Числа-1

Запись «$a \equiv b \pmod m$» (читается: «a сравнимо с b по модулю m») означает, что $a-b$ делится на m.

◊**1**◊ Докажите следующие свойства сравнений:

1. $a \equiv a \pmod m$.

2. Если $a \equiv b \pmod m$, то и $b \equiv a \pmod m$.

3. Если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

4. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то верны сравнения: $a+c \equiv b+d \pmod m$, $a-c \equiv b-d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$. Иными словами, сравнения по одному и тому же модулю можно складывать, вычитать и умножать.

5. Если $ab \equiv ac \pmod m$ и (a, m), то $b \equiv c \pmod m$.

6. Обе части сравнения (вместе с модулем!) можно умножать на любое отличное от нуля целое число.

7. Обе части сравнения (вместе с модулем!) можно разделить на их общий множитель.

8. Если $a \equiv b \pmod m$, то $(a, m) = (b, m)$.

9. Если $a \equiv b \pmod m$ и $d \mid m$, то $a \equiv b \pmod d$.

10. Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким модулям, то оно имеет место и по модулю, равному наименьшему общему кратному этих модулей.

◊**2**◊ У числа 7^{2017} сложили все цифры в десятичной записи, после чего то же самое стали проделывать с получающимися числами. Какое однозначное число получится в конце данного процесса?

◊**3**◊ Существует ли конечное множество рациональных чисел таких, что любое рациональное число можно получить целочисленной линейной комбинацией из чисел данного множества? (Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — числа из данного множества. Целочисленной линейной комбинацией называется любое выражение вида $k_1a_1 + \ldots + k_na_n$, где k_1, ..., k_n — произвольные целые числа).

◊**4**◊ 1) Пусть $(a, p) = 1$. Будем умножать a на числа от 0 до $p-1$ и выписывать остатки от деления каждого числа на p. Докажите, что в результате будут выписаны все числа от 0 до $p-1$ (возможно, в каком-то другом порядке).
2) *Малая теорема Ферма.* Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

◊**5**◊ Существуют ли такие натуральные a и b, что числа $a^{2017} + b$ и $a + b^{2017}$ — точные 2017-е степени натуральных чисел?

◊**6**◊ *Немного дробей.*
1) Почему у десятичного представления любой обыкновенной дроби непременно должен быть период?
2) Представьте дробь $0,(23)$ в виде обыкновенной.

◊**7**◊ Официант Василий ходит в одном направлении вокруг круглого стола и кладёт по салфетке рядом со столовыми приборами. Всего данный стол забронировало 200 посетителей. Василий кладёт салфетку рядом с каждой i-ой тарелкой. На какое количество мест накроет официант Василий, если $i = 49$? если $i = 30$? Что можно сказать для n посетителей и любого i?

◊**8***◊ Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде суммы шести попарно различных по абсолютной величине кубов рациональных чисел.

Алгебра-1

◊**1**◊ В выражении $(x^{2017}+x+1)^{2016}(x^{2016}+x+1)^{2017}$ раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые.

а) Чему равна сумма всех получившихся коэффициентов многочлена?

б) Чему равна сумма всех коэффициентов при нечётных степенях этого многочлена?

◊**3**◊ Разложите на множители, отличные от 1, следующие многочлены:

а) x^4+4 (на два множителя);

б) $abc^2+a^2c+b^2c+ab$ (на два множителя);

б) x^4-13x^2-36 (на четыре множителя);

в) $1-a-b-c+ab+bc+ac-abc$ (на три множителя);

◊**4**◊ Докажите, что выражение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ неотрицательно для любого x.

◊**5**◊ Найдите в след за Архимедом сумму: $1^2+2^2+\ldots+n^2$, т. е. докажите, что значение этой суммы выражается некоторым многочленом, зависящим от n, найдя его.

◊**6**◊ *Бином Ньютона.*

1) Докажите, что число способов выбрать из n различных предметов k предметов $(0<k<n+1)$ равно $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — *биномиальному коэффициенту*.

2) Докажите важное свойство биномиальных коэффициентов, лежащих в основе треугольника Паскаля: $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$.

3) Докажите формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

◊**7**◊ *Последовательность Фибоначчи.*

Она определяется следующим образом: $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$.

Докажите следующие равенства для любого натурального n:

а) $F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$;

б) $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$.

В преддверии подобия

◊**1**◊ В трапеции длины оснований равны a и b. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

◊**2**◊ *Теорема Вариньона.* На плоскости расположен четырёхугольник $ABCD$ (необязательно выпуклый), никакие три из его вершин не лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон четырёхугольника $ABCD$ служат вершинами параллелограмма.

◊**3**◊ Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C отрезок проведённый к гипотенузе является медианой тогда и только тогда, когда $CM = AM = BM$.

Закреплённым вектором называется отрезок на плоскости, с заданным началом и концом. Его можно себе представлять как «стрелочку» — это условность, облегчающая восприятие. Рассмотрим множество всех отрезков равной длины a, паралельных друг к другу и имеющих одно и то же направление. Назовём класс таких векторов *свободным вектором* $\overrightarrow{a}$. Рассмотрим два свободных вектора: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Суммой $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ двух векторов называется вектор AC — *правило треугольника*. Произведением вектора $\overrightarrow{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\overrightarrow{a}$, имеющий то же направление, но длину, равную λa.

◊**4**◊ Докажите, что данные операции суммы двух свободных векторов и умножения их на число определены корректно, т. е. не зависят от представителей класса.

◊**5**◊ Докажите *правило параллелограмма*: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, где C — вершина параллелограмма, построенного на отрезках AB и AC.

◊**6**◊ 1) Пусть точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

2) Пусть $P \in BC$, $\frac{BP}{PA} = k$. Выразите вектор $\overrightarrow{AP}$ через сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, домноженных на числа.

1. *Отражением относительно прямой* ℓ называется преобразование плоскости, переводящее любую точку P в P' так, чтобы P' лежала в другой полуплоскости относительно ℓ и расстояния от P до ℓ равно расстоянию от P' до ℓ.

2. *Поворот вокруг точки O на угол α* — это преобразование, при котором P на окружности с центром в точке O переходит в точку P' также лежащую на окружности, причём так, чтобы $\angle POP' = \alpha$.

3. *Параллельным переносом на вектор* $\overrightarrow{a}$ называется преобразование плоскости, переводящее любую точку P в точку P' так, чтобы $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{a}$.

4. *Гомотетией относительно точки O с коэффициентом k* называется преобразование плоскости, переводящее любую точку P в точку P' так, чтобы $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$.

Композиция (сочетание) нескольких или одно из преобразований 1-3 и гомотетии называется *преобразованием подобия*.

◊**7**◊ Движение — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками. Докажите, что композициие любых преобразований — есть движение.

◊**8**◊ Прямые ℓ_1 и ℓ_2 с углом α между ними пересекаются в точке O. Докажите, что композиция отражений относительно этих прямых есть поворт вокруг точки O на угол 2α.

◊**9**◊ Докажите, что гомотетия переводит: а) прямые в прямые; б) параллельные прямые в параллельные; в) равные углы в равные.

Конгруэнтность и подобие

Два треугольника называются *конгруэнтными* (равными), если сущесвтует движение, переводящее один треугольник в другой. Из этого определения следует, что если треугольники конгруэнтны, то у них равны стороны и равны углы.

Два треугольника называются *подобными*, если существует преобразование подобия, переводящее один треугольник в другой. Из этого определения следует, что если треугольники подобны, то у них пропорциональны стороны и равны углы.

Существуют три признака подобия треугольников. Напоминим их. **Первый признак:** если два угла треугольника равны двум углам другого треугольника. **Второй признак:** если две стороны одного треугольника пропорциональны и углы между сторонами равны. **Третий признак:** три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого.

◊π◊ В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Известно, что $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = 20^\circ$, $\angle BAA_1 = 40^\circ$, $\angle ACC_1 = 30^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

◊$\sin 1$◊ В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. При помощи данного чертежа докажите *теорему Пифагора*: $AC^2 + CB^2 = AB^2$.

◊e◊ В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AD, AB, BC, CD отметили соответственно точки K, L, M, N так, что $KL \parallel MN$. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции $KLMN$ лежит на прямой AC.

◊$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$◊ В остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — основания соответствующих высот.
1) Докажите, что треугольники BA_1C_1 и BCA подобны.
2) Чему равно отношение $\dfrac{A_1C_1}{AC}$, если $\angle B = 60^\circ$?

◊$\frac{1}{2}$◊ В треугольнике ABC провели биссектрисы AA_1 и BB_1, точка P лежит на отрезке A_1B_1. Докажите, что расстояние от точки P до стороны AB равно сумме расстояний до сторон AB и BC. (Расстояние от точки до прямой — кратчайшее расстояние между точкой и прямой, т. е. длина перпендикуляра).

◊**6**◊ Докажите, что точка пересечения диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

◊**7***◊ Прямая ℓ пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC за точку C в точках K, L, M соответственно. Докажите *теорему Менелая*: $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LM} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$.

Окружность

Напомним факты из геометрии окружности. **В случае, если какие-то факты вам окажутся незнакомыми, докажите их.** Во-первых, *окружность* — это геометрическое место точек, равноудалённых от данной, фиксированной точки — *центра*. Во-вторых, окружность может иметь с любой прямой не более двух общих точек, причём если точка единственна, то такая прямая называется *касательной*; если две точки — *секущей*. Радиус, проведённый в точке касания перпендикулярен касательной. Из любой точки плоскости, лежащей вне круга, ограниченного данной окружностью, можно провети ровно две касательные к ней, причём длины этих касательных будут равны. Вписанный угол равен половине центрального угла. Около любого треугольника можно описать окружность. Выпуклый четырёхугольник вписан в окружность $\Leftrightarrow$ сумма его противоположных сторон равна $180°$. Многоугольник называется описанным около окружности, если он касается каждой своей стороной некоторой окружности. В любой треугольник можно вписать окружность. В четырёхугольник можно вписать окружность $\Leftrightarrow$ Суммы длин пар противоположных сторон равны.

◊**1**◊ В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отметили точки K и L соответственно так чтобы $BK\cdot BA = BL\cdot BC$. Докажите, что точки A, C, L, K лежат на одной окружности. (*Важная вспомогательная задача*).

◊**2**◊ В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABC = \angle ADC$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности Ω. (*Важная вспомогательная задача*).

◊**3**◊ Из точки P, лежащей вне круга, ограниченного окружностью Ω лежит точка P. Прямая PX пересекает Ω в в точках A и B, причём $PA < PB$. Докажите, что квадрат длины касательной, проведённой из точки P к Ω равен $PA\cdot PB$. (*Теорема о квадрате касательной* и *Важная вспомогательная задача*).

◊**4**◊ Отрезки AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности $\Leftrightarrow AP\cdot PB = CP\cdot PD$. (*Теорема о хордах* и *Важная вспомогательная задача*).

◊**5**◊ В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Докажите, что $IP = IB = IC$. (*Лемма о трезубце или лемма о куриной лапке*)

◊**6**◊ В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — основания соответствующих высот. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что в треугольнике $A_1B_1C_1$ точка H — инцентр (центр вписанной окружности).

◊**7**◊ В треугольнике ABC точки H_a, H_b, H_c — основания высот, M_a, M_b, M_c — основания медиан, K_a, K_b, K_c таковы, что они лежат на соответствующих высотах, и $AK_a = \frac{1}{3}AH_a$, остальные точки определяются аналогично. Докажите, что введённые 9 точек лежат на одной окружности. (*Окружность Эйлера–Фейрбаха или окружность девяти точек*).

Комбинаторика-1

Правило суммы. Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y независимо от выбора элемента x можно выбрать n способами, то выбор «x или y» можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения. —//— «x и y» можно сделать $m \cdot n$ способами.

◊**Важная вспомогательная задача**◊

Пусть $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ — некоторое множество.

а) Определите количество упорядоченных групп $(y_1, ..., y_n)$ из n элементов множества M. Это число P_n — число перестановок из n элементов.

б) Определите количество упорядоченных групп $(y_1, ..., y_k)$ из $0 \leqslant k \leqslant n$. Это число A_n^k — число размещений без повторений из n элементов по k.

в) Определите количество k–элементных подмножеств множества M. Это число C_n^k — число сочетаний без повторений из n элементов по k элементов. Читается: «C из n по k».

◊**0**◊ На окружности отметили несколько точек и около каждой поставили знак + или –. Выберем любую точку и начнём двигаться по часовой стрелке. Если при этом мы переходим от точки с одним знаком к точке с противоположным знаком, то тогда имеется *одна перемена знака*. Можно ли так отметить точки и знаки, чтобы число перемен знака было равно 2017?

◊**1**◊ В языке народа тумба-юмба используются буквы Ы и Э, причём жители не различают слова-полиндромы (т. е. слова, читающихся наоборот также, как и вперёд). Какое наибольшее количество десятибуквенных слов может содержаться в языке тумба-юмба?

◊**2**◊ В некоторой стране проживает n человек. Каждый человек заинтересован будущим своей страны и поэтому состоит в партии «Спасём жизнь слонам!» или в партии «Всем квартиры!»; или и в той, и в другой. Известно, что каждая группа людей одновременно состоит ровно в одной партии. При каких n такое возможно? Какое число групп людей состоит в одной партии?

◊**3**◊ Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + ... + x_n = s$, $s > n-1$

1) в натуральных числах?

2) в целых неотрицательных числах?

◊**4**◊ Сколькими способами n различных предметов можно разложить по $k < n+1$ ящикам?

◊**5**◊ В мешке имеются шары k ($k > n-1$) цветов, причём шаров каждого вида не меньше n. Какова вероятность того, что наугад вытащенные n шаров будут иметь попарно разные цвета

◊**6**◊ 1) Сколькими способами можно поставить на книжную полку 15 книг, среди которых 10 книг В. А. Зорича «Математический анализ», 4 книги Э. Б. Винберга «Курс алгебры» и «Сборник произведений» А. П. Чехова?

2) Обобщите задачу из предыдущего пункта и решите её.

◊**7**◊ Является ли число $\dfrac{5050!}{2! \cdot 3! \cdot ... \cdot 100!}$ целым? Обобщите данный вопрос и ответьте на него.

◊**8**◊ Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Площадь

Площадью называется функция, ставящая в соответствие данной фигуре Φ некоторое неотрицательное число, причём для любых двух фигур Φ_1 и Φ_2 $S(\Phi_1 \cup \Phi_2) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2) - S(\Phi_1 \cap \Phi_2)$. Сначала определяют площадь квадрата, затем получают оттуда формулу для площади треугольника, доказывают, что площадь многоугольника не зависит от способа разбиения его на треугольники. Подробно данные вопросы изучает теория меры — часть математики.

◊**1**◊ Площадь выпуклого четырёхугольника равна S. Найдите площадь такого четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырёхугольника.

◊**2**◊ В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD площади треугольников AOD и BOC равны. Докажите это.

◊**3**◊ Докажите при помощи площади, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

В следующих двух задачах предлагается доказать *теорему Чевы*[1].

◊**4a**◊ Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1A} = 1$.

◊**4b**◊ Докажите, что верно и обратное утверждение.

◊**5**◊ В пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel ED$, $AE \parallel BD$. Пусть M — середина AE. Докажите, что отрезок CM делит пятиугольник на два равновеликих четырёхугольника.

◊**6a**◊ Докажите, что из медиан любого треугольника можно составить новый треугольник.

◊**6b**◊ Найдите площадь полученного треугольника, если площадь исходного треугольника равна S.

◊**6c**◊ Из высот треугольника $\triangle_1$ сумели составить треугольник $\triangle_2$. Докажите, что тогда из высот треугольника $\triangle_2$ тоже можно составить треугольник.

◊**6d**◊ Всегда ли из биссектрис треугольника можно составить треугольник?

◊**7**◊ (*Теорема Бойяи–Валласа–Гервина*[2]). Если один из (необязательно выпукдых) многоугольников можно разрезать прямолинейными разрезами и из полученных кусочков можно сложить другой многоугольник, то эти два многоугольника называются *равносоставленными*. В случае, когда два многоугольника равносоставленны, их площади равны — неинтересное утверждение! А верно ли обратное? Оказывается, да, и в следующих задачах предлагается это доказать.

Лемма 1. Любой многоугольник на плоскости (в том числе и невыпуклый) можно разрезать на треугольники (триангулировать).

Лемма 2. Любой треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником.

Лемма 3. Прямоугольник и параллелограмм имеющие общую сторону и равные площади равносоставленны.

Лемма 4. Два прямоугольника равной площади равносоставленны.

Лемма 5. Любой многоугольник на плоскости равносоставлен некоторому квадрату.

Докажите леммы и с помощью них теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

---

[1]Джованни Чева (1647–1734) — итальянский математик и инженер.

[2]Это фамилии трёх математиков.

Комбинаторика-2

◊**1**◊ Обозначим количество способов разбиения выпуклого n+2–угольника на треугольники через C_n (*число Каталана*[1]). Докажите, что

$$C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \ldots + C_0C_{n-1} = C_n,$$

и найдите первые 5 чисел Каталана.

◊**2**◊ Рассмотрим произведение $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Будем в нём расставлять n скобок так, чтобы стала понятной очерёдность выполнения умножения. Например, в выражении $(x_0{\cdot}x_1{\cdot}x_2)$ скобки можно расставить двумя способами: $(x_0(x_1x_2))$ и $((x_0x_1)x_2)$. Докажите, что количество вариантов расставить так скобки равно n-ому числу Каталана.

◊**3**◊ *Правильной скобочной структурой* называется последовательность открывающих и закрывающих скобок такая, что если идти слева направо, то каждой открывающей скобке будет соответствовать закрывающая так, чтобы любая закрывающая соответствовала ровно одной открывающей. Вот пример правильной скобочной структуры из 5 скобок: ((())())(). Пример неправильной скобочной структуры:)))(((()(). Докажите, что число правильных скобочных структур из n скобок равно C_n.

◊**4**◊ Город имеет форму прямоугольника $m \times n$ сотен квадратных метров. Решёткой располагаются улицы на расстоянии в одну сотню метров друг от друга. На противоположных концах одной из диагоналей располагаются два дома. Сколькими способами таксист сможет проехать по улицам от одного дома к другому самым выгодным образом (т. е. по кратчайшему расстоянию)?

◊**5**◊ Девочка прыгает по лестнице вниз либо на одну ступеньку, либо на две. Сколькими способами она сможет сойти с лестницы, состоящей из 10 ступенек?

[1] Эжен Каталан (1814–1894) — бельгийский математик.

Числа-2

◊**1**◊ Докажите, что данные уравнения не имеют решений в целых числах:

а) $x^2+y^2+z^2=2xyz$; б) $3^n=x^2+y^2$.

◊**2**◊ Докажите следующее равенство, установленное индийским математиком Рамануджаном: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

◊**3**◊ Найдите многочлен с целыми коэффициентами, имеющий одним из корней число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

◊**4**◊ Расположим в порядке возрастания все рациональные числа, которые заключены между 0 и 1 и знаменатели которых не превосходят n. Полученная последовательность чисел называется *последовательностью Фарея*[1].

а) Расположим в порядке возрастания все рациональные числа, которые заключены между 0 и 1 и знаменатели которых не превосходят n. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — два соседних числа в этой последовательности. Докажите, что $|ad-bc|=1$.

б) Запишите последовательность Фарея для $n=6$.

в) Пусть $\frac{a}{b}<\frac{x}{y}<\frac{c}{d}$ — три последовательные дроби в последовательности Фарея. Докажите, что $\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b+d}$.

г) В последовательности Фарея найдите дроби, соседние с $\frac{1}{2}$.

◊**5**◊ Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

◊**6**◊ Кузнечик прыгает по окружности радиуса 1 в одном направлении через каждые ℓ. При каких значениях ℓ он сможет вернуться на место старта?

◊**7**◊ Совокупность натуральных чисел $(a,\ b,\ c)$ называется *пифагоровой тройкой*, если они являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника.

а) Найдите пифагорову тройку с наименьшей длиной катета. (*Такой треугольник называют египетским*).

б) Докажите, что пифагоровых троек бесконечно много.

в) Докажите, что произведение чисел, входящих в пифагорову тройку делится на 60.

г) Пифагорова тройка называется *примитивной*, если $(a,\ b,\ c)=1$. Докажите, что примитивных пифагоровых троек бесконечно много, используя подходящее алгебраическое тождество от двух переменных.

д) Найдите все пифагоровы тройки, содержащие число 24.

е) Докажите, что количество пифагоровых троек, содержащих данное натуральное число n, конечно.

[1] Джон Фарей (1766–1826) — английский геолог и писатель.

Оценка+пример-1

◊**1**◊ В одной стране есть 8 городов, между которыми курсируют поезда. Из любого города можно добраться до любого другого, а также из города A можно добраться в город B не меньше, чем за 2 пересадки. Какое наибольшее количество железнодорожных линий может быть в стране?

◊**2**◊ В парке гуляют 10 приятелей, про которых известно, что среди любых четырёх из них найдётся пара общающихся между собой не столь часто. Какое наименьшее количество пар не столь часто общающихся приятелей может быть?

◊**3**◊ Какое наибольшее количество диагоналей может пересекаться в выпуклом n–угольнике в одной точке ($n > 3$)?

◊**4**◊ В магазине «Дешёвочка» в стране Жмотии цена любого товара является натуральным числом и не превосходит 1024 денежных единиц. У покупателя имеется k монет необязательно различных достоинств. Найдите такое наименьшее k, что любой товар можно купить, используя лишь данные k монет покупателя. (Достоинства монет являются натуральными числами).

Многоугольные фигуры на плоскости и не только

Многоугольником называется множество точек, ограниченное замкнутой несамопересекающейся ломаной, состоящей, как минимум, из трёх вершин. Если многоугольник таков, что он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через его сторону, то такой многоугольник называется *выпуклым*. В противном случае — *невыпуклым*. Отрезок, лежащий внутри или на границе многоугольника и имеющий наибольшую длину называется *диаметром*. Назовём *выпуклой фигурой* такое множество точек на плоскости, что для любых двух точек этого множества, отрезок, соединяющих их, содержится в том же множестве точек (т. е. каждая точка этого отрезка содержится в этом множестве точек). Фигура называется ограниченной, если её можно накрыть кругом.

Любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная делит плоскость ровно на две части: внутреннюю и внешнюю — это *теорема Жордана*[1].

◊**1**◊ Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

◊**2**◊ Докажите, что сумма внутренних углов произвольного n–угольника всегда равна $180°(n-2)$.

◊**3a**◊ Как человеку без инструментов, идущему вдоль стены лабиринта в форме n–угольника, понять, находится он внутри или снаружи лабиринта?

◊**3b**◊ На плоскости нарисовали n–угольник и отметили некоторую точку в его дополнении к плоскости. Как понять при помощи линейки, внутри ли отметили точку или снаружи?

◊**4**◊ Докажите, что концы диаметра выпуклого многоугольника являются некоторыми его вершинами.

◊**5**◊ Докажите, что пересечение нескольких выпуклых фигур — выпуклая фигура.

◊**6**◊ На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют хотя бы одну общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем выпуклым фигурам сразу. (*Теорема Хелли*[2])

◊**7**◊ На плоскости лежат две непересекающиеся ограниченные выпуклые фигуры. Докажите, что существует прямая, отделяющая эти две фигуры и непересекающая их. Верно ли аналогичное утверждение для невыпуклых многоугольников?

[1] Мари Жордан (1838–1922) — французский математик, известный благодаря своим работам в теории групп и анализе.

[2] Эдуард Хелли (1884–1943) — австрийский математик.