Запишем многочлен от двух переменных в общем случае:

$$f(x,y)=\sum a_{nm}x^n y^m$$

Распишем интеграл по окружности:

$$\oint\limits_{\{x^2+y^2=R^2\}} f(x,y)ds=\int\limits_0^{2\pi}\sum a_{nm}(R\cos\varphi)^n(R\sin\varphi)^m d\varphi=$$

$$=\sum a_{nm}R^{n+m}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi)^n(\sin\varphi)^m d\varphi=0.$$

Если мы хотим, чтобы это равенство было выполнено для любого R, коэффициенты при различных степенях R должны быть равны нулю. Рассмотрим более подробно интеграл

$$c_{nm}=\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi)^n(\sin\varphi)^m d\varphi.$$

Заметим, что $c_{nm}=c_{mn}$, поскольку нам не важно в какой точке окружности мы начнем интегрировать (более формально: сделаем замену $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$ и прибавим $\frac{3\pi}{2}$ к каждому пределу интегрирования).

У нас есть три случая:
1) n и m четные. Тогда подынтегральное выражение всегда неотрицательно, поэтому $c_{nm}>0$.
2) n и m имеют разную четность. Поскольку $c_{nm}=c_{mn}$, достаточно рассмотреть случай, в котором n — четное, а m — нечетное. Тогда подыинтегральное выражение антисимметрично относительно точки π, поэтому $c_{nm}=0$.
3) n и m нечетные. Тогда интеграл можно разбить на два участка: от 0 до π и от π до 2π. На каждом из этих участков подынтегральное выражение антисимметрично относительно центра ($\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ соответственно), поэтому $c_{nm}=0$.

(Если эти рассуждения не совсем понятны, попробуйте нарисовать графики $\sin x$, $\cos x$, $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$. Более старшие степени только деформируют эти графики, не меняя указанных симметрий. Попробуйте понять, как выглядят графики их произведений.)

Таким образом c_{nm} не равен нулю, только когда n и m четные. Тогда в базисный набор мы сразу можем включить все одночлены $x^n y^m$, у которых n и m имеют разную четность либо оба нечетные. Но это еще не все возможные базисы. Несмотря на то, что для четных n и m коэффициенты c_{nm} больше нуля, их линейная комбинация при одинаковой степени все равно может дать нуль. Это соответствует линейному ограничению на коэффициенты для четных степеней R, а значит уменьшает число базисных одночленов на 1 от всех возможных для каждой такой степени.

Посчитаем число одночленов от двух переменных степени не выше s. Есть 1 одночлен степени 0, 2 одночлена степени 1 и так далее. Общее число одночленов равно

$$1 + 2 + \cdots + (s+1) = \frac{(s+1)(s+2)}{2}.$$

Число возможных четных степеней R равно $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$. Таким образом, размерность подпространства V равна:

$$\dim V = \frac{(s+1)(s+2)}{2} - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1 = \frac{s(s+3)}{2} - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor.$$

Для случая $s = 2013$ получим $\dim V = 2\,028\,098$.

Примечание. Выпишем явно базисные одночлены для первых s. Поскольку для очередного s можно использовать предыдущий базис, будем выписывать только новые одночлены:

s	Размерность V	С разной четностью и нечетные	Четные
1	2	x, y	
2	4	xy	$x^2 - y^2$
3	8	x^3, y^3, x^2y, xy^2	
4	12	x^3y, xy^3	$x^4 - 3x^2y^2$, $y^4 - 3x^2y^2$
5	18	x^5, y^5, x^4y, xy^4, x^2y^3, x^3y^2	

Покажем, как получился, например, базис для $n = 4$. При R^4 в разложении интеграла от произвольного многочлена стоит следующее выражение:

$$a_{40}c_{40} + a_{04}c_{04} + a_{31}c_{31} + a_{13}c_{13} + a_{22}c_{22} = a_{40}c_{40} + a_{04}c_{04} + a_{22}c_{22}.$$

Условие на коэффициенты:

$$a_{40}c_{40} + a_{04}c_{04} + a_{22}c_{22} = 0.$$

Подставим в разложение

$$a_{40}x^4 + a_{04}y^4 + a_{22}x^2y^2$$

получившееся условие:

$$a_{40}\left(x^4 - \frac{c_{40}}{c_{22}}x^2y^2\right) + a_{04}\left(y^4 - \frac{c_{04}}{c_{22}}x^2y^2\right).$$

Нетрудно посчитать

$$c_{40} = c_{04} = \frac{3\pi}{4}, \quad c_{22} = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому выражение превращается в

$$a_{40}(x^4 - 3x^2y^2) + a_{04}(y^4 - 3x^2y^2).$$