



Étudiants ingénieurs en aérospatial

Mémoire de 3^e année

Optimisation des méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Auteurs :

M. AUDET Yoann

M. CHANDON Clément

M. DE CLAVERIE Chris

M. HUYNH Julien

Encadrant :

Pr. BLETZACKER Laurent

Version 0.0 du
28 février 2019

Remerciements

Table des matières

1	Introduction	1
2	Présentation des méthodes itératives classiques	2
2.1	Présentation générale des méthodes	2
2.2	Méthodes classiques	2
2.2.1	Méthode de Jacobi	2
2.2.2	Méthode de Gauss-Seidel	2
2.3	Une nouvelle méthode : Richardson	2
2.3.1	Présentation de la méthode	2
2.3.2	Étude de convergence sur un exemple	3
2.3.3	Un peu plus de théorie	5
3	Optimisation du choix de la matrice d'itération	7
3.1	Présentation de la méthode SOR	7
3.2	Implémentation numérique	7
3.3	Quelques mots sur la méthode SSOR	7
4	Optimisation et Comparaison des méthodes	8
4.1	Optimisation des méthodes	8
4.1.1	Optimisation mathématique	8
4.1.2	Optimisation numérique	8
4.2	Comparaison des méthodes	8
5	Conclusion & ouverture	9

Chapitre 1

Introduction

Chapitre 2

Présentation des méthodes itératives classiques

2.1 Présentation générale des méthodes

2.2 Méthodes classiques

2.2.1 Méthode de Jacobi

2.2.2 Méthode de Gauss-Seidel

2.3 Une nouvelle méthode : Richardson

2.3.1 Présentation de la méthode

Ci-dessus, nous avons exposé les deux principales méthodes que l'on a utilisé lors des cours et TP. Cependant, il est aussi possible pour nous de trouver d'autres méthodes de résolution. Pour cela, il nous faut juste réécrire le problème sous une autre forme que celles précédemment définies. Ainsi, nous pouvons utiliser la décomposition de la forme :

$$Ax = b \quad (2.1)$$

$$Px = (P - A)x + b \quad (2.2)$$

On remarque que peut importe la valeur de la matrice P dans l'équation ci-dessus, les deux équations sont équivalentes. Ainsi, résoudre le premier système revient donc à résoudre le second. La méthode Richardson se base sur cette décomposition. L'idée est de poser :

$$P = \beta I \text{ avec } I \text{ la matrice identité et } \beta \in \mathbb{R}^* \quad (2.3)$$

Ainsi, nous avons notre système qui s'écrit de la manière suivante :

$$\beta Ix = (\beta I - A)x + b \quad (2.4)$$

$$x = \left(I - \frac{1}{\beta}A\right)x + \frac{1}{\beta}b \quad (2.5)$$

Pour un soucis d'écriture, nous allons écrire la formule précédente sous la forme :

$$x = (I - \gamma A)x + \gamma b \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\beta} \quad (2.6)$$

Ainsi l'idée est de construire une suite $x^{(k)}$ qui va converger vers la solution exacte du système que l'on note ici x^* . Cette suite est définie de la manière suivante :

$$x^{(k+1)} = (I - \gamma A)x^k + \gamma b \quad (2.7)$$

Par définition de la suite, la matrice d'itération, notée ici R est :

$$R = I - \gamma A \quad (2.8)$$

Nous réécrivons la suite sous la forme :

$$x^{(k+1)} = Rx^k + K \text{ avec } K = \gamma b \quad (2.9)$$

Si cette suite converge, alors nous sommes en mesure de trouver une solution x^* approchant la vraie solution du système. Ainsi, l'étude se porte donc sur la convergence de cette suite. Comme pour les autres méthodes itératives, la condition de convergence est la même que précédemment : le rayon spectral de la matrice d'itération doit être strictement inférieur à 1. L'avantage de cette méthode est que la matrice d'itération dépend de γ . Ainsi, en jouant sur cette valeur de γ , il est possible de faire converger la suite en prenant une valeur qui fait que le rayon spectral est inférieur à 1. On peut même produire une étude qui fait que l'on va minimiser cette valeur du rayon spectral pour obtenir une meilleure convergence. Cette démarche sera expliquée dans la suite de l'exposé.

2.3.2 Étude de convergence sur un exemple

Pour illustrer cet exemple, nous allons prendre un système linéaire quelconque. Dans un premier temps, nous allons trouver sa solution théorique puis appliquer la méthode de Richardson. Cela nous permettra d'étudier la convergence de la suite et la condition d'arrêt de notre algorithme. Pour cela, nous allons prendre le système 2×2 suivant :

$$\begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ x + -4y = -7 \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce système de base est peut être résolu assez trivialement et on obtient le couple de solution suivant :

$$(x, y) = (1, 2) \quad (2.11)$$

Notre but est maintenant de retrouver ces résultats grâce à la méthode de Richardson. Pour cela nous écrivons le système (2.10) sous sa forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_A \times \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}}_b \quad (2.12)$$

On pose, d'après la définition de la méthode, la matrice P :

$$P = \gamma I = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

et on rappelle que l'on a :

$$x^{(k+1)} = (I - \gamma A)x^k + \gamma b \text{ avec } R = (I - \gamma A) \quad (2.14)$$

Dans notre cas, la matrice d'itération est la suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 + 3\gamma & -2\gamma \\ -\gamma & 1 + 4\gamma \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

On cherche les valeurs propres de celle-ci grâce son polynôme caractéristique :

$$\det(R - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 + 3\gamma - \lambda & -2\gamma \\ -\gamma & 1 + 4\gamma - \lambda \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

$$= ((1 + 3\gamma) - \lambda)((1 + 4\gamma) - \lambda) - 2\gamma^2 \quad (2.17)$$

$$= \lambda^2 - (2 + 7\gamma)\lambda + 1 + 7\gamma + 10\gamma^2 \quad (2.18)$$

$$= \lambda^2 - (2 + 7\gamma)\lambda + (1 + 2\gamma)(1 + 5\gamma) \quad (2.19)$$

$$= (\lambda - (1 + 2\gamma))(\lambda - (1 + 5\gamma)) \quad (2.20)$$

Ainsi, les deux valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 1 + 2\gamma \text{ ou } \lambda_2 = 1 + 5\gamma \quad (2.21)$$

Il nous faut donc maintenant étudier le rayon spectral :

$$\rho(R) = \max(|1 + 2\gamma|, |1 + 5\gamma|) < 1 \quad (2.22)$$

Pour trouver le maximum, on cherche quand les quantités sont égales :

$$\begin{cases} 1 + 2\gamma = 1 + 5\gamma \Leftrightarrow \gamma = 0 \\ 1 + 2\gamma = -1 - 5\gamma \Leftrightarrow \gamma = -\frac{2}{7} \end{cases} \quad (2.23)$$

Il vient de cette étude :

$$\begin{cases} \gamma \in [-\frac{2}{7}, 0] \Rightarrow \rho(R) = |1 + 2\gamma| \\ \text{Sinon } \rho(R) = |1 + 5\gamma| \end{cases} \quad (2.24)$$

Nous cherchons ensuite les valeurs pour lesquelles le rayon spectral est égal à 1. Comme les deux fonctions sont croissantes, il suffit de trouver les valeurs pour lesquels nous avons $\rho(R) = 1$ ou -1 .

$$\begin{cases} \gamma = 0 \Leftrightarrow \rho(R) = 1 \\ \gamma = -0.4 \Leftrightarrow \rho(R) = -1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Ainsi, pour que la méthode converge sur cet exemple, il faut que :

$$\gamma \in]-0.4, 0[\quad (2.26)$$

Ensuite, il est possible d'optimiser ce résultat. Pour cela, il nous faut trouver la valeur de γ telle que le rayon spectral soit minimal. Pour cela, on cherche sur chacun des intervalles le minimum du rayon spectral. Cette valeur est la valeur à la jonction des deux intervalles donc pour $\gamma = -\frac{2}{7}$. Cela se voit simplement en regardant le graph de rho sur l'intervalle ci-dessus. Pour cette valeur de γ particulière la méthode possède la meilleure convergence. Si on revient au problème de base, nous avons alors une méthode qui converge de la meilleure façon possible pour :

$$\beta = \frac{1}{\gamma} = -\frac{7}{2} \quad (2.27)$$

2.3.3 Un peu plus de théorie ...

Maintenant que nous avons montré la démarche sur un exemple, nous allons essayer de généraliser aux matrices quelconques que l'on veut étudier grâce à cette méthode. Dans un premier temps, nous allons étudier les valeurs propres de la matrice d'itération R (cf. équation 2.8). En notant λ_i les valeurs propres de la matrice A et μ_i les valeurs propres de la matrice R , nous avons :

$$\mu_i = 1 - \gamma\lambda_i \quad (2.28)$$

En appliquant la condition de convergence de la suite, nous obtenons les égalités sui-

vantes :

$$-1 \leq 1 - \gamma\lambda_i \leq 1 \quad (2.29)$$

$$0 \leq \gamma\lambda_i \leq 2 \quad (2.30)$$

$$0 \leq \gamma \leq \frac{2}{\lambda_i} \quad (2.31)$$

On remarque que sur notre exemple cela est vrai. En effet, les valeurs propres de la matrice A choisie sont -5 et -2 . Or $\frac{2}{-5} = -0.4$, cela confirme l'intervalle trouvé. La deuxième remarque porte sur le fait qu'il ne faut pas prendre une matrice A avec 0 en valeur propre.

Toujours dans le même esprit, nous allons chercher le meilleur γ théorique pour avoir la meilleure convergence. Ce problème est équivalent à minimiser le rayon spectral de la matrice d'itération qui dépend de γ . Or d'après les valeurs propres de cette matrice R, nous avons :

$$\rho(R) = \max_i (|1 - \gamma\lambda_i|) = \max(|1 - \gamma\lambda_1|, |1 - \gamma\lambda_n|) \quad (2.32)$$

où λ_1, λ_n sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre. Maintenant, il nous reste à résoudre :

$$|1 - \gamma\lambda_1| = |1 - \gamma\lambda_n| \Rightarrow \begin{cases} 1 - \gamma\lambda_1 = 1 - \gamma\lambda_n \Leftrightarrow \gamma = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - \gamma\lambda_1 = -1 + \gamma\lambda_n \Leftrightarrow \gamma = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \end{cases} \quad (2.33)$$

Une fois que nous avons les valeurs de l'égalité, une simple étude des deux valeurs propres extrêmes nous donne que le meilleur choix de γ est :

$$\gamma = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \quad (2.34)$$

Chapitre 3

Optimisation du choix de la matrice d'itération

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il existe différentes méthodes pour permettre de résoudre un système linéaire grâce à des méthodes itératives. Ainsi, toujours dans cette idée d'optimisation que nous avons exposé, nous nous sommes posé la question suivante : « Quelle est la matrice d'itération la plus optimisée pour résoudre un problème ». Une méthode est ressortie dans plusieurs ouvrages : Successive Over Relaxation.

3.1 Méthode SOR

3.1.1 Principe de la méthode

3.1.2 Implémentation numérique

3.2 Les sous-espaces de Krylov

3.2.1 Présentation théorique

3.2.2 L'algorithme GMRES

Chapitre 4

Optimisation et Comparaison des méthodes

4.1 Optimisation des méthodes

4.1.1 Optimisation mathématique

4.1.2 Optimisation numérique

4.2 Comparaison des méthodes

Chapitre 5

Conclusion & ouverture

Liste des sigles et acronymes

Table des figures

Liste des tableaux