
ALGORITMI E STRUTTURE DATI

LAUREA TRIENNALE IN SCIENZE INFORMATICHE

Magliani Andrea
Perego Luca

Università degli studi di Milano-Bicocca

A.A. 2022/2023

INDICE

1 Problema Computazionale e Algoritmi.....	4
1.1 Problema Computazionale.....	4
1.2 Istanza.....	4
1.3 Algoritmo.....	4
1.4 Analisi degli Algoritmi.....	4
1.5 Struttura dati.....	4
2 Correttezza & Efficienza.....	5
2.1 Dimostrazione di Correttezza.....	5
2.2 Calcolo dell'Efficienza.....	5
3 Notazioni Asintotiche.....	6
3.1 O-Grande.....	6
3.2 Ω -Grande.....	6
3.3 θ -Grande.....	6
3.4 Gerarchie di crescita Asintotica.....	6
4 Caratteristiche degli Algoritmi.....	7
4.1 Stabile.....	7
4.2 In-Place.....	7
5 Algoritmi di Ordinamento.....	7
5.1 Definizione.....	7
5.2 Struttura del problema.....	7
6 Teorema dell'esperto.....	8
6.1 Enunciato.....	8
7 Selection sort.....	9
7.1 Pseudocodice.....	9
7.2 Funzionamento.....	9
7.3 Correttezza.....	9
7.4 Tempi di calcolo.....	10
7.5 Caratteristiche.....	10
8 Insertion sort.....	11
8.1 Pseudocodice.....	11
8.2 Funzionamento.....	11
8.3 Correttezza.....	12
8.4 Tempi di calcolo.....	12
8.5 Caratteristiche.....	12
9 Mergesort.....	13
9.1 Pseudocodice.....	13
9.2 Funzionamento.....	14
9.3 Tempi di calcolo.....	14
10 Ricerca Dicotomica.....	15
10.1 Pseudocodice.....	15
10.2 Tempi di calcolo.....	15

Problema Computazionale e Algoritmi

1.1 Problema Computazionale

Relazione matematica tra input e output.

Un problema è definito come: $\pi \subseteq input \times output$

1.2 Istanza

Set di input specifici legati ad un determinato problema.

1.3 Algoritmo

Descrizione finita, composta da una sequenza di istruzioni elementari e non ambigue che, se eseguita, trasforma gli input in output.

1.4 Analisi degli Algoritmi

Gli algoritmi vengono **analizzati** per valutarne diversi aspetti:

- Correttezza: verificata con test e dimostrazioni;
- Efficienza: verificata misurando i tempi e lo spazio occupato;

Un algoritmo che risolve un problema per ogni sua istanza in un tempo finito è detto **corretto**.

Un algoritmo che, per almeno una delle istanze, non risolve correttamente il problema è detto **non corretto**.

1.5 Struttura dati

Un modo per memorizzare e manipolare dati.

Correttezza & Efficienza

2.1 Dimostrazione di Correttezza

Invariante di ciclo: metodo per dimostrare la correttezza di un algoritmo contenente un loop. L'invariante di ciclo si divide in 3 fasi:

- **Inizializzazione**: dimostra la correttezza per la prima iterazione;
- **Conservazione**: l'algoritmo è corretto per ogni valore di i e questa incrementa correttamente ad ogni iterazione;
- **Conclusione**: assumendo la condizione del ciclo False, l'algoritmo termina restituendo il risultato corretto;

2.2 Calcolo dell'Efficienza

Un algoritmo efficiente utilizza il minor **tempo** e **risorse** possibili. È necessario definire una funzione $T(n)$, ovvero il tempo di calcolo impiegato per gestire un input di lunghezza n .

Ad ogni tipo di istruzione viene assegnato un **valore temporale** di esecuzione, per poi contarne le occorrenze nel codice.

$T(n)$ equivale alla somma delle occorrenze di tutti i valori temporali.

In un algoritmo è presente:

Caso Migliore: $T_{migl}(n) \rightarrow$

Sottoinsieme delle istanze in cui l'algoritmo impiega meno.

Caso Peggio: $T_{pegg}(n) \rightarrow$

Sottoinsieme delle istanze in cui l'algoritmo impiega di più.

Notazioni Asintotiche

3.1 O-Grande

$O(n)$ rappresenta il **limite superiore** [asintoticamente] della funzione $T(n)$ di un algoritmo.

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0 > 0, f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n > n_0\} \quad f(n) \in N \wedge f(n) > 0 \text{ def.}$$

3.2 Ω -Grande

$\Omega(n)$ rappresenta il **limite inferiore** [asintoticamente] della funzione $T(n)$ di un algoritmo.

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0 > 0, 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \ \forall n > n_0\}$$

3.3 θ -Grande

$\theta(n)$ rappresenta la funzione che **delimita superiormente ed inferiormente** la funzione $T(n)$ di un algoritmo.

$$\theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0, 0 \leq c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \ \forall n > n_0\}$$

3.4 Gerarchie di crescita Asintotica

La crescita di $T(n)$ varia in base alla funzione a cui è associata.
La **scala di crescita** è:

$$c \rightarrow \log n \rightarrow \sqrt{n} \rightarrow n \rightarrow n \log n \rightarrow n^a [a > 1] \rightarrow a^n \rightarrow n! \rightarrow n^n$$

Caratteristiche degli Algoritmi

4.1 Stabile

Algoritmo che, se incontrati **2 valori uguali** e adiacenti, ne mantiene l'ordine.

4.2 In-Place

Algoritmo che non utilizza una **struttura dati ausiliaria**, ma lavora direttamente sull'input.

Algoritmi di Ordinamento

5.1 Definizione

Gli algoritmi di ordinamento sono utilizzati per posizionare gli elementi di un insieme secondo una **relazione d'ordine**.

5.2 Struttura del problema

Ogni algoritmo di ordinamento condivide problema e risultato.

Problema: Ordinamento di un vettore V di n elementi.

Input: Un vettore V di n elementi.

Output: Un vettore V t.c.:

- L'output è una permutazione di V ;
- $\forall i \in [1, n - 1] \quad V'[i] \leq V'[i + 1]$;

Teorema dell'esperto

6.1 Enunciato

Sia $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) \cdot f(n)$ $a \geq 1, b > 1, f(n)$ asin. pos.

1. se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ allora $T(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$
2. se $f(n) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$ allora $T(n) = \theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
3. se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ e se $\exists c < 1$ t.c. $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$
 $\forall n > n_0$ allora $T(n) = \theta(f(n))$

Selection sort

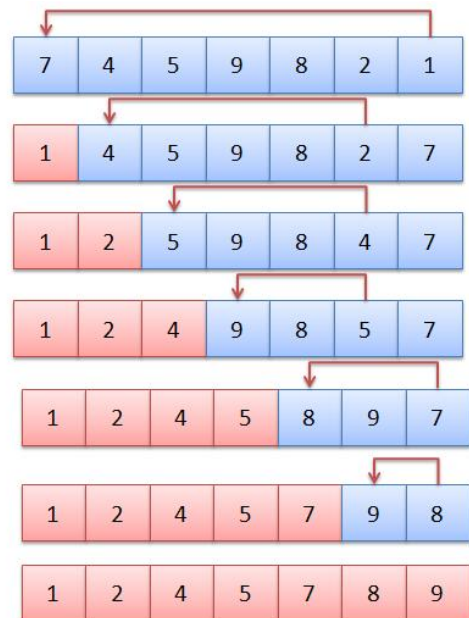
7.1 Pseudocodice

SELECTION_SORT (V)

```
for i := 1 to V.length - 1
    posmin := i
    for j := i + 1 to V.length - 1
        if V[posmin] > V[j] then
            posmin := j
    scambia V[i] con V[posmin]
```

7.2 Funzionamento

Si cerca il numero minore navigando tutto il vettore e si mette nella posizione i, con i che varia dalla prima posizione del vettore fino all'ultima.



7.3 Correttezza

I primi $i - 1$ elementi di V sono i più piccoli $i - 1$ elementi di V ordinati in ordine crescente.

INIZIALIZZAZIONE

I primi 0 elementi di V' sono i più piccoli 0 elementi di V ordinati in ordine crescente

CONSERVAZIONE

Corretto ad inizio e fine ciclo.

TERMINAZIONE

Corretto al termine dell'algoritmo.

7.4 Tempi di calcolo

CASO MIGLIORE e CASO PEGGIORE sono asintoticamente uguali.

$$T(n) = \theta(n^2)$$

7.5 Caratteristiche

STABILE

No, il selection sort non è un algoritmo di ordinamento stabile in quanto scambiando l'elemento di posizione i con l'elemento più piccolo dell'array, non sempre mantiene l'ordine originale degli elementi uguali nel vettore.

IN PLACE

Sì, il selection sort è un algoritmo di ordinamento in place in quanto non utilizza altre strutture dati per ordinare il vettore in input.

Insertion sort

8.1 Pseudocode

```
INSERTION_SORT (V)

  for i := 2 to V.length

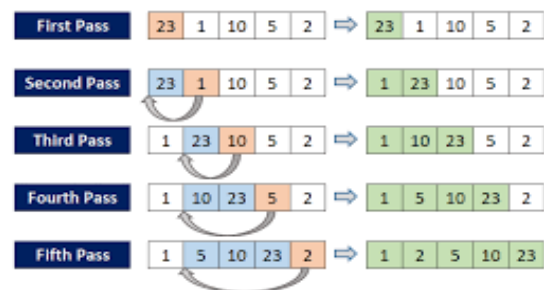
    j := i - 1
    key := V[i]

    while j >= 1 AND V[j] > Key

      V[j + 1] := V[j]
      V[j] := Key
      j := j - 1
```

8.2 Funzionamento

Si parte dal secondo elemento del vettore in input e si controlla se l'elemento precedente è minore, nel caso si scambiano i due valori, si continua successivamente con l'elemento $i + 1$ fino alla fine dell'array.



8.3 Correttezza

All'inizio di ogni iterazione i primi $i-1$ elementi di V^i sono i primi $i-1$ elementi di V in ordine crescente.

INIZIALIZZAZIONE

Il primo elemento di V^1 è il primo elemento di V in ordine crescente

CONSERVAZIONE

Vero ad inizio e fine ciclo

TERMINAZIONE

Vero a fine algoritmo

8.4 Tempi di calcolo

CASO MIGLIORE

Il vettore V è già ordinato. $T_{\text{migl}}(n) = \theta(n) \rightarrow T(n) = \Omega(n)$

CASO PEGGIORE

V è ordinato in senso decrescente. $T_{\text{pegg}}(n) = \theta(n^2) \rightarrow T(n) = O(n^2)$

8.5 Caratteristiche

STABILE

Si l'insertion sort è un algoritmo di ordinamento stabile in quanto mantiene l'ordine degli elementi uguali tra di loro.

IN PLACE

Si l'insertion sort è un algoritmo di ordinamento in place in quanto non utilizza strutture d'appoggio per eseguire le sue operazioni.

Mergesort

9.1 Pseudocodice

MERGESORT (V, l, r)

if $l < r$ then

$mid := \text{floor}[(l+r)/2]$
 MERGESORT (V, l, mid)
 MERGESORT (V, mid+1, r)
 MERGE (V, l, mid, r)

MERGE (V, l, mid, r)

 T := Vettore di lunghezza $r-l + 1$
 i := l
 j := mid + 1
 k := 1

while $i \leq mid$ AND $j \leq r$ do

 if $V[i] \leq V[j]$ then
 T[k] := V[i]
 i := i + 1

 else

 T[k] := V[j]
 j := j + 1

 k := k + 1

while $i \leq mid$ do

 T[k] := V[i]
 i := i + 1
 k := k + 1

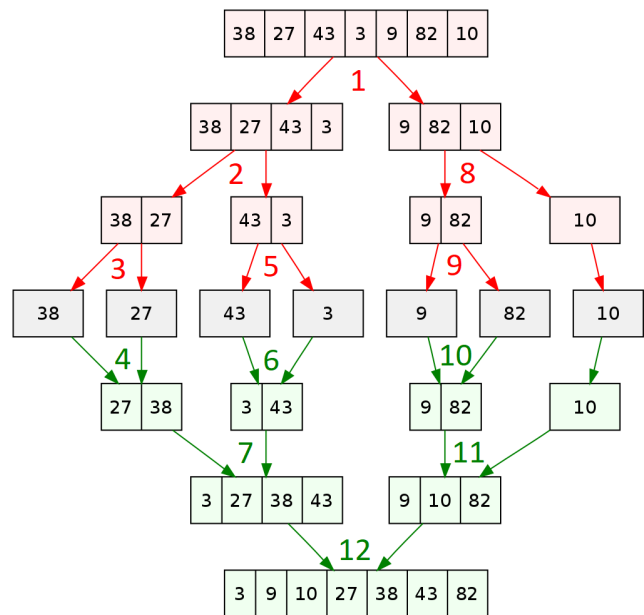
for k := 1 to T.length do

$V[l + k - 1] := T[k]$

9.2 Funzionamento

Il mergesort utilizza la strategia di programmazione **divide et impera** per ridurre il problema in più sottoproblemi.

Una volta ottenuti i singoletti e arrivati nel caso base si esegue la procedura di merge, andando a unire i singoletti riordinandoli durante il processo.



9.3 Tempi di calcolo

$a = 2$ (volte che viene chiamato il metodo ricorsivo)

$b = 2$ (in quante porzioni divido l'array [$mid = l+r / 2$])

$f(n) = \theta(n)$ (righe di codice che non c'entrano con la ricorsione)

quindi applico il secondo caso del teorema del maestro:

$$\theta(n) = \theta(n^{\log_2 2}) \rightarrow \theta(n) = \theta(n) \rightarrow T(n) = \theta(n^{\log_2 2} \cdot \log n) \rightarrow T(n) = \theta(n \cdot \log n)$$

Ricerca Dicotomica

Problema: Ricerca di un elemento in un vettore V ordinato.

Input: un vettore V di n elementi e un intero x .

Output: un intero n t.c. $n \in V \wedge n = x$

10.1 Pseudocodice

Ricerca_Dicotomica(V , x , l , r)

```
if  $r < l$  then  
    return false
```

```
if  $r = l$  then  
    return  $x == V[l]$ 
```

```
mid := floor( $\frac{l+r}{2}$ )
```

```
if  $x > V[mid]$  then  
    return Ricerca_Dicotomica( $V$ ,  $x$ , mid + 1,  $r$ )  
else  
    return Ricerca_Dicotomica( $V$ ,  $x$ ,  $l$ , mid)
```

10.2 Tempi di calcolo

Caso migliore e caso peggiore sono **asintoticamente uguali**: $T(n) = \Theta(\log_2 n)$.