Пусть $G(t)$ — производящая функция последовательности:

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k.$$

Умножим каждое равенство в условии на $t^0, t^1, \dots, t^k, \dots$:

$$\begin{aligned}
&t^0 x_0 = 0 \\
&t^1 x_1 = t \\
&\ \dots \\
&t^k x_k = t^n \left(\frac{x_{k-1} + (k-1)x_{k-2}}{k} \right) \\
&\ \dots
\end{aligned}$$

Просуммируем эти равенства и возьмем производную:

$$G'(t) = 1 + G(t) + 2tG(t) + t^2 G'(t) - tG(t).$$

Решаем дифференциальное уравнение на $G(t)$:

$$G'(t)(t^2 - 1) + G(t)(t + 1) = -1.$$

$$[G(t)(t-1)]'(t+1) = -1.$$

$$G(t) = \frac{C}{1-t} + \frac{\ln(t+1)}{1-t}.$$

Поскольку $G(0) = 0$:

$$G(t) = \frac{\ln(t+1)}{1-t}.$$

Теперь мы можем найти члены последовательности, посмотрев на разложение $G(t)$ в ряд Тейлора:

$$G(t) = (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots)(1 + t + t^2 + \cdots).$$

Тогда

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Поскольку

$$\ln(t+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k},$$

понятно, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ln 2.$$