Krylov

AUDET Yoann

Avril 2019

Les sous-espaces de krylov, introduit en 1931 par le mathématicien du même nom, englobe un ensemble de méthode permettant de résoudre différents problèmes de mathématiques.

- Résoultion de systèmes linéaires
- Minimisation
- Problème de valeurs propres
- ...

De Jacobi à krylov :

On introduit les sous espaces de kylov grâce à la méthode de Jacobi :

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b = (I - D^{-1}A)x^k + D^{-1}b \qquad (1)$$

avec $A = D + L + U$, L une matrice triangulaire inférieure, U une matrice triangulaire supérieure et D diagonale

$$r^k \triangleq b - Ax^k = -A(-A^{-1}b + x^k) = -A(-x^* + x^k) \qquad (2)$$

Où x^* est la solution réelle du système. En normalisant le système ci-dessus de telle sorte que $D = I$. Alors, nous pouvons écrire la solution au rang k+1, comme celle au rang k plus le résidu :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + r^k && (3)\\ \Leftrightarrow x^{k+1} - x^* &= x^k - x^* + r^k && (4)\\ \Leftrightarrow -A(x^{k+1} - x^*) &= -A(x^k - x^*) - Ar^k && (5)\\ \Leftrightarrow r^{k+1} &= r^k - Ar^k && (6) \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une combinaison linéaire. En effet, r^{k+1} est une combinaison linéaire des $A^k r^0$ précédent. Cela mène à la contruction du sous-espace de krylov :

$$x^k \in x^0 + Vect\{r^0, Ar^0, ..., A^k r^0\} \tag{7}$$

Où $Vect\{r^0, Ar^0, ..., A^k r^0\}$ est le k-ième espace de Krylov généré par A à partir de r^0 noté $\mathcal{K}_k(A, r^0)$

Les espaces de krylov sont énormément utilisés pour plusieurs de leurs propriétés :

- La solution de notre problème appartient à l'espace de krylov de dimension n si l'on pose $r_0 = b$ (met un lien vers la démo slide suivante)
- L'algorithme à base de sous espaces de kylov converge en n itérations maximale (met un lien vers la slide d'encore après)

$$Ax = b \tag{8}$$

D'après la définition du problème, la matrice A est inversible. Nous supposons que l'on a le polynôme caractéristique de A :

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j \Rightarrow P(0) = \alpha_0 = det(A) \neq 0 \tag{9}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton [1], nous pouvons obtenir la valeur de A^{-1} :

$$\begin{aligned}
P(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + ... + \alpha_n A^n &= 0 && (10)\\
\alpha_0 A^{-1} A + \alpha_1 A + ... + \alpha_n A^n &= 0 && (11)\\
(\alpha_0 A^{-1} + \alpha_1 + ... + \alpha_n A^{n-1})A &= 0 && (12)\\
\alpha_0 A^{-1} + \alpha_1 + ... + \alpha_n A^{n-1} &= 0 && (13)
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} \times \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j+1} A^j \tag{14}$$

Dans cette partie, nous allons étudié un des algorithmes qui utilisent les principes précédents. Cet algorithme est l'algorithme GMRES. Cet algorithme se base sur la projection de sous espaces et la condition de Petrov-Galerkin :

$$b - Ax \perp \mathbb{L} \Rightarrow < Au, v >=< b, v >, v \in \mathbb{L} \tag{17}$$

Il nous faut maintenant trouver la solution de $x = x_0 + Vy \in$. Alors, nous écrivons :

$$\begin{aligned} < Av, w > &= < r0, w > \forall w \in L && (18) \\ < AVy, Wz > &= < r0, Wz > \forall z \in \mathbb{R}^m && (19) \\ Avy &= r0 && (20) \\ y &= (W^t AV)^{-1} W^t r^0 && (21) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la solution :

$$x = x_0 + V(W^t AV)^{-1} W^t r^0 \tag{22}$$

- construire les sous-espaces K et L
- chercher la nouvelle itération dans $u + K$ par le procédé exposé ci-dessus.

Voici donc le principe général des méthodes de projection :

1. Choisir ^{m} et $\mathbb{L}^m$: deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de même dimension m
2. Construire V_m et W_m
3. Calculer le résidu : $r = b - Ax^{(k)}$
4. Résoudre le système $y = (W_m^t A V_m)^{-1} W_m^t r$
5. Créer la nouvelle solution : $x = x + V_m y$

photo algo GMRES + code python

resultat avec erreurs + je parle des applications que j'ai fait