Демидович, №555

Кошелев А. ©

10 марта 2025 г.

Условие

Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

Решение

Поскольку $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ (связь степени и корня), выражение в скобках стремится к единице с ростом n. Действительно: $\frac{1}{n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$, а любое число в нулевой степени равно единице, так что $\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1+1}{2}=1$. Таким образом, предел представляет собой неопределённость вида 1^∞, которую необходимо как-то раскрыть. Воспользуемся для этого вторым замечательным пределом (**ВЗП**)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{1}$$

и его известным следствием

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \tag{2}$$

Сперва преобразуем выражение в скобках, чтобы получить структуру, похожую на **ВЗП**:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)\right)^n$$

Введём обозначение: $A_n=\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1$. Тогда наш предел примет вид $\lim_{n\to\infty}(1+A_n)^n$, который мы преобразуем далее, используя свойства логарифма:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+A_n)^n&=\lim_{n\to\infty}(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}\cdot A_n\cdot n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]^{A_n\cdot n}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\ln\left[(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]^{A_n\cdot n}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left[A_n\cdot n\cdot\ln(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]\end{aligned}$$

На данном этапе воспользуемся свойством непрерывности экспоненты: оно позволяет *поменять местами* значок предела и экспоненты:

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left[A_n\cdot n\cdot\ln(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\left[A_n\cdot n\cdot\ln(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]$$

По свойству пределов предел произведения равен произведению пределов:

$$\exp\lim_{n\to\infty}\left[A_n\cdot n\cdot\ln(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}(A_n\cdot n)\cdot\lim_{n\to\infty}\ln(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]$$

Рассмотрим первый предел:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(A_n\cdot n) &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}\right)n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)}{2\cdot\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right] = \frac{1}{2}(\ln a+\ln b) = \ln\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались **следствием из ВЗП** (2).

Рассмотрим второй предел, пользуясь **ВЗП** и непрерывностью логарифма (она даёт *перестановочность* lim и ln):

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+A_n\right)^{\frac{1}{A_n}} = \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+A_n\right)^{\frac{1}{A_n}} = \ln e = 1$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n &= \exp\left[\lim_{n\to\infty}(A_n\cdot n)\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+A_n\right)^{\frac{1}{A_n}}\right] \\
&= \exp\left[\ln\sqrt{ab}\cdot 1\right] \\
&= \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$