SME0104 Cálculo Numérico
Aula 12

Maria Luísa Bambozzi de Oliveira
marialuisa @ icmc . usp . br
Sala: 3-241
Página: tidia-ae.usp.br

14 de abril de 2015

Tópico Anterior

Sistemas Lineares:

- Métodos Exatos:
  - Método de Gauss Compacto: adaptação do Método de Gauss Simples para armazenar matrizes L e L na mesma matriz;
  - Método de Cholesky (decomposição GG^T de matrizes simétricas, positivas definidas);
- Mal Condicionamento;
- Matriz Inversa.

Vantagens sobre Métodos Exatos:

- Melhores (quando matriz A é esparsa);
- Mais econômicos (menos memória);
- Autocorreção, redução dos erros de arredondamento;
- Em certos casos: solução de eqs. não-lineares.

Desvantagem: não possui número fixo de passos para atingir a solução exata.

Revisão: Normas

Norma de vetor $\overrightarrow{x}$: $\|\overrightarrow{x}\|$, é qualquer função definida em $\mathbb{R}^n$, com valores em $\mathbb{R}$, satisfazendo:

- $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ e $\|\overrightarrow{x}\| = 0$ se e somente se $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$;
- $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{x}\|$ para todo escalar λ;
- $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ (desigualdade triangular).

$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|$.

Mais conhecidos: Se $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

- $\|\overrightarrow{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;
- $\|\overrightarrow{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- $\|\overrightarrow{x}\|_2 = \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Exemplo: Normas de $\overrightarrow{x} = (1, 4, 3, -3, -1)$.

Norma de matriz A: $\|A\|$, é qualquer função definida no conjunto de matrizes $n \times n$, com valores em $\mathbb{R}$, satisfazendo:

- $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e somente se $A = \mathbf{0}$;
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ para todo escalar λ;
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (desigualdade triangular).

$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Mais conhecidos: Se A é matriz $n \times n$:

- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma linha);
- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (norma coluna);
- $\|A\|_2 = \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ (norma euclidiana).

Métodos Iterativos

Um método é **iterativo** quando fornece sequência de aproximações da solução, repetindo o mesmo tipo de processo.

Métodos estacionários: cada aproximação é obtida da anterior sempre pelo mesmo processo.

Se processos variam de passo para passo mas se repetem ciclicamente de s em s passos, o processo é s-cíclico.

Os métodos iterativos exigem que sempre se saiba se a sequência que está sendo obtida está convergindo ou não para a solução desejada.

Definição: Dadas uma sequência de vetores $\overrightarrow{x}^k \in E$ e uma norma sobre E, onde E é um espaço vetorial, dizemos que a sequência $\{\overrightarrow{x}^k\}$ **converge** para $\overrightarrow{x} \in E$ se $\|\overrightarrow{x}^k - \overrightarrow{x}\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Processos Estacionários

Sistema linear

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \quad \sim \quad \overrightarrow{x} = B\overrightarrow{x} + \overrightarrow{g}$$

com solução $\overrightarrow{\bar{x}}$.

Se $\overrightarrow{x}^{(0)}$ é aproximação inicial para $\overrightarrow{\bar{x}}$, obtemos $\overrightarrow{x}^{(k)}$ usando

$$\overrightarrow{x}^{(k)} = B\overrightarrow{x}^{(k-1)} + \overrightarrow{g}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Teorema: A condição **necessária e suficiente** para a convergência do processo iterativo é que $\max|\lambda_i| < 1$, onde λ_i são os autovalores da matriz B de iteração.

Corolário (Critério Geral de Convergência): O processo iterativo é convergente se, para qualquer norma de matrizes, $\|B\| < 1$.

Exemplo: Seja

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & -0{,}3 \end{pmatrix}$$

Verificar se um sistema linear $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, que tenha a matriz B anterior como matriz de iteração, convergirá para a solução.

$||B||_\infty = \max\{1{,}1; 0{,}5; 1{,}0\} = 1{,}1 \geq 1 \Rightarrow$?
$||B||_1 = \max\{0{,}9; 0{,}9; 0{,}8\} = 0{,}9 < 1 \Rightarrow$ SIM

Processos Estacionários (cont.)

Processo de Parada:
Quando aplicamos método iterativo escolhemos $\overrightarrow{x}^{(0)}$ como aproximação inicial para solução de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Refinamos solução até determinada precisão ε ser atingida, verificada com *erro relativo*:

$$\|\overrightarrow{x}^{(k+1)} - \overrightarrow{x}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \max\{1, \|\overrightarrow{x}^{(k+1)}\|_\infty\}$$

Para cada método a ser determinado, do que precisamos? Matriz B e vetor $\overrightarrow{g}$ para definir $\overrightarrow{x} = B\overrightarrow{x} + \overrightarrow{g}$.

Métodos:

- Método de Jacobi-Richardson (JR);
- Método de Gauss-Seidel (GS).

Método de Jacobi-Richardson

Sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ com $\det(A) \neq 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Decompor A em $A = L + D + R$,

$$L: \quad \ell_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases}; \qquad D: \quad d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases};$$

$$R: \quad r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases}.$$

Método de Jacobi-Richardson (cont.)

$$A = L + D + R$$

Se $\det(D) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
(L + D + R)\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} \\
\Rightarrow D\overrightarrow{x} + (L + R)\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b} \\
\Rightarrow D\overrightarrow{x} &= -(L + R)\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b} \\
\Rightarrow \overrightarrow{x} &= -D^{-1}(L + R)\overrightarrow{x} + D^{-1}\overrightarrow{b}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$B = -D^{-1}(L + R); \quad \overrightarrow{g} = D^{-1}\overrightarrow{b}$$

Método de Jacobi-Richardson (cont.)

$$A = L + D + R$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det(D) \neq 0$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1,n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi-Richardson (cont.)

$$A = L + D + R$$

$$\Rightarrow D^{-1}A = D^{-1}L + D^{-1}D + D^{-1}R$$
$$\Rightarrow D^{-1}A = D^{-1}L + I + D^{-1}R$$
$$\Rightarrow A^* = L^* + I + R^*$$

$$\overrightarrow{x}^{(k+1)} = -(L^* + R^*)\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{b^*}$$

$$L^* : \ \ell_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases}; \quad R^* : \ r_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}^* = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i < j \\ 0, & i \geq j \end{cases};$$

$$\overrightarrow{b}^* : \ b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Método de Jacobi-Richardson (cont.)

Critérios de Convergência:
Com $B = -(L^* + R^*)$, usando o Critério Geral de Convergência, escolhemos as normas $\|B\|_\infty$ e $\|B\|_1$ nessa ordem para a verificação:

- **Critério das Linhas:**
$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}^*| < 1$$
- **Critério das Colunas:**
$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1, i \neq j}^{n} |a_{ij}^*| < 1$$
- **Critério Diagonal Dominante:**
$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Observação: BASTA APENAS **UM** DOS CRITÉRIOS.

Exemplo: Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo método JR, com $\overrightarrow{x}^{(0)} = (7/10,\ -8/5,\ 3/5)^T$.

Verificar primeiro se há garantia de convergência.

Se há garantia, reescrever sistema tal que $A^* \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}^*$.

Aplicar as iterações do método JR:

$$\overrightarrow{x}^{(k+1)} = -(L^* + R^*)\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{b}^*.$$

Método de Jacobi-Richardson (cont.)

Exemplo: Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5\,x_2 + x_3 = -8 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 10\,x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo método JR, com $\overrightarrow{x}^{(0)} = (7/10,\ -8/5,\ 3/5)^T$.

Critério Diagonal Dominante:

$|2| + |1| = 3 < |10|$
$|1| + |1| = 2 < |5|$ $\Rightarrow$ converge.
$|2| + |3| = 5 < |10|$

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}2\,x_2 + 0{,}1\,x_3 = 0{,}7 \\ 0{,}2\,x_1 + x_2 + 0{,}2\,x_3 = -1{,}6 \\ 0{,}2\,x_1 + 0{,}3\,x_2 + x_3 = 0{,}6 \end{cases}$$

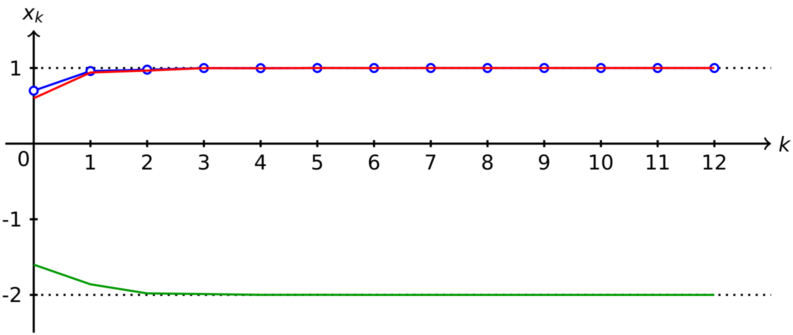
Método de Jacobi-Richardson (cont.)

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0{,}7 - 0{,}2\,x_2^{(k-1)} - 0{,}1\,x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -1{,}6 - 0{,}2\,x_1^{(k-1)} - 0{,}2\,x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 0{,}6 - 0{,}2\,x_1^{(k-1)} - 0{,}3\,x_2^{(k-1)} \end{cases}$$

k	x_1	x_2	x_3	$\|\overrightarrow{x}^{(k)} - \overrightarrow{x}^{(k-1)}\|_\infty$
0	0,70000	-1,60000	0,60000	–
1	0,96000	-1,86000	0,94000	0,34000
2	0,97800	-1,98000	0,96600	0,12000
3	0,99940	-1,98880	0,99840	0,03240
4	0,99792	-1,99956	0,99676	0,01076
5	1,00024	-1,99894	1,00028	0,00352
6	0,99976	-2,00010	0,99963	0,00116
7	1,00006	-1,99988	1,00008	0,00045
8	0,99997	-2,00003	0,99995	0,00015
9	1,00001	-1,99998	1,00001	0,00006
10	1,00000	-2,00000	0,99999	0,00002
11	1,00000	-2,00000	1,00000	0,00001
12	1,00000	-2,00000	1,00000	$< 0{,}00001$

Método de Jacobi-Richardson (cont.)

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = 0{,}7 - 0{,}2\,x_2^{(k-1)} - 0{,}1\,x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -1{,}6 - 0{,}2\,x_1^{(k-1)} - 0{,}2\,x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = 0{,}6 - 0{,}2\,x_1^{(k-1)} - 0{,}3\,x_2^{(k-1)} \end{cases}$$



Semelhante a Método JR:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \quad \Rightarrow \quad (L^* + I + R^*)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}^*$$

mas

$$(L^* + I)\overrightarrow{x} = -R^*\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}^*$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{x} = -(L^* + I)^{-1}R^*\overrightarrow{x} + (L^* + I)^{-1}\overrightarrow{b}^*$$

$$\overrightarrow{x}^{(k+1)} = B\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{g}$$

$$B = -(L^* + I)^{-1}R^*; \quad \overrightarrow{g} = (L^* + I)^{-1}\overrightarrow{b}^*.$$

Método de Gauss-Seidel (cont.)

Dados valores iniciais $\overrightarrow{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T$,

$$(L^* + I)\overrightarrow{x}^{(k+1)} = -R^*\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{b}^*$$

$$L^*\overrightarrow{x}^{(k+1)} + \overrightarrow{x}^{(k+1)} = -R^*\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{b}^*$$

$$\overrightarrow{x}^{(k+1)} = -L^*\overrightarrow{x}^{(k+1)} - R^*\overrightarrow{x}^{(k)} + \overrightarrow{b}^*$$

Semelhante a

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & & - a_{12}^* x_2^{(k)} & - a_{13}^* x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}^* x_n^{(k)} & + b_1^* \\ x_2^{(k+1)} = & -a_{21}^* x_1^{(k+1)} & & - a_{23}^* x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}^* x_n^{(k)} & + b_2^* \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(k+1)} = & -a_{n1}^* x_1^{(k+1)} & - a_{n2}^* x_2^{(k+1)} & - \ldots - a_{n,n-1}^* x_{n-1}^{(k+1)} & + b_n^* \end{cases}$$

Critérios de Convergência:

$$B = -(L^* + I)^{-1} R^*$$

$$||B|| < 1$$

Critério de Sassenfeld:
se $\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$, com

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a^*_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a^*_{ij}|,$$

o método GS converge.