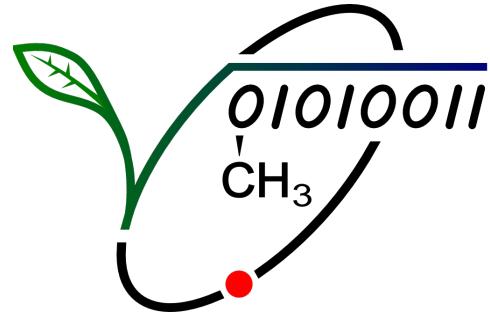


Spezialschulteil des Albert-Schweitzer-Gymnasiums Erfurt



Seminarfacharbeit Klassenstufen 11/12
Schuljahre 2022/23 und 2023/24

Modellierung des Windeinflusses auf die Korngrößenverteilung bei Megarippeln

Fachbetreuer:

Norman Wagner

Seminarfachbetreuer:

Dörte Nadler

Außenbetreuer:

Katharina Tholen

Thomas Pähtz

Name:

Lorenz Osburg

Magnus Kirbach

Johann Vogel

Erfurt, den 21. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Entstehung von Sandstrukturen im Allgemeinen	3
3 Der Megarippel als Sonderform der Sandstrukturen	4
4 Beschreibung von Sortierungsvorgängen mithilfe der physikalischen Interpretation der Sandsortierungsgleichung	6
5 Numerische Modellierung der Entstehung und Entwicklung von Megarippeln unter Berücksichtigung variabler Anfangszustände	8
5.1 Allgemeines zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen	8
5.2 Numerische Implementierung und Analyse der Sandsortierungsgleichung	8
5.3 Empirische Überprüfung der numerischen Ergebnisse	11
6 Quantifizierung der Reaktion auf Windänderung	12
6.1 Die Methodik der Dimensionsanalyse unter Verwendung des Buckinghamschen II-Theorems	12
6.2 Bestimmung des Einflusses einzelner Parameter	14
6.2.1 Direkter Einfluss des Skalierungsfaktors r	14
6.2.2 Essentieller Einfluss der Windfluktuation	15
6.2.3 Einfluss restlicher Parameter	15
6.2.4 Bestimmung des dominanten Kontrollparameters	15
7 Aufstellen eines Kriteriums zur Klassifizierung von Megarippeln auf der Erde	17
8 Zusammenfassung	18
9 Glossar	19
10 Literatur- und Quellenverzeichnis	21
11 Abbildungsverzeichnis	23
12 Anhang	24

1 Einleitung

Seit dem Auftauchen der Atmosphäre existiert Wind auf der Erde, welcher diese stetig formt und Einfluss auf ihre Struktur nimmt. Allgemein bekannt ist, dass Sand unter Windeinwirkung scheinbar genau zwei charakteristische Formen annehmen kann. Diese sind Rippel - kleine, meist unregelmäßige und wellige Verformungen des Sandbettes - sowie Dünen, die meterhohe Berge an Stränden und in Wüsten bilden. Betrachtet man jedoch Sandstrukturen auf der gesamten Erde, so fällt noch eine weitere, eher seltenere Form auf: der sogenannte Megarippel. Größentechnisch befindet sich dieser zwischen den kleineren Rippeln und den größeren Dünen. Weiterhin weist er eine sehr charakteristische Korngrößenverteilung auf, das heißt, wie oft ein Sandkorn bestimmter Größe in ihm vorkommt. Diese wird als bimodal bezeichnet, da Körner um zwei bestimmte Korngrößen herum weitaus häufiger vorkommen. Dabei ist der Megarippel aus mehreren Gründen wertvoll. Er eröffnet neue Möglichkeiten für die Klimaforschung: So kann durch die Sensibilität auf Windschwankungen eventuell auf verschiedene Windgeschwindigkeiten und Wetterbedingungen zurückgeschlossen werden.¹

In dieser Seminarfacharbeit soll beantwortet werden, inwiefern eine bimodale Korngrößenverteilung angewendet werden kann, um Megarippel zu klassifizieren und welchen Einfluss der Wind auf den Vorgang der Sandsortierung hat. Die Motivation für dieses Thema ist, diesen Prozess zusammen mit der Entwicklung von Megarippeln zu beschreiben sowie auf diesem Gebiet Grundlagenforschung zu betreiben. Außerdem soll ein Kriterium erstellt werden, was es ermöglicht, im Vorhinein abzuschätzen, ob Megarippel eine bimodale Korngrößenverteilung ausbilden können.

Hierbei werden bereits vorhandene Modelle anhand numerischer Simulationen angewandt und überprüft sowie deren grundlegende Ideen erweitert. Daher ist das Ziel nicht, ein gänzlich neues physikalisches Modell der Megarippel zu entwickeln, sondern bereits vorhandene Vorstellungen physikalisch begründet zu verifizieren oder zu widerlegen. Dabei wurden die Schwerpunkte thematisch chronologisch festgelegt, wodurch der Leser von den Grundlagen über die Anwendung bis zu den Ergebnissen geleitet wird und sich somit intensiv mit dem Thema der Megarippel auseinandersetzt. Das methodische Vorgehen beinhaltet eine Erläuterung des Entstehens von Sandstrukturen im Allgemeinen sowie die anschließende Analyse des Megarippels als Sonderform derselben. Darauf folgt eine physikalische Modellierung und mit deren Gesetzmäßigkeiten eine numerische Simulation, welche bestehende Theorien testet und anschließend neue Ergebnisse liefert. Diese werden wiederum mit einer physikalischen Analyse aufgearbeitet und quantifiziert. Beispiele dafür sind die Erarbeitung einer empirischen, das heißt einer aus Messwerten bestimmten, Formel für die Anpassungszeit der Korngrößenverteilung eines Megarippels sowie die Bestimmung eines dominanten Kontrollparameters, das heißt, welcher Anfangswert den größten Einfluss auf den Sortievorgang hat und die Umgebungskonditionen maßgeblich beschreibt. Dies soll auf Grundlage einer umfassenden Parameterstudie geschehen.

Wir danken Herrn Wagner als unseren Fachbetreuer, der uns bei Fragen zur Methodik und Numerik immer zur Verfügung stand. Besonderer Dank gilt Herrn Brenner, welcher maßgeblich dazu beitrug, uns dieses Thema zu vermitteln und uns dabei half, die physikalischen Grundlagen zu erarbeiten. Außerdem möchten wir Frau Nadler für ihre großartige Hilfe bei sämtlichen Fragen zum Seminarfach und ihre ständige Hilfsbereitschaft über Jahre hinweg danken. Zuletzt soll größter Dank an unsere Außenbetreuer Katharina Tholen und Thomas Pährt gehen, die fast jede Woche aktiv mit uns in den Austausch traten, unseren Fortschritt bewerteten, immer wieder neue Anstöße gaben und somit maßgeblich am Erfolg unserer Ergebnisse beteiligt waren.

¹s. Quelle Parteli, "Wind in den Dünen"

2 Entstehung von Sandstrukturen im Allgemeinen

Durch aeolische (s. Glossar, S.19) Prozesse entstehen Anordnungen kleiner Teilchen, die für die Physik relevant sind. Einer der nahegelegenen Orte, um diese Prozesse zu beobachten, sind Wüsten mit Sand als kleinste Teilchen, die von Wind transportiert werden können. So erzeugt Wind an solchen Orten verschiedenste Sandstrukturen wie z.B. Dünen, die mehrere zehn Meter hoch sein können, oder aber auch kleine, oft nur wenige Zentimeter große Rippel (s. Glossar, S. 20). Im Prinzip sind diese Strukturen sehr ähnlich, jedoch findet man abgesehen von der Größe weitere Unterschiede in den jeweiligen Verhalten der beiden Sandgebilde. Während Dünen eher isoliert voneinander auftreten, kann man Rippel als prinzipiell periodische Sandwellen bezeichnen.²



Abbildung 1: Sandstrukturen in Sandwüsten (unten), Querschnitt eines Megarippels (oben)

Diese genannten Verhaltensmuster lassen sich nun durch den Entstehungsprozess der einzelnen Sandstrukturen begründen. Grundlegend dabei ist der Prozess der Saltation (s. Glossar, S.20, und Abbildung 2) Sie ist der Begriff, der die Flugbahnen beschreibt, welche die Sandkörner durch den Wind zurücklegen. Durch Windböen oder auch konstanten Wind, der stark genug ist, sodass er die Körner transportieren kann, folgt der Sand nahezu ballistischen (s. Glossar, S.19) Flugbahnen. Nach Vollzug der Flugbahn stößt das Sandkorn in der Regel erneut auf den Boden und erzeugt dabei einen Aufprall auf dem Boden, der Energie auf weitere Sandkörner im Boden überträgt und sie zum erneuten Saltieren durch ein Herausschlagen aus dem Sandbett anregt.³ Somit steigert der Aufprall die Sandtransportrate, welcher dem Massenstrom der Sandkörner entspricht. Es wird also die Masse der saltierenden Teilchen pro Fläche und Zeit quer zur Transportrichtung durch den Aufprall weiter gesteigert. Dies führt zu Kettenreaktionen und allgemein zur Entstehung von Sandstrukturen.

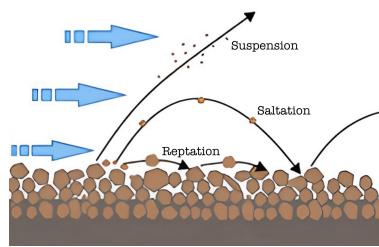


Abbildung 2: Saltation und Reptation (s. Glossar, S.20)

Betrachtet man nun den Entstehungsprozess von Rippeln genauer, so kann man sagen, dass diese durch eine spontane Synchronisation der Saltationen entstehen. Diese kann jedoch nur auftreten, wenn die Sprunglänge der saltierenden Körner größer als die Wellenlänge der Rippel ist. Andernfalls kann der Rippel nicht weiter wachsen.⁴ Dies beschränkt die Rippelgröße auf ca. zehn Zentimeter,

²s. Quelle Lämmel u.a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 759

³s. Quelle Parteli, "Wind in den Dünen"

⁴s. Quelle Lämmel u.a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 759

wobei sie ebenfalls proportional zur Erosion ist. Wird der Wind zu stark, tritt das bereits genannte Problem auf, dass die Teilchen zu weit fliegen. Durch die Empfindlichkeit der Windgeschwindigkeit und Transportkapazität des Windes gegenüber Erhöhungen im Sandbett können dann auch Dünen entstehen, da ein nahezu flaches Sandbett zu instabil wäre.⁵ Wichtig ist bei der Entstehung der Dünen der dabei typische Verlauf der Stromlinien des Windes über einer Erhöhung im Sandbett.

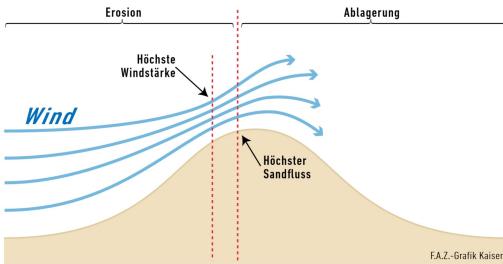


Abbildung 3: Stromlinienverlauf über einer idealisiert symmetrischen Düne

Wie in Abbildung 3 zu erkennen ist, verdichten sich die Stromlinien über der Erhebung. Interessant dabei ist, dass der maximale Windfluss bereits vor dem Höhepunkt erreicht wird. Dies bildet in der Natur z.B. die Grundlage für die typische asymmetrische Form bei Sandmangel einer Düne mit abgeflachter Luv- und steiler Lee-Seite (s. Glossar, S. 20).⁶ Die Mindestgröße der Düne ist zudem durch den Sättigungsübergang definiert. Er beschreibt, wann die Windscherspannung (s. Glossar, S. 20) mit genügend Sand saturiert ist und setzt damit eine Mindestgröße bei zehn Metern fest.⁷

3 Der Megarippel als Sonderform der Sandstrukturen

Zwischen den kleinen Ripples und großen Dünen sollte, zumindest laut gängigem Wissensstand, in der Theorie keine Sandstruktur entstehen.⁸ Jedoch rückten in den letzten Jahrzehnten die sogenannten Megarippel (s. Glossar, S. 20), die genau in diesem Wellenlängenbereich liegen, immer mehr in den Vordergrund der Forschung. Erosive Bedingungen, die beim Entstehungsprozess anderer Sandstrukturen auftreten, sorgen für gewisse Rückkopplungen zwischen den Sandteilchen und somit für das Entstehen der Megarippel. Ein wichtiger Aspekt ist hierbei auch die Sandsortierung (s. Glossar, S. 20) durch den äolischen Transport des Sandes. Allgemein ist Sand im Sandbett polydispers. Damit sind alle Korngrößen von groß bis klein durchmischt vorhanden. Zustande kommt dies durch chaotische Prozesse wie Zerkleinerung durch Erosion, Abrieb oder Verwitterung. Die Effizienz des äolischen Transportes ist jedoch von der Größe der Körner abhängig. Kleinere Körner fliegen weiter und Größere bleiben eher zurück. Das sorgt dafür, dass Sand in zunehmender Windrichtung monodispers, also mehr sortiert, wird.⁹ Werden nun vor allem kleinere Körner weggeweht, kann es passieren, dass sich die etwas größeren und größeren Körner an der Oberfläche ansammeln. Sie können quasi eine Panzerschicht für die darunter liegenden Körner bilden. Dies wiederum führt zu einer bimodalen Korngrößenverteilung (s. Glossar, S. 19) an der Oberfläche, die aus der zuvor unimodalen, also homogenen, Korngrößenverteilung hervorgeht.

⁵s. Quelle Sauermann, Kroy und Herrmann, "Continuum saltation model for sand dunes"

⁶s. Quelle Parteli, "Wind in den Dünen"

⁷s. Quelle Lämmel u. a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 759

⁸s. Quelle Bagnold, *The physics of blown sand and desert dunes*, S. 39

⁹s. Quelle Lämmel u. a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 759

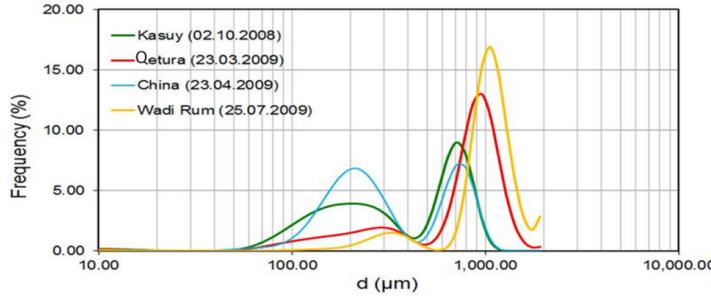


Abbildung 4: Sandsortierungen in unterschiedlichen Erdregionen

Demnach erhält man eine dem Megarippel entsprechende Sandsortierung oder anders gesagt eine bimodale Korngrößenverteilung dadurch, dass die kleinen Teilchen saltieren, während die größeren Teilchen nur reptieren (s. Abbildung 2) können.¹⁰ Bei der speziellen Sandformation des Megarippels gibt es also Windgeschwindigkeiten, bei denen die größeren Körner nicht saltieren, sondern reptieren. Das bedeutet, angetrieben vom Wind und von der Saltation kleinerer Körner, kriechen die größeren Körner über den Boden. Dieses langsame Kriechen führt auch zu weiteren Bezeichnungen des Megarippels, wie kleine Reptationsdüne oder daraus resultierend Zwergdüne. Dies beschreibt auch das typische Verhalten von Megarippeln, das isolierte Wandern. Im Gegensatz zu normalen Rippeln treten sie nicht in messbaren Wellenlängenbereichen auf, sondern können unter anderem durch ihre Basislänge beschrieben werden, die durch den Schwellenwert der Windscherspannung begrenzt wird. Durch die Ansammlung der großen Körner an der Oberfläche und die starke Skalentrennung von den Sprungweiten der kleinen und größeren Körnern macht sich eine starke lokale Reaktion auf den Wind bemerkbar. So sind Megarippel instabil gegen konstanten Wind und im Gegensatz zu Dünen sehr anfällig für Windvariationen und werden dabei schnell zerstört. Damit können sie nur dort entstehen, wo der Abstand zwischen zwei Stürmen die benötigte Zeit für die Bildung nicht unterschreitet. Dies sorgt auch dafür, dass die Größe auf Dezimeter skaliert wird.¹¹

Weitere Eigenschaften des Megarippels sind die ebenfalls typische Dünenform sowie das sehr lose und wenig regelmäßige Auftreten bei Sandmangel. Durch den relativ lang andauernden Prozess der Bildung der Panzerschicht gibt es in Regionen mit homogenen Sand kaum Megarippel.¹²

¹⁰s. Quelle Katra und Yizhaq, "Intensity and degree of segregation in bimodal and multimodal grain size distributions"

¹¹s. Quelle Parteli, "Wind in den Dünen"

¹²s. Quelle Lämmel u. a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 759

4 Beschreibung von Sortierungsvorgängen mithilfe der physikalischen Interpretation der Sandsortierungsgleichung

Bei bestimmtem bimodalem Sandtransport, also nur saltierenden Saltonen und nur reptierenden Reptonen, können Megarippel entstehen (s. Kapitel 3). Der Sortierungsvorgang, der sehr eng mit dem Formationsprozess von Megarippeln in Verbindung steht, kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:¹³

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_s(a, t) = -R(a)\phi_s(a, t) + [\langle R(a) \rangle_s + J(a)]\phi_b(a) \quad (4.0.1)$$

Dieser Ausdruck nennt sich Sandsortierungsgleichung und besteht in vereinfachter Form aus drei Termen. Es wird beschrieben, wie die Korngrößenverteilung an der Oberfläche $\phi_s(a, t)$ sich in Abhängigkeit von der Korngröße a und Zeit t entwickelt. Die Korngrößenverteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und gibt somit an, mit welcher Häufigkeit ein Intervall von Korngrößen auftritt. Selbiges gilt auch für die Korngrößenverteilung im Boden $\phi_b(a, t)$. Hier liegt auch eine Schlüsselidee der Beschreibung der möglichen Entstehung von Megarippeln: Man unterteilt die Gesamtverteilung eines Megarippels in die Oberflächenverteilung, welche immer ein bestimmtes Volumen in den Rippel hineinragt. Dem gegenüber steht die Bodenverteilung, welche alles im Inneren des Megarippels bzw. vom Sandbett darstellt.

Die Prozesse, die beide Verteilungen entstehen lassen, sind nicht fundamental verschieden: z.B. können die Körner an der Oberfläche verschüttet werden und so zum Boden werden. Der entscheidende Unterschied liegt in den Zeitskalen, in denen die Verteilungen entstehen. Die Bodenverteilung entwickelt sich über geologische Zeitspannen, während die Oberflächenverteilung deutlich weniger Zeit benötigt. Deshalb kann die Bodenverteilung als zeitunabhängig angenommen werden.¹⁴ Daher ist es sinnvoll, eine logarithmische Normalverteilung als Anfangsbedingung für die Oberflächenverteilung zu nehmen, da am Anfang noch kein Megarippel entstanden ist und somit nur das Sandbett vorliegt. Diese Verteilung bietet sich statt einer gewöhnlichen Gauß-Normalverteilung an, da es in der Natur normalerweise mehr feine als grobe Körner gibt. In die logarithmische Normalverteilung gehen dabei die Parameter Erwartungswert EX und Standardabweichung DX (s. Glossar, S. 19) ein. EX gibt dabei an, welche Korngröße am meisten auftritt und DX wie gestaucht die Verteilung ist.

Die Erosionsfunktion R gibt an, wie viele Körner von welcher Größe vom Wind abgetragen werden. Sie ergibt sich zu:¹⁵

$$R(a, r, a_{\tau,0}) = \sqrt{r} \cdot \left(1 - \frac{a}{a_{\tau,0}}\right) \cdot \Theta(a_{\tau,0} - a) \quad (4.0.2)$$

Die Erosionsrate ist somit vom Skalierungsfaktor r sowie vom maximalen Korndurchmesser $a_{\tau,0}$ (s. Glossar, S. 19), der gerade noch erodiert wird und als Proxy-Variable (s. Glossar, S. 20) für eine Windscherspannung τ verwendet werden kann, abhängig. Θ bezeichnet hierbei die Heaviside-Funktion (s. Glossar, S. 19). Anschaulich gesprochen werden mit fortschreitender Korngröße weniger Körner erodiert, bis die Rate schließlich auf 0 abfällt, wenn $a_{\tau,0}$ erreicht wird.

Die mittlere Erosion $\langle R(a) \rangle_s$ gibt an, wie viele Körner insgesamt vom Wind weggetragen wurden, denn hier wird eine gemittelte Größe mit $\langle \dots \rangle$ notiert.

Weiterhin wurde a_{τ} zeitabhängig definiert:

$$a_{\tau}(t) = a_{\tau,0} + a_{\tau,s} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (4.0.3)$$

¹³s. Quelle Lämmel u. a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 759ff.

¹⁴s. Quelle Lämmel u. a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 760

¹⁵s. Quelle Lämmel u. a., "Aeolian sand sorting and megaripple formation", S. 760f.

$a_\tau(t)$ oszilliert dadurch um den konstanten Wert $a_{\tau,0}$ mit der Amplitude $a_{\tau,s}$ (s. Glossar, S. 19, und Kapitel 5.2).

Optional kann die Depositionsrate $J(a)$ hinzugezogen werden, welche ein Hinzukommen von Sandkörnern darstellen kann und nicht nur ein Wegwehen. Es wurde zur Vereinfachung $J(a) = 0$ gesetzt, kann aber in der erweiterten Sandsortierungsgleichung betrachtet werden.

Die Zeitänderung der Oberflächenverteilung $\phi_s(a)$ ergibt sich intuitiv: die Erosion wird abgezogen. Nun reicht aber die Oberfläche etwas in den Megarippel hinein. Es tauchen also neue Körner aus dem Boden auf. Dieses Auftauchen entspricht genau dem, was erodiert wurde. Denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss zu jedem Zeitpunkt 1 sein.

In der Natur kann nun ein Windfenster identifiziert werden, in dem Bedingungen herrschen, welche der Entstehung von Megarippeln dienlich sind. Dabei saltieren die kleineren Körner, d.h. sie werden vom Wind weggeweht und geben beim Wiedereinschlag einen Teil ihrer Energie größeren Körnern, welche dadurch reptieren.¹⁶ Dieses Reptieren gleicht einem Saltieren, allerdings in deutlich kleinerem Maßstab. Die großen Körner kriechen dabei ein bis zwei Körnerdurchmesser über das Sandbett. Bei konstantem Wind über eine lange Zeit häufen sich so die groben Körner an. Sie bilden eine schützende Schicht aus schweren, nahezu unbeweglichen Körnern über einem feineren Sandbett. Auf der Oberfläche werden somit nach hinreichend langer Zeit die feinen Körner abgetragen und es tauchen die groben Körner aus dem Boden auf. Das linke Maximum wandert zum Rechten. Auf dem Weg zu dieser wieder unimodalen Verteilung kommt es zu einer bimodalen Ausprägung, in der sowohl feine als auch grobe Körner vorhanden sind. Das ist charakterisierend für Megarippel, da in der Natur der Wind normalerweise nicht über lange Zeit konstant weht (s. Anhang S. 25, Abb. 7).¹⁷

Weiterhin kommt es im Feld zu Böen, also Wind mit deutlich höherer Geschwindigkeit als die Durchschnittsgeschwindigkeit. Dadurch kann der Wind kurzzeitig deutlich gröbere Körner in eine saltierende Bewegung befördern und damit wegwehen. So wird die oben beschriebene Schutzschicht mit dem Sandbett vermischt und die zuvor immobilen Körner werden vom Wind weggetragen. Der Wind kann nun den aus feinen Körnern bestehenden Körper des Megarippels wegtransportieren und er wird abgetragen. Das Verschwinden des Megarippels ist dem Entstehungsprozess nicht unähnlich - der Mechanismus läuft umgekehrt ab, außer dass er sich auf deutlich kürzerer Zeitskala abspielt. Während Dünen und Rippel gegenüber Windschwankungen beständig sind, sind Megarippel deutlich anfälliger dafür. Wenn man deshalb Messungen an diesen vornimmt, so wird man immer einen „historischen Charakter“ vorfinden. Sie könnten deshalb gewissermaßen die vorherrschende Windgeschwindigkeit in sich gespeichert haben, da sie nur in einem recht konstanten Windfenster wie oben beschrieben überleben können.¹⁸

¹⁶s. Quelle Tholen u. a., “Megaripple mechanics: bimodal transport ingrained in bimodal sands”, S.3

¹⁷s. Quelle Lämmel u. a., “Aeolian sand sorting and megaripple formation”, S.761

¹⁸s. Quelle Löfken, *Megarippel Wachsen Wie Dünen*

5 Numerische Modellierung der Entstehung und Entwicklung von Megarippeln unter Berücksichtigung variabler Anfangszustände

5.1 Allgemeines zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen

Viele Differentialgleichungen sind kaum oder gar nicht analytisch lösbar, unter anderem auch die Sandsortierungsgleichung (s. Formel 4.0.1). Deshalb besteht die Notwendigkeit für numerische Näherungsverfahren, wobei im Folgenden das Euler-Verfahren angewandt und erläutert wird. Bei diesem existiert ein linear steigender numerischer Fehler, da die Schrittweite zwischen zwei Funktionswerten festgelegt werden muss und nicht unendlich klein werden kann. Daraus ergibt sich eine Näherung für die Ableitung mit der Schrittweite h , die dem Abstand zweier Listenwerte mit dem Index i entspricht:¹⁹

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \frac{f[i+1] - f[i]}{h} \quad (5.1.1)$$

Um alle Funktionswerte numerisch berechnen zu können, braucht es einen Anfangswert $f[0]$, welcher durch die jeweilige Problemstellung gegeben ist oder analytisch berechnet werden muss. Umgestellt nach $f[i+1]$ erhält man

$$f[i+1] = f[i] + h \cdot \frac{d}{dx_i}(f(x_i)), \quad (5.1.2)$$

wobei die Ableitung $\frac{d}{dx_i}(f(x_i))$ der Sandsortierungsgleichung entspricht. Das heißt, für jeden Lösungsansatz entstehen unterschiedliche Entwicklungen, wobei sich auf die nicht-erweiterte Form mit Erosion der Sandkörner durch Windeinfluss beschränkt wird.

5.2 Numerische Implementierung und Analyse der Sandsortierungsgleichung

Sämtliche Programme nutzen die lizenzenfreien Module „Numpy“, „Matplotlib“ und „Scipy“, um effiziente Methoden für die Berechnung und Darstellung verschiedenster Probleme einsetzen zu können.²⁰ Hierbei wurde die Top-down-Programmierung in Python angewendet, das heißt der Algorithmus besteht aus Methoden für allgemeine Parameter, auf die spezielle Werte angewendet werden.²¹ Startparameter sind der Erwartungswert EX , welcher bedingt durch die logarithmische Normalverteilung in μ und die Standardabweichung DX in σ (s. Anhang, S. 24, Formel 12.0.3 und 12.0.4) umgerechnet wird. Außerdem soll der Einfluss des Windes auf die Verteilung modelliert werden, welcher mit einer bestimmten Frequenz f sinusförmig oszilliert, die Stärke r hat sowie Korngrößen bis zu $a_{\tau,0}$ mit einer Streuung von $a_{\tau,s}$ erodiert. Dabei soll der Wind N -mal bei einer Schrittweite der Korngrößen von $h = 0,01\text{mm}$ und einer Schrittweite der Zeit $\Delta t = 0,4\text{s}$ oszillieren. Des Weiteren wird eine minimale Korngröße $a_{min} = 0,01\text{mm}$, eine maximale Korngröße a_{max} in Millimetern und eine maximale Zeit $t_{max} = \frac{200 \cdot N}{f}$ in Sekunden angenommen, damit der Algorithmus terminiert und eine möglichst große Zeitspanne mit feinen Schrittweiten gewährleistet wird. Da die Iteration zur Problemlösung verwendet wird, müssen noch die Rechenschritte für alle Korngrößen $n_a = \frac{a_{max}}{h}$ und jene für alle Zeitschritte $n_t = \frac{t_{max}}{\Delta t}$ Ausgangsgrößen sein. Hierbei wird $N = 50$ als konstant angenommen, damit der Wind immer gleich oft oszilliert und die Ergebnisse nicht verfälscht werden. Mit dem Faktor 200 bei der Zeit und 50 für die Anzahl der Durchläufe gelang es, fast immer Ergebnisse mit günstigen Bedingungen zu erzielen, das heißt die Korngrößenverteilung hat sich an die jeweiligen Veränderungen angepasst und es liegen zwischen einem und drei Hochpunkten vor. Alle anderen Parameter können in physikalisch sinnvollen Grenzen variiert werden.

¹⁹s. Quelle Högel, *Explizites Euler-Verfahren*

²⁰s. Quelle VanderPlas, *Python data science handbook : essential tools for working with data*

²¹s. Quelle Willemer, *Top-Down*

Als Basis für die Sandsortierung wird ein zweidimensionales Array $\phi_s(a, t)$ genutzt, das die zeitliche und räumliche Entwicklung der Korngrößenverteilung an der Oberfläche des Sandbettes beschreibt. Die Ausgangsverteilung $\phi_s(a)$ zur Zeit $t = 0$ entspricht der logarithmischen Normalverteilung in den Grenzen von der Korngröße a_{min} bis a_{max} .

Für die Lösung der Sandsortierungsgleichung ist auch eine Erosionsfunktion notwendig, welche hier als zweidimensionales Array $R(a, t)$ dargestellt wird. Die größte erodierte Korngröße a_τ an einem Zeitpunkt t hat den Wert

$$a_\tau(t) = a_{\tau,0} + a_{\tau,s} \cdot \sin \left(N \cdot \frac{2\pi}{t_{max}} \cdot t \right), \quad (5.2.1)$$

was in die Erosionsfunktion (s. Formel 4.0.2) eingesetzt wird.

Als Korngrößenverteilung des Bodens wird eine logarithmische Normalverteilung mit μ und σ definiert.²²

$$\phi_b(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot a} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (5.2.2)$$

Die Bedeutung der logarithmischen Normalverteilung wird an einem Vergleich mit der Gauß'schen Normalverteilung deutlich.

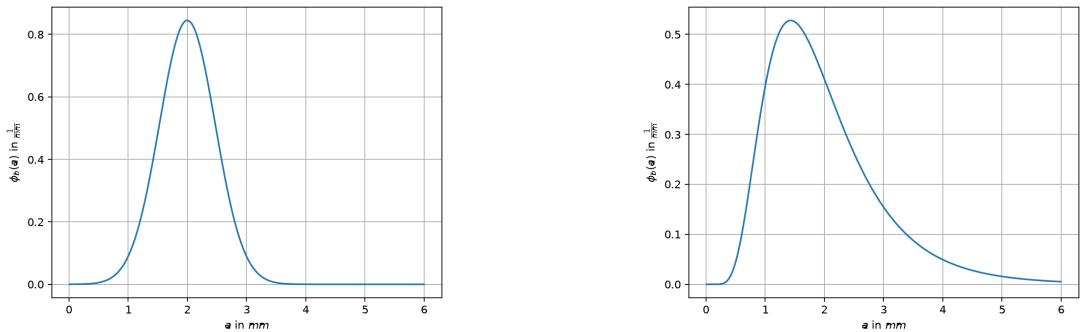


Abbildung 5: Gauß'sche Normalverteilung (links) und logarithmische Normalverteilung (rechts) mit $\mu = 2, \sigma = 1$

Hierbei sind die wichtigsten Unterschiede einerseits die größere Breite der logarithmischen Normalverteilung und andererseits deren Assymmetrie. Außerdem wird bei dieser der Erwartungswert EX durch μ und σ bestimmt, wodurch er in obigem Fall links von 2 liegt. Erklären lässt sich dies durch die langsamere Abnahme der Wahrscheinlichkeit mit steigender Korngröße, sodass μ nicht mehr dem Median entspricht. Diese Eigenschaften ermöglichen eine genauere Darstellung von Korngrößenverteilungen von Feldmessungen aus der Natur, wodurch die logarithmische der Gauß'schen Normalverteilung bevorzugt wird.²³

Als Initialzustand wird $\phi_b(a) = \phi_s(a, t = 0s)$ festgelegt. Um den zeitlichen Verlauf der Korngrößenverteilung an der Oberfläche berechnen zu können, iteriert das Programm jene Funktion über zwei for-Schleifen, welche in jedem Zeitschritt jeder Korngröße einen neuen Wert zuweisen. Hierbei ist es wichtig, zuerst die mittlere Erosion $\langle R(a) \rangle_s$ rekursiv zu berechnen und danach erst die neue Korngrößenverteilung, da $\langle R(a) \rangle_s$ für alle Korngrößen in einem Zeitschritt gleich groß ist und mit diesem Wert auch die gesamte neue Korngrößenverteilung an einem Zeitpunkt berechnet wird.

²²s. Quelle Walz, *Lognormalverteilung*

²³s. Quelle Tholen u. a., "Megaripple mechanics: bimodal transport ingrain in bimodal sands"

Somit ergibt sich folgendes Struktogramm für die numerische Implementierung der Sandsortierungs-gleichung:

Für jeden Zeitschritt tue:		
Für jedes Korn tue:		
	$\langle R(a) \rangle_{s,neu} = \langle R(a) \rangle_{s,alt} + R(a, t) \cdot \phi_s(a, t) \cdot h$	
Für jedes Korn tue:		
	$\phi_s(a + h, t) = \phi_s(a, t) + \Delta t \cdot [-R(a, t) \cdot \phi_s(a, t) + \langle R(a) \rangle_{s,neu} \cdot \phi_b(a)]$	
	$S_{neu} = S_{alt} + \phi_s(a + h, t) \cdot h$	
Für jedes Korn tue:		
	$\phi_s(a + h, t) = \phi_s(a + h, t) + \frac{1-S}{a_{max}}$	

Die Notwendigkeit der dritten for-Schleife ist durch das Euler-Verfahren bedingt, womit ein linearer, über die Zeit ansteigender numerischer Fehler entsteht. Dieser wird mithilfe eines Terms S beschrieben, welcher in jedem Zeitschritt anfangs den Wert 0 zugeschrieben bekommt und der wie ein Integral die Fläche unter der Funktion der Korngrößenverteilung berechnet.

S ist im Optimalfall gleich 1, hier entsteht aber ein Fehler Δs , wodurch $S = 1 \pm \Delta s$ beträgt. Damit wird die Korngrößenverteilung nach jedem Zeitschritt so normiert, dass die Gesamtfläche am Ende exakt 1 entspricht:

$$\sum_{a_{min}}^{a_{max}} (\phi_s(a, t) \cdot h) = 1 \quad (5.2.3)$$

Dieser Algorithmus funktioniert, was ersichtlich wird, wenn man die Entwicklung von $\phi_s(a, t)$ grafisch mit Literaturwerten vergleicht (s. Anhang, S. 25, Abb. 8 und vergleichend Abb. 7).

Aus $\phi_s(a, t)$ lassen sich nun mit der Methode `find_peaks` von Scipy²⁴ die Hochpunkte der Verteilung ermitteln, wobei jeder Zeitschritt als einzelne Funktion betrachtet wird. Als heuristische Parameter wurden `prominence` = 0,001 und `width` = 4 festgelegt, das heißt die 4 Werte jeweils vor und nach dem Hochpunkt müssen sich um mindestens 0,001 von dessen Basislinie unterscheiden. Dabei wird jedem Maximum ein Intervall zugewiesen, das entweder durch ein höheres Extremum oder den Rand des Definitionsbereiches begrenzt ist. Anschließend werden jeweils links und rechts vom Hochpunkt die niedrigsten Punkte in diesem Intervall identifiziert, wobei der höhere y-Wert als Basis des Maximums dient. Nun ist die Differenz Δy von der Höhe des Extremums und der Basis gleich `prominence`, womit $\Delta y = y_2 - y_1 = \text{prominence}$ gilt.²⁵ Damit ist es möglich, kleine Maxima zuverlässig herauszufiltern und größere, deutlich sichtbare Hochpunkte zu erkennen (s. Anhang, S. 26, Abb. 9)

Außerdem gibt es zwei wesentliche Kriterien, um zu überprüfen, ob sich eine Korngrößenverteilung im Gleichgewicht befindet oder nicht. Dies ist der Fall, wenn die gleiche Anzahl an Maxima an den Zeitpunkten t_1 und t_2 , welche genau eine volle zeitliche Periode der Oszillation des Windes auseinanderliegen, vorliegt sowie wenn jedes Hochpunkte-Paar nicht mehr als zehn numerische Stellen auseinander liegt. Dabei ist der Wert 10 heuristisch festgelegt, wobei ab diesem Abstand zwei unterschiedliche Extrema zu erkennen sind. Mit der Periodendauer des Windes T wurden $t_1 = 49 \cdot T$ und $t_2 = 50 \cdot T$ gewählt, da sich ein stabiles Gleichgewicht erst ab etwa 50 Durchläufen einstellt.

²⁴s. Quelle VanderPlas, *Python data science handbook : essential tools for working with data*

²⁵s. Quelle Pulliam, *Quickly finding peaks in mass spectrometry data using Scipy*

Die Hochpunkte werden durch die Maxima-Funktion $M(\phi, t)$ beschrieben, welche die Anzahl der Hochpunkte für eine Korngrößenverteilung an einem bestimmten Zeitpunkt zurückgibt. Für Verteilungen im Gleichgewicht gelten somit folgende Beziehungen:

$$|M(\phi_s, t_1)| = |M(\phi_s, t_2)| \quad (5.2.4)$$

$$\forall_{1 \leq k \leq N} |M_k(\phi_s, t_1) - M_k(\phi_s, t_2)| \leq 10 \quad (5.2.5)$$

5.3 Empirische Überprüfung der numerischen Ergebnisse

Um die numerischen Ergebnisse qualitativ analysieren zu können, müssen Beziehungen zwischen den Startparametern und deren Einfluss auf die zeitliche Entwicklung von Megarippeln hergeleitet werden. Damit können „günstige“ von „ungünstigen“ Bedingungen unterschieden und zusätzlich zum Gleichgewicht (s. Formel 5.2.4 und 5.2.5) festgelegt werden, da der Sandsortierungsvorgang bei manchen Grundzuständen an physikalische Grenzen gerät und somit keine zuverlässigen Ergebnisse liefert. Betrachtet werden hierbei eine Obergrenze für $a_{\tau,s}$, das heißt wie groß die Windfluktuationen werden dürfen sowie ein Mindestmaß für den Abstand zweier Maxima zueinander. Auf Grundlage dieser Ideen wurden folgende Beziehungen empirisch ermittelt:

$$a_{\tau,s} < |a_{\tau,0} - EX| \cdot 0,7 \quad (5.3.1)$$

$$EX + DX < a_{\tau,0} - a_{\tau,s} \quad (5.3.2)$$

Formel 5.3.1 gilt, da $|a_{\tau,0} - EX|$ den Abstand zwischen dem ersten und dem zweiten Maximum angibt. Dementsprechend muss $a_{\tau,s}$ kleiner als dieser Abstand sein, wobei der Faktor 0,7 eine hinreichende Näherung für die Untergrenze des Abstands zweier nicht-überlappender Extrema darstellt. Formel 5.3.2 gilt, da das Intervall $[EX - DX, EX + DX]$ näherungsweise den Einflussbereich des ersten Hochpunktes und das Intervall $[a_{\tau,0} - a_{\tau,s}, a_{\tau,0} + a_{\tau,s}]$ den Bereich des zweiten Maximums beschreibt. Damit sich diese nicht überlappen und keine unerwünschten Ergebnisse entstehen, müssen die obigen Ungleichungen gelten (s. Anhang 26, Abb. 10).

Außerdem ist es wichtig, eine Vorhersage für die Stelle der Hochpunkte zu treffen, da bei zu großer Abweichung von den günstigen Bedingungen zu komplexe physikalische Vorgänge stattfinden, welche daher im Folgenden nicht berücksichtigt werden. Da die Erosionsfunktion (s. Formel 4.0.2) monoton fallend ist, werden kleinere Sandkörner schneller als höhere Korngrößen erodiert, womit das erste Maximum bedingt durch die logarithmische Normalverteilung bei $a = EX$ verschoben wird. Jedoch ist dieser Effekt in den meisten Fällen sehr gering, wodurch diese Stelle eine hinreichende Näherung für die tatsächliche Position des Extremums darstellt. Des Weiteren entstehen ein zweiter und dritter Hochpunkt bei sinusförmiger Oszillation des Windes, da die Änderung dieser Funktion um deren Maxima am kleinsten ist. Entsprechend sind jene Extrema bei $a_{2,3} = a_{\tau,0} \pm a_{\tau,s}$ zu erwarten, wobei auch diese Werte nicht exakt mit den tatsächlichen Stellen übereinstimmen, jedoch nur eine sehr kleine Abweichung entsteht. Dementsprechend gilt näherungsweise für eine Korngrößenverteilung mit drei Hochpunkten:

$$a_1 \approx EX$$

$$a_2 \approx a_{\tau,0} - a_{\tau,s}$$

$$a_3 \approx a_{\tau,0} + a_{\tau,s}$$

Bei unterschiedlichen Bedingungen formen sich diese drei Maxima unterschiedlich stark aus, weshalb ein, zwei oder drei Hochpunkte gezählt werden können.

6 Quantifizierung der Reaktion auf Windänderung

Aus der numerischen Simulation erhält man, wie bereits beschrieben, die Anzahl der Maxima der verschiedenen Korngrößenverteilungen. Diese Maxima liefern nun Aussagen über eine weitere Größe, welche die für den Megarippel typische Sandsortierung maßgeblich beschreibt. Die sogenannte „Anpassungszeit“ (T_r , s. Glossar, S. 19) ist eine Zeit, die beschreibt, wie lange eine Sandsortierung braucht, um sich bestimmten Bedingungen, primär dem Einflussfaktor der Fluktuation der Windstärke, anzupassen. Dies erkennt man immer daran, wenn nur ein Maximum erreicht wurde, da die Sortierung des Megarippels in der Regel nicht die nötige Zeit hatte, sich den Änderungen der Windstärke anzupassen. Es konnte demnach keine entsprechende Sandsortierung und der sich daraus eventuell entwickelnde Megarippel gebildet werden. Ebenfalls filtert man die Ergebnisse heraus, die mehr als drei Maxima ergeben, da das verwendete Methode dabei oft schon winzige Erhebungen als Maxima ansieht, obwohl diese als spezifische Sandsortierung für den Megarippel angesehen werden können. Diese wurden dann als gültige Sandsortierung mit drei Maxima ergänzt. Die für den Megarippel spezifische Korngrößenverteilung war demnach bei zwei Maxima gegeben und somit beschreibt die Grenze des Übergangs von zwei zu drei Maxima die benötigte Anpassungszeit, also welche Voraussetzungen gegeben sein müssen, um mit entsprechender Schwankung der Windstärke einen Megarippel bilden zu können. Dabei spielen folgende Parameter eine Rolle und beeinflussen die Anpassungszeit ebenso wie die Frequenz des Windes:

Definition	Parameterbezeichnung	Einheit
Standardabweichung	DX	m
Erwartungswert	EX	m
maximal noch erodierbare Korndurchmesser	$a_{\tau,0}$	m
Amplitude der Oszillation um die Korngröße	$a_{\tau,s}$	m
Skalierungsfaktor für die Stärke der Erosionsrate	r	$\frac{1}{s^2}$

Der Parameter r wird im Folgenden dabei als $\sqrt{r} = r'$ (s. Formel 4.0.2) mit der Einheit $\frac{1}{s}$ gehandhabt. So ändern sich bei variablen Startparametern die Grenzen der Übergänge von zwei zu drei Maxima. Dies lässt sich dann ebenfalls in einem Phasenraum darstellen. Dieser umfasst sämtliche potentielle Zustände eines dynamischen Systems. Jeder Zustand ist durch einen Punkt eindeutig repräsentiert, wobei in dieser Studie die Anzahl der Maxima diese Punkte ersetzt hat.²⁶ Da man einen höherdimensionalen Phasenraum nicht abbilden kann, beschränkt man sich jeweils auf einzelne Kombinationen von Änderungen der jeweiligen Parameter und Windfrequenzänderungen (s. Glossar, S. 20). Bei verschiedensten Änderungen der einzelnen Parameter und der dazu jeweils sich ändernden Windfrequenz erhält man somit Abbildungen und unterschiedlich scharfe Grenzen zwischen den Bedingungen bzw. Parameterkombinationen, in welchen sich eine für den Megarippel spezifische Sortierung bilden konnte (s. Abbildung 6a).

6.1 Die Methodik der Dimensionsanalyse unter Verwendung des Buckingham-schen Π -Theorems

Um den Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Anpassungszeit zu ermitteln, kann die Methodik der Dimensionsanalyse angewandt werden. Diese mathematische Methode erlaubt es, das Zusammenspiel physikalischer Größen zu verstehen, ohne die zugrundeliegende Formel oder genaue Gesetzmäßigkeiten eines physikalischen Vorgangs oder Naturphänomens zu kennen, was auf den

²⁶s. Quelle Nolte, “The tangled tale of phase space”

Fall der speziellen Sandsortierung des Megarippels zutreffend ist.²⁷ Das Vorgehen bei dieser Dimensionsanalyse ist die Gestaltung einer dimensionsgebunden Formel, welche die Anpassungszeit in Abhängigkeit von allen Parametern beschreibt.

$$T_r = f(EX, DX, a_{\tau,0}, a_{\tau,s}, r') \quad (6.1.1)$$

Nun muss man diese Gleichung in eine dimensionslose Formel umwandeln, was nach der Aussage der Dimensionsanalyse immer möglich sein muss, um zu bewerkstelligen, dass die Dimensionsmatrix (s. Glossar, S. 19) nicht unvollständig oder falsch ist. Damit müssen beide Seiten einheitenfrei sein. Jedoch fällt intuitiv auf, dass die Zeit T_r nur mit dem Parameter r' multipliziert werden kann, da dieser der einzige Wert mit der Einheit $\frac{1}{s}$ ist. Somit entfällt dieser aus der Funktion. Des Weiteren sind alle Einheiten der Größen auf der rechten Seite in Metern angegeben und somit bietet es sich an, durch eine dieser Größen zu teilen, um die Formel dimensionslos zu gestalten. Hierfür wurde $a_{\tau,0}$ gewählt.

$$T_r \cdot r' = G \left(\frac{EX}{a_{\tau,0}}, \frac{DX}{a_{\tau,0}}, \frac{a_{\tau,s}}{a_{\tau,0}} \right) \quad (6.1.2)$$

Das Resultat sind nun einzelne dimensionslose Funktionsterme oder auch Buckinghamsche- Π -Faktoren in der Funktion.²⁸ Diese lassen sich ebenfalls durch ein Grundgrößensystem beschreiben. Es beinhaltet als Ersatz für die messbaren Basisgrößen (SI-Einheiten) die Dimensionen, hier L statt Meter (m) für die Länge.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (EX)^1 \cdot (a_{\tau,0})^{-1} \\ \Pi_2 &= (DX)^1 \cdot (a_{\tau,0})^{-1} \\ \Pi_3 &= (a_{\tau,s})^1 \cdot (a_{\tau,0})^{-1} \end{aligned}$$

$$[\Pi_{1,2,3}] = L^1 \cdot L^{-1} = 1$$

Daraus ergibt sich:

$$T_r \cdot r' = G(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) \quad (6.1.3)$$

Somit erhält man eine Dimensionsfunktion G , die aus einzelnen dimensionslosen und somit einheitenlosen Termen besteht. Beide Seiten können als Π -Faktor dargestellt werden, aber in diesem Fall ist eine Trennung sinnvoller. Zudem sieht man hierbei die besondere Stellung von r' . Damit ist der Skalierungsfaktor r' eine Art intrinsischer Parameter, da er als einziger die Einheit Sekunde (s) in sich trägt und deshalb direkten Einfluss auf die Anpassungszeit hat. Aufgrund dessen soll dieser als erster Parameter genauer untersucht werden.

²⁷s. Quelle Misic, Najdanovic-Lukic und Nesić, "Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem"; Görtler, *Dimensionsanalyse: Theorie der physikalischen Dimensionen mit Anwendungen*

²⁸s. Quelle Misic, Najdanovic-Lukic und Nesić, "Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem"; Buckingham, "On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations"

6.2 Bestimmung des Einflusses einzelner Parameter

6.2.1 Direkter Einfluss des Skalierungsfaktors r

Im Phasenraum für den Parameter r ergibt sich, wie nachfolgend schematisch zu erkennen, eine scharfe Grenze:

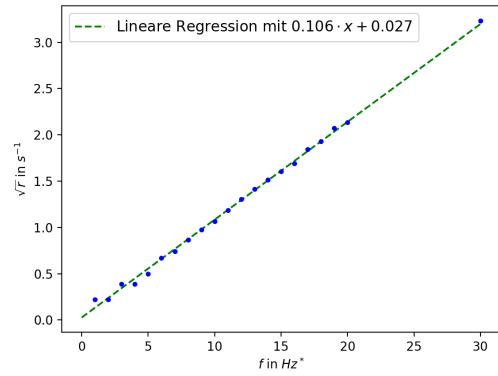
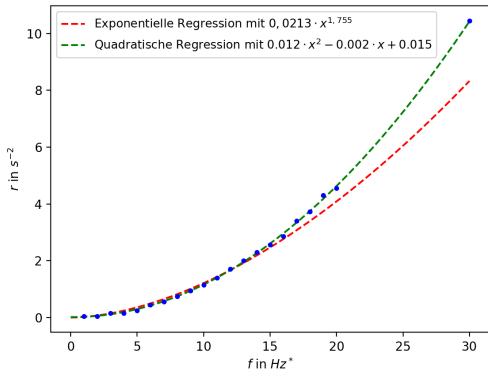
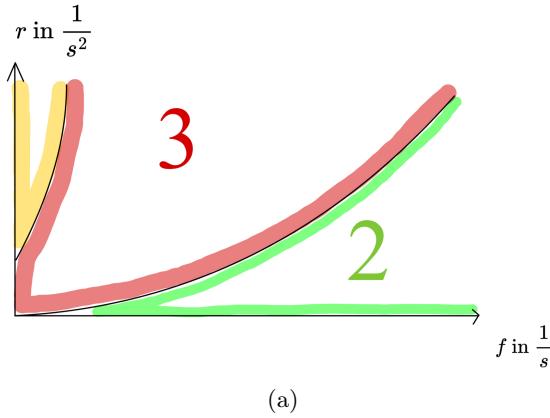


Abbildung 6: Schematischer Phasenraum von r , der gelbe Bereich befindet sich nicht im Gleichgewicht (6a), für den konkreten Phasenraum s. Anhang 29, Abb. 15; quadratische und Potenzregression (6b), man beachte das Wertepaar ganz rechts; lineare Regression (6c)

Entlang dieser Grenze können nun Wertepaare erfasst werden: zum einem der Wert von r , bei dem der Übergang stattfindet und zum anderen die dazu korrespondierende Frequenz. Der konkrete r -Wert für den Übergang ergibt sich, indem der Mittelwert zwischen dem gerade noch 2-Maxima-Wert und dem gerade schon 3-Maxima-Wert genommen wird. Durch diese Wertepaare kann nun eine Regressionsfunktion gelegt werden. Zuerst wurde eine Potenzregression der Form $h(x) = a \cdot x^b$ und danach eine quadratische Regression der Form $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ angelegt. Man erkennt, dass die quadratische Funktion besser zu passen scheint, da die Potenzfunktion mit zu flachem Anstieg verläuft. Um diese Hypothese zu überprüfen, wurde für eine deutliche höhere Frequenz der r -Wert ermittelt. Es zeigt sich, dass dieses Wertepaar fast genau auf der quadratischen Funktion liegt und eindeutig von der Potenzfunktion abweicht (s. Abbildung 6b). Allerdings geht r mit einer Wurzel in die Erosionsfunktion ein (s. Formel 4.0.2). Wird deshalb nun die Wurzelfunktion auf die ermittelten r -Werte angewandt, kann sich nur eine lineare Funktion als Regressionsfunktion ergeben (s. Abbildung 6c). Diese lineare Funktion bestätigt die numerische Methodik und das Vorgehen, da

in der Dimensionsanalyse r als einziger Parameter mit einer Zeitskala eingeht. Die Anpassungszeit T_r mit der Einheit s und $r' = \sqrt{r}$ mit der Einheit $1/s$ müssen direkt miteinander verknüpft sein, damit sich die Einheiten aufheben und Dimensionslosigkeit auf beiden Seiten entsteht (s. Kapitel 6.1). Die angewendete Vorgehensweise wird weiterhin bestätigt, da r über drei Größenordnungen variiert wurde (von $10^{-2} \frac{1}{s^2}$ bis $10^1 \frac{1}{s^2}$).

6.2.2 Essentieller Einfluss der Windfluktuation

Um überhaupt einen Megarippel mit drei Maxima zu erzeugen, benötigt man ein $a_{\tau,s}$ ungleich 0. Andernfalls erhält man eine zeitunabhängige Erosionsfunktion und es werden sich immer nur ein oder zwei Maxima in der Korngrößenverteilung bilden. Die Möglichkeit für einen dritten Hochpunkt existiert nicht, da immer bis der gleichen Stelle erodiert wird. Somit zeigt sich im Phasenraum für ein variables $a_{\tau,s}$ eine sehr scharfe Grenze für die Entstehung von drei Maxima von links nach rechts kommend, also von kleinen nach großen Werten für $a_{\tau,s}$. Links dieser Grenze sind die zwei entstehenden Hochpunkte so nah beieinander, dass man keine zwei Spitzen erkennen kann und ein verwaschenes Maximum (s. Anhang, S. 26, Abb. 10) zustande kommt. Erst mit genügend großem $a_{\tau,s}$ sind die beiden Maxima so weit auseinander, dass sie sich nicht mehr gegenseitig überlagern und beeinflussen sowie getrennt wahrgenommen werden können. Das geschieht ab einem $a_{\tau,s}/a_{\tau,0}$ von ca. 0.5/3. Auf der rechten Seite des drei-Hochpunkte-Bereichs ergibt sich auch eine recht klare Grenze, wobei mit steigendem $a_{\tau,s}$ eine niedrigere Frequenz für drei Maxima benötigt wird und sich damit der Megarippel schlechter anpassen kann. Vergleicht man diesen Phasenraum mit dem von $a_{\tau,0}$ (s. Anhang, S. 27, Abb. 11 und Anhang S. 27, Abb. 12), so fallen einige Gemeinsamkeiten bei der qualitativen Betrachtung auf: Beide Phasenräume verhalten sich ähnlich, da $a_{\tau,s}$ a_{τ} beeinflusst. Mit steigendem $a_{\tau,s}$ ergibt sich für den am längsten Zeit zur Formation benötigten dritten Hochpunkt ein höheres a_{τ} , wofür der Megarippel länger braucht, um darauf zu reagieren und sich zu formieren. Diese Korrelation ist zwar vermutlich nicht linear, allerdings ist sie vorhanden und somit prägt $a_{\tau,s}$ großteils $a_{\tau,0}$ mit. Aus Gründen der Einfachheit wird $a_{\tau,s}$ bei den weiteren Untersuchungen ignoriert.

6.2.3 Einfluss restlicher Parameter

Aus den Phasenräumen aller weiteren Parameter kann keine Funktion entnommen werden, da sie zu zerfasert sind. Deutlich wird das am Phasenraum für den Erwartungswert EX (s. Anhang, S. 28, Abb. 13). Hier ist keine Grenze zu erkennen, welcher Wertepaare zu entnehmen wären. Bleibt man beim Beispiel EX , so wäre vom physikalischen Standpunkt zu erwarten, dass sich bei steigendem EX/a_{τ} der Megarippel besser anpassen kann. Dann sind mehr grobe Körner im Boden vorhanden, wodurch diese schneller freigelegt werden und eine schützende Schicht bilden können. Der Megarippel sollte somit auf höhere Frequenzen reagieren können, allerdings sieht man so eine Grenze nur lokal begrenzt (von 1,4mm bis 1,6mm). Gleichzeitig gibt es einige andere Grenzen, bei denen mit steigender Frequenz ein niedrigeres EX einhergeht. Beides führt dazu, dass die physikalische Hypothese nicht von der Simulation bestätigt wurde und keine empirische Formel für EX gefunden werden kann. Daraus ergibt sich die Frage, welche Grenze regressiert werden sollte, da das kleine Intervall mit wenigen Datenwerten eine verlässliche Regression nicht ermöglicht. Ein ähnliches Szenario ergibt sich auch für die Parameter $a_{\tau,0}$ und DX (s. Anhang, S. 27, Abb. 12 und Anhang S. 28, Abb. 14). Somit kann allgemein keine empirische Formel für die Anpassungszeit bestimmt werden.

6.2.4 Bestimmung des dominanten Kontrollparameters

Da keine empirische Formel gefunden werden konnte, soll als abschließender Schritt noch überprüft werden, ob stattdessen ein dominanter Kontrollparameter existiert. In den bisherigen Phasenräumen ergab sich immer eine zusammenhängende Region, in der drei Maxima entstanden sind. Diese war

jeweils recht scharf begrenzt und im Folgenden soll das normierte Intervall dargestellt werden, für welche Parameterwerte sich drei Maxima ergaben. Wenn ein dominanter Kontrollparameter vorliegt, so sollte dieser die Intervalle bestimmen, indem die konkreten Intervallgrenzen für den potentiellen Kontrollparameter mit denen für $a_{\tau,0}$ übereinstimmen. Durch $a_{\tau,0}$ wird in Formel 6.1.2 jeder Parameter normiert, weshalb bei Veränderung von $a_{\tau,0}$ auch gleichzeitig alle anderen Verhältnisse verändert werden. Bei Übereinstimmung würde dies bedeuten, dass das Verhältnis mit dem Kontrollparameter dominiert. Als solche kommen nur noch EX , DX und $a_{\tau,0}$ in Frage, da r schon eingehend untersucht wurde (s. Kapitel 6.2.1) und $a_{\tau,s}$ aus Gründen der Einfachheit nicht betrachtet wird (s. Kapitel 6.2.2). Die Ergebnisse ergaben sich wie folgt:

veränderter Parameter	DX	EX
konstant gehaltener Parameter	$a_{\tau,0} = 3\text{mm}$, $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$, $r = 1\frac{1}{s^2}$, $EX = 1\text{mm}$	$a_{\tau,0} = 3\text{mm}$, $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$, $r = 1\frac{1}{s^2}$, $DX = 0,5\text{mm}$
Bereich, in dem drei Maxima entstehen	0,3mm bis 0,6mm	0,5mm bis 1,7mm
normierte Intervallgrenzen	$\frac{DX_{\leftarrow}}{a_{\tau,0}} \approx \frac{0,3\text{mm}}{3\text{mm}} \approx 0,1$ bis $\frac{DX_{\rightarrow}}{a_{\tau,0}} \approx \frac{0,6\text{mm}}{3\text{mm}} \approx 0,2$	$\frac{EX_{\leftarrow}}{a_{\tau,0}} \approx \frac{0,5\text{mm}}{3\text{mm}} \approx 0,17$ bis $\frac{EX_{\rightarrow}}{a_{\tau,0}} \approx \frac{1,7\text{mm}}{3\text{mm}} \approx 0,57$
konkreter Phasenraum	s. Anhang S. 28, Abb. 14	s. Anhang S. 28, Abb. 13

veränderter Parameter	$a_{\tau,0}$	
konstant gehaltener Parameter	$DX = 0,5\text{mm}$, $EX = 1\text{mm}$, $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$, $r = 1\frac{1}{s^2}$	$EX = 1\text{mm}$, $DX = 0,5\text{mm}$, $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$, $r = 1\frac{1}{s^2}$
Bereich, in dem drei Maxima entstehen	2,2mm bis 5,5mm	
normierte Intervallgrenzen	$\frac{DX}{a_{\tau,0,\rightarrow}} \approx \frac{0,5\text{mm}}{5\text{mm}} = 0,1$ bis $\frac{DX}{a_{\tau,0,\leftarrow}} \approx \frac{0,5\text{mm}}{2,2\text{mm}} \approx 0,23$	$\frac{EX}{a_{\tau,0,\rightarrow}} \approx \frac{1\text{mm}}{5\text{mm}} = 0,2$ bis $\frac{EX}{a_{\tau,0,\leftarrow}} \approx \frac{1\text{mm}}{2,2\text{mm}} \approx 0,46$
konkreter Phasenraum	s. Anhang S. 27, Abb. 12	s. Anhang S. 27, Abb. 12

Wie in der Tabelle aufgeführt, zeigt sich, dass die Intervalle für jeden Parameter in einer Spalte gut übereinstimmen und kein Kontrollparameter bestimmt werden kann, der den Prozess dominiert. Um endgültig zu bestimmen, ob kein Kontrollparameter vorhanden ist, muss die Methodik verändert werden. Bisher wurden die konstanten Parameter so gewählt, dass die Größe förderlich für drei Maxima war. Deshalb wurden nun die Extremfälle untersucht. Hierbei wurde zuerst das Verhältnis $DX/a_{\tau,0}$ gegen 0 geführt, indem DX gegen 0 strebte. Grafisch gesprochen nähert sich hier die logarithmische Normalverteilung einem sehr dünnen Streifen beim Erwartungswert an. Das ist physikalisch ungünstig für den Megarippel, da eine schmale Verteilung schlechter auf den Wind reagiert.²⁹ Statt guten Bedingungen für die Anpassungen befindet sich der Megarippel nun in einem ungünstigen Gebiet. Währenddessen wurde das Verhältnis $EX/a_{\tau,0}$ so groß variiert, dass es sehr groß wurde, nämlich gegen $30/3 = 10$. Bei diesem Phasenraum (s. Anhang, S. 31, Abb. 19) entstand

²⁹s. Quelle Lämmel u. a., “Aeolian sand sorting and megaripple formation”, S. 761

bei keinem Wertepaar mehr als ein Hochpunkt, d.h. es besteht gar nicht die Möglichkeit, dass bei dieser Sortierung ein Megarippel sich formiert und anpassen kann. Andersherum wurde bei einem weiteren Phasenraum $EX/a_{\tau,0}$ auf einen kleinen Wert von $0,25/3 \approx 0,08$ gesetzt, das heißt das Verhältnis sehr klein gewählt. Das ist schlecht für den Megarippel, da hier nun fast nur feine Körner vorliegen, also es sehr lange dauert, bis sich die groben Körner für die schützende Schicht akkumulieren können. Gleichzeitig wurde $DX/a_{\tau,0}$ gegen einen großen Wert geführt, nämlich $10/3 \approx 3,33$, was wiederum sehr günstig für einen Megarippel ist. Bei allen Wertepaaren entstand immer nur ein Maximum . Allerdings befindet sich man sich hier aufgrund eines großen DX fast immer in ungünstigen Bedingungen, weshalb die Ergebnisse möglicherweise weniger aussagekräftig sind (s. Anhang, S. 29, Abb. 16).

Weiterhin besteht die Frage, was passiert, wenn sowohl DX als auch EX gegen Werte geführt werden, die beide ungünstig für den Megarippel sind. Hierbei wurde $DX/a_{\tau,0}$ auf $0,1/3$ gesetzt, nun aber auch $EX/a_{\tau,0}$ gegen $0,1/3$ geführt. Wie erwartbar, ergibt sich bei solch doppelt ungünstigen Bedingungen nirgendwo ein Megarippel (s. Anhang, S. 30, Abb. 18). Bei einem weiteren Phasenraum wurde $EX/a_{\tau,0}$ konstant auf $0,25/3$ gesetzt, während $DX/a_{\tau,0}$ gegen $0,1/3$ strebte. Entgegen der Erwartungen ergab sich eine recht stabile Region mit zwei Maxima und sogar bei einigen Wertepaaren drei Hochpunkte (s. Anhang, S. 30, Abb. 17).

Somit gibt es keinen dominanten Kontrollparameter, alle Parameter scheinen ca. den gleichen, starken Einfluss auf die Entstehung von drei Maxima zu besitzen.

7 Aufstellen eines Kriteriums zur Klassifizierung von Megarippeln auf der Erde

Zur Anwendung der Ergebnisse wird im Folgenden ein Kriterium aufgestellt, mithilfe dessen abgeschätzt werden kann, ob ein Megarippel bei bestimmten Windfluktuationen noch mit einer klassischen bimodalen Korngrößenverteilung charakterisiert werden kann. In den Phasenräumen wurde nur der Frequenzbereich von $1Hz^*$ (s. Glossar, S. 19) bis $15Hz^*$ untersucht, da oberhalb einer Frequenz von $15Hz^*$ keine drei Maxima vorkamen und folglich keine Grenze entstand (mit Ausnahme von r , für die besondere Rolle s. Kapitel 6.2.1). In der Natur treten Windböen mit einer durchschnittlichen Zeitspanne von drei Sekunden auf³⁰ und dauern typischerweise nicht länger als 20 Sekunden an.³¹ Bei einer Böe nimmt die Windgeschwindigkeit bis zu einem bestimmten Wert zu, um dann wieder auf die Durchschnittsgeschwindigkeit abzufallen. Dieser Vorgang ist nicht grundlegend verschieden von der angewandten Modellierung, wobei hier der Wert der Windgeschwindigkeit periodisch schwankt. In der verwendeten Heuristik gilt $Hz^* = \frac{1}{200s}$, womit sich bei einer angenommenen Periodisierung von durchschnittlich 3s langen Böen eine Frequenz von ca. $67Hz^*$ ergibt.

Das ergänzt die Vorhersage, dass Megarippel eine bimodale Korngrößenverteilung aufweisen. Für maximal 20s lange Böen ergibt sich eine Frequenz von $10Hz^*$. Wenn die Böen also etwas länger dauern, so teilt sich die Sortierung in drei Maxima, anstatt verweht zu werden, denn eine Frequenz $15Hz^*$ ergibt längere Böen von ca. 13s. Damit kann nun das Kriterium aufgestellt werden: Megarippel können oberhalb einer Windfluktuation von ca. 13s nicht mehr durch die klassische bimodale Korngrößenverteilung charakterisiert werden, sondern es muss berücksichtigt werden, dass drei Maxima entstehen. Hierdurch können typische Böendauern in bestimmten Regionen nachgeschlagen und so im Voraus abgeschätzt werden, nach welchen speziellen Korngrößen im Feld Ausschau gehalten werden muss, um Megarippel nachzuweisen.

³⁰s. Quelle Lombardo, "History of the peak three-second gust"

³¹s. Quelle Suomi und Vihma, "Wind gust measurement techniques—From traditional anemometry to new possibilities", S.14

8 Zusammenfassung

In dieser Seminarfacharbeit konnte die eingangs formulierte Zielstellung einer numerischen Simulation von Sandsortierungsvorgängen auf Grundlage eines selbst erarbeiteten theoretischen Fundaments erreicht werden, wobei der besondere Fokus auf den Megarippel als Sonderform der Sandstrukturen berücksichtigt wurde. Hierbei war es möglich, die Sandsortierungsgleichung in einem sinnvollen physikalischen Rahmen auf ihre zeitliche Entwicklung angesichts variabler Startbedingungen gründlichst zu überprüfen und daraus fundierte Ergebnisse abzuleiten. Diese Modellierung konnte mit Literaturwerten verglichen werden, um die numerische Herangehensweise zu bestätigen. Jedoch war es nicht möglich, eine für einen großen Bereich gültige empirische Formel für die Abhängigkeit der Anpassungszeit einer Korngrößenverteilung von allen Startparametern zu finden, da sich der gesamte Vorgang der Sandsortierung als sehr komplex und umfangreich herausgestellt hat. Somit könnte die Arbeit mit einer noch tiefgründigeren Analyse und unter Berücksichtigung der erweiterten Sandsortierungsgleichung weitergeführt werden. Damit bestünde die Möglichkeit einer Untersuchung des Einflusses der Deposition von Sand ab einer bestimmten Korngröße. Mit dieser Erweiterung könnte die Breite der Maxima untersucht und gegebenenfalls von einer bekannten Verteilung auf Windgeschwindigkeiten in der Vergangenheit geschlossen werden.

Des Weiteren konnte kein dominanter Kontrollparameter für die zeitliche Entwicklung von Sandsortierungsvorgängen gefunden werden, wodurch alle Startparameter gleichberechtigt sind. Dementsprechend wurden zwei negative Ergebnisse erzielt, nämlich die Abwesenheit einer allgemeingültigen empirischen Formel für die zeitliche Entwicklung einer Korngrößenverteilung und das Fehlen eines Startparameters, der wesentlich einflussreicher als alle anderen ist.

Insgesamt dient diese Arbeit der Vermittlung von Sortierungsprozessen und Megarippeln an Forschende, wobei als wesentliches Ergebnis festgestellt wurde, dass kein Startparameter bei der zeitlichen Entwicklung einer Korngrößenverteilung ignoriert werden kann. Zudem wurden wesentliche Kriterien und konkrete Werte für jene Parameter ermittelt, mit denen es möglich ist, den Gleichgewichtszustand der Verteilung auf ein, zwei oder drei Maxima festzulegen. Des Weiteren konnte abgeschätzt werden, unter welchen Windbedingungen Megarippel wie viele Maxima ausbilden und ob deren Korngrößenverteilung stabil ist. Sind also die Windverhältnisse in einem Gebiet bekannt, so können Forscher mit diesen Ergebnissen schnell bestimmen, ob eine klassische bimodale Verteilung zu erwarten ist, oder auch bei anderen Verteilungen ein Megarippel vorliegen könnte.

Im Rahmen der Seminarfacharbeit war es für die gesamte Gruppe möglich, Kenntnisse in numerischer Physik sowie weiterführenden Themen der Mathematik und Physik zu vertiefen. Außerdem ist es gelungen, mit wissenschaftlichen Veröffentlichungen effizienter zu arbeiten sowie diese schneller zu analysieren. Somit konnten auch die sekundären Ziele erreicht werden: Zusammen mit der Projektarbeit aus der zehnten Klasse eine wissenschaftliche Zusammenfassung von Sandsortierungsvorgängen zu schaffen sowie sich auf spätere Forschungsarbeiten mit deren Methodik und Analytik vorzubereiten. Die Arbeit in der Gruppe war von positivem und produktivem Klima geprägt. So war es möglich, jede Woche gemeinsam zu arbeiten und in ständigem aktiven Austausch mit Außen- und Fachbetreuern zu stehen.

9 Glossar

DX

entspricht der Standardabweichung bei einer logarithmischen Normalverteilung (s. Anhang S. 24, Formel 12.0.3).

EX

entspricht dem Erwartungswert bei einer logarithmischen Normalverteilung (s. Anhang S. 24, Formel 12.0.3).

*Hz**

ist eine heuristische Einheit für die Frequenz, wobei $1\text{Hz}^* = \frac{1}{200\text{s}}$ gilt.

$a_{\tau,0}$

ist der maximal noch erodierbare Korndurchmesser.

$a_{\tau,s}$

entspricht der Amplitude der Oszillation um die Korngröße, welche gerade noch erodierbar ist.

r

ist ein Skalierungsfaktor für die Stärke der Erosionsrate.

aeolisch

bedeutet winderzeugt.

Anpassungszeit

ist die Zeit T_r , welche beschreibt, wie lange allgemein ein physikalischer Prozess (hier: die Sandsortierung) braucht, um sich bestimmten Bedingungen, dabei primär dem Einflussfaktor der Fluktuation der Windstärke, anzupassen.

ballistisch

ist eine nahezu ideale Wurfparabel mit kleinen Abweichungen durch den Luftwiderstand.

bimodal

beschreibt die Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, zwei Maxima zu besitzen.

Dimensionsmatrix

beschreibt alle Dimensionen, Größen oder Einheiten, welche einem bestimmten System angehören.

Heaviside-Funktion

ordnet Werten kleiner als 0 den Wert 0 und Werten größer oder gleich 0 den Wert 1 zu. Auch Stufenfunktion genannt.

Korngrößenverteilung

beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte der Sandkörner in Abhängigkeit von ihrem Durchmesser in einem Sandbett.

Lee

ist die dem Wind abgewandte Seite eines Objektes.

Luv

ist die dem Wind zugewandte Seite eines Objektes.

Megarippel

sind mittlere Sandstrukturen zwischen Rippel und Düne mit einer charakteristischen, bimodalen Korngrößenverteilung.

Proxy-Variable

beschreibt eine Messgröße, mithilfe derer man sich mittelbar Auskunft über eine andere Größe verschafft.

Reptation

beschreibt eine Art des Kriechens der größeren Sandkörner, ausgelöst durch Saltationsvorgänge.

Rippel

sind wenige Zentimeter große, winderzeugte, wellenartige Oberflächenstrukturen, welche in dieser Arbeit als Teil eines sandigen Sediments betrachtet werden.

Saltation

beschreibt die ballistischen Flugbahnen, die Sandkörner durch den Wind zurücklegen.

Sandsortierung

ist ein dynamischer Prozess, nämlich die zeitliche Veränderung der Korngrößenverteilung. Sie wird durch die Sandsortierungsgleichung beschrieben (s. Formel 4.0.1).

Windfrequenzänderung

beschreibt die Änderungsrate der Frequenz eines oszillierenden Windes.

Windscherspannung

ist eine physikalische Größe und beschreibt die Scherung, also eine Kraft pro Fläche, die durch Wind an einem Körper tangential verursacht wird.

10 Literatur- und Quellenverzeichnis

Internetquellen

- Högel, Bianca. *Explizites Euler-Verfahren*. Juli 2021. URL: https://www.biancahoegel.de/mathematik/verfahr/euler-verfahren_explizit.html (besucht am 18.12.2023).
- Löfken, Jan Oliver. *Megarippel Wachsen Wie Dünen*. Apr. 2018. URL: <https://www.weltderphysik.de/gebiet/erde/nachrichten/2018/megarippel-wachsen-wie-duenen/> (besucht am 06.12.2023).
- Pulliam, Christopher. *Quickly finding peaks in mass spectrometry data using Scipy*. Apr. 2023. URL: <https://medium.com/@chrisjpulliam/quickly-finding-peaks-in-mass-spectrometry-data-using-scipy-fcf3999c5057> (besucht am 19.12.2023).
- Walz, Prof. Dr. Guido. *Lognormalverteilung*. 2017. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/lognormalverteilung/6046> (besucht am 15.12.2023).
- Willemer, Arnold. *Top-Down*. 2020. URL: <http://www.willemer.de/informatik/cpp/topdown.htm> (besucht am 18.12.2023).

Literaturquellen

- Bagnold, Ralph Alger. *The physics of blown sand and desert dunes*. Courier Corporation, 2012.
- Buckingham, E. "On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations". In: *Phys. Rev.* 4 (4 Okt. 1914), S. 345–376. DOI: 10.1103/PhysRev.4.345. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.4.345>.
- Görtler, H. *Dimensionsanalyse: Theorie der physikalischen Dimensionen mit Anwendungen*. Ingenieurwissenschaftliche Bibliothek Engineering Science Library. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 9783642808739. URL: <https://books.google.de/books?id=KNeHMAEACAAJ>.
- Katra, Itzhak und Hezi Yizhaq. "Intensity and degree of segregation in bimodal and multimodal grain size distributions". In: *Aeolian research* 27 (2017), S. 23–34.
- Lämmel, Marc u. a. "Aeolian sand sorting and megaripple formation". In: *Nature Physics* 14.7 (2018), S. 759–765.
- Lombardo, Franklin T. "History of the peak three-second gust". In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 208 (2021), S. 104447. ISSN: 0167-6105. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2020.104447>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167610520303573>.
- Misic, Tatjana, Marina Najdanovic-Lukic und Ljubisa Nesic. "Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem". In: *European Journal of Physics* 31.4 (2010), S. 893–906.
- Nolte, David D. "The tangled tale of phase space". In: *Physics Today* 63.4 (Apr. 2010), S. 33–38. ISSN: 0031-9228. DOI: 10.1063/1.3397041. eprint: https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/63/4/33/16686921/33_1_online.pdf. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3397041>.
- Parteli, Eric. "Wind in den Dünen". In: *Fortschritte der Physik* 66.7 (2018), S. 18–19. DOI: 10.1002/prop.201870049.
- Sauermann, Gerd, Klaus Kroy und Hans J Herrmann. "Continuum saltation model for sand dunes". In: *Physical Review E* 64.3 (2001), S. 031305.
- Suomi, Irene und Timo Vihma. "Wind gust measurement techniques—From traditional anemometry to new possibilities". In: *Sensors* 18.4 (2018), S. 1300.
- Tholen, Katharina u. a. "Megaripple mechanics: bimodal transport ingrained in bimodal sands". In: *Nature communications* 13.1 (2022), S. 162.
- VanderPlas, Jake. *Python data science handbook : essential tools for working with data*. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc, 2016. ISBN: 978-1491912058.

11 Abbildungsverzeichnis

- [1] Abbildung 1: Susann Huster. Versteckte Ordnung im verwehten Sand. Jan. 2022 URL: <https://www.physees.unileipzig.de/fakultaet/neuigkeiten/newsdetails/artikel/versteckte-ordnung-im-verwehten-sand-2022-01-10-1> [besucht am 05.12.2023]
- [2] Abbildung 2: Ulrich Stegger und Klaus Kruse. Bodenerosion durch Wind. URL: https://www.bgr.bund.de/DE/Themen/Boden/Ressourcenbewertung/Bodenerosion/Wind/BodenerosionWind_node.html [besucht am 05.12.2023]
- [3] Abbildung 3: Rebecca Hahn. Wunder aus Sand und Physik. Sep. 2018. URL: <https://www.faz.net/aktuell/wissen/duenen-wunder-aus-sand-und-physik-15767702.html> [besucht am 05.12.2023]
- [4] Abbildung 4: Katra, Itzhak and Hezi Yizhaq: Intensity and degree of segregation in bimodal and multimodal grain size distributions, in: Aeolian research, 27, 2017, S. 26.
- [5] Abbildung 5: eigene Darstellung
- [6] Abbildung 6: eigene Darstellung
- [7] Abbildung 7: Lämmel, Marc, et al. [,Aeolian sand sorting and megaripple formation.“] Nature Physics 14.7 (2018): S.761
- [8] Abbildung 8, 9: eigene Darstellung
- [9] Abbildung 10: Thomas Schmid, [,Chromatographie verstehen “], ETH Zürich, URL: https://www.analytik.ethz.ch/vorlesungen/biopharm/Trennmethoden/AnalytischeChemie_Skript_2_Grundlagen.pdf, S. 31 [besucht am 15.12.2023]
- [10] Abbildung 11 bis 19: eigene Darstellung

12 Anhang

Herleitung der Formeln für die Parameter μ und σ der logarithmischen Normalverteilung:
Mit den Identitäten für den Erwartungswert EX und die Standardabweichung DX^{32} ergeben sich
zwei Gleichungen, aus denen μ und σ abgeleitet werden.

$$EX = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (12.0.1)$$

$$DX = EX \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \quad (12.0.2)$$

Aus 12.0.2 folgt

$$\begin{aligned} e^{\sigma^2} &= 1 + \left(\frac{DX}{EX} \right)^2 \\ \sigma^2 &= \ln \left(1 + \left(\frac{DX}{EX} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\ln \left(1 + \left(\frac{DX}{EX} \right)^2 \right)} \quad (12.0.3)$$

Einsetzen von 12.0.3 in 12.0.1 ergibt

$$\begin{aligned} EX &= e^{\mu + \frac{\ln \left(1 + \left(\frac{DX}{EX} \right)^2 \right)}{2}} \\ \mu &= \ln (EX) - \frac{\ln \left(1 + \left(\frac{DX}{EX} \right)^2 \right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{EX^4}{EX^2 + DX^2} \right) \\ \mu &= \ln \left(\frac{EX^2}{\sqrt{EX^2 + DX^2}} \right) \end{aligned} \quad (12.0.4)$$

³²s. Quelle Walz, *Lognormalverteilung*

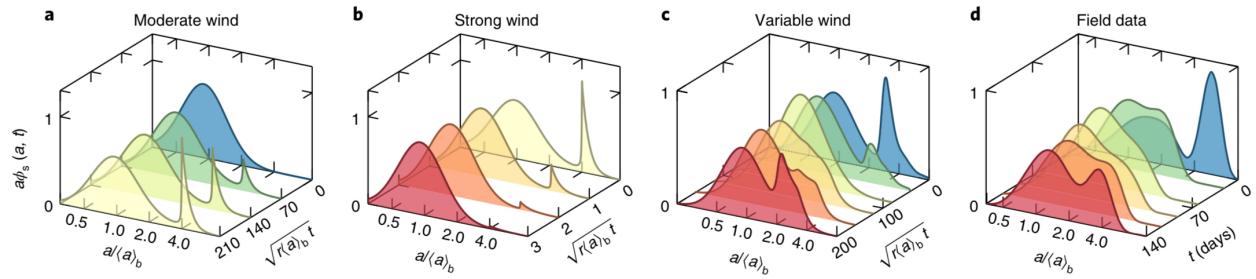


Abbildung 7: Zu starker Wind lässt den Megarippel auf ähnliche Weise abtragen, wie er zuvor entstanden ist (b,a); die numerische Simulation stimmt mit den Felddaten überein (c,d)

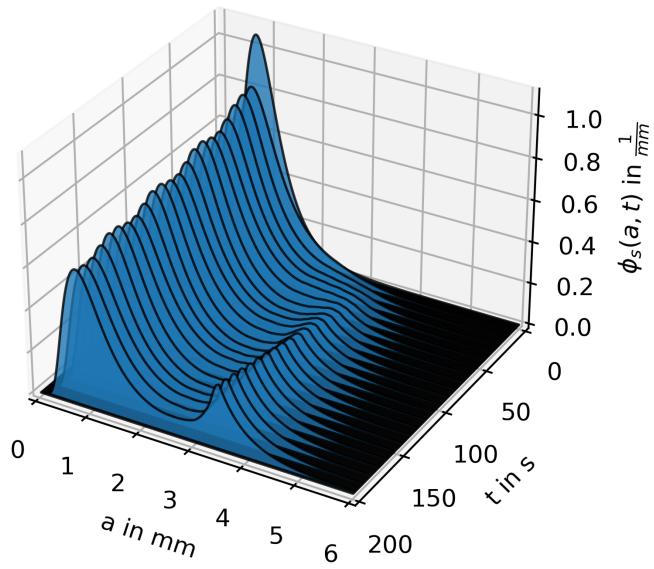


Abbildung 8: Entwicklung der Korngrößenverteilung $\phi_s(a, t)$ über die Zeit mit $DX = 0,5\text{mm}$; $EX = 1\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,5\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $r = 1\frac{1}{s^2}$; $f = 50\text{Hz}^*$; $a_{max} = 6\text{mm}$

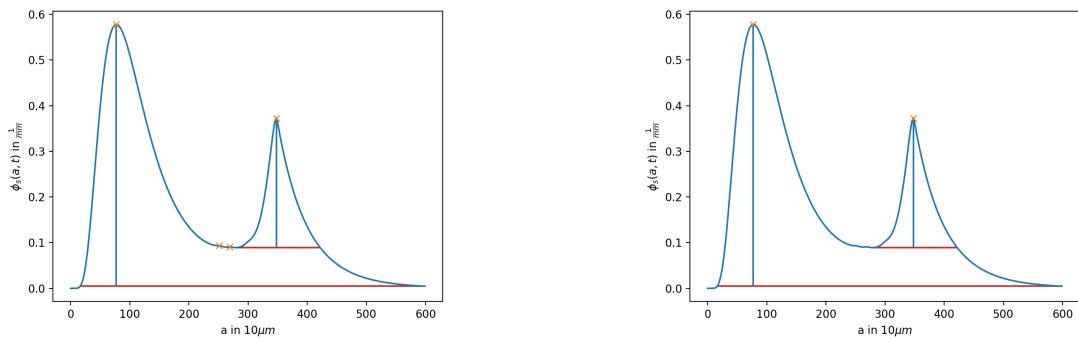


Abbildung 9: Veranschaulichung des Parameters *prominence*; ohne heuristische Werte für *prominence* und *width* werden auch Peaks markiert, welche optisch nicht als solche identifiziert werden würden (links); mit angepassten Werten werden diese herausgefiltert (rechts)

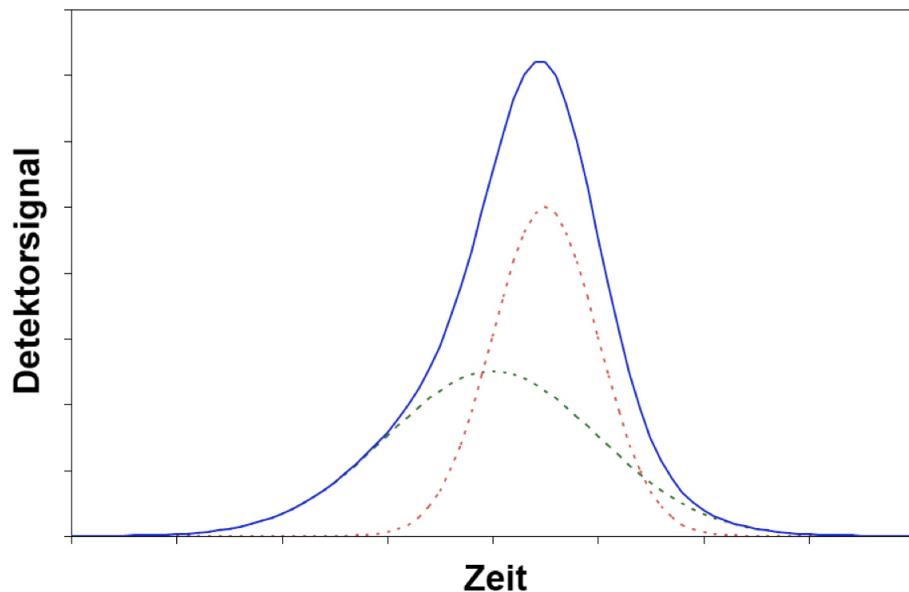


Abbildung 10: Hypothetisches und schematisches Beispiel für verwaschene Maxima, wobei sich zwei Maxima so entwickeln, dass man fälschlicherweise annimmt, dass nur ein Maxima entstanden ist.

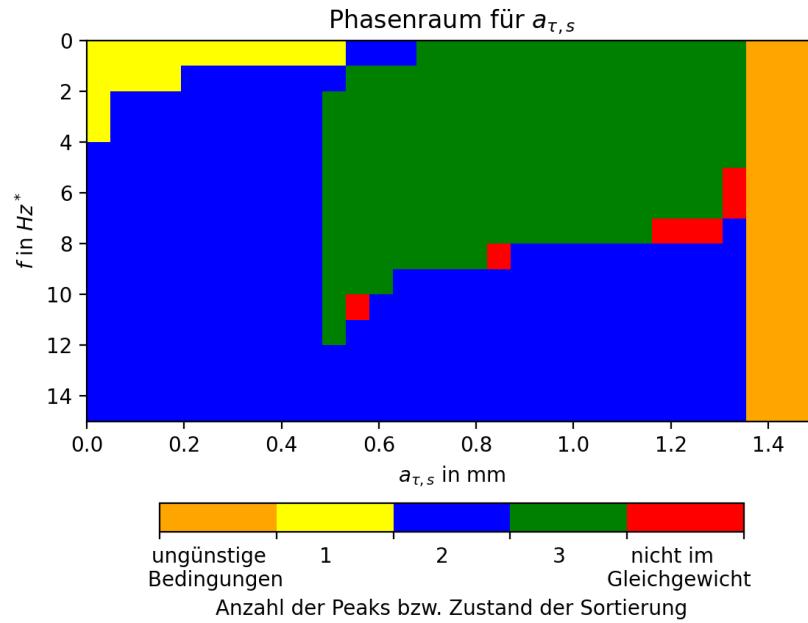


Abbildung 11: Konkreter Phasenraum von $a_{\tau,s}$ mit $DX = 0,5\text{mm}$; $EX = 1\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

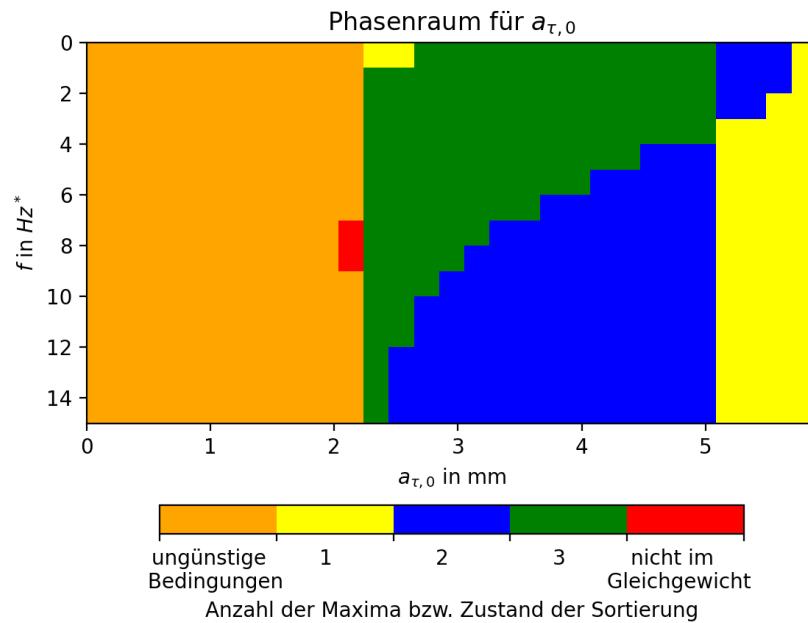


Abbildung 12: Konkreter Phasenraum von $a_{\tau,0}$ mit $DX = 0,5\text{mm}$; $EX = 1\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

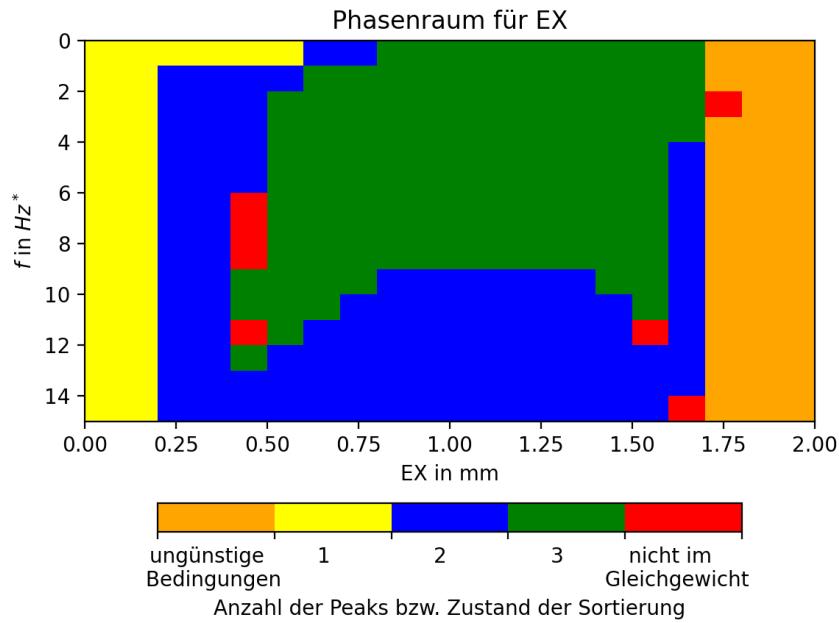


Abbildung 13: Konkreter Phasenraum von EX mit $DX = 0,5\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

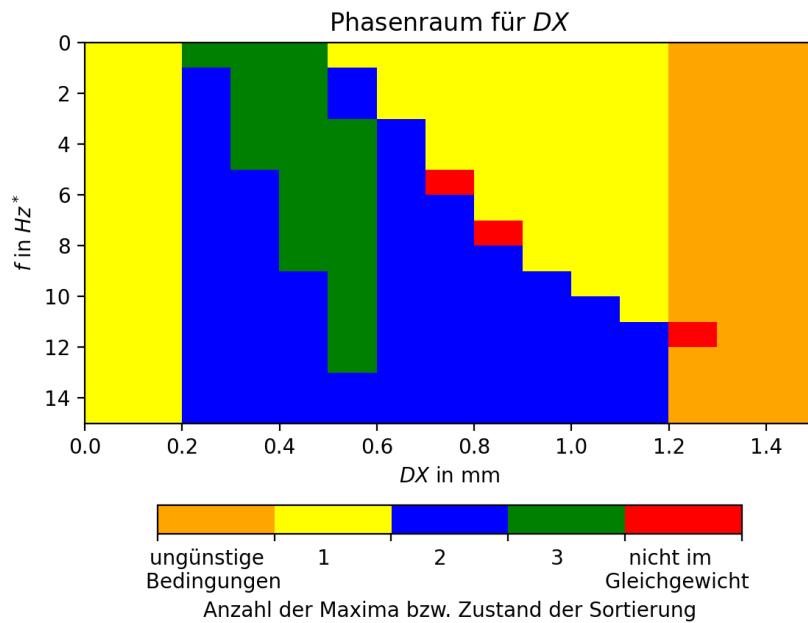


Abbildung 14: Konkreter Phasenraum von EX mit $EX = 1\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

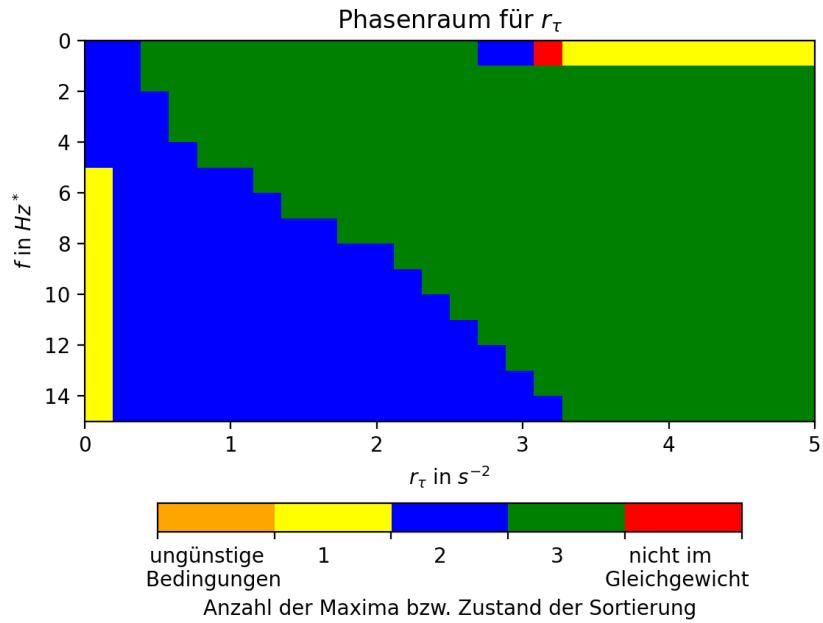


Abbildung 15: Konkreter Phasenraum von r mit $DX = 0,5\text{mm}$; $EX = 0,5\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

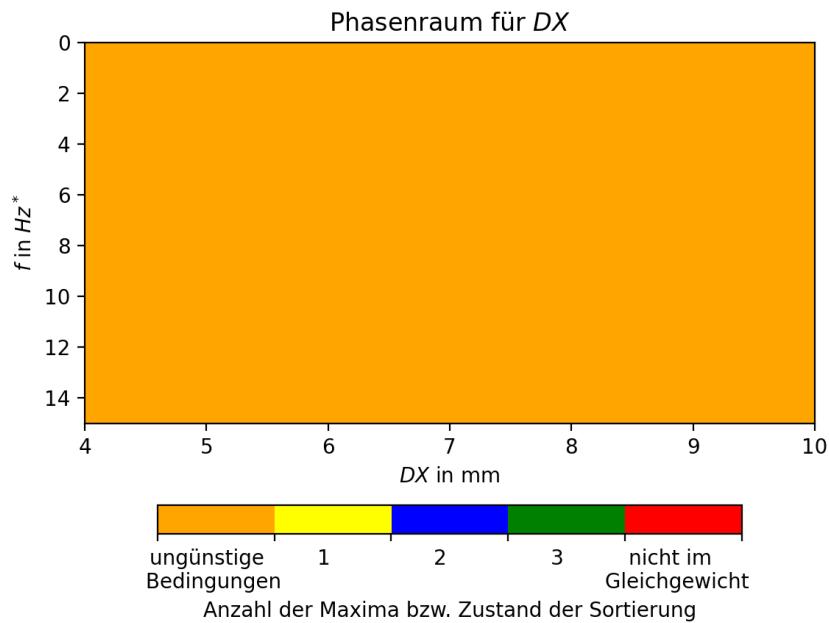


Abbildung 16: Konkreter Phasenraum von DX mit $EX = 0,25\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 15\text{mm}$

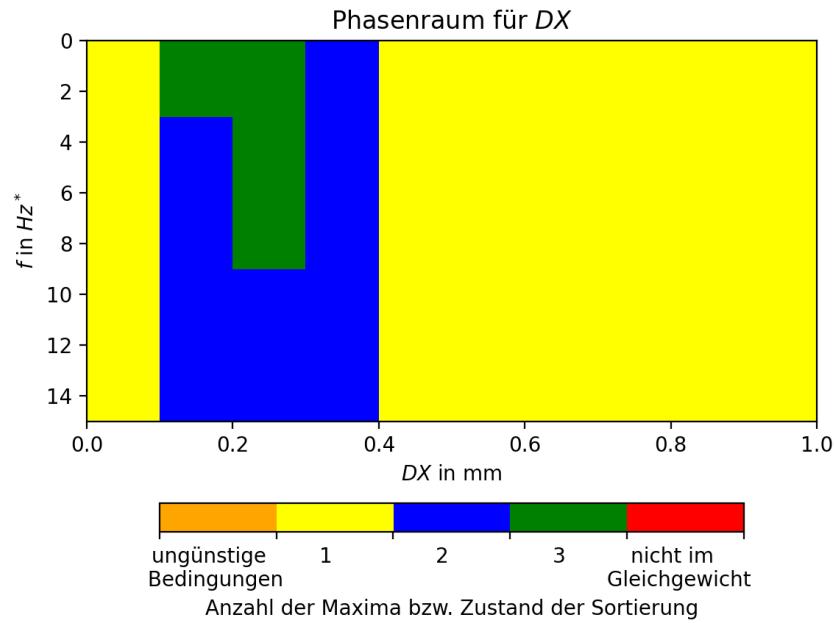


Abbildung 17: Konkreter Phasenraum von DX mit $EX = 0,25\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

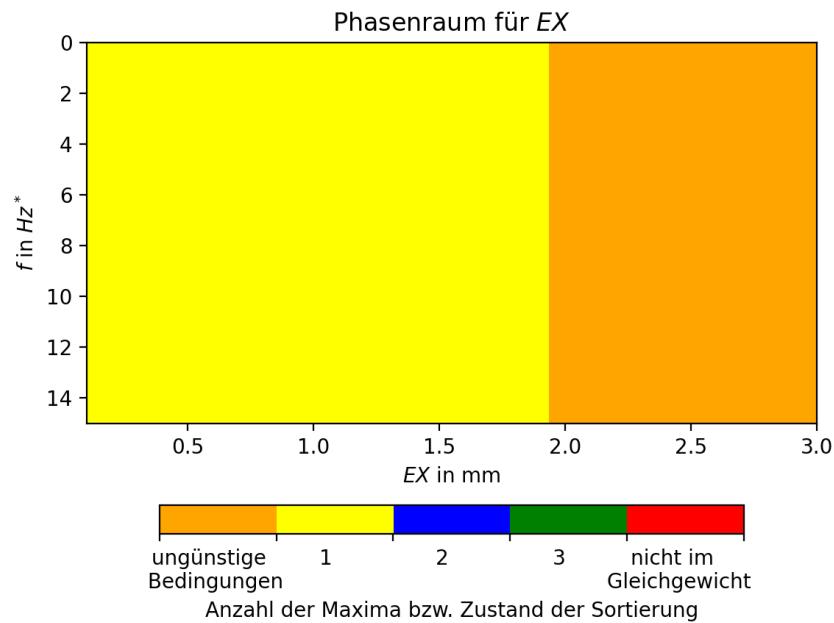


Abbildung 18: Konkreter Phasenraum von EX mit $DX = 0,1\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 6\text{mm}$

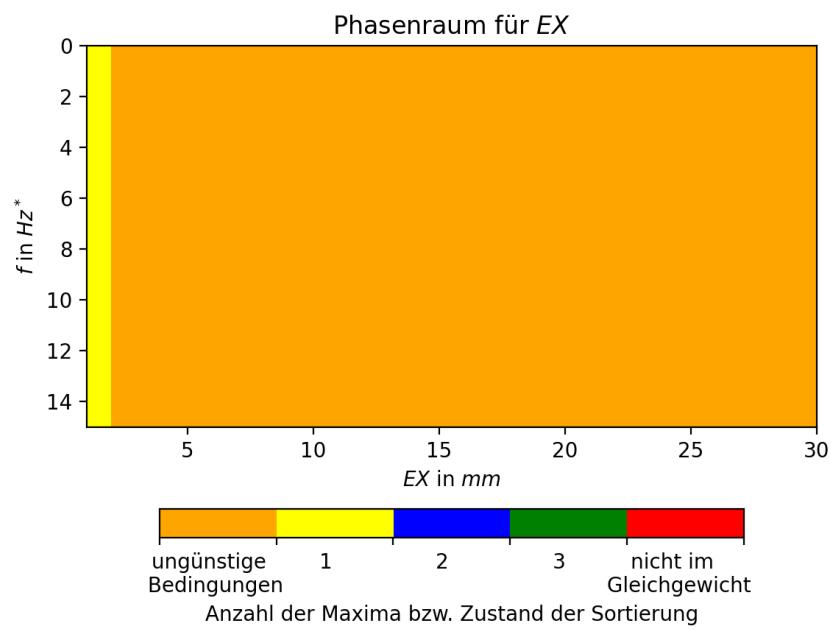


Abbildung 19: Konkreter Phasenraum von EX mit $DX = 0,1\text{mm}$; $a_{\tau,0} = 3\text{mm}$; $a_{\tau,s} = 0,75\text{mm}$; $r = \frac{1}{s^2}$; $a_{max} = 36\text{mm}$

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichern die Unterzeichnenden respektive die Autoren dieser Arbeit eidesstattlich, dass jegliche Inhalte aus eigener Urheberschaft stammen oder unter den angegebenen Quellen zu finden sind. Die aus diesen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Formulierungen und Inhalte sind unter Angabe eines Quellenverweises gekennzeichnet.



Magnus Kirbach (12bs)



Lorenz Osburg (12bs)



Johann Vogel (12as)

Erfurt, 21.12.2023