Étudiants ingénieurs en aérospatial

Mémoire de 3e année

Optimisation des méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Auteurs :
M. Audet Yoann
M. Chandon Clément
M. De Claverie Chris
M. Huynh Julien

Encadrant :
Pr. Bletzacker Laurent

Version 0.0 du
27 février 2019

Remerciements

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Présentation des méthodes itératives classiques

2.1 Présentation générale des méthodes

2.2 Méthodes classiques

2.2.1 Méthode de Jacobi

2.2.2 Méthode de Gauss-Seidel

2.3 Une nouvelle méthode : Richardson

2.3.1 Présentation de la méthode

Ci-dessus, nous avons exposé les deux principales méthodes que l'on a utilisé lors des cours et TP. Cependant, il est aussi possible pour nous de trouver d'autres méthodes de résolution. Pour cela, il nous faut juste réécrire le problème sous une autre forme que celles précédemment définies. Ainsi, nous pouvons utiliser la décomposition de la forme :

$$Ax = b \tag{2.1}$$
$$Px = (P - A)x + b \tag{2.2}$$

On remarque que peut importe la valeur de la matrice P dans l'équation ci-dessus, les deux équations sont équivalentes. Ainsi, résoudre le premier système revient donc à résoudre le second. La méthode Richardson se base sur cette décomposition. L'idée est de poser :

$$P = \beta I \text{ avec } I \text{ la matrice identité} \tag{2.3}$$

Ainsi, nous avons notre système qui s'écrit de la manière suivante :

$$\beta I x = (\beta I - A)x + b \tag{2.4}$$
$$x = (I - \frac{1}{\beta}A)x + \frac{1}{\beta}b \tag{2.5}$$

Pour un soucis d'écriture, nous allons écrire la formule précédente sous la forme :

$$x = (I - \gamma A)x + \gamma b \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\beta} \tag{2.6}$$

Ainsi l'idée est de construire une suite $x^{(k)}$ qui va converger vers la solution exacte du système que l'on notre ici x^*. Cette suite est définie de la manière suivante :

$$x^{(k+1)} = (I - \gamma A)x^k + \gamma b \tag{2.7}$$

Par définition de la suite, la matrice d'itération, notée ici R est :

$$R = I - \gamma A \tag{2.8}$$

Nous réécrivons la suite sous la forme :

$$x^{(k+1)} = Rx^k + K \text{ avec } K = \gamma b \tag{2.9}$$

Si cette suite converge, alors nous sommes en mesure de trouver une solution x^* approchant la craie solution du système. Ainsi, l'étude se porte donc sur la convergence de cette suite. Comme pour les autres méthodes itératives, la condition de convergence est la même que précédemment : le rayon spectrale de la matrice d'itération doit être strictement inférieur à 1. L'avantage de cette méthode est que la matrice d'itération dépends de γ. Ainsi, en jouant sur cette valeur de γ, il est possible de faire converger la suite en prenant une valeur qui fait que le rayon spectral est inférieur à 1. On peut même produire une étude qui fait que l'on va minimiser cette valeur du rayon spectral pour obtenir une meilleur convergence. Cette démarche sera expliqué dans la suite de l'exposé.

2.3.2 Étude de convergence et exemples

Chapitre 3

Optimisation du choix de la matrice d'itération

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il existe différente méthode pour permettre de résoudre un système linéaire grâce à des méthodes itératives. Ainsi, toujours dans cette idée d'optimisation que nous avons exposé, nous nous sommes posé la question suivante : « Quelle est la matrice d'itération la plus optimisé pour résoudre un problème ».

3.1 Présentation de la méthode SOR

3.2 Implémentation numérique

3.3 Quelques mots sur la méthode SSOR

Chapitre 4

Optimisation et Comparaison des méthodes

4.1 Optimisation des méthodes

4.1.1 Optimisation mathématique

4.1.2 Optimisation numérique

4.2 Comparaison des méthodes

Chapitre 5

Conclusion & ouverture

Liste des sigles et acronymes

Table des figures

Liste des tableaux