

---

---

# **ALGORITMI E STRUTTURE DATI**

---

---

**LAUREA TRIENNALE IN SCIENZE INFORMATICHE**

Magliani Andrea  
Perego Luca

Università degli studi di Milano-Bicocca

A.A. 2022/2023

# INDICE

<b>Problema Computazionale e Algoritmi.....</b>	<b>5</b>
1.1 Problema Computazionale.....	5
1.2 Istanza.....	5
1.3 Algoritmo.....	5
1.4 Analisi degli Algoritmi.....	5
1.5 Struttura dati.....	5
<b>Correttezza &amp; Efficienza.....</b>	<b>6</b>
2.1 Dimostrazione di Correttezza.....	6
2.2 Calcolo dell'Efficienza.....	6
<b>Notazioni Asintotiche.....</b>	<b>7</b>
3.1 O-Grande.....	7
3.2 $\Omega$ -Grande.....	7
3.3 $\theta$ -Grande.....	7
3.4 Gerarchie di crescita Asintotica.....	7
<b>Caratteristiche degli Algoritmi.....</b>	<b>8</b>
4.1 Stabile.....	8
4.2 In-Place.....	8
<b>Algoritmi di Ordinamento.....</b>	<b>8</b>
5.1 Definizione.....	8
5.2 Struttura del problema.....	8
<b>Teorema dell'esperto.....</b>	<b>9</b>
6.1 Enunciato.....	9
<b>Selection sort.....</b>	<b>10</b>
7.1 Pseudocodice.....	10
7.2 Funzionamento.....	10
7.3 Correttezza.....	11
7.4 Tempi di calcolo.....	11
7.5 Caratteristiche.....	11
<b>Insertion sort.....</b>	<b>12</b>
8.1 Pseudocodice.....	12
8.2 Funzionamento.....	12
8.3 Correttezza.....	13
8.4 Tempi di calcolo.....	13
8.5 Caratteristiche.....	13
<b>Mergesort.....</b>	<b>14</b>
9.1 Pseudocodice.....	14
9.2 Funzionamento.....	15
9.3 Tempi di calcolo.....	15
<b>Ricerca Dicotomica.....</b>	<b>16</b>
10.1 Pseudocodice.....	16
10.2 Tempi di calcolo.....	16

<b>Problema di selezione.....</b>	<b>17</b>
11.1 Pseudocodice.....	17
11.2 Tempi di calcolo.....	17
<b>Counting sort.....</b>	<b>18</b>
12.1 Pseudocodice.....	18
12.2 Tempi di calcolo.....	18
<b>Radix sort.....</b>	<b>19</b>
13.1 Funzionamento.....	19
13.2 Pseudocodice.....	19
<b>Heap Binario.....</b>	<b>20</b>
14.1 Definizione.....	20
14.2 Proprietà.....	20
14.3 Nomenclatura.....	21
14.4 Max Heapify.....	21
14.5 Build heap.....	22
14.6 Heap sort.....	23
<b>Coda con priorità.....</b>	<b>24</b>
15.1 Procedure.....	24
15.2 Extract max.....	24
15.3 Increase key.....	25
15.4 Insert.....	25
<b>Strutture dati dinamiche.....</b>	<b>26</b>
16.1 Operazioni.....	26
16.2 Implementazione.....	26
<b>Liste concatenate.....</b>	<b>27</b>
17.1 Struttura.....	27
17.2 List search.....	27
17.3 List insert.....	28
17.4 List delete.....	28
<b>Liste doppiamente concatenate.....</b>	<b>29</b>
18.1 Struttura.....	29
18.2 DL List Insert.....	29
18.2 DL List Delete.....	30
<b>Stack / Pile.....</b>	<b>31</b>
19.1 Definizione.....	31
19.2 Tempi di calcolo.....	31
19.3 Stack search.....	32
19.4 Stack delete element.....	33
19.5 Stack sorted insert.....	34
<b>Queue / Coda.....</b>	<b>35</b>
20.1 Definizione.....	35
20.2 Tempi di calcolo.....	35
20.3 Queue search.....	36
20.4 Queue sorted insert.....	36
<b>Albero binario di ricerca.....</b>	<b>38</b>
21.1 Definizione.....	38

21.2 Inorder visit.....	38
21.3 Preorder visit.....	39
21.4 Postorder visit.....	39
21.5 Bst search.....	40
21.6 Bst min / max.....	41
21.7 Bst successor.....	42
21.8 Bst insert.....	43
21.9 Bst delete.....	44
21.10 Contrazione nodo.....	44
<b>Grafi.....</b>	<b>45</b>
22.1 Definizione.....	45
22.2 Rappresentazione.....	45
22.3 Tempi di calcolo.....	46
22.4 Stampa cammino.....	46
22.5 Visita in ampiezza (BFS).....	47
22.6 Visita in profondità (DFS).....	48
22.7 Teorema: Struttura di parentesi.....	49
22.8 Classificazione archi.....	49
22.9 Ordinamento topologico di un DAG.....	49

# Problema Computazionale e Algoritmi

## 1.1 Problema Computazionale

Relazione matematica tra input e output.

Un problema è definito come:  $\pi \subseteq input \times output$

## 1.2 Istanza

Set di input specifici legati ad un determinato problema.

## 1.3 Algoritmo

Descrizione finita, composta da una sequenza di istruzioni elementari e non ambigue che, se eseguita, trasforma gli input in output.

## 1.4 Analisi degli Algoritmi

Gli algoritmi vengono **analizzati** per valutarne diversi aspetti:

- Correttezza: verificata con test e dimostrazioni;
- Efficienza: verificata misurando i tempi e lo spazio occupato;

Un algoritmo che risolve un problema per ogni sua istanza in un tempo finito è detto **corretto**.

Un algoritmo che, per almeno una delle istanze, non risolve correttamente il problema è detto **non corretto**.

## 1.5 Struttura dati

Un modo per memorizzare e manipolare dati.

# Correttezza & Efficienza

## 2.1 Dimostrazione di Correttezza

Invariante di ciclo: metodo per dimostrare la correttezza di un algoritmo contenente un loop. L'invariante di ciclo si divide in 3 fasi:

- **Inizializzazione**: dimostra la correttezza per la prima iterazione;
- **Conservazione**: l'algoritmo è corretto per ogni valore di  $i$  e questa incrementa correttamente ad ogni iterazione;
- **Conclusione**: assumendo la condizione del ciclo False, l'algoritmo termina restituendo il risultato corretto;

## 2.2 Calcolo dell'Efficienza

Un algoritmo efficiente utilizza il minor **tempo** e **risorse** possibili. È necessario definire una funzione  $T(n)$ , ovvero il tempo di calcolo impiegato per gestire un input di lunghezza  $n$ .

Ad ogni tipo di istruzione viene assegnato un **valore temporale** di esecuzione, per poi contarne le occorrenze nel codice.

$T(n)$  equivale alla somma delle occorrenze di tutti i valori temporali.

In un algoritmo è presente:

Caso Migliore:  $T_{migl}(n) \rightarrow$

Sottoinsieme delle istanze in cui l'algoritmo impiega meno.

Caso Peggior:  $T_{pegg}(n) \rightarrow$

Sottoinsieme delle istanze in cui l'algoritmo impiega di più.

# Notazioni Asintotiche

## 3.1 O-Grande

$O(n)$  rappresenta il **limite superiore** [asintoticamente] della funzione  $T(n)$  di un algoritmo.

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0 > 0, f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n > n_0\} \quad f(n) \in N \wedge f(n) > 0 \text{ def.}$$

## 3.2 $\Omega$ -Grande

$\Omega(n)$  rappresenta il **limite inferiore** [asintoticamente] della funzione  $T(n)$  di un algoritmo.

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c, n_0 > 0, 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \ \forall n > n_0\}$$

## 3.3 $\Theta$ -Grande

$\theta(n)$  rappresenta la funzione che **delimita superiormente ed inferiormente** la funzione  $T(n)$  di un algoritmo.

$$\theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0, 0 \leq c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \ \forall n > n_0\}$$

## 3.4 Gerarchie di crescita Asintotica

La crescita di  $T(n)$  varia in base alla funzione a cui è associata.  
La **scala di crescita** è:

$$c \rightarrow \log n \rightarrow \sqrt{n} \rightarrow n \rightarrow n \log n \rightarrow n^a [a > 1] \rightarrow a^n \rightarrow n! \rightarrow n^n$$

# Caratteristiche degli Algoritmi

## 4.1 Stabile

Algoritmo che, se nel vettore di input sono presenti due valori **uguali**, mantiene l'ordine tra di loro anche nel vettore ordinato di output.

## 4.2 In-Place

Algoritmo che non utilizza una **struttura dati ausiliaria**, ma lavora direttamente sull'input.

# Algoritmi di Ordinamento

## 5.1 Definizione

Gli algoritmi di ordinamento sono utilizzati per posizionare gli elementi di un insieme secondo una **relazione d'ordine**.

## 5.2 Struttura del problema

Ogni algoritmo di ordinamento condivide problema e risultato.

Problema: Ordinamento di un vettore  $V$  di  $n$  elementi.

Input: Un vettore  $V$  di  $n$  elementi.

Output: Un vettore  $V$  t.c.:

- L'output è una permutazione di  $V$ ;
- $\forall i \in [1, n - 1] \quad V[i] \leq V[i + 1]$ ;



# Teorema dell'esperto

## 6.1 Enunciato

Sia  $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$   $a \geq 1, b > 1, f(n)$  asin. pos.

1. se  $\exists \varepsilon > 0$  t.c.  $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$  allora  $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
2. se  $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$  allora  $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
3. se  $\exists \varepsilon > 0$  t.c.  $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$  e se  $\exists c < 1$  t.c.  $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$   
 $\forall n > n_0$  allora  $T(n) = \Theta(f(n))$

# Selection sort

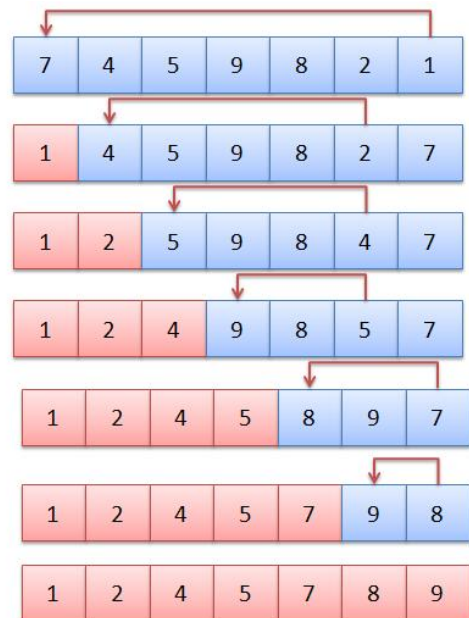
## 7.1 Pseudocodice

SELECTION\_SORT (V)

```
for i := 1 to V.length - 1
    posmin := i
    for j := i + 1 to V.length - 1
        if V[posmin] > V[j] then
            posmin := j
    scambia V[i] con V[posmin]
```

## 7.2 Funzionamento

Si cerca il numero minore navigando tutto il vettore e si mette nella posizione i, con i che varia dalla prima posizione del vettore fino all'ultima.



## 7.3 Correttezza

I primi  $i - 1$  elementi di  $V$  sono i più piccoli  $i - 1$  elementi di  $V$  ordinati in ordine crescente.

### INIZIALIZZAZIONE

I primi 0 elementi di  $V'$  sono i più piccoli 0 elementi di  $V$  ordinati in ordine crescente

### CONSERVAZIONE

Corretto ad inizio e fine ciclo.

### TERMINAZIONE

Corretto al termine dell'algoritmo.

## 7.4 Tempi di calcolo

CASO MIGLIORE e CASO PEGGIORE sono asintoticamente uguali.

$$T(n) = \theta(n^2)$$

## 7.5 Caratteristiche

### STABILE

No, il selection sort non è un algoritmo di ordinamento stabile in quanto scambiando l'elemento di posizione  $i$  con l'elemento più piccolo dell'array, non sempre mantiene l'ordine originale degli elementi uguali nel vettore.

### IN PLACE

Sì, il selection sort è un algoritmo di ordinamento in place in quanto non utilizza altre strutture dati per ordinare il vettore in input.

# Insertion sort

## 8.1 Pseudocode

```
INSERTION_SORT (V)

  for i := 2 to V.length

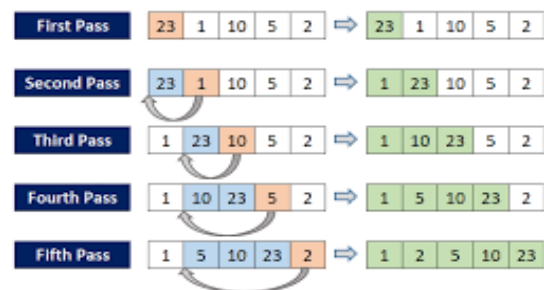
    j := i - 1
    key := V[i]

    while j >= 1 AND V[j] > Key

      V[j + 1] := V[j]
      V[j] := Key
      j := j - 1
```

## 8.2 Funzionamento

Si parte dal secondo elemento del vettore in input e si controlla se l'elemento precedente è minore, nel caso si scambiano i due valori, si continua successivamente con l'elemento  $i + 1$  fino alla fine dell'array.



## 8.3 Correttezza

All'inizio di ogni iterazione i primi  $i-1$  elementi di  $V^i$  sono i primi  $i-1$  elementi di  $V$  in ordine crescente.

### INIZIALIZZAZIONE

Il primo elemento di  $V^1$  è il primo elemento di  $V$  in ordine crescente

### CONSERVAZIONE

Vero ad inizio e fine ciclo

### TERMINAZIONE

Vero a fine algoritmo

## 8.4 Tempi di calcolo

### CASO MIGLIORE

Il vettore  $V$  è già ordinato.  $T_{\text{migl}}(n) = \theta(n) \rightarrow T(n) = \Omega(n)$

### CASO PEGGIORE

$V$  è ordinato in senso decrescente.  $T_{\text{pegg}}(n) = \theta(n^2) \rightarrow T(n) = O(n^2)$

## 8.5 Caratteristiche

### STABILE

Si l'insertion sort è un algoritmo di ordinamento stabile in quanto mantiene l'ordine degli elementi uguali tra di loro.

### IN PLACE

Si l'insertion sort è un algoritmo di ordinamento in place in quanto non utilizza strutture d'appoggio per eseguire le sue operazioni.

# Mergesort

## 9.1 Pseudocodice

MERGESORT (V, l, r)

if  $l < r$  then

$mid := \text{floor}[(l+r)/2]$   
    MERGESORT (V, l, mid)  
    MERGESORT (V, mid+1, r)  
    MERGE (V, l, mid, r)

MERGE (V, l, mid, r)

    T := Vettore di lunghezza  $r-l + 1$   
    i := l  
    j := mid + 1  
    k := 1

while  $i \leq mid$  AND  $j \leq r$  do

    if  $V[i] \leq V[j]$  then  
        T[k] := V[i]  
        i := i + 1

    else

        T[k] := V[j]  
        j := j + 1

    k := k + 1

while  $i \leq mid$  do

    T[k] := V[i]  
    i := i + 1  
    k := k + 1

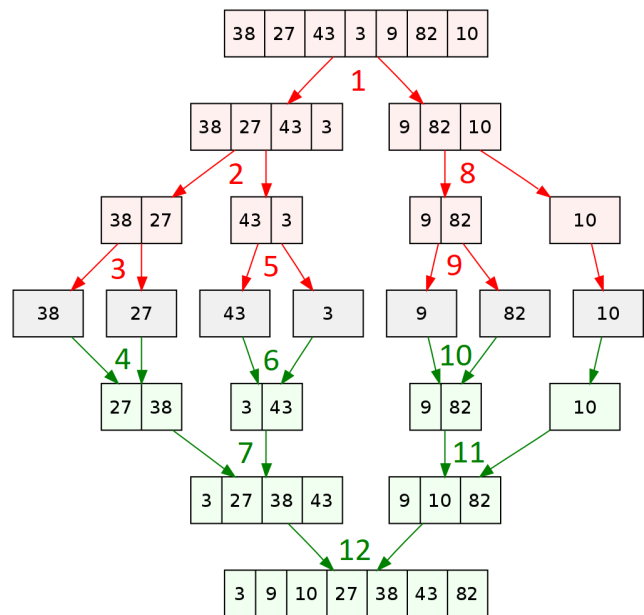
for k := 1 to T.length do

$V[l + k - 1] := T[k]$

## 9.2 Funzionamento

Il mergesort utilizza la strategia di programmazione **divide et impera** per ridurre il problema in più sottoproblemi.

Una volta ottenuti i singoletti e arrivati nel caso base si esegue la procedura di merge, andando a unire i singoletti riordinandoli durante il processo.



## 9.3 Tempi di calcolo

$a = 2$  (volte che viene chiamato il metodo ricorsivo)

$b = 2$  (in quante porzioni divido l'array [ $mid = l+r / 2$ ])

$f(n) = \theta(n)$  (righe di codice che non c'entrano con la ricorsione)

quindi applico il secondo caso del teorema del maestro:

$$\theta(n) = \theta(n^{\log_2 2}) \rightarrow \theta(n) = \theta(n) \rightarrow T(n) = \theta(n^{\log_2 2} \cdot \log n) \rightarrow T(n) = \theta(n \cdot \log n)$$

# Ricerca Dicotomica

**Problema:** Ricerca di un elemento in un vettore  $V$  ordinato.

**Input:** un vettore  $V$  di  $n$  elementi e un intero  $x$ .

**Output:** un intero  $n$  t.c.  $n \in V \wedge n = x$

## 10.1 Pseudocodice

Ricerca\_Dicotomica( $V, x, l, r$ )

```
if  $r < l$  then  
    return false
```

```
if  $r = l$  then  
    return  $x == V[l]$ 
```

```
mid := floor( $\frac{l+r}{2}$ )
```

```
if  $x > V[mid]$  then  
    return Ricerca_Dicotomica( $V, x, mid + 1, r$ )  
else  
    return Ricerca_Dicotomica( $V, x, l, mid$ )
```

## 10.2 Tempi di calcolo

Caso migliore e caso peggiore sono **asintoticamente uguali**:  $T(n) = \Theta(\log_2 n)$ .



# Problema di selezione

**Input:** un vettore  $V$  di  $n$  interi distinti, un intero  $i$  t.c  $1 \leq i \leq n$ .

**Output:** Il valore di  $V$  che è maggiore di esattamente  $i-1$  elementi di  $V$ .

## 11.1 Pseudocodice

SELEZIONE ( $V, i, l, r$ )

```
if  $l = r$  then  
    return  $V[l]$ 
```

```
cut := RANDOM_PARTITION ( $V, l, r$ )  
dim_sx := cut -  $l + 1$ 
```

```
if  $i \leq \text{dim\_sx}$  then  
    return SELEZIONE ( $V, i, l, \text{cut}$ )
```

```
return SELEZIONE ( $V, i - \text{dim\_sx}, \text{cut} + 1, V$ )
```

## 11.2 Tempi di calcolo

Caso peggiore:  $\theta(n^2)$

Caso migliore:  $\theta(n)$

Si può notare che il caso peggiore è  $\theta(n^2)$  quindi asintoticamente maggiore del caso peggiore di un algoritmo di ordinamento come il mergesort, che potremmo usare per riordinare il nostro vettore in input e risolvere facilmente il nostro problema di ricerca, quindi, perchè usare questo algoritmo e non ordinare l'array prima col mergesort?

Utilizzando random partition rendiamo l'algoritmo randomico e non più deterministico ed il suo tempo di calcolo diventa  $\theta(n)$  in quanto non consideriamo il caso peggiore essendo un evenienza molto sfortunata e improbabile con l'approccio randomico, per cui l'algoritmo di selezione sviluppato è asintoticamente più veloce rispetto al mergesort, essendo  $\theta(n)$  asintoticamente minore di  $\theta(n \cdot \log n)$ .

# Counting sort

## 12.1 Pseudocodice

COUNTING\_SORT (A, k)

```
C := vettore di k elementi

for i := 1 to k
    C[i] := 0

for j := 1 to A.length
    C[A[j]] := C[A[j]] + 1

for i := 2 to k
    C[i] := C[i - 1] + C[i]

B := vettore con n elementi

for j := A.length down to 1
    B[C[A[j]]] := A[j]
    C[A[j]] := C[A[j]] - 1

return B
```

## 12.2 Tempi di calcolo

Primo for:  $\theta(k)$

Secondo for:  $\theta(n)$

Terzo for:  $\theta(k)$

Quarto for:  $\theta(n)$

$T(n, k) = \theta(n + k) \quad \text{con } k = O(n)$

$\rightarrow T(n) = \theta(n)$

# Radix sort

## 13.1 Funzionamento

Ordina l'array iniziando l'ordinamento dalla cifra meno significativa e scalando fino a quella più significativa, è conveniente usarlo su array di dimensioni non troppo elevate, in modo da sfruttare al massimo il suo tempo di esecuzione lineare.

## 13.2 Pseudocodice

RADIXSORT(A)

```
for i := 1 to k
    ordina A secondo l'i-esima cifra meno significativa con
    ord.stabile
```

# Heap Binario

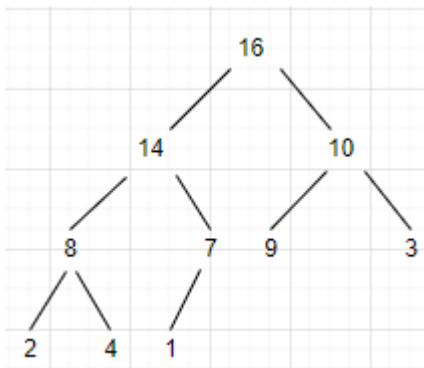
## 14.1 Definizione

Memorizzato come array + **proprietà**, ma che può essere visto come albero binario quasi completo (completo almeno a sinistra).

Come memorizziamo l'heap:

A = 16 14 10 8 7 9 3 2 4 1

Come vediamo l'heap:



Come calcoliamo la posizione dei nodi nell'array:

$\text{parent}(i) := \text{floor} \left( \frac{i}{2} \right)$

$\text{left}(i) := 2 \cdot i$

$\text{right}(i) := (2 \cdot i) + 1$

## 14.2 Proprietà

length → quanti elementi contiene l'array

heap\_size → quanti elementi dell'array sono nell'heap

max heap → un heap che soddisfa:  $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$

min heap → un heap che soddisfa:  $A[\text{parent}(i)] \leq A[i]$

**Attenzione:** Se un array non rispetta almeno una tra le proprietà max-heap e min-heap allora l'array **non** è un heap.

## 14.3 Nomenclatura

1. altezza di un nodo: numero di archi del cammino più lungo dal nodo stesso ad una sua foglia.
2. altezza heap: altezza dalla radice

$h \rightarrow$  quanti nodi ha un heap di altezza  $h$ ?

$$1. \text{Max} = \sum_{i=0}^h i = 2^{h+1} - 1$$

$$2. \text{Min} = 2^h$$

3. MAX\_HEAP:  $A[\text{parent}(i)] \geq A[i]$

4. MIN\_HEAP:  $A[\text{parent}(i)] \leq A[i]$

## 14.4 Max Heapify

Pseudocodice:

MAXHEAPIFY (A, i)

l := left(i)

r := right(i)

largest := i

if l ≤ A.heap\_size AND A[l] > A[largest] then  
largest := l

if r ≤ A.heap\_size AND A[r] > A[largest] then  
largest := r

if i ≠ largest then  
scambia A[i] con A[largest]  
MAXHEAPIFY (A, largest)

Tempi di calcolo:

In base all'altezza:  $T(h) = O(h)$

In base all'heap\_size:  $T(n) = O(\log n)$

## 14.5 Build heap

Pseudocode:

BUILD\_HEAP (A)

A.heap\_size := A.length

for i := floor( $\frac{A.length}{2}$ ) down to 1 do  
    MAXHEAPIFY (A, i)

Tempi di calcolo:

$$T(n) \leq \frac{n}{2} O(\log n) = O(n \log n) \rightarrow \text{stima molto pessimistica}$$

Dato un heap con n elementi quanti nodi avranno altezza h?

1. Ultimo foglia ha indice n
2. Ultimo nodo ad h = 1  $\rightarrow \text{floor}(\frac{n}{2})$
3. # foglie ?  $n - \text{floor}(\frac{n}{2}) = \text{ceiling}(\frac{n}{2}) \rightarrow \text{ceiling}(\frac{n}{2^1})$
4. Ultimo nodo ad altezza 2  $\rightarrow \text{floor}(\frac{n}{4})$
5. # n nodi ad h = 1  $\rightarrow \text{floor}(\frac{n}{2}) - \text{floor}(\frac{n}{4}) \rightarrow \text{ceiling}(\frac{n}{4})$

$$\rightarrow n \text{ nodi ad altezza } h = \text{ceiling}(\frac{n}{2^{h+1}})$$

$$T(n) \leq \sum_{h=0}^{\log n} \text{ceiling}(\frac{n}{2^{h+1}}) \cdot O(h) = O(n \cdot \sum_{h=0}^{\log n} \text{ceiling}(\frac{h}{2^{h+1}})) = O(n)$$

## 14.6 Heap sort

Pseudocodice:

HEAPSORT (A)

BUILDMAXHEAP(A)

```
for i := A.length down to 2 do
    scambia A[1] con A[i]
    A.heap_size := A.heap_size - 1
    MAXHEAPIFY(A, 1)
```

Tempi di calcolo:

$$T(n) = O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

# Coda con priorità

## 15.1 Procedure

1. Insert ( $S, x$ )  $\rightarrow S = S \cup \{x\}$
2. ExtractMax ( $S$ )  $\rightarrow x$  (elemento di  $S$  con priorità più alta)
3. IncreaseKey ( $S, x, k$ )  $\rightarrow$  modifica la priorità dell'elemento  $x$  con  $k$

## 15.2 Extract max

Pseudocodice:

HEAPEXTRACTMAX ( $A$ )

```
if A.heap_size < 1 then
    error "underflow"

max := A[1]
A[1] := A[A.heap_size]
A.heap_size := A.heap_size - 1
MAXHEAPIFY (A, 1)
return max
```

Tempi di calcolo:

$$T(n) = O(\log n)$$



## 15.3 Increase key

Pseudocodice:

HEAPINCREASEKEY (A, i, k)

```
    if A[i] > k then  
        error "Key minore"
```

```
    A[i] := k
```

```
    while i > 1 AND A[parent(i)] < A[i] do  
        scambia A[i] con A[parent(i)]  
        i := parent(i)
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = O(\log n)$

## 15.4 Insert

Pseudocodice:

HEAPINSERT (A, k)

```
    if A.length = A.heap_size then  
        error "overflow"
```

```
    A.heap_size = A.heap_size + 1
```

```
    A[heap_size] = -inf
```

```
    HEAPINCREASEKEY (A, A.heap_size, k)
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = O(\log n)$

# Strutture dati dinamiche

## 16.1 Operazioni

$k \rightarrow$  valore ,  $x \rightarrow$  posizione

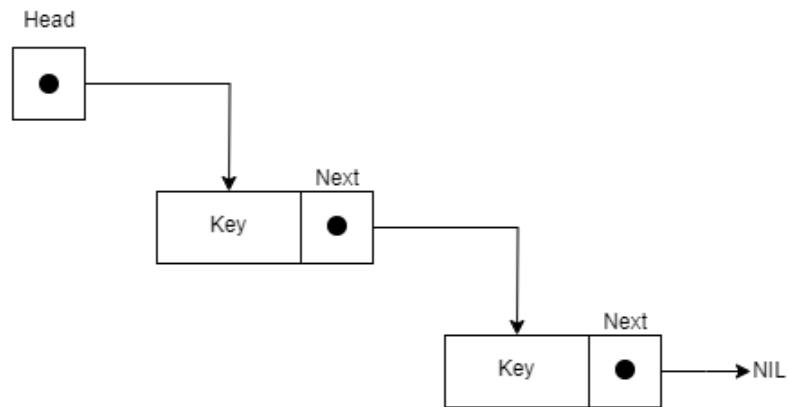
1. Search (S, k)
2. Insert (S, x)
3. Delete (S, x)
4. Maximum (S) / Minimum (S)
5. Predecessor (S, x) / Successor (S, x)

## 16.2 Implementazione

Metodo	Array	Array ordinato
<u>Search</u>	$T(n) = O(n)$	$T(n) = O(\log n)$
<u>Insert</u>	$T(n) = O(1)$	$T(n) = O(n)$
<u>Delete</u>	$T(n) = O(n)$	$T(n) = O(n)$
<u>Max / Min</u>	$T(n) = O(n)$	$T(n) = O(1)$
<u>Pred / Succ</u>	$T(n) = O(n)$	$T(n) = O(1)$

# Liste concatenate

## 17.1 Struttura



## 17.2 List search

Pseudocodice:

LISTSEARCH (L, k)

```
x := L.head
while x ≠ NIL AND x.key ≠ k do
    x := x.next

return x
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = O(n)$

## 17.3 List insert

Pseudocodice:

LISTINSERT (L, k)

```
x.next := L.head  
L.head := x
```

Tempi di calcolo:

$$T(n) = O(1)$$

## 17.4 List delete

Pseudocodice:

LISTDELETE (L, x)

```
if L.head = x then  
    L.head := x.next  
    x.next := NIL  
else  
    y := L.head  
    while y.next ≠ x do  
        y := y.next  
  
    y.next := x.next  
    x.next := NIL
```

Tempi di calcolo:

**Caso migliore:** L'elemento da eliminare è la testa della lista

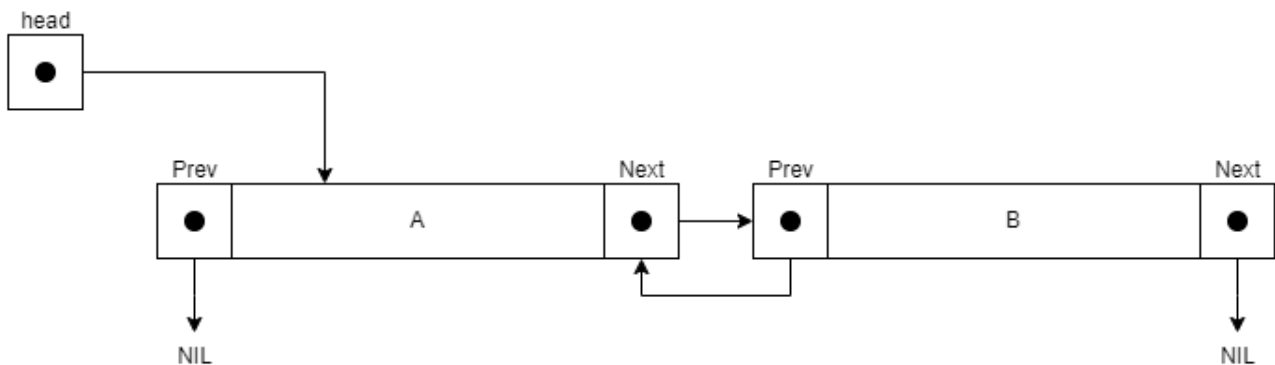
$$T_{migl}(n) = \theta(1)$$

**Caso peggiore:** L'elemento da eliminare è l'ultimo della lista

$$T_{pegg}(n) = \theta(n)$$

# Liste doppiamente concatenate

## 18.1 Struttura



## 18.2 DL List Insert

Pseudocodice:

DListInsert (L, k)

```
x.prev := NIL
x.next := L.head

if L.head ≠ NIL then
    L.head.prev := x

L.head := x
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = O(1)$

## 18.2 DL List Delete

Pseudocodice:

DlListDelete (L, k)

```
    if x.prev ≠ NIL then
        x.prev.next := x.next
    else L.head := x.next

    if x.next ≠ NIL then
        x.prev := x.next := NIL
```

Tempi di calcolo:

$$T(n) = O(1)$$

# Stack / Pile

## 19.1 Definizione

Gli Stack utilizzano la politica di gestione LIFO (Last in first out)

Procedure:

1. **Push** (insert)
2. **Pop** (delete)
3. **StackEmpty** (ritorna true se la lista è vuota, false altrimenti)
4. **Top** (ritorna l'elemento in cima alla lista senza rimuoverlo)

Attributi:

**top** → indice che indica dove si dovrà inserire il prossimo elemento

## 19.2 Tempi di calcolo

	Array	Lista
<u>Push</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$
<u>Pop</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$
<u>StackEmpty</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$
<u>Top</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$

## 19.3 Stack search

Pseudocodice:

StackSearch (S, k)

found := false

S2 := stack vuoto

while not StackEmpty(S) AND not found do:

    x := pop (S)

    push (S2, x)

    if x = k then

        found := TRUE

while not StackEmpty (S2) do:

    x := pop (S2)

    push (S, x)

return found

Tempi di calcolo:

**Caso migliore:** L'elemento è in testa

$T_{migl}(n) = \theta(1)$

**Caso peggiore:** L'elemento non è presente

$T_{pegg}(n) = \theta(n)$



## 19.4 Stack delete element

Pseudocodice:

StackDeleteEl (S, k)

    found := FALSE

    while not StackEmpty(S) AND not found do:

        x := Pop(S)

        if (x = k) then

            found := TRUE

        else

            Push (S2, x)

    while not StackEmpty(S2) do:

        Push (S, Pop(S2))

Tempi di calcolo:

**Caso migliore:** k è il primo elemento

$T_{migl}(n) = \theta(1)$

**Caso peggiore:** k non è presente

$T_{pegg}(n) = \theta(n)$

## 19.5 Stack sorted insert

Pseudocodice:

StackSortedInsert (S, k)

    S2 := stack vuoto

    while not StackEmpty(S2) AND Top(S) < k do:

        x := Pop(S)

        Push (S2, x)

    Push (S, k)

    while not StackEmpty(S2) do:

        Push (S, Pop(S2))

Tempi di calcolo:

**Caso migliore:**  $k < \text{Top}(s)$

$T_{\text{migl}}(n) = \theta(1)$

**Caso peggiore:** k è il massimo

$T_{\text{pegg}}(n) = \theta(n)$

# Queue / Coda

## 20.1 Definizione

Le Queue utilizzano la politica di gestione FIFO (First in first out)

Procedure:

5. **Enqueue** (insert)
6. **Dequeue** (delete)
7. **QueueEmpty** (ritorna true se la coda è vuota, false altrimenti)
8. **Head** (ritorna l'elemento in testa alla coda senza rimuoverlo)

Attributi:

**tail** → posizione in cui inserire

**head** → posizione da cui estrarre

## 20.2 Tempi di calcolo

	Array	Lista
<u>Enqueue</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$
<u>Dequeue</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$
<u>QueueEmpty</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$
<u>Top</u>	$\theta(1)$	$\theta(1)$

## 20.3 Queue search

Pseudocodice:

QueueSearch (Q, k)

found := FALSE

Q2 := coda vuota

while not QueueEmpty(Q) do:

    x := Dequeue(Q)

    Enqueue (Q2, x)

    if x = k then

        found := TRUE

while not QueueEmpty(Q2) do:

    Enqueue (Q, Dequeue(Q2))

Tempi di calcolo:

**Caso migliore e caso peggiore** coincidono.

$T(n) = \theta(n)$

## 20.4 Queue sorted insert

Pseudocodice:

```
QueueSortedInsert (Q, k)
```

```
    Q2 := coda vuota
```

```
    while not QueueEmpty (Q) AND Head(Q) < k do:
        Enqueue (Q2, Dequeue(Q))
```

```
    Enqueue (Q2, k)
```

```
    while not QueueEmpty(Q) do:
        Enqueue (Q2, Dequeue(Q))
```

```
    while not QueueEmpty(Q2) do:
        Enqueue (Q, Dequeue(Q2))
```

Tempi di calcolo:

**Caso migliore** e **caso peggiore** coincidono (lavorando con le code per riformare la coda iniziale va prima svuotata completamente e poi riempita, per questo caso migliore e peggiore coincidono).

$T(n) = \theta(n)$ .

# Albero binario di ricerca

## 21.1 Definizione

è un albero binario tale che per ogni nodo vale la **proprietà degli alberi binari di ricerca** (P.A.B.R).

P.A.B.R :

Sia  $x$  un nodo

1. Se  $y$  è un discendente del sottoalbero sinistro allora  
 $x.key \geq y.key$ .
2. Se  $y$  è un discendente del sottoalbero destro allora  
 $x.key \leq y.key$ .

## 21.2 Inorder visit

Pseudocodice:

InorderVisit ( $x$ )

```
if  $x \neq \text{NIL}$ :  
    InorderVisit ( $x.sx$ )  
    print ( $x.key$ )  
    InorderVisit ( $x.dx$ )
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = \theta(n) \rightarrow$  Eseguo un operazione costante (visita del nodo / arco) per  $n$  volte

## 21.3 Preorder visit

Pseudocodice:

```
PreorderVisit (x)
```

```
    if x ≠ NIL:  
        print (x.key)  
        PreorderVisit (x.sx)  
        PreorderVisit (x.dx)
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = \theta(n) \rightarrow$  Eseguo un operazione costante (visita del nodo / arco) per n volte

## 21.4 Postorder visit

Pseudocodice:

```
PostorderVisit (x)
```

```
    if x ≠ NIL:  
        PostorderVisit (x.sx)  
        PostorderVisit (x.dx)  
        print (x.key)
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = \theta(n) \rightarrow$  Eseguo un operazione costante (visita del nodo / arco) per n volte

## 21.5 Bst search

Pseudocodice ricorsivo:

```
BST_Search (x, k)

    if x = NIL then
        return NIL

    if x.key = k then
        return x

    if k < x.key
        return BST_Search (x.sx, k)

    return BST_Search (x.dx, k)
```

Pseudocodice iterativo:

```
BST_Search (x, k)

    x := T.root

    while x ≠ NIL AND x.key ≠ k do
        if k < x.key then
            x := x.sx
        else
            x := x.dx

    return x
```

Tempi di calcolo:

Va definito in base all'altezza dell'albero.

**Caso migliore:** L'elemento che cerco è la key della radice  $\rightarrow T(n) = \Omega(1)$

**Caso peggiore :** L'elemento che cerco non è presente  $\rightarrow T(n) = O(h)$   
con  $h = O(n)$ ,  $h = \Omega(\log n)$



## 21.6 Bst min / max

Pseudocodice:

BST\_min (T)

    x := T.root

    while x.sx  $\neq$  NIL do

        x := x.sx

    return x

BST\_max (T)

    x := T.root

    while x.dx  $\neq$  NIL do

        x := x.dx

    return x

Tempi di calcolo:

Va definito in base all'altezza dell'albero.

**Caso migliore:** il min / max è la radice  $\rightarrow T(n) = \Omega(1)$

**Caso peggiore :** devo scorrere tutto l'albero  $\rightarrow T(n) = O(h)$

con  $h = O(n)$ ,  $h = \Omega(\log n)$

## 21.7 Bst successor

Pseudocodice:

```
BST_Successor (x)

    if x.dx ≠ NIL then
        return BST_min (x.dx)

    y := x.parent

    while y ≠ NIL AND x = y.dx do
        x := y
        y := y.parent

    return y
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = O(h)$  con  $h = O(n)$ ,  $h = \Omega(\log n)$

## 21.8 Bst insert

Pseudocodice:

```
BST_Insert (T, z)

    x := T.root
    y := NIL

    while x ≠ NIL then
        if z.key < x.key then
            y := x
            x := x.sx
        else
            y := x
            x := x.dx

    z.parent := y

    if y ≠ NIL then
        T.root := z
    else if z.key < y.key then
        y.sx := z
    else
        y.dx := z
```

Tempi di calcolo:

**Caso peggiore:**  $T(n) = O(h)$  con  $h = O(n)$ ,  $h = \Omega(\log n)$

## 21.9 Bst delete

Pseudocodice:

BST\_Delete (T, x)

```
    if x.sx = NIL AND x.dx = NIL then
        if x.parent = NIL then
            T.root := NIL
        else if x = x.parent.sx then
            x.parent.sx := NIL
        else
            x.parent.dx := NIL

    else if x.dx = NIL then
        contrazione_nodo (T, x, x.sx)
    else if x.sx = NIL then
        contrazione_nodo (T, x, x.dx)

    else
        y := BST_min (x.dx)
        scambia x.key con y.key
        BST_delete (T, y)
```

Tempi di calcolo:

**Caso peggiore:**  $T(n) = O(h)$  con  $h = O(n)$ ,  $h = \Omega(\log n)$

## 21.10 Contrazione nodo

Pseudocodice:

```
contrazione_nodo (T, x, child)
    if x.parent = NIL then
        T.root := child
        child.parent := NIL
    else if x = x.parent.sx then
        x.parent.sx := child
        child.parent := x.parent
    else
        x.parent.dx := child
        child.parent := x.parent
```

# Grafi

## 22.1 Definizione

$G = (V, E) \rightarrow V =$  insieme finito di elementi (vertici)  
 $E =$  insieme finito di elementi (archi)

I grafi possono essere:

1. orientati / digrafi / diretti
2. non orientati

**Cammino da V a U:**  $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  t.c  $V_i \in V, v_0 = V, v_k = U, (V_i, V_{i+1}) \in E$

**Vertici adiacenti:** Vertici collegati da un arco

**Grado di un vertice:** Numero di archi che coinvolgono un nodo:

1. Grado in entrata  $\rightarrow$  archi in entrata
2. Grado in uscita  $\rightarrow$  archi in uscita

## 22.2 Rappresentazione

1. Liste di adiacenza: array di liste concatenate

- a. Ogni posizione dell'array contiene una lista contenente tutti i vertici adiacenti al vertice osservato
- b. Il numero di nodi presenti in una lista di adiacenza corrisponde al doppio degli archi presente nel grafo non orientato, in caso di grafo orientato il numero di nodi presente nella lista è uguale al numero di archi.

2. Matrice di adiacenza:

- a. Il numero di 1 presenti nella matrice è uguale al doppio degli archi presenti nel grafo non orientato, in caso di grafo orientato il numero di 1 presenti nella matrice è uguale al numero di archi.

## 22.3 Tempi di calcolo

	Matrice di adiacenza	Lista di adiacenza
<u>Spazio occupato</u>	$\theta( V ^2)$	$\theta( V  +  E )$
<u>Ricerca di un elemento</u>	$\theta(1)$	$\theta(\text{grado}(U))$
<u>Elencare gli adiacenti</u>	$\theta( V )$	$\theta(\text{grado}(V))$

## 22.4 Stampa cammino

Pseudocodice:

Stampa\_cammino (V)

```
if v.d := +inf then
    print "no cammino"
else if v.pred = NIL then
    print v
else
    Stampa_cammino (v.pred)
```

Tempi di calcolo:

$$T(n) = \theta(|V|)$$

## 22.5 Visita in ampiezza (BFS)

Pseudocodice:

BFS\_Visit (G, s)

```
    foreach v ∈ G.V
        v.d := +inf
        v.color := BIANCO
        v.pred := NIL

    s.color := GRIGIO
    s.d := 0
    s.pred := NIL
    Q := coda vuota
    Enqueue (Q, s)

    while not Queue_Empty (Q) do
        V := Dequeue (Q)

        foreach u ∈ G.Adj[V]
            if u.color = BIANCO then
                u.color := GRIGIO
                u.d := v.d + 1
                u.pred := V
                Enqueue (Q, v)

        v.color := NERO
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = \theta(|V| + |E|) \rightarrow$

Il primo foreach viene eseguito tante volte quanti sono i nodi, mentre il while viene eseguito tante volte quanti sono gli archi, per cui il tempo totale è la somma tra la cardinalità dei nodi e degli archi.

## 22.6 Visita in profondità (DFS)

Pseudocodice:

DFS (G)

```
foreach v ∈ G.V
    v.color := BIANCO
    v.pred = NIL

time := 0

foreach v ∈ G.V
    if v.color = BIANCO then
        DFS_visit (G, v)
```

DFS\_visit (G,v)

```
v.color := GRIGIO
time := time + 1
v.d := time

foreach u ∈ G.Adj[V]
    if u.color = BIANCO then
        u.pred := v
        DFS_visit (G, u)

v.color := NERO
time := time + 1
v.f := time
```

Tempi di calcolo:

$T(n) = \Theta(|V| + |E|) \rightarrow$  Lineare nella dimensione dell'input (con implementazione tramite lista di adiacenza)



## 22.7 Teorema: Struttura di parentesi

$\forall u, v \in V$  esattamente un caso è vero:

1.  $u.d < v.d < v.f < u.f \rightarrow v$  è discendente di  $u$
2.  $v.d < u.d < u.f < v.f \rightarrow u$  è discendente di  $v$
3.  $[u.d, u.f]$  e  $[v.d, v.f]$  sono disgiunti e ne  $v$  è discendente di  $u$  ne  $u$  è discendente di  $v$

## 22.8 Classificazione archi

1. **TREE EDGE** =  $(u, v) \in E \rightarrow v$  è stato scoperto dalla visita di  $u$ ,  $v$  era BIANCO
2. **BACK EDGE** =  $(u, v) \in E \rightarrow u$  è discendente di  $v$ ,  $v$  era GRIGIO
3. **FWD EDGE** =  $(u, v) \in E \rightarrow v$  è discendente non diretto di  $u$ ,  $v$  era NERO e  $u.d < v.d < v.f < u.f$
4. **CROSS EDGE** =  $(u, v) \in E \rightarrow$  se non è uno degli altri tre

Teorema:

$G$  è un DAG se e solo se la DFS non classifica come **back edge** qualche arco di  $G$ .

## 22.9 Ordinamento topologico di un DAG

Pseudocodice:

Top\_sort ( $G$ )

DFS ( $G$ )

**return** vertici ordinati in senso decrescente per finishing time

Tempo di calcolo:

$T(n) = \theta(|V| + |E|) \rightarrow$  dovuto al DFS, l'ordinamento richiede tempo  $\theta(|V|)$  se implementato correttamente.