комплексов восстанавливается из теории дискретных групп.

Классифицирующие пространства групп имеют большое значение в топологии и алгебре. Известное множество их конструкций: например, конструкция Милнора [18], конструкция Милграма [17], категорный подход через симплициальные множества [12] и др. Интересно было бы найти обозримую симплициальную функториальную конструкцию классифицирующих пространств групп. Это бы позволило, например, подойти к определению торических (ко)гомологий конечно определённых групп: их можно было бы определить, как (ко)гомологии момент-угол комплекса, построенного по симплициальному классифицирующему пространству данной группы.

Важно заметить также, что имеются модификации конструкция Кана — Тёрстона, которые для конечных CW-комплексов дают дискретные группы, классифицирующие пространства которых являются конечными клеточными комплексами [2], [6]. Проблема геометрической размерности дискретных групп имеет давнюю историю. Известная теорема Эйленберга — Ганея [19] утверждает,

что для любой конечно определённой группы  $G$  кохомологической размерности не больше  $n$ , где  $n \geq 3$ , существует асферичный  $n$ -мерный CW-комплекс  $X = K(G, 1)$ . Для  $n = 2$  — это гипотеза, открытая и по настоящее время.

С конструкцией Кана-Тёрстона тесно связаны ациклические дискретные группы. Они могут возникать, как фундаментальные группы  $n$ -узлов, гомотопических сфер, как группы гомеоморфизмов многообразий, возникают в теории слоений [20] и др. Большой интерес представляют конечно определённые ациклические группы. Одним из простейших нетривиальных примеров [5] являются группы Хигмана  $\text{Hig}_n$ ,  $n = 4, 5, \dots$ . Эти группы замечательны ещё и тем, что они имеют конечную геометрическую размерность: их классифицирующим пространством может быть выбран конечный двумерный клеточный комплекс [2]. Ациклические пространства и группы дают надежду на обобщение классических конструкций топологии. Например, можно попробовать обобщить конструкции, в которых участвуют стягиваемые пространства, заменив последние некоторым образом на ациклические пространства.

Можно задаться вопросом о том, когда данная ациклическая группа имеет конечную геометрическую размерность. Дополнительную сложность задаче придаёт то, что кохомологическая размерность равна 0. Однако, как показали Уолл и Милнор, препятствием пространству  $X$  быть гомотопически эквивалентным конечному комплексу служит так называемое кручение Уайтхеда  $\text{Wh}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$  группового кольца  $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ .

Близким к данному кругу вопросов являются вопросы о классифицирующих пространствах моноидов. В этом контексте можно упомянуть гипотезу Арнольда-Тома-Фама [21] и проблему Бёрнсайда [22].

## §2 Напоминание о гомологиях дискретных групп

По данной дискретной группе  $G$  можно, как известно, построить стягиваемый симплициальный комплекс  $EG$  со свободным действием  $G$ . Факторпространство  $BG := EG/G$  называется *классифицирующим пространством* группы  $G$ .

Классифицирующее пространство дискретной группы  $G$  имеет тип  $K(G, 1)$ .

**Определение 1.** Гомологиями дискретной группы  $G$  с тривиальными коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  называются гомологии (симплициальные, клеточные и др.) классифицирующего пространства группы  $G$ , то есть  $H_i(G; \mathbb{Z}) := H_i(BG; \mathbb{Z})$ . В случае локальных коэффициентов в  $G$ -модуле  $M$  это гомологии с локальными коэффициентами  $H_i(BG; M)$ .

Существуют различные конструкции классифицирующих пространств для топологических и дискретных групп. Сюда относится конструкция с джойнами

Милнора, бар-конструкция, конструкция Милграма, категорная конструкция через геометрическую реализацию некоторого симплициального множества и др.

Также гомологии группы  $G$  могут быть определены чисто алгебраическим путём.

**Определение 2.** Гомологиями дискретной группы с коэффициентами в  $G$ -модуле  $M$  называются группы  $H_n(G, M) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ .

**Утверждение 1.** Два определения гомологий групп равносильны.

Имеется интересный класс групп, гомологии которых в  $\mathbb{Z}$  устроены, как гомологии точки. Такие группы называются *ациклическими*.

Заметим, что ациклических групп в любой локальной системе коэффициентов не существует, поскольку имеет место

**Теорема 1** (Столлингс ???). *Если кохомологическая размерность конечно порождённой группы  $G$  не превосходит 1, то  $G$  является свободной (т. е.  $K(G, 1)$  гомотопически эквивалентно букету окружностей).*

В силу этого замечания, если не оговорено противное, под ациклическостью будет пониматься именно ациклическость в гомологиях с тривиальными коэффициентами в  $\mathbb{Z}$ .

## §3 Примеры ациклических дискретных групп

В этом параграфе приводятся два примера конечно представленных ациклических групп, классифицирующие пространства которых могут быть реализованы двумерными симплициальными комплексами.

### 3.1 Группа $\mathfrak{A}$

Рассмотрим простой пример нетривиальной ациклической группы — группу  $\mathfrak{A}$  из статьи [2].

Для её построения сначала введём две группы:

$$F = \langle a, b \rangle,$$

$$C = \langle u = a, v = b^{-1}a^{-1}bab, w = b^{-2}ab^{-1}a^{-2}bab^2, x = b^{-3}ab^{-1}a^{-2}bab^3 \rangle.$$

Группа  $F$  — свободная на двух образующих, а группа  $C$  — свободная на четырёх образующих.

При помощи  $F$  и  $C$  мы можем получить группу

$$\mathfrak{A} = \{F_1 \star F_2; C_1 \cong_{\varphi} C_2\},$$

где  $F_1, F_2$  — две копии группы  $F$ , а  $C_1, C_2$  — копии группы  $C$ , причём склейка происходит вдоль изоморфизма  $\varphi : C_1 \rightarrow C_2$ , такого, что

$$u_1 \mapsto x_2, \quad v_1 \mapsto w_2, \quad w_1 \mapsto v_2, \quad x_1 \mapsto u_2.$$

**Утверждение 2.** *Группа  $\mathfrak{A}$  нетривиальна.*

*Доказательство.* Как известно, свободные группы нетривиальны. Но результат амальгамированного произведения двух нетривиальных групп по их общей подгруппе будет нетривиальной группой. Последнее следует, например, из теории Басса-Серра (см., например, [27]).  $\square$

**Утверждение 3** ([2]). *Группа  $\mathfrak{A}$  является ациклической.*

*Доказательство.* По построению группа  $\mathfrak{A}$  является совершенной.

Кроме того, пространство  $K(\mathfrak{A}, 1)$  можно реализовать в виде конечного клеточного двумерного комплекса, поскольку он является пушаутом двух копий пространства  $K(F, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  вдоль пространства  $K(C, 1) \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ , то есть

$$K(\mathfrak{A}, 1) = K(F, 1) \sqcup_{K(C, 1)} K(F, 1).$$

Имеет место точная последовательность Майера-Виеториса с постоянными коэффициентами в  $\mathbb{Z}$

$$\dots \rightarrow H_{n+1}\mathfrak{A} \rightarrow H_n C \rightarrow H_n F_1 \oplus H_n F_2 \rightarrow H_n \mathfrak{A} \rightarrow \dots$$

В силу того, что  $K(F, 1)$  и  $K(C, 1)$  — букеты окружностей, сразу получается, что  $H_n \mathfrak{A} = 0$  при  $n > 2$ . Рассмотрим теперь участок точной последовательности для случая  $n = 2$ :

$$0 \rightarrow H_2 \mathfrak{A} \rightarrow H_1 C \rightarrow H_1 F_1 \oplus H_1 F_2 \rightarrow 0.$$

Но обе свободные абелевы группы  $H_1 C$  и  $H_1 F_1 \oplus H_1 F_2$  имеют ранг 4. Следовательно, они изоморфны, и  $H_2 \mathfrak{A} = 0$  в силу точности.  $\square$

Для дальнейшего нам понадобится важная

**Теорема 2** (Дж. Уайтхед, 1939). Пусть группа  $G$  является *pushout*-ом в категории  $\mathbf{Grp}$  в следующей диаграмме

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & G \end{array}$$

Тогда следующая диаграмма является *pushout*-ом в категории  $\mathbf{Top}$

$$\begin{array}{ccc} K(C, 1) & \longrightarrow & K(A, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(B, 1) & \longrightarrow & K(G, 1) \end{array}$$

**Следствие 2.1** ([2]). Если  $G = A \star_C B$  является амальгамой групп  $A$  и  $B$ , для которых существуют конечные симплициальные реализации пространств  $K(A, 1)$ ,  $K(B, 1)$  и  $K(C, 1)$ , тогда  $K(G, 1)$  тоже может быть реализовано в виде конечного симплициального комплекса. Причём имеет место оценка на размерности

$$\dim G \leq \max(\dim A, \dim B, 1 + \dim C).$$

*Доказательство.* Вложениям  $C \hookrightarrow A$  и  $C \hookrightarrow B$  соответствуют отображения классифицирующих пространств  $K(C, 1) \rightarrow K(A, 1)$  и  $K(C, 1) \rightarrow K(B, 1)$ . Возьмём цилиндры этих отображений и склеим их вдоль комплекса  $K(C, 1)$ .  $\square$

Отсюда получается

**Утверждение 4.** Группа  $\mathfrak{A}$  является ациклической относительно тривиальной системы коэффициентов в  $\mathbb{Z}$  и может быть реализована в виде конечного двумерного клеточного комплекса.

## 3.2 Группы Хигмана $\mathbf{Hig}_n$

Эти группы были придуманы Г. Хигманом в работе [5], 1951, как примеры конечно определённых групп, не имеющих подгрупп конечного индекса.

Рассмотрим сначала группу

$$\mathbf{Hig}_4 = \langle a, b, c, d \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}dc = d^2, d^{-1}ad = a^2 \rangle.$$

Опишем, как можно получить эту группу при помощи операций HNN-расширения и амальгамированного свободного произведения.

Рассмотрим группу Баумслага-Солитера:

$$\text{BS}(1, 2) = K = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \rangle.$$

Можно заметить, что группа  $K$  является HNN-расширением группы  $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}$  при помощи изоморфизма подгрупп  $\langle b \rangle \cong \langle b^2 \rangle$ . В первую очередь, группа  $K$  ненулевая по лемме Бриттона, поскольку в неё вкладывается группа  $\langle a \rangle$ .

Дайер и Васкез показали, что верна

**Теорема 3** (Е. Dyer, А. Т. Vasquez, 1972, [8]). Пусть  $P = \langle S \mid r \rangle$  — представление группы  $G$  с одним соотношением  $r \in F(S)$ , и  $r$  не является степенью (большей 1) никакого слова. Тогда клеточный 2-комплекс, получаемый обычной приклейкой 2-клетки к букету окружностей, биективно соответствующих образующим из  $S$  вдоль слова  $r$ , асферичен.

**Следствие 3.1.** В качестве классифицирующего пространства группы  $K$  можно взять 2-комплекс, получаемый из букета двух окружностей некоторой приклейкой 2-клетки.

Из теорем Хопфа очевидно следует, что  $H_2(K) = 0$  и  $H_1(K) = \mathbb{Z}$ . Следовательно, мы знаем гомологии группы  $K$ :

**Предложение 1.** Гомологии группы  $K$  устроены следующим образом:

$$\begin{cases} H_n(K) = 0, & n \geq 2, \\ H_1(K) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Построим группу

$$L = K_1 \star_{\mathbb{Z}} K_2 = \langle a, b, c \mid a^b = a^2, b^c = b^2 \rangle,$$

где  $K_i \cong K$ , и склейка происходит вдоль вложений  $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \hookrightarrow L$ ,  $\mathbb{Z} \cong \langle b \rangle \hookrightarrow L$ . Очевидно, что  $H_1(L) = \mathbb{Z}$ , и из точной последовательности Майера-Виеториеса и предложения выше следует, что  $H_n(L) = 0$  при  $n \geq 2$ .

Снова беря амальгаму  $L_1 \star_{\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}} L_2$ , где  $L_i \cong L$ , получающуюся склейкой  $\langle a_1, c_1 \rangle \cong \langle a_2, c_2 \rangle$ , мы получаем группу Хигмана  $\text{Hig}_4$ . Аналогичные рассуждения с точной последовательностью Майера-Виеториеса показывают, что  $\text{Hig}_4$  ациклична.

Из приведённой конструкции группы  $\text{Hig}_n$  следует, что в ней отсутствует кручение, поскольку оно отсутствовало на каждом шаге в силу свойств HNN-расширений и амальгамы (теория Басса-Серра).

Теперь рассмотрим обобщённую группу Хигмана

$$\text{Hig}_n = \langle x_i, i \in \mathbb{Z}/n \mid [x_{i-1}, x_i] = x_i \rangle,$$

где  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

**Утверждение 5** ([5]). Для  $n \leq 3$  группа  $\text{Hig}_n$  тривиальна.

*Доказательство.* Случай  $n = 2$  очевиден. Для  $n = 3$  достаточно выразить одну из образующих  $x_3$  через  $x_1, x_2$ , тогда  $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\}$  — здесь имеется в виду равенство подгрупп, порождённых соответствующими элементами. Но, с одной стороны, очевидно, что  $\{x_1, x_2, x_3\}' = \{x_1, x_2, x_3\}$ . А с другой,  $\{x_1, x_2\}' = 0$ .  $\square$

**Утверждение 6.** При  $n \geq 4$  группа  $\text{Hig}_n$  нетривиальна.

Данное утверждение будет следовать из конструкции  $\text{Hig}_n$  ниже. Дело в том, что конструкцию последовательных амальгам для  $\text{Hig}_4$  можно обобщить на случай  $\text{Hig}_n$  ( $n \geq 4$ ).

Будем обозначать через  $K_i$  группы, изоморфные группе

$$K = \langle x, h \mid [h, x] = x \rangle,$$

буквы алфавита которых такие же, как у  $K$  но с индексами  $i$ . Также обозначим

$$L = \langle K_0, K_1 \mid x_0 = h_1 \rangle.$$

Тогда группа Хигмана  $\text{Hig}_n$  следующего порядка получается из группы

$$G_{n-1} = \langle K_2, \dots, K_{n-1} \mid x_2 = h_3, \dots, x_{n-2} = h_{n-1} \rangle$$

амальгамой с группой  $L$ :

$$\text{Hig}_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}} L,$$

где склейка происходит вдоль свободных подгрупп  $\langle h_0, x_1 \rangle$  и  $\langle x_{n-1}, h_2 \rangle$  ( $h_0 \sim x_{n-1}$ ,  $x_1 \sim h_2$ ).

Заметим, что

$$G_n = G_{n-1} \star_{\mathbb{Z}} K$$

с отождествлением  $x_{n-1} = h_n$ .

Заметим, что из следствия к теореме [8], описанной конструкции построения группы  $\text{Hig}_n$  при помощи амальгам и групп  $K$  и в силу утверждения 4 классифицирующее пространство группы Хигмана может быть выбрано конечным комплексом. А именно, следует

**Теорема 4.** Пространство  $K(\text{Hig}_n, 1)$  можно взять в виде 2-комплекса с одной нуль-клеткой,  $n$  один-клетками и  $n$  два-клетками.

Таким образом, адикличность групп  $\text{Hig}_n$  в размерностях, больших двойки, получается из предыдущей теоремы. При помощи последовательности Майера-Вьеториеса можно показать нулёвость гомологий в оставшихся размерностях. Для этого докажем лемму:

**Лемма 1.** *Группы  $G_k$  имеют следующие гомологии:*

$$H_n(G_k) = 0, \quad k \geq 2,$$

$$H_1(G_k) = \mathbb{Z}.$$

*Доказательство.* Будем вести индукцию по  $k$  для  $G_k$ . База: при  $k = 3$  группа  $G_3$  изоморфна группе  $L$ , которую мы рассмотрели выше.

Допустим, что теорема выполняется для группы  $G_{k-1}$ . Рассмотрим  $G_k = G_{k-1} \star_{\mathbb{Z}} K$  и напомним точную последовательность Майера-Виеториеса. Из неё или из соображения геометрической размерности очевидно будет следовать, что  $H_n(G_k) = 0$  при  $n \geq 3$ . Рассмотрим случай  $n = 2$ :

$$0 \rightarrow H_2(G_k) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_1(G_{k-1}) \oplus H_1(K) \rightarrow H_1(G_k) \rightarrow 0.$$

Абеленизация группы  $G_k$  равна  $\mathbb{Z}$  в силу того, что в каждом слагаемом  $L_i$  элемент  $x_i$  является коммутатором, а элемент  $h_i$  склеивается с элементом  $x_{i-1}$  для всех  $i = 3, \dots, n$ . Только элемент  $h_n$  не склеится ни с каким коммутатором, и, следовательно, будет образующим абеленизации. Но тогда в силу точности  $H_2(G_k) = 0$ .  $\square$

**Следствие 4.1.** *Группы Хигмана  $\text{Hig}_n$  ациклически.*

*Доказательство.* Очевидно, что  $\text{Hig}_n$  совершенна. По теореме 4 группа  $\text{Hig}_n$  имеет геометрическую размерность 2. Осталось показать, что  $H_2(\text{Hig}_n) = 0$ . Имеем

$$0 \rightarrow H_2(\text{Hig}_n) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_1(G_{n-1}) \oplus H_1(L) \rightarrow H_1(\text{Hig}_n).$$

По предложению выше  $H_1(G_{n-1}) = \mathbb{Z}$  и  $H_1(L) = \mathbb{Z}$ . Следовательно, третья стрелка — изоморфизм. Значит,  $H_2(\text{Hig}_n) = 0$  из точности. Дальнейшее аналогично следует из предложения выше.  $\square$

Классифицирующее пространство любой группы Хигмана  $\text{Hig}_n$  является двумерным комплексом, поэтому группа  $\text{Hig}_n$  не имеет кручения. Но это также может быть выведено из свойств операций амальгамированного произведения и HNN-расширения. А именно, справедливы следующие теоремы:

**Теорема 5** ([16], [27]). *Пусть  $K := G \star_{\varphi} H$  является амальгамированным произведением,  $\varphi : A \rightarrow B$  — склеивающий изоморфизм между подгруппами  $A < G$  и  $B < H$ . Тогда каждый элемент конечного порядка в  $K$  сопряжён элементу из  $G$  или  $H$ .*

**Теорема 6** ([16], [27]). *Пусть  $H := G \star_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}$  — HNN-расширение группы  $G$ , где  $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$  являются изоморфизмами некоторых подгруппы групп  $A$  и  $B$ . Тогда каждый элемент кручения  $H$  сопряжён элементу  $G$ .*



## §4 Групповой конус и групповая надстройка дискретной группы

В теории гомологий групп имеется аналог конструкций конуса и надстройки из топологии. Дадим следующие два определения:

**Определение 3** ([2]). Пусть группа  $G$  вкладывается в ациклическую группу  $CG$ . Будем называть группу  $CG$  *ациклическим групповым конусом* (или сокращённо: групповым конусом) для группы  $G$ .

**Определение 4.** Для группы  $G$  назовём группу

$$\Sigma G = CG \star_G CG$$

*ациклической групповой надстройкой* (или сокращённо: групповой надстройкой) над  $G$ .

Групповой конус и надстройка является гомологическими аналогами обычных конуса и надстройки в категории **Тор**.

Из точной последовательности Майера-Вьеториса легко следует важный аналог свойства обычной надстройки в категории топологических пространств:

**Утверждение 7** (Изоморфизм надстройки).

$$H_1(\Sigma G; \mathbb{Z}) = 0 \text{ и } H_{i+1}(\Sigma G; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}) \text{ для } i \geq 1.$$

Заметим, что конструкция групповой надстройки даёт нам конструкцию гомологической надстройки при переходе от дискретных групп к их пространствам Эйленберга-Маклейна. А именно справедливо

**Утверждение 8.** *Пространство*

$$W = K(CG, 1) \sqcup_{K(G, 1)} K(CG, 1)$$

*имеет гомотопический тип пространства*

$$K(CG \star_G CG, 1)$$

*и более того,*

$$H_{i+1}(W; \mathbb{Z}) \cong H_i(G; \mathbb{Z}), \quad i \geq 1, \quad H_1(W; \mathbb{Z}) = 0.$$

*Доказательство.* Асферичность пространства  $W$  следует из теоремы Уайтхеда 2. Изоморфизмы для гомологий следуют из изоморфизмов групповой надстройки.  $\square$

## 4.1 Конструкция группового конуса дискретной группы при помощи алгебраического пополнения группы

В этом параграфе мы следуем статье [2].

Оказывается, для любой группы  $G$  существует ациклическая группа  $CG$ , в которую  $G$  вкладывается, причём  $C$  является функтором.

**Определение 5.** Группа  $A$  называется *супергруппой* группы  $B$ , если  $B < A$ .

**Определение 6.** Супергруппа  $M$  группы  $B$  называется *митозисом*  $B$ , если существуют элементы  $s, d$  в  $M$ , такие, что

1.  $M = \langle B, s, d \rangle$ ,
2.  $b^d = bb^s$  для любого  $b \in B$ ,
3.  $[b', b^s] = 1$  для любых  $b, b' \in B$ .

Здесь  $b^s := s^{-1}bs$ .

Теперь определим важный класс групп:

**Определение 7.** Группа  $M$  называется *митотической*, если она содержит митозис любой её подгруппы.

Митотические группы обладают очень важным свойством:

**Теорема 7.** *Митотические группы ациклически.*

Примером митотических групп могут служить алгебраически замкнутые группы.

**Определение 8.** Группа  $G$  называется *алгебраически замкнутой*, если для любой конечной системы уравнений

$$f_i(g_1, \dots, g_n, x_1, \dots, x_m) = 1, \quad i = 1, \dots, k$$

(относительно переменных  $x_1, \dots, x_m$  и постоянных  $g_1, \dots, g_n \in G$ ), для которой существует решение в супергруппе группы  $G$ , существует также решение и в самой группе  $G$ .

**Теорема 8.** *Алгебраическое замыкание любой группы является митотической группой.*

Имеется следующий результат:

**Утверждение 9.** *Всякая бесконечная группа может быть вложена в алгебраически замкнутую группу той же мощности.*

Из утверждения 9 и теорем 7 и 8 следует

**Теорема 9.** *Всякая бесконечная группа может быть вложена в ациклическую группу той же мощности.*

## 4.2 Конструкция группового конуса Кана-Тёрстона

Кан и Тёрстон в своей оригинальной работе [4] построили функтор группового конуса  $C$ , опираясь на результат Мозера [31], следующим образом.

Обозначим через  $G^{\mathbb{Q}}$  группу функций  $\mathbb{Q} \rightarrow G$ , которые имеют компактный носитель, то есть каждая такая функция принимает тождественное значение 1 вне некоторого конечного интервала. Группа гомеоморфизмов рациональных чисел с компактными носителями  $\text{Homeo } \mathbb{Q}$  действует на группе  $G^{\mathbb{Q}}$  композициями. Тогда определим алгебраический конус  $CG$ , как полупрямое произведение  $G^{\mathbb{Q}} \rtimes \text{Homeo } \mathbb{Q}$  с умножением

$$(b, a)(b', a') = (ba(b'), aa'), \quad b, b' \in G^{\mathbb{Q}}, \quad a, a' \in \text{Homeo } \mathbb{Q}.$$

Очевидно, что данная конструкция функториальна, и, кроме того, имеется вложение группы  $G \hookrightarrow CG$  нормальным делителем:  $g \mapsto (b_g, \text{id}) \in CG$ , где  $b_g r = g$ , если  $r = 0$ , и  $b_g r = 0$ , иначе.

**Утверждение 10.** *Группа  $CG$  из конструкции Кана-Тёрстона является ациклической.*

*Доказательство.* Утверждение получается из результата Мозера о том, что группа гомеоморфизмов прямой с компактным носителем ациклическа и спектральной последовательности Хохшильда-Серра, применённой к расширению

$$1 \rightarrow G^{\mathbb{Q}} \rightarrow G^{\mathbb{Q}} \rtimes \text{Homeo } \mathbb{Q} \rightarrow \text{Homeo } \mathbb{Q} \rightarrow 1.$$

□

*Замечание.* Обычно группа  $CG$  имеет несчётный порядок. Тем не менее, имеется подконус  $C'G \subset CG$ , имеющий ту же мощность, что и  $G$  за исключением случая конечной  $G$ , в котором группа  $C'G$  будет счётной.

## 4.3 Построение ациклических групп из гомологических сфер

Прежде всего дадим сначала

**Определение 9.** *Гомологической  $n$ -сферой* называется гладкое замкнутое  $n$ -мерное многообразие  $\Sigma^n$ , гомологии которого в  $\mathbb{Z}$  устроены так же, как у стандартной сферы  $\mathbb{S}^n$ , то есть  $H_*(\Sigma^n; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$ .

М. Кервер в работе [13], 1969 получил полный ответ на вопрос о том, какие фундаментальные группы могут быть у гомологических  $n$ -сфер при  $n \geq 5$ .

Прежде, чем его сформулировать, для удобства введём

**Определение 10.** Конечно представленная группа  $G$  *реализуема* гомологической  $n$ -сферой, если существует некоторая гомологическая  $n$ -сфера с фундаментальной группой  $G$ .

Пусть  $\pi$  — некоторая группа с  $g$  образующими и  $r$  соотношениями. Чтобы  $\pi$  была реализуема гомологической  $n$ -сферой, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:  $\pi$  имеет конечное копредставление,  $H_1(\pi) = 0$ ,  $H_2(\pi) = 0$ . Последнее соотношение следует из известной теоремы Х. Хопфа:

**Теорема 10** (Х. Хопф). *Пусть  $X$  — связный CW-комплекс. Тогда имеется точная последовательность групп:*

$$\pi_2(X) \xrightarrow{h} H_2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\pi_1(X); \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

где  $h$  — гомоморфизм Гуревича, а действие  $\pi_1(X) \curvearrowright \mathbb{Z}$  тривиально.

*Доказательство.* В силу того, что пространство  $K(\pi_1(X), 1)$  получается из пространства  $X$  приклеиванием клеток размерности не меньше 3, отсюда сразу же следует сюръективность. То, что имеется точность в во втором члене следует из того, что образ фундаментального класса двумерной сферы любого сфероида из  $\pi_2(X)$  является границей некоторой трёхмерной клетки в  $K(\pi_1(X), 1)$ .  $\square$

**Определение 11.** Если группа  $\pi$  удовлетворяет соотношению  $H_1(\pi) = 0$ , то она называется *совершенной*. Если  $\pi$  удовлетворяет сразу двум соотношениям  $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$ , то она называется *суперсовершенной*.

**Теорема 11** (М. Кервер, 1969, [13]). *Пусть  $\pi$  — суперсовершенная конечно представимая группа, и пусть  $n \geq 5$ . Тогда существует гладкая гомологическая  $n$ -сфера с фундаментальной группой  $\pi$ .*

Приведём здесь схему доказательства, которая следует из конструкции, использовавшейся С. П. Новиковым при решении вопроса о распознавании гомологических сфер.

*Схема доказательства.* (С. П. Новиков, [15] 1962) По представлению группы  $\pi$  образующими и соотношениями построим  $n + 1$ -мерное многообразие с краем

$$M^{n+1} = \left( \mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1, \dots, g_k} \mathbb{D}_j^n \times \mathbb{D}_j^1 \right) \bigcup_{r_1, \dots, r_\ell} \mathbb{D}_q^{n-1} \times \mathbb{D}^2,$$

где склейка происходит со стандартным сглаживанием по отображениям

$$g_j : \mathbb{D}_j^n \times \partial \mathbb{D}_j^1 \rightarrow \partial \mathbb{D}^{n+1},$$

$$r_q : \mathbb{D}_q^{n-1} \times \partial \mathbb{D}_q^2 \rightarrow \partial \left( \mathbb{D}^{n+1} \bigcup_{g_1, \dots, g_k} \mathbb{D}_j^n \times \mathbb{D}_j^1 \right),$$

которые соответствуют образующим и соотношениям группы  $\pi$ .

По условию  $H_2(\pi) = 0$ , поэтому в группе  $H_2(\partial M)$  по теореме Хопфа, сформулированной выше, все циклы являются сферическими. Реализуем свободный базис  $H_2(\partial M)$  сферами  $\mathbb{S}_\alpha^2 \times \mathbb{D}_\alpha^{n-2} \subset \partial M$  и сделаем вдоль них хирургию. Тогда мы убьём вторую гомотопическую группу (здесь существенно, что  $n \geq 5$ ) и, следовательно, получим нулевые вторые гомологии для многообразия  $\partial M$ . По построению и исходя из клеточных гомологий, у  $M$  не могут быть гомологии в остальных размерностях (кроме размерности  $n$ ). Стало быть, мы имеем гомологическую сферу  $\partial M$ .  $\square$

*Замечание.* Из теоремы Паункаре для старших размерностей (результат Смейла) следует, что если многообразие  $M$  из приведённой схемы доказательства односвязно, то  $\partial M$  — это стандартная сфера.

Рассуждение С. П. Новикова позволяет построить пример ациклического пространства, не имеющего тип  $K(\pi, 1)$ .

**Теорема 12.** *Существуют ациклические пространства, не имеющие типа  $K(\pi, 1)$*

*Доказательство.* Возьмём любую конечную суперсовершенную группу  $\pi$ . Например, бинарную группу икосаэдра  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \cong \langle a, b \mid (ab)^2 = a^3 = b^5 \rangle$ .

Построим компактное гладкое многообразие: гомологический диск с фундаментальной группой  $\pi$  при помощи конструкции С. П. Новикова выше. Он будет искомым ациклическим пространством, поскольку его фундаментальная группа конечна (и следовательно, не может иметь своим классифицирующим пространством компактное многообразие).  $\square$

Суперсовершенных групп довольно много. Бесконечное семейство примеров, например, дают специальные линейные группы над полями:

**Теорема 13** ([14]). При  $n \geq 3$  группа

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q) \text{ — суперсовершенная,}$$

за исключением трёх случаев:

$$\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_2), \mathrm{SL}(4, \mathbb{F}_2), \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_4).$$

Группы из теоремы являются конечными, а потому они, как известно, из теоремы Свана ниже, не могут быть ациклическими.

**Теорема 14** (R. G. Swan, 1960). Пусть  $G$  — конечная группа и  $H$  — нетривиальная подгруппа в  $G$ . Тогда индуцированное отображение  $H_i(G) \rightarrow H_i(H)$  нетривиально для бесконечного числа значений  $i > 0$ .

Итак, приведённые выше группы являются суперсовершенными, но не ациклическими.

## §5 Универсальная ациклическая конечно определённая группа

В работе [2], 1980, был поставлен вопрос о том, всякая ли конечно определённая группа вкладывается в ациклическую конечно определённую группу. Позднее положительный ответ на этот вопрос был дан в [26], 1983. Но перед тем, как привести доказательство данного результата, остановимся на обсуждении так называемых универсальных групп Хигмана.

Как показано в работе [28] Хигмана, существует конечно определённая группа  $U$ , содержащая все конечно определённые группы. Однако это группа задаётся в работе неявным образом. Более явное описание содержится в работе [29] — в ней приводится описание копредставления такой группы с 8 образующими и 26 соотношениями. Опишем схематично построения группы  $U$ .

Предположим, что мы хотим вложить произвольную конечно определённую группу  $A$ . Для этого вложим сначала её в универсальную конечно порождённую группу Хигмана  $C$  на двух образующих (см. [30]). Далее рассмотрим свободное произведение  $K_1 = C \star G$  для некоторой конечно определённой группы  $G$  (мы не останавливаемся на её определении, см. подробности в [29]). Рассматривается некоторая последовательность HNN-расширений

$$K_1 \rightsquigarrow K_2 \rightsquigarrow K_3 \rightsquigarrow K_4.$$

Далее замечается, что соотношения в группе  $C$  (которых бесконечное множество) автоматически выполняются в группе  $K_4$ . В результате, получается, что

$K_4$  имеет 13 образующих и 33 соотношения: 2 образующие берутся из группы Хигмана  $C$ ; 7 образующих и 14 соотношений — из группы  $G$ ; 4 образующие и 19 соотношений берутся из последовательности трёх HNN-расширений  $C \star G \rightsquigarrow K_4$ . Затем применяется некоторое наблюдение, позволяющее сократить число образующих и соотношений до 8 и 26 соответственно.

Интересным представляется вопрос о единственности (с точностью до изоморфизма) универсальной группы Хигмана. Если  $U_1$  и  $U_2$  — две такие группы, то мы имеем вложения  $U_1 \hookrightarrow U_2$  и  $U_2 \hookrightarrow U_1$ . Однако это не означает, что  $U_1 \cong U_2$ . Действительно, рассмотрим, например, свободные группы  $F_p$  и  $F_q$  различных рангов  $p, q \geq 2$ . Они вкладываются друг в друга, поскольку каждая из них содержит свободную группу со счётным числом образующих — коммутант, однако  $F_p$  не изоморфно  $F_q$  (т. к. эти группы имеют неизоморфные абелизации).

**Теорема 15** ([26], 1983). *Существует ациклическая конечно определённая группа, содержащая изоморфные копии всех конечно определённых групп.*

*Доказательство.* Пусть  $U$  — универсальная конечно определённая группа Хигмана, то есть такая, что она содержит все конечно определённые подгруппы. Но группу  $U$  можно вложить в конечно порождённую ациклическую группу  $V$  с рекурсивно перечислимым представлением. Вложим  $V$  в изоморфную копию  $\bar{U}$  группы  $U$  при помощи изоморфизма  $\bar{u} \mapsto u$  для каждого  $u \in U$ . Рассмотрим HNN-расширение

$$E = \langle \bar{U}, t \mid t\bar{u}t^{-1} = u, u \in U \rangle.$$

Подгруппа  $B$  группы  $E$ , являющаяся нормальным замыканием группы  $\bar{U}$ , является возрастающим объединением ациклических групп

$$V < t^{-1}Vt < t^{-2}Vt < \dots$$

Это действительно так, поскольку из того, что  $U \hookrightarrow V \hookrightarrow \bar{U}$ ,  $t\bar{U}t^{-1} = U$  следует  $V \hookrightarrow \bar{U} = t^{-1}Ut \hookrightarrow t^{-1}Vt$ . Но копредел коммутирует с функтором гомологий, поскольку в абелевой категории функтор копредела является точным. Следовательно,  $B$  ациклическая. Факторгруппа  $E/B$  является бесконечной циклической. Короткой точной последовательности  $1 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$  отвечает спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\mathbb{Z}, H_q(B, \mathbb{Z})) \Rightarrow H_*(E, \mathbb{Z}).$$

Она вырождается во втором члене, и поэтому мы имеем изоморфизмы

$$H_1 E \cong \mathbb{Z}, \quad H_n E = 0, \quad n > 1.$$

Теперь возьмём свободное произведение группы  $E$  и любой конечно определённой ациклической группы  $A$  вдоль бесконечной циклической подгруппы. В качестве  $A$  можно, например, взять группу Хигмана  $\text{Hig}_4$ . Ациклическость полученной группы очевидным образом следует из точной последовательности Майера-Виеториеса. Тогда для произвольной конечно определённой группы  $G$  композиция следующих вложений будет искомой:

$$G \hookrightarrow U \hookrightarrow E \hookrightarrow E \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4.$$

Первое вложение имеет место в силу основного свойства универсальной группы Хигмана, а второе и третье — в силу свойств амальгамы. □

Эквивалентно, теорема говорит о том, что всякая конечно определённая группа вкладывается в некоторый групповой гомологический конус над ней.

В силу того, что конечные группы вкладываются в универсальную группу Хигмана и свойств амальгам и HNN-расширений, мы получаем

**Следствие 15.1.** *Существует конечно определённая группа с элементами конечного порядка.*

Заметим, что рассматривавшиеся выше ациклические конечно определённые группы не имели элементов конечного порядка.

Также комбинация теоремы 15 с явной конструкцией универсальной группы  $U$  даёт

**Следствие 15.2.** *Всякая конечно определённая группа вкладывается в универсальную ациклическую группу  $\mathcal{U}$  с 12 образующими и 38 соотношениями.*

*Доказательство.* Из доказательства теоремы 15 искомая группа имеет копредставление

$$\langle \overline{U}, t \mid t \bar{u} t^{-1} = u, u \in U \rangle \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4.$$

Для копредставления группы  $E$  мы имеем  $8+1 = 9$  образующих и  $26+8 = 34$  соотношений. Для копредставления искомой группы тогда мы имеем  $9 + 3 = 12$  образующих и  $34 + 4 = 38$  соотношений, поскольку группа  $\text{Hig}_4$  имеет 4 образующих и 4 соотношения. □

## §6 Ациклические пространства

Важную роль в топологии играют так называемые *ациклические пространства*, то есть такие пространства, гомологии которых с постоянными коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  тривиальны. Заметим, что такие нетривиальные пространства,



в силу теоремы Гуревича и теоремы Уайтхеда, обязаны иметь нетривиальную фундаментальную группу.

Сформулируем здесь обобщение теоремы Уайтхеда на неодносвязный случай. Этот результат нам пригодится в дальнейшем.

**Теорема 16** ([23]). *Пусть отображение  $f : X \rightarrow Y$  между отмеченными клеточными комплексами индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и изоморфизм гомологий с любыми локальными коэффициентами  $\mathcal{A}$ , т. е.*

$$H_*(X; f^* \mathcal{A}) \cong H_*(Y; \mathcal{A}).$$

*Тогда  $f$  является гомотопической эквивалентностью.*

*Доказательство.* Будем считать, что  $X$  и  $Y$  связные. Поднимем отображение  $f$  на универсальное накрытие так, чтобы  $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ , где  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$  — некоторые поднятия отмеченных точек  $x_0$  и  $y_0$ . В силу классической теоремы Уайтхеда для односвязного случая и в силу теоремы Гуревича, достаточно показать, что  $\tilde{f}$  индуцирует изоморфизм в гомологиях  $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$ . Запишем спектральные последовательности Лере для универсальных накрытий  $p_1$  и  $p_2$  над пространствами  $X$  и  $Y$ , рассматриваемых, как расслоения с дискретным слоем:

$$H_p(X; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\tilde{X}),$$

$$H_p(Y; H_q(G)) \Rightarrow H_*(\tilde{Y}),$$

где  $G = \pi_1(X)$ .

В силу дискретности  $G$ , спектральные последовательности вырождаются во втором члене, и поэтому мы имеем следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; p_{1*} \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \\ f_* \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_* \\ H_n(Y; p_{2*} \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\tilde{Y}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

□

Здесь через  $p_{1*} \mathbb{Z}$  и  $p_{2*} \mathbb{Z}$  обозначены (возможно разные)  $G$ -модули  $\mathbb{Z}$ . Но  $f^*(p_{2*} \mathbb{Z}) = p_{1*} \mathbb{Z}$ . Следовательно, по условию  $f_*$  в левом столбце диграммы индуцирует изоморфизм. А значит, мы имеем искомого изоморфизм в правом столбце диграммы.

## 6.1 Функтор Дрора

Можно задаться вопросом о том, вся

Дрор в работе [25] показал, что в категории симплициальных множеств с отмеченной точкой  $\mathbf{sSet}_*$  имеется эндифунктор

$$A : \mathbf{sSet}_* \rightarrow \mathbf{sSet}_*$$

и естественное отображение

$$a : AX \rightarrow X,$$

такое, что

1.  $AX$  ациклично для любого симплициального  $X$ ;
2. Отображение  $a : AX \rightarrow X$  универсально с точностью до гомотопии среди всех отображений из ациклического пространства в  $X$ ;
3. Пусть  $H_j(X) \cong 0$  для любого  $1 \leq j \leq n$ . Тогда гомотопический слой отображения  $a : AX \rightarrow X$  является  $(n-1)$ -связным. В частности, если  $X$  ациклично, то  $a$  — слабая эквивалентность.
4. Если  $X$  является  $j$ -простым пространством для некоторого  $j \geq 1$  (т. е. действие  $\pi_1(X)$  на  $\pi_j(X)$  тривиально), то таково же и  $AX$ .

Функтор  $A$  задаётся на пространстве  $X$ , как предел

$$AX = \varprojlim A_n X,$$

башни расслоений

$$\dots \rightarrow A_n X \rightarrow \dots \rightarrow A_1 X \rightarrow A_0 X = X.$$

Башня строится индуктивно. Отображение  $p_1 : A_1 X \rightarrow X$  получается, как накрытие над  $X$ , соответствующее максимальной совершенной нормальной подгруппе  $\pi_1(X)$ . Далее,  $A_n X$  получается, как pullback в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} A_n X & \longrightarrow & \Lambda P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{n-1} X & \longrightarrow & P_n \mathbb{Z} A_{n-1} X \end{array} \quad (1)$$

В этой диаграмме  $\Lambda$  — функтор путей;  $\mathbb{Z}$  — функтор, ассоциирующий с симплициальным множеством  $Y$  симплициальную абелеву группу  $\mathbb{Z}Y$ , её  $n$ -симплексами служат все возможные линейные комбинации  $n$ -симплексов из  $Y_n$ ;

$P_n$  — функтор, сопоставляющий симплициальному множеству его  $n$ -ый этаж системы Мура-Постникова. При этом  $P_n X$  определяется, как факторпространство  $X$  по отношениям эквивалентности  $\sim_n$ , при которых  $x_1 \sim_n x_2$  (здесь  $x_1$  и  $x_2$  некоторые  $q$ -мерные симплексы), если ограничения симплексов  $x_1$  и  $x_2$  на  $n$ -мерные остовы совпадают.

## 6.2 Симплициальные разбиения ациклических комплексов

Имеется ряд интересных вопросов о симплициальных разбиениях классифицирующих пространств ациклических групп.

**ВОПРОС 1.** *Как определять или строить ациклические конечно определённые группы?*

**ВОПРОС 2.** *Каковы оценки на число симплексов минимальной триангуляции классифицирующего пространства ациклической конечно определённой группы в терминах числа образующих и соотношений?*

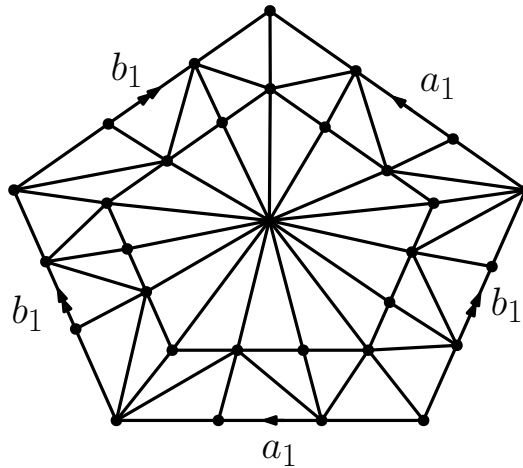
Полные ответы на данные вопросы неизвестны.

Приведём здесь явную конструкцию ациклического симплициального комплекса на основе описанной выше конструкции группы Хигмана  $\text{Hig}_4$ .

**Пример 1.** Приведём здесь явную конструкцию симплициального комплекса, являющегося классифицирующим пространством группы Хигмана  $\text{Hig}_4$ .

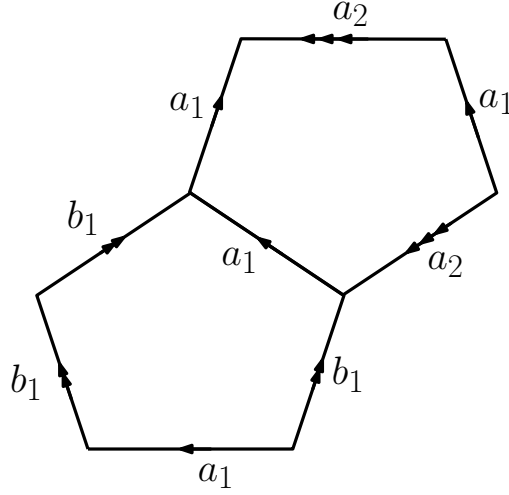
Будем строить комплекс, следуя описанной конструкции групп Хигмана (см. соответствующий параграф).

Сначала построим симплициальный комплекс для  $K(BS(1, 2), 1)$ .



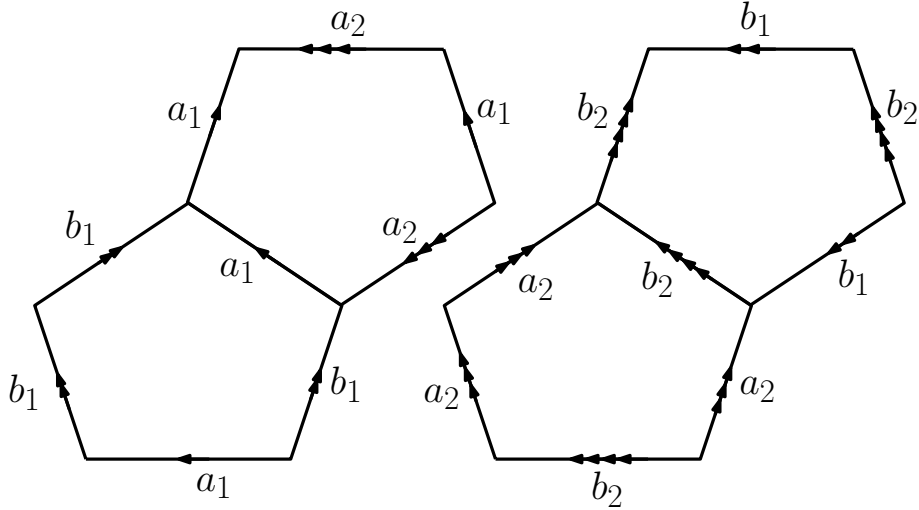
$$BS(1, 2) = \langle a_1, b_1 \mid b_1^{a_1} = b_1^2 \rangle$$

Теперь возьмём 2 копии таких триангулированных пятиугольников и склеим из них  $K(L, 1)$ .



$$L = \langle b_1, a_1, a_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2, a_1^{a_2} = a_1^2 \rangle$$

Наконец, возьмём 2 копии комплексов  $K(L, 1)$  и склеим их.



$$\text{Hig}_4 = \{a_1, b_1, a_2, b_2 \mid b_1^{a_1} = b_1^2, a_1^{a_2} = a_1^2, a_2^{b_2} = a_2^2, b_2^{b_1} = b_2^2\}$$

## §7 Конструкция Кана-Тёрстона

Д. Кан и У. Тёрстон получили (1976) следующий результат:

**Теорема 17** (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [4]). *Для любого линейно связного симплициального множества  $X : \mathbf{sSet}_*$  с отмеченной точкой существует расслоение Серра*

$$t : TX \rightarrow X,$$

естественное по  $X$  и обладающее следующими свойствами.

- (i) Естественное преобразование функторов  $t : T \rightarrow \text{Id}$  индуцирует изоморфизм групп сингулярных гомологий и когомологий с коэффициентами в произвольной локальной системе  $\mathcal{A}$  на  $X$ , т. е.
- $$H_*(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H_*(X; \mathcal{A}), \quad H^*(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H^*(X; \mathcal{A}).$$
- (ii) Пространство  $TX$  асферично, т. е.  $TX \simeq K(G_X, 1)$ , и отображение  $t_* \pi_1 : G_X \rightarrow \pi_1 X$  — эпиморфизм.
  - (iii) Ядро  $P_X$  отображения  $t_* \pi_1$  является совершенной нормальной подгруппой в  $G_X$ .
  - (iv) Гомотопический тип пространства  $X$  полностью определяется парой групп  $(G_X, P_X)$ . А именно, пространство  $X$  может быть получено с точностью до гомотопии применением к пространству  $K(G_X, 1)$  функтора  $(-)^+$  плюс-конструкции Квиллена относительно совершенной нормальной подгруппы  $P_X$ . Эквивалентно,  $X$  может быть получено применением функтора послойного  $\mathbb{Z}$ -пополнения Боусфилда и Кана (см. [24]) к расслоению Серра  $K(G_X, 1) \rightarrow K(G_X/P_X, 1)$ .
  - (v) Универсальное накрытие  $\tilde{X}$  над  $X$  может быть получено с точностью до гомотопии применением функтора  $\mathbb{Z}$ -пополнения к  $K(P_X, 1)$ .
  - (vi) Ациклический слой расслоения Серра  $TX \rightarrow X$  получается с точностью до гомотопии применением функтора Дрора (см. [25]) к  $K(P_X, 1)$ .

Построение функтора  $T$  и отображения  $t$  в оригинальной работе Д. Кана и У. Тёрстона осуществляется при помощи техники симплициальных множеств. В силу того, что существует более простая конструкция функтора  $T$  (см. ниже), мы не будем приводить здесь явное описание  $T$  и доказывать первый пункт теоремы. Однако приведём доказательства последних четырёх пунктов, поскольку они выполняются для всех конструкций функторов  $T$ , то есть при их доказательстве не используется явная конструкция функтора  $T$ . Кроме того, в оригинальной статье Кана-Тёрстона эти доказательства опущены и оставлены в качестве несложных задач. В доказательстве мы будем опираться на работу Боусфилда и Кана [24], в которой подробно определяется операция  $R$ -пополнения для коммутативных колец  $R$  и обсуждаются её свойства. За основными свойствами функтора Дрора отсылаем читателя к §6.1 или к оригинальной статье [25].

*Доказательство.* (iii). Для точной последовательности

$$1 \rightarrow P_X \rightarrow G_X \rightarrow \pi_1 X \rightarrow 1$$

имеет место спектральная последовательность Хохшильда-Серра

$$H_p(\pi_1 X; H_q(P_X; \mathbb{Z})) \rightarrow H_{p+q}(\pi_1 X; \mathbb{Z}),$$

где  $\mathbb{Z}$  — тривиальный  $\pi_1 X$ -модуль.

Запишем точную пятичленную последовательность

$$H_2(\pi_1 X) \rightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d_2} E_{0,1}^2 \rightarrow H_1(\pi_1 X) \rightarrow E_{1,0}^2 \rightarrow 0.$$

Имеем:  $E_{2,0}^2 = H_2(\pi_1 X)$ . Далее,

$$E_{0,1}^2 = H_0(\pi_1 X; H_1(P_X)) = H_1(P_X)_{\pi_1 X} = H_1(P_X),$$

поскольку индуцированное действие  $\pi_1 X$  на  $\ker(G_X \rightarrow \pi_1 X)$  тривиально. Наконец,

$$E_{1,0}^2 = H_1(\pi_1 X; H_0(P_X)) = H_1(\pi_1 X).$$

Из первого свойства функтора Кана-Тёрстона следует, что  $H_2(G_X) \cong H_2(X)$ ,  $H_1(G_X) \cong H_1(X)$ . Кроме того,  $H_1(\pi_1 X) \cong H_1(X)$  (постоянные коэффициенты в  $\mathbb{Z}$ ). Стало быть, мы получаем

$$H_2(X) \twoheadrightarrow H_2(\pi_1 X) \xrightarrow{0} H_1(P_X) \xrightarrow{0} H_1(G_X) \xrightarrow{\cong} H_1(X) \rightarrow 0.$$

Стрелка слева является эпиморфизмом в силу теоремы Хопфа. Значит, в силу сказанного выше, мы получаем, что  $H_1(G_X) = 0$ .

(iv). Покажем, что плюс-конструкция Квиллена однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности, восстанавливает  $X$  по  $TX$  и совершенной нормальной подгруппе  $P_X$  в  $G_X = \pi_1(TX)$ . Применим функтор Квиллена к отображению  $t : TX \rightarrow X$ , и мы получим отображение

$$t^+ : (TX, P_X)^+ \rightarrow X.$$

Легко видеть, что отображение  $t^+$  будет индуцировать изоморфизм на фундаментальных группах. Кроме того, по свойству плюс-конструкции мы будем также иметь и изоморфизм в любой системе локальных коэффициентов  $\mathcal{A}$ . Значит, по теореме Уайтхеда 16 для неодносвязных пространств мы получаем, что  $f$  — гомотопическая эквивалентность.

Теперь докажем, что  $X$  можно получить из  $TX$  применением функтора  $\mathbb{Z}_\infty$ . Применив послыйный функтор  $\mathbb{Z}$ -пополнения к расслоению Серра  $TX \rightarrow X$ , мы получим отображение

$$f : \dot{\mathbb{Z}}_\infty TX \rightarrow X.$$

Покажем, что  $f$  индуцирует гомотопическую эквивалентность. Для этого мы воспользуемся теоремой Уайтхеда 16 для неодносвязного случая. Из рассмотрения точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \rightarrow \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \rightarrow K(\pi_1 X, 1),$$

берущегося из основного свойства функтора послыного  $\mathbb{Z}$ -пополнения, получается, что  $f$  индуцирует изоморфизм на фундаментальных группах

$$f_* : \pi_1(\dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1)) \cong \pi_1(X),$$

поскольку  $\pi_1(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1)) = 1$ , см. [24].

Рассмотрим морфизм расслоений Серра

$$\begin{array}{ccccc} K(P_X, 1) & \longrightarrow & K(G_X, 1) & \longrightarrow & K(\pi_1 X, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) & \longrightarrow & \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) & \longrightarrow & K(\pi_1 X, 1) \end{array}$$

Этот морфизм индуцирует морфизм спектральных последовательностей Лере. Для доказательства того, что  $f$  индуцирует изоморфизм в когомологиях с локальными коэффициентами, достаточно в силу теоремы Зимана показать, что для любой локальной системы  $\mathcal{A}$  на  $X$

$$H_*(K(P, 1); i^* \circ t^* \mathcal{A}) \cong H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^* \mathcal{A}),$$

где  $i^* \circ t^*$  и  $\mathbb{Z}_\infty i^* \circ \mathbb{Z}_\infty t^*$  являются композициями гомоморфизмов фундаментальных групп в данных расслоениях. Заметим, что эти композиции гомоморфизмов тривиальны, поэтому участвующие коэффициенты получаются тривиальными. Но

$$H_*(\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1); \mathbb{Z}) \cong H_*(K(P_X, 1); \mathbb{Z}),$$

поскольку пространство  $K(P_X, 1)$  является  $\mathbb{Z}$ -хорошим в терминах работы Бусфилда и Кана. Последнее верно в силу совершенности группы  $P_X$ .

(v). Этот пункт следует из предыдущего и точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z}_\infty K(P_X, 1) \rightarrow \dot{\mathbb{Z}}_\infty K(G_X, 1) \simeq X \rightarrow K(\pi_1 X, 1).$$

(vi). Мы имеем отображение  $f : UX \rightarrow K(P_X, 1)$ , где  $UX$  является гомотопическим слоем расслоения Серра  $TX \rightarrow X$ . Применяя к  $f$  функтор Дрора  $A$

и учитывая, что  $UX$  ациклично (это следует из спектральной последовательности Лере для данного расслоения и того, что  $TX$  и  $X$  имеют одинаковые гомологии), мы получаем отображение

$$Af : UX \rightarrow AK(P_X, 1).$$

Очевидно,  $Af$  индуцирует изоморфизм в гомологиях между полученными ациклическими пространствами. Из свойства функтора Дрора следует, что  $\pi_1(AK(P_X, 1)) = \pi_1(AP_1K(P_X, 1)) = N$ , где  $P_1(P_X)$  — первый этаж системы Постникова пространства  $K(P_X, 1)$ , а  $N$  — максимальная совершенная подгруппа в группе  $P_X$ , т. е.  $N = P_X$ . Кроме того,  $\pi_1(UX) \cong P_X$  из точной последовательности расслоения выше. Значит,  $f$  индуцирует изоморфизм и на фундаментальных группах. Дальнейшее следует из теоремы Уайтхеда. □

## 7.1 Конструкция Кана-Тёрстона для сфер

Для конкретного случая сфер  $\mathbb{S}^n$  построим явно пространство  $T\mathbb{S}^n$  типа  $K(\pi, 1)$  и отображение

$$t : T\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

такие, что на (ко)гомологиях индуцируются изоморфизмы. В этом параграфе мы следуем статье [2].

### 7.1.1 Двумерная сфера

Пусть вначале мы имели пространство  $X = \mathbb{S}^1$ . Мы хотим получить из него пространство типа  $K(\pi, 1)$ , которое бы имело те же гомологии, что и  $\mathbb{S}^2$ .

Возьмём в качестве группового конуса  $C\mathbb{Z}$  группу Хигмана  $\text{Hig}_4$ . Это вложение индуцирует отображение

$$\mathbb{S}^1 \simeq K(\mathbb{Z}, 1) \rightarrow K(\text{Hig}_4, 1) \tag{★}$$

Склеив две копии цилиндра отображения (★) вдоль окружности, мы получим согласно утверждению 8 искомое пространство

$$K(\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4, 1).$$

На построенном пространстве можно ввести структуру 2-мерного симплициального комплекса, взяв в качестве  $K(\text{Hig}_4, 1)$ , например, триангуляцию, построенную ранее. Для построения отображения

$$t : K(\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$$



отправим двумерный комплекс  $K(\text{Hig}_4, 1)$  на конце каждого из двух цилиндров в вершины обычных верхнего и нижнего конусов  $C\mathbb{S}^2$  и продолжим это отображение по линейности на остальные точки так, чтобы  $t$  было тождественным на вложенной окружности  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow T\mathbb{S}^2$ .

### 7.1.2 $n$ -мерная сфера

После построения пространства  $T\mathbb{S}^2$  можно продолжить процесс, используя следующую теорему

**Теорема 18.** *Пусть имеется вложение  $F \rightarrow G$ , где  $G$  — ациклическая. Тогда амальгама  $G \star_F G$  вкладывается в ациклическую группу*

$$(A \times F) \star_F G$$

где  $A$  — любая нетривиальная ациклическая группа.

Эта замечательная теорема позволяет нам продолжить индуктивное построение пространств  $T\mathbb{S}^n$ .

Пусть  $n = 3$ . Возьмём в качестве гомоморфизма в лемме отображение  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \text{Hig}_4$ . Тогда мы будем иметь вложение в ациклическую группу

$$\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4 \hookrightarrow (\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4$$

и снова образуем при помощи таких вложений гомологическую надстройку:

$$T\mathbb{S}^3 = [(\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4]_{\text{Hig}_4 \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4} \star [(\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4].$$

Отображение  $t$  будет переводить трёхмерные комплексы  $(\text{Hig}_4 \times \mathbb{Z}) \star_{\mathbb{Z}} \text{Hig}_4$  на концах цилиндров в соответственно вершины верхнего и нижнего конусов  $C\mathbb{S}^2$ .

Теперь на каждом следующем шаге  $n$  будем брать в качестве вложения  $F \rightarrow G$  из леммы вложение групп из предыдущего шага  $n - 1$ . Причём для каждого  $n$  будет получаться  $n$ -мерный конечный симплициальный комплекс по утверждению 4, в силу того, что геометрическая размерность группы Хигмана равна 2, а группы  $\mathbb{Z}$  — равна 1. Отображение  $t$  будет отправлять  $n$ -мерные комплексы на концах цилиндров в вершины обычных верхних и нижних конусов  $C\mathbb{S}^{n-1}$ .

## 7.2 Важное следствие: эквивалентность категорий

В работе [4] Кана и Тёрстона утверждается, что в конструкции возможно и обратное построение. А именно, исходное пространство  $X$  может быть восстановлено с точностью до гомотопии из пары  $(G_X, P_X)$  при помощи плюсконструкции Квиллена, где  $G_X = \pi_1(TX)$ ,  $P_X = \ker \pi_1 tX$  — нормальная совершенная подгруппа  $G_X$ . То есть  $X = (G_X, P_X)^+$ .

Напомним здесь вкратце плюс-конструкцию Квиллена. Она позволяет по данному комплексу  $X$  и данной совершенной нормальной подгруппе  $P$  фундаментальной группы  $\pi_1(X)$  строить комплекс  $X^+$  с теми же гомологиями и с убитой подгруппой  $P$  в фундаментальной группе.

А именно, существует пространство  $X^+$  и отображение  $i : X \rightarrow X^+$ , для которых

- i) имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow P \rightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X^+) \rightarrow 1;$$

- ii) если группа  $\pi_1(X^+)$  действует на коммутативной группе  $A$ , то для локальной системы  $\mathcal{A}$  над  $X^+$  и индуцированной системы  $\mathcal{A}^*$  над  $X$  гомоморфизм  $i^* : H^*(X^+; \mathcal{A}) \rightarrow H^*(X; \mathcal{A}^*)$  является изоморфизмом.

**Следствие 18.1** (Д. Кан, У. Тёрстон, [4]). *Имеет место эквивалентность категорий*

$$\text{Ho } \mathcal{CW} \cong \mathcal{GP}[\Gamma^{-1}]$$

Здесь категория  $\text{Ho } \mathcal{CW}$  состоит из  $CW$ -комплексов и классов гомотопий отображений между пространствами. Объектами категории  $\mathcal{GP}$  служат пары дискретных групп  $(G, P)$ , где  $P$  — совершенная нормальная подгруппа  $G$ , отображения — гомоморфизмы  $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$ , для которых  $f(P) \subset P'$ ,  $\Gamma$  состоит из тех морфизмов  $f : (G, P) \rightarrow (G', P')$  из  $\text{Mor}(\mathcal{GP})$ , что  $f : G/P \cong G'/P'$  и  $f_* : H_*(G; A) \cong H_*(G'; A)$  для любого  $G'/P'$ -модуля  $A$ .

Схема доказательства [3]. Эта эквивалентность следует из того, что конструкция Кана-Тёрстона «обратна» плюс-конструкции Квиллена. Имеется следующая диаграмма категорий и функторов между ними:

$$\text{Ho } \mathcal{CW} \xrightleftharpoons[\text{Ho}(\cdot)^+]{\text{Ho } J} \text{Ho } \mathcal{XP} \xleftarrow{\text{Ho}} \mathcal{XP} \xrightleftharpoons[I]{T} \mathcal{AP} \xrightarrow{\text{Ho}} \text{Ho } \mathcal{AP} \xrightleftharpoons[B]{\pi} \mathcal{GP}$$

Здесь

- $\mathcal{XP}$  — категория пар  $(X, P)$ ,  $P \triangleleft \pi_1(X)$ ,  $P$  совершенна
- $\mathcal{AP}$  категория пар  $(X, P)$ ,  $P \triangleleft \pi_1(X)$ ,  $X$  асферично,  $P$  совершенна
- $\mathcal{GP}$  — категория пар  $(G, P)$ ,  $P \triangleleft G$ ,  $P$  совершенна

Переходом к подходящим локализациям можно добиться того, чтобы все стрелки в диаграмме стали обратимыми, и тогда мы получим цепочку эквивалентностей категорий, из которой будет следовать требуемое.  $\square$

## §8 Метод Маундера построения пространства Кана-Тёрстона

Изложим здесь довольно простую конструкцию функтора Кана-Тёрстона, найденную Маундером в [6].

### 8.1 Непосредственно конструкция Маундера

**Теорема 19** (Д. Кан, У. Тёрстон, 1976, [4]). *Для каждого линейно связного пространства  $X$  с отмеченной точкой существует пространство  $TX$  и отображение*

$$TX \xrightarrow{t} X,$$

*естественное по  $X$  и обладающее свойствами:*

1. *Отображение  $t$  индуцирует изоморфизм в (сингулярных) гомологиях и ко-гомологиях*

$$H_{\bullet}(TX; t^* \mathcal{A}) \cong H_{\bullet}(X; \mathcal{A})$$

*для любой локальной системы коэффициентов  $\mathcal{A}$  на  $X$ ;*

2.  *$\pi_i(TX)$  тривиальна для  $i \neq 1$ , и отображение на фундаментальных группах  $\pi_1 t$  — эпиморфизм;*
3. *Если исходным пространством был конечный симплициальный комплекс  $X$ , то  $TX$  может быть выбрано конечным.*

*Доказательство* (С. R. F. Maunder, 1981, [6]). Приведём здесь два варианта конструкции Маундера. Первый вариант является универсальным и годится для любого симплициального комплекса (и даже для произвольного линейно связного пространства), а второй вариант конструкции нужен для построения конечного комплекса  $TX$  по конечному комплексу  $X$  — для удовлетворения пункта 3 теоремы.

Первый вариант конструкции Маундера (для всех симплициальных комплексов). Сначала докажем утверждение для конечных симплициальных комплексов индукцией по числу симплексов. Пусть для любого комплекса  $L$  с не более, чем  $N - 1$  симплексами отображение  $t : TL \rightarrow L$  удовлетворяет пунктам теоремы. Предположим также, что на подкомплексах  $M \subset L$ ,  $TM = t^{-1}M$ , и  $\pi_1(TM) \rightarrow \pi_1(TL)$  является инъекцией. Поскольку всякий 1-мерный комплекс является пространством типа  $K(\pi, 1)$ , то отображение  $t$  может быть выбрано тождественным, если  $\dim L \leq 1$ .

Пусть теперь  $K$  получается из  $L$  приклеиванием  $n$ -симплекса  $\sigma$  к  $\partial\sigma \subset L$ , где  $\dim \sigma \geq 2$ . Тогда  $T(\partial\sigma)$  является подпространством  $TL$ , и если  $f : \sigma \rightarrow \Delta^n$  — симплициальный гомеоморфизм на стандартный  $n$ -симплекс, то отображение  $Tf : T(\partial\sigma) \rightarrow T(\partial\Delta^n)$  является гомеоморфизмом. Кроме того,  $T(\partial\Delta^n)$  является пространством типа  $K(\pi, 1)$  по предположению индукции.

Вложение группы  $\pi$  в ациклическое пространство  $C\pi$  индуцирует отображение классифицирующих пространств  $g : T(\partial\Delta^n) \rightarrow K(C\pi, 1)$ .

Тогда можно приклеить цилиндр отображения  $g \circ Tf$  вдоль  $T(\partial\sigma)$  к  $TL$ , а отображение  $t$  можно продолжить до отображения  $t : TK \rightarrow K$ , отправляя  $K(C\pi, 1)$  в барицентр симплекса  $\sigma$ .

Проверим теперь, что отображение  $t : TK \rightarrow K$  — искомое:

1. Рассмотрим две точные последовательности Майера-Виеториса для пространства

$$TK = \text{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$$

и для пространства

$$K = \sigma \sqcup_{\partial\sigma} L.$$

Тогда по предположению индукции и по 5-лемме мы будем иметь изоморфизм  $H_n(TK; A) \cong H_n(K; A)$ .

2. Склеиваемые пространства являются асферичными и склейка происходит вдоль асферичного пространства, также в фундаментальные группы пространств  $TL$  и  $K(C\pi, 1)$  вкладывается группа  $\pi$ , поэтому по теореме Уайтхеда пространство  $TK = \text{Cyl}(g \circ Tf) \sqcup_{T(\partial\sigma)} TL$  будет иметь тип  $K(\pi_1(TK), 1)$ , где  $\pi_1(TK) = \pi_1(TL) \star_{\pi} C\pi$ . Кроме того, отображение  $t_{\star} : \pi_1(TK) \rightarrow \pi_1(K)$  является эпиморфизмом, поскольку  $\pi_1(K) = \pi_1(L) \star_{\pi_1(\partial\sigma)} \pi_1(\sigma)$  и в силу предположения индукции.

Заметим, что конструкция пространства  $TK$  является естественной относительно симплициальных отображений, сохраняющих строгий порядок. Таким образом, для конечных симплициальных комплексов теорема доказана. Беря копредел по конечным подкомплексам, можно получить результат для бесконечных симплициальных комплексов.

В общем случае, если  $X$  — произвольное линейно связное пространство, мы можем положить

$$TX = T(|SX|^{\prime\prime}),$$

где  $SX$  — сингулярный комплекс, рассматриваемый, как симплициальное множество,  $|\cdot|$  — реализация симплициального множества, а двойной штрих — второе барицентрическое подразделение. Эта конструкция также является естественной.

Второй вариант конструкции Маундера (для конечных симплициальных комплексов). Докажем последний пункт теоремы. Пусть изначально  $X$  было конечным симплициальным комплексом.

Будем строить индукцией по размерности и числу клеток пару конечных симплициальных пространств  $(UK, TK)$  и отображение пар  $t : (UK, TK) \rightarrow (CK, K)$ , где  $CK$  — конус над  $K$ , такое, что ограничение  $t$  на  $TK$  является искомым отображением. Предположим, что мы уже построили  $t : (UL, TL) \rightarrow (CL, L)$ , такое, что

- (i)  $(UL, TL)$  является конечной симплициальной парой,  $\dim UL = n + 1$ ,  $\dim TL = n$ ;
- (ii) Для любого связного  $r$ -мерного подкомплекса  $M$  комплекса  $L$  выполнено:  $t^{-1}(CM)$  и  $t^{-1}(M)$  являются  $(r+1)$ - и  $r$ -мерными подкомплексами  $UL$  и  $TL$  соответственно, ограничения  $t : t^{-1}(CM) \rightarrow CM$ ,  $t : t^{-1}(M) \rightarrow M$  удовлетворяют первым двум условиям теоремы. Более того, пусть  $\pi_1 t^{-1}(CM) \rightarrow \pi_1 UL$ ,  $\pi_1 t^{-1}(M) \rightarrow \pi_1 TL$  и  $\pi_1 t^{-1}(M) \rightarrow \pi_1 t^{-1}(CM)$  являются инъекциями.

База индукции — нульмерный остов. На нём полагаем  $t$  тождественным отображением,  $UL = CL$ . Теперь пусть  $K$  получен приклеивкой симплекса  $\sigma$ , размерности  $n \geq 1$ . Тогда по предположению индукции  $t^{-1}(C\partial\sigma)$  и  $t^{-1}(\partial\sigma)$  являются подкомплексами  $UL$  и  $TL$  соответственно. Пусть  $TK$  получается из  $TL$  приклеивкой копии  $t^{-1}(C\partial\sigma)$  вдоль  $t^{-1}(\partial\sigma)$ . Продолжение  $t : TK \rightarrow K$  будет отправлять  $t^{-1}(C\partial\sigma)$  в  $C\partial\sigma$ , причём  $C\partial\sigma$  отождествляется с  $\sigma$  так, что вершина симплекса  $C\partial\sigma$  идёт в барицентр  $\hat{\sigma}$  симплекса  $\sigma$  (а дальше отображение продолжается по линейности). Для построения  $UK$  рассмотрим комплекс

$$X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma).$$

Тогда  $X$  будет пространством типа  $K(\pi, 1)$ , где  $\pi = G \star_F G$ ,  $G = \pi_1(t^{-1}(C\partial\sigma))$  и ясно, что  $\dim X = \dim \sigma = n$ . Рассмотрим следующее образование:

$$UK := (UL \cup TK) \sqcup_X \text{Cyl},$$

где  $\text{Cyl}$  — это цилиндр отображения  $X = K(G \star_F G, 1) \rightarrow K((A \times F) \star_F G, 1)$ , в котором  $A$  — нетривиальная геометрически конечная ацикличная группа с  $\dim K(A, 1) = 2$  (например, группа Хигмана  $\text{Hig}_4$ ). Отображение  $t$  продолжается на  $UK$  отправлением  $K((A \times F) \star_F G, 1)$  в барицентр конуса  $C\sigma$ . Если  $\dim \sigma = 1$ , нужно вместо  $G \star_F G$  взять группу  $\mathbb{Z}$ , которая должна вкладываться в  $A$  вместо  $(A \times F) \star_F G$ .

Пространство  $K((A \times F) \star_F G, 1)$  является ацикличным относительно системы коэффициентов  $t^* \mathcal{A}$ , поскольку последняя тривиальна. Действительно, она

получается из системы  $\mathcal{A}$  на  $X$  pullback'ом вдоль отображения  $t : t^{-1}(C\partial\sigma) \rightarrow C\partial\sigma$ , но конус  $C\partial\sigma$  стягиваем, и значит, система  $\mathcal{A}$  на нём тривиальна.

Далее, из доказательства утверждения [??] получается, что  $\dim K((A \times F) \star_F G, 1) = n + 1$ .

Заметим, что на каждом шаге цилиндры отображения можно представить в виде симплицеального разбиения, поэтому мы получаем конечный симплицеальный комплекс с требуемыми свойствами. Эта конструкция также естественна по пространству  $X$ .

□

## 8.2 Конструкция Маундера для двумерного симплекса

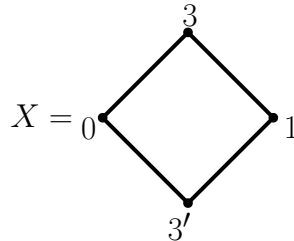
Приведём здесь пошаговое построение конструкции Маундера пространства Кана-Тёрстона для 2-мерного диска  $\mathbb{D}^2$ .

**Шаг 0.** Сначала мы имели нульмерный остов, состоящий из 3 вершин  $L = \{[0], [1], [2]\}$ . В этом случае конус является объединением трёх отрезков:  $CL = \{[3, 0], [3, 1], [3, 2]\}$ . Конструкция Кана-Тёрстона  $TL$  совпадёт с  $L$  и пространство  $UL$  совпадёт с  $CL$ . Отображение пар  $t : (UL, TL) \rightarrow (CL, L)$  будет тождественным.

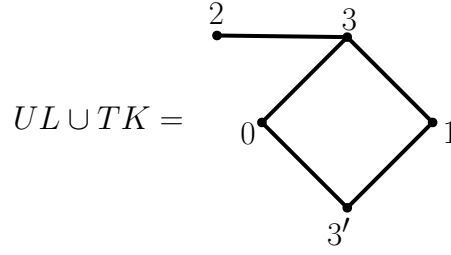
**Шаг 1.** Приклеим 1-симплекс  $\sigma = [0, 1]$  к комплексу  $L$  и получим комплекс  $K$ . Тогда  $C\partial\sigma$  будет «рогом»  $[3, 0] \cup [3, 1]$ ,  $t^{-1}(C\partial\sigma) = [3, 0] \cup [3, 1]$ , и  $t^{-1}(\partial\sigma) = [0] \cup [1]$ . Значит,  $TK = TL \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3', 0] \cup [3', 1] \cup [2]$  — это объединение двух отрезков и точки, причём при отображении  $t : TK \rightarrow K$  вершина  $[3]$  отображается в середину отрезка  $[0, 1]$ .



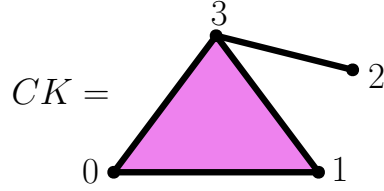
Пространство  $X = t^{-1}(C\partial\sigma) \sqcup_{t^{-1}(\partial\sigma)} t^{-1}(C\partial\sigma) = [3, 0] \cup [3, 1] \cup [3', 0] \cup [3', 1]$  — это окружность  $K(\mathbb{Z}, 1)$ .



Далее, мы должны приклеить к объединению  $UL \cup TK$  к пространству  $X$ . В результате получится:



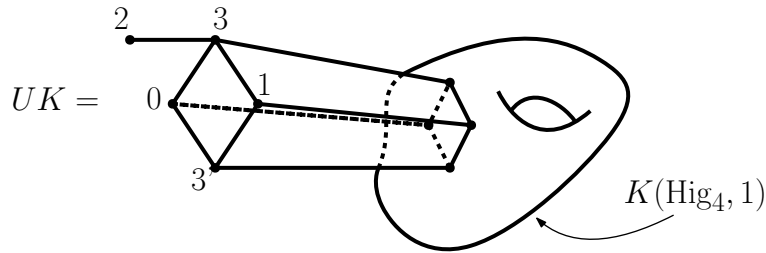
Комплекс  $CK$  будет выглядеть так:



Теперь нужно приклеить к пространству  $UL \cup TK$  цилиндр отображения  $X \simeq K(\mathbb{Z}, 1) \rightarrow K(\text{Hig}_4, 1)$ , и мы получим пространство  $UK$ .

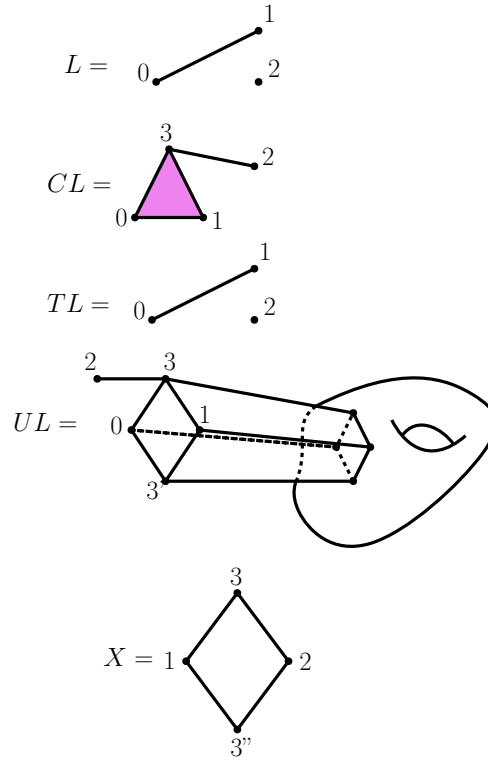
Отображение  $t : TK \rightarrow K$  будет отображать комплекс  $K(\text{Hig}_4, 1)$  в барицентр  $[4]$  треугольника  $[0, 3, 1]$ . При этом грани «призмы», примыкающие к сторонам  $[3, 0]$  и  $[3, 1]$  отобразятся на треугольник  $[4, 0, 1]$ . Две другие грани «призмы», примыкающие к отрезкам  $[0, 3]$  и  $[3, 1]$  отобразятся на треугольники  $[4, 0, 3]$  и  $[4, 3, 1]$  соответственно.

Обозначим для удобства дальнейшего изложения получившееся образование за  $A := UK$ .



**Шаг 2.** Переобозначим полученную пару комплексов через  $(UL, TL)$  и будем приклеивать следующий 1-симплекс  $[1, 2]$ .

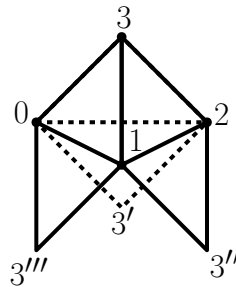
Пока мы имеем такие данные:



Пространство  $TK$  будет представлять собою  $[0, 1] \cup [3'', 1] \cup [3'', 2]$  и будет отображаться в  $K$ , отправляя точку  $3''$  в барицентр отрезка  $[1, 2]$ . В качестве пространства  $UK$  будет выступать объединение отрезка  $[0, 1]$  и пространства с двумя склеенными копиями  $A$ , причём вторая копия  $A$  будет подклеиваться к «рогу»  $[3, 2] \cup [3, 1]$ .

**Шаг 3.** Приклеим третье ребро  $[0, 2]$ . В результате, к  $UL$  подклеится ещё одна копия пространства типа  $A$  с прошлого шага, но уже к рогу  $[3, 2] \cup [3, 0]$ , также к  $UL$  подклеится отрезок  $[1, 2]$ . Пространство Кана-Тёрстона будет  $[0, 1] \cup [1, 2] \cup [3''', 2] \cup [3''', 0]$  — окружность.

**Шаг 4.** Подклейка двумерной клетки к границе треугольника. Комплекс  $T\Delta^2$  будет представлять собой три образования типа  $A$ , склеенных вдоль трёх рогов с общей вершиной  $[3]$  и остальными вершинами  $[0], [1], [2]$ . Приведём здесь схему расположения «рогов»:



Как устроено отображение  $t : TK \rightarrow K$ ? Конус над границей треугольника  $[0, 1, 2]$  с вершиной  $[3]$  переходит в треугольник  $[0, 1, 2]$  так, что вершина



[3] отображается в барицентр треугольника  $[0, 1, 2]$ , а остальные вершины конуса переходят тождественно в вершины этого треугольника. На другие точки этого конуса отображение  $t$  продолжается по линейности. На каждом из трёх подклеенных цилиндров отображение  $t$  уже задано.

Полученное пространство  $T\mathbb{D}^2$  имеет в качестве фундаментальной группы свободное произведение трёх групп Хигмана  $\text{Hig}_4$ . То есть для стягиваемых пространств конструкция Маундера даёт нестягиваемые ациклические пространства. Это наглядно иллюстрирует тот факт, что функтор Кана-Тёрстона не является гомотопическим.

### 8.3 Модификация конструкции Маундера

Из следствия 15.2 теоремы 15 получается, что в первой конструкции Маундера в качестве гомологического конуса будет годиться универсальная конечно определённая ациклическая группа  $\mathfrak{U}$  (см. §5). В обозначениях этой конструкции  $\pi_1(T\partial\sigma) = \pi$  вкладывается в  $\mathfrak{U} = C\pi$  и затем к  $T\partial\sigma$  приклеивается цилиндр отображения  $T(\partial\sigma) \rightarrow K(\mathfrak{U}, 1)$ .

Однако если исходно мы имели конечный симплициальный комплекс  $X$ , то в результате получится бесконечномерный симплициальный комплекс  $TX$  с конечным числом клеток каждой размерности, поскольку группа  $\mathfrak{U}$  имеет кручение (см. §5).

### 8.4 Проблема однозначности конструкции Маундера

Рассмотренные функторы типа Кана-Тёрстона  $T$  существенным образом зависят от симплициального разбиения исходного пространства  $X$ , а также от выбора групповых конусов. Рассмотренный выше пример конструкции Маундера  $T\delta^2$  показывает, что  $T$  не является гомотопическим функтором. Однако если зафиксировать выбор вложения в групповой конус (например, вкладывать группы в универсальную ациклическую группу Хигмана  $\mathfrak{U}$ ), то фундаментальная группа пространства  $TX$  некоторым образом характеризует комбинаторику исходного симплициального комплекса  $X$ .

## §9 Группы, свободно действующие на ациклических пространствах

Рассмотренные выше функторы Дрора  $A$ , Кана-Тёрстона  $T$  дают надежду на обобщение понятия универсального расслоения. А именно, для данной груп-

пы  $G$  зададимся поиском ациклического, но не стягиваемого пространства  $\mathcal{E}G$ , на котором дискретная группа  $G$  действует свободно.

Естественность функтора Дрора давала надежду на то, что он переводит накрытия симплициальных множеств в накрытия. Другая гипотеза состояла в том, что композиция  $A\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \rightarrow X$  является накрытием. Однако обе эти гипотезы неверны, поскольку имеет место следующее

**Утверждение 11.** *Если  $\mathcal{E}G \rightarrow \mathcal{B}G$  —  $G$ -накрытие с гомологически тривиальным  $\mathcal{E}G$ , то  $\mathcal{B}G$  имеет такие же гомологии с коэффициентами в тривиальном  $G$ -модуле  $\mathbb{Z}$ , как и  $BG$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим спектральную последовательность Картана-Лере

$$H_p(G; H_q(\mathcal{E}G)) \Rightarrow H_*(\mathcal{B}G).$$

Она вырождается во втором члене, поэтому

$$H_n(\mathcal{B}G) \cong H_n(G; H_0(\mathcal{E}G)) = H_n(G; \mathbb{Z}) = H_n(G).$$

Последнее равенство верно в силу тривиальности  $G$ -модуля  $\mathbb{Z}$ . □

После чего при работе возникла гипотеза, связанная уже с применением функтора Кана-Тёрстона: существует ли такая конструкция функтора Кана-Тёрстона  $T$ , что если  $\tilde{X} \rightarrow X$  является универсальным  $G$ -накрытием, то  $T\tilde{X} \rightarrow TX$  тоже является  $G$ -накрытием. Модификация первой конструкции Маундера, рассмотренная в параграфе 8.3 является искомой, то есть справедлива

**Теорема 20.** *Существует функтор типа Кана-Тёрстона, переводящий  $G$ -накрытия в  $G$ -накрытия.*

*Доказательство.* Пусть отображение симплициальных комплексов  $Y \rightarrow X$  является  $G$ -накрытием, т. е. на пространстве  $Y$  задано свободное симплициальное действие дискретной группы  $G$ , такое, что в факторе  $Y/G$  получается пространство  $X$ . Покажем, что по действию  $G \curvearrowright Y$  можно построить действие  $G \curvearrowright TY$ . Поскольку  $\text{sk}^1 TY = Y$ , то на одномерном скелете действие  $G$  уже задано. Предположим теперь, что мы подклеиваем к комплексу  $L \subset Y$  некоторую клетку  $\sigma$  и мы смогли уже задать действие  $G$  на  $TL$ . Приклейке клетки  $\sigma$  соответствует приклейка цилиндра  $\text{Cyl} = \text{Cyl}(T(\partial\sigma) \rightarrow K(C\pi_1(T\partial\sigma), 1))$  к  $TL$ . Пусть элемент  $g$  переводит  $T\partial\sigma$  в  $T\partial\sigma'$ . Тогда будет считать, что  $g$  будет переводить подклеивающийся цилиндр  $\text{Cyl}$  в его копию  $\text{Cyl}'$ , которая будет подклеиваться к  $T\sigma'$ . Таким образом можно продолжить действие с орбиты  $T\sigma$  на подклеенные цилиндры и значит, в конечном счёте на всё пространство  $TY$ . □

**Следствие 20.1.** *Для любой дискретной группы  $G$  существует ациклическое нестягиваемое пространство  $\mathcal{E}G$  с дискретным действием группы  $G$ . Факторпространство по этому действию будет представлять собой пространство  $\mathcal{B}G$ , гомологически эквивалентное классифицирующему пространству  $BG$  группы  $G$ .*

*Доказательство.* Достаточно применить теорему 20 к универсальному накрытию  $\mathcal{E}G \rightarrow BG$ . Гомологическая эквивалентность  $\mathcal{B}G$  и  $BG$  следует из утверждения 11.  $\square$

## §10 Классифицирующие пространства моноидов

Как мы знаем, по любой дискретной группе  $G$  можно построить классифицирующее пространство  $BG$ , рассмотрев бар-конструкцию.

Но можно построить  $BG$  как реализацию нерва некоторой категории. А именно, пусть  $\mathcal{G}$  — категория, состоящая из одного объекта и морфизмов, соответствующих элементам группы  $G$ . Нервом категории  $\mathcal{G}$  будет являться симплициальное множество,  $n$ -симплекс которого является последовательность

$$\bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet$$

Оператор грани  $d_i$  будет сопоставлять данной последовательности следующую:

$$\bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{g_{i+1}g_i} \bullet \rightarrow \dots \rightarrow \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet$$

Отображение вырождения  $s_i$  будет вставлять на место  $i$  тождественный морфизм, соответствующий единице группы.

**Предложение 2.** *Бар-конструкция для  $G$  и геометрическая реализация нерва  $|\mathcal{N}(\mathcal{G})|$  построенной выше категории  $\mathcal{G}$  гомеоморфны.*

Симплициальную конструкцию классифицирующего пространства безболезненно можно перенести на случай любого моноида  $M$ . Но в этом случае не следует ожидать, что  $BM$  будет слабо гомотопически эквивалентно пространству  $K(G, 1)$ , где  $G$  — некоторая дискретная группа. Это следует из такого замечательного результата:

**Теорема 21** (D. McDuff, 1978, [10]). *Любое линейно связное пространство слабо гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству  $BM$  некоторого дискретного моноида  $M$ .*

Можно задаться вопросом о том, в каких случаях всё же  $BM \simeq K(G, 1)$ . Естественно ожидать, чтобы группа  $G$  была в некотором смысле близка к исходному моноиду  $M$ . Для любого моноида можно построить такую универсальную группу  $G$ , и она называется *группификацией* моноида  $M$ . Рассмотрим свободную группу  $\Gamma$ , натянутую на элементы моноида  $M$  и формально обратные к ним и профакторизуем  $\Gamma$  по наименьшей нормальной подгруппе  $N$ , содержащей соотношения вида  $xy = z$ , если такое равенство имело место в исходном моноиде  $M$ . Тогда  $\Gamma/N$  называется группификацией моноида  $M$ .

**Определение 12.** Группификацией моноида  $M$  называется такая группа  $G$  с гомоморфизмом  $\varphi$ , что для любой группы  $H$  и любого гомоморфизма  $\psi : G \rightarrow H$  существует единственный гомоморфизм  $f : M \rightarrow H$ , замыкающий диаграмму до коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & G \\ & \searrow f & \downarrow \psi \\ & & H \end{array}$$

**Пример 2** (А. Мальцев, 1937, [11], [12]). Рассмотрим свободный моноид

$$F = \langle a, b, c, d, x, y, u, v \rangle$$

и его фактор  $\mathcal{M}$  по отождествлениям  $(ax, by)$ ,  $(cx, dy)$  и  $(au, bv)$ . Мальцев показал, что  $cu \neq dv$  и что моноид  $\mathcal{M}$  несокращаемый. Откуда получается, что  $\mathcal{M}$  нельзя вложить ни в какую группу, иначе было бы:  $[d^{-1}c] = [yx^{-1}] = [b^{-1}a] = [vu^{-1}]$ . Значит,  $[cu] = [dv]$

Этот пример показывает, что не всегда моноид вкладывается в свою группификацию. Однако в некоторых случаях вложение имеет место:

**Утверждение 12.** *Отображение в группификацию коммутативного сокращаемого моноида является вложением.*

Здесь под *сокращаемым моноидом* понимается такой моноид  $M$ , в котором из  $xy = xz$  следует, что  $y = z$  и из  $yx = zx$  следует, что  $y = z$ .

## Список литературы

- [1] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015

- [2] G. Baumslag, E. Dyer & A. Heller, *The topology of discrete groups*, J. of Pure and Appl. Alg. 16 (1980), 1- 47. | MR 549702 | Zbl 0419.20026
- [3] A. Deleanu, *On a theorem of Baumslag, Dyer and Heller linking group theory and topology*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, no 3 (1982), p. 231-242
- [4] D. Kan and W. Thurston, *Every connected space has the homology of a  $K(\pi, 1)$* , Topology Vol. 15. pp. 253–258, 1976.
- [5] G. Higman, *A Finitely Generated Infinite Simple Group*, Volume s1-26, Issue 1 p. 61-64 Journal of the London Mathematical Society. Notes and Papers.
- [6] C. R. F. Maunder, *A Short Proof of a Theorem of Kan and Thurston*, Bulletin of the London Mathematical Society, Volume 13, Issue 4, July 1981, Pages 325–327, <https://doi.org/10.1112/blms/13.4.325>
- [7] Berrick, Hillman, *Perfect and acyclic subgroups of finitely presentable groups*, J. London Math. Soc. (2) 68 (2003) 683–698
- [8] Dyer, E., Vasquez, A. (1973), *Some small aspherical spaces*, Journal of the Australian Mathematical Society, 16(3), 332-352. doi:10.1017/S1446788700015147
- [9] N. Monod, *Variations on a theme by Higman*, <https://arxiv.org/abs/1604.05454>
- [10] Dusa McDuff, *On the classifying spaces of discrete monoids*, Topology, Volume 18, Issue 4, 1979, Pages 313-320
- [11] A. Malcev, 1937, *On the Immersion of an Algebraic Ring into a Field*, Mathematische Annalen, vol. 113, no. 1, pp. 686 — 691.
- [12] O. Lenz, *The classifying space of a monoid*, Thesis submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Master of Science in Mathematics, 2011, Advisor: Dr. Lenny D.J. Taelman
- [13] Kervaire M., *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Transactions of the American Mathematical Society. 144: 67–72, 1969
- [14] Milnor J., *On simply connected 4-manifolds*, Symposium internacional de topologia algebraica, Universidad Nacional Autnoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958, pp. 122-128. MR 21 #2240
- [15] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трех- мерной сферы, УМН, 1974, том 29, выпуск 5(179), 71–168

- [16] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и определяющих соотношений*, М.: Наука, 1974.
- [17] R. Milgram, *The bar construction and abelian H-spaces*, Illinois J. Math. 11 (1967), 242-250.
- [18] John Milnor, *Construction of Universal Bundles*, I, Ann. of Math. 63:2 (1956) 272-284
- [19] Eilenberg, Samuel; Ganea, Tudor (1957). *On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups*. Annals of Mathematics. 2nd Ser. 65 (3): 517–518
- [20] A. J. Berrick, *A topologist's view of perfect and acyclic groups*, Invitations to Geometry and Topology, ed. M. R. Bridson, S. M. Salamon, Oxford Graduate Texts in Math. 5, Oxford Univ. Press (Oxford, 2002), ch. 1: 1–28.
- [21] Н. Э. Добринская, *Гипотеза Арнольда–Тома–Фама и классифицирующее пространство положительного моноида Артина*, УМН, 57:6(348) (2002), 181–182; Russian Math. Surveys, 57:6 (2002), 1215–1217
- [22] Новиков П. С., Адян С. И., *О бесконечных периодических группах*. I // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1968. — Т. 32, выпуск 1. — С. 212–244.
- [23] Daniel G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967
- [24] Aldridge K. Bousfield Daniel M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Lecture Notes in Mathematics book series (LNM, volume 304), 1972
- [25] E. Dror, *Acyclic spaces*, Vol. II, pp. 339-348, Pergamon Press, 1972
- [26] G. Baumslag, E. Dyer, C.F. Miller, *On the integral homology of finitely presented groups*, Topology, Volume 22, Issue 1, 1983, Pages 27-46
- [27] Stilwell, J., Serre, J.P., *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2002
- [28] Higman Graham, *Subgroups of finitely presented groups*, Proc. R. Soc. Lond. A262455–475, 1961
- [29] <https://arxiv.org/abs/1610.00977>

- [30] G. Higman, B. H. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. 24 (1949) 247–254.
- [31] J. N. Mather, *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Vol. 10, pp. 197-298, 1971.