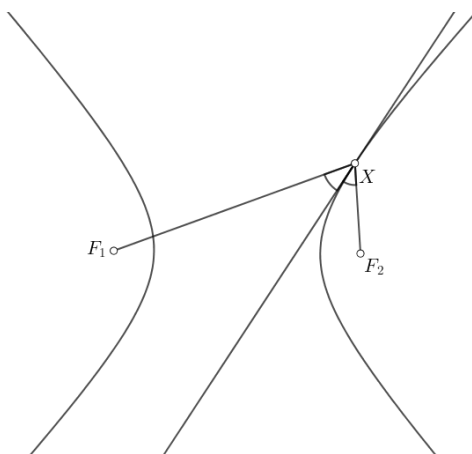


## ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Введите разумную систему координат и запишите в ней уравнения эллипса, гиперболы и параболы.



2. Докажите фокальное свойство гиперболы (смотрите рисунок).
3. В шестиугольнике  $ABCDEF$  прямые  $AB, FC, ED$  пересекаются в одной точке. Прямые  $FE, AD, BC$  пересекаются в другой точке. Докажите, что тогда прямые  $AF, BE, CD$  тоже пересекаются в некоторой точке.
4. Даны четыре прямые  $\ell_1, \dots, \ell_4$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Прямая  $\ell$  пересекает эти прямые в точках  $A, B, C, D$ . Докажите, что двойное отношение точек

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

не зависит от выбора прямой  $\ell$ .

5. Докажите, что проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в вершине.
6. Пусть касательные к параболе в точках  $X$  и  $Y$  пересекаются в точке  $P$ . Тогда  $P$  является центром описанной окружности треугольника  $FX'Y'$ , где  $X'$  и  $Y'$  — проекции точек  $X$  и  $Y$  на директрису параболы, а  $F$  — фокус этой параболы.
7. Пусть хорда  $PQ$  содержит фокус  $F_1$  эллипса,  $R$  — точка пересечения касательных к эллипсу в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда  $R$  — это центр вневписанной окружности треугольника  $F_2PQ$  а  $F_1$  — это точка касания этой окружности со стороной  $PQ$ .
8. Если точку пересечения касательных к эллипсу в концах хорды, содержащей фокус, соединить с этим фокусом, получившаяся прямая будет перпендикулярна хорде.
9. Проведём из любой точки  $P$ , лежащей вне эллипса две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках  $X$  и  $Y$ . Тогда углы  $F_1PX$  и  $F_2PY$  равны ( $F_1, F_2$  — фокусы эллипса).
10. Множество точек, из которых парабола видна под углом  $\varphi$  или  $\pi - \varphi$ , есть гипербола с фокусом в точке  $F$  и директрисой  $\ell$ .