微积分A(1)期末复习笔记(仅包括下半学期相关内容)，仅供参考。 PDF版本链接

网页较大预警。如果公式解析不正确请刷新页面。长时间加载不出来建议打开PDF用Ctrl+S键下载到本地。流量访问请谨慎。

定理

黎曼积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi) = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

f可积:

IFF $\forall\varepsilon>0, U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon$.

IFF $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

IFF $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i = 0$.

一致连续

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in X,|x-y|<\delta$，都有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则$f$在$X$上一致连续.

f一致连续:

IFF $\forall\{x_n\},\{y_n\},\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，都有$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

L-Lipschitz函数一致连续.

闭区间上连续函数一致连续.

闭区间上连续函数可积.

闭区间上单调函数可积.

有界函数可积当且仅当的间断点集零测度.

积分中值定理

积分第一中值定理：$f \in \mathscr{C}[a,b], \exists \xi \in [a,b], \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

加强积分第一中值定理：
$f \in \mathscr{R}[a,b], f \in \mathscr{C}(a,b), \exists \xi \in (a,b), \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

广义积分第一中值定理：
$f \in \mathscr{C}[a,b], g \in \mathscr{R}[a,b], \exists \xi \in [a,b], \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$.

积分第二中值定理：$f \in \mathscr{R}[a,b]$，g在$[a,b]$上单调，
$\exists \xi \in [a,b], \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x) \, \mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

广义积分收敛性判断

Cauchy判别准则：$\int_a^\omega f(x) \, \mathrm{d}x$收敛：

IFF $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in (a,\omega), \forall A_1, A_2 \in (c,\omega), |\int_{A_1}^{A_2} f(x) \, \mathrm{d}x| < \varepsilon$.

Abel判别准则：$\int_a^\omega f(x) \, \mathrm{d}x$收敛且$g$单调有界则$\int_a^\omega f(x)g(x) \, \mathrm{d}x$收敛.

Dirichlet判别准则：$F(A) = \int_a^A f(x) \, \mathrm{d}x$有界且$g$单调趋于0，则$\int_a^\omega f(x)g(x) \, \mathrm{d}x$收敛.

比较判敛法.

测试函数.

公式

高阶导数公式

1. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha^{\underline{n}} x^{\alpha-n}$.
2. $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$.
3. $(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.
4. $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$，$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

$1 \Rightarrow 3$:

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$[(\ln(1+x))']^{(n-1)} = -1^{\underline{n-1}}(1+x)^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$2 \Rightarrow 4$:

$$\cos^{(n)}(x)+i\sin^{(n)}(x)=(\cos x+i\sin x)^{(n)}=(e^{ix})^{(n)}=$$
$$i^n e^{ix}=(e^{\frac{i\pi}{2}})^n e^{ix}=e^{i(x+\frac{n\pi}{2})}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})+i\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$(\lambda f+\mu g)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}$$
$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

常用泰勒展开

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\dots$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$
$$\ln(\frac{1}{1-x})=x+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots$$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$$

变限积分求导

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$$

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x,\varphi(x))\varphi'(x)-f(x,\psi(x))\psi'(x)+\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t$$

定积分与数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{n,k})=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

不等式

均值不等式:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

Young不等式($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$):

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y$$

Holder不等式($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

积分Cauchy不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

积分Holder不等式($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$):

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x)|^q\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

积分Jensen不等式(φ为凸函数):

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\ \mathrm{d}x$$

积分Minkowski不等式($p>1$):

$$\left(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

几何图形计算

直角坐标系下面积(矩形逼近):

$$S = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$

极坐标系下面积(扇形逼近):

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\ \mathrm{d}\theta$$

参数方程面积:

若$x(t)$单调，反函数$t(x)$存在，$a=x(\alpha)$，$b=x(\beta)$，则：

$$S=\int_a^b |y(t(x))| \, \mathrm{d}x \overset{x=x(t)}{=} \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)| \, \mathrm{d}t$$

直角坐标系弧长：

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} \, \mathrm{d}t$$

极坐标系弧长：

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)} \, \mathrm{d}\theta$$

参数方程曲线弧长：

$$L=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} \, \mathrm{d}t$$

曲线的曲率：$\kappa=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}L}$．曲线的曲率半径$R=\frac{1}{\kappa}$

参数方程曲线曲率：

$$\kappa=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}L}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\right|=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

直角坐标系曲线曲率：

$$\kappa=\frac{|y''(x)|}{(1+y'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

极坐标系曲线曲率：

$$\kappa=\frac{|\rho^2(\theta)+2\rho'^2(\theta)-\rho(\theta)\rho''(\theta)|}{(\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

$y=f(x)$绕x轴旋转体体积：

$$V=\pi\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x$$

$y=f(x)$绕y轴旋转体体积：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\pi(x+\Delta x)^2-\pi x^2)|y(x)|}{\Delta x}=2\pi x|y(x)|=2\pi xf(x)$$

$$V=2\pi\int_a^b |xf(x)|\ \mathrm{d}x$$

极坐标曲线与原点连线所成图形绕极轴旋转体积(一般情况下适用)：

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\ \mathrm{d}\theta$$

$y=f(x)$绕x轴旋转体侧面积微元：$\mathrm{d}S=2\pi|y|\ \mathrm{d}L$.

参数方程旋转体侧面积(x轴)：

$$S=2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{x'^2(y)+y'^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

参数方程旋转体侧面积(y轴)：

$$S=2\pi\int_a^b |x(t)|\sqrt{x'^2(y)+y'^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

直角坐标系旋转体侧面积(x轴)：

$$S=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}\ \mathrm{d}x$$

直角坐标系旋转体侧面积(y轴)：

$$S=2\pi\int_a^b |x|\sqrt{1+y'^2(x)}\ \mathrm{d}x$$

极坐标系旋转体侧面积(x轴)：

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\sin\theta|\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

极坐标系旋转体侧面积(y轴)：

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta |\rho(\theta)\cos\theta|\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

曲线质心：力矩平衡．设线密度μ为常数．则一小段线段的质量为$\mathrm{d}m=\mu\mathrm{d}L$．线段总质量为$m=\int\mu\ \mathrm{d}L$．

沿y轴方向的静力矩为：$M_y=\int x\mu\ \mathrm{d}L$．类似地，$M_x=\int y\mu\ \mathrm{d}L$．

设质心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$，则：

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\int x\mu\ \mathrm{d}L}{\int \mu\ \mathrm{d}L}=\frac{\int x\ \mathrm{d}L}{L}$$

类似地，

$$\bar{y}=\frac{\int y\ \mathrm{d}L}{L}$$

若线密度不为常数，将μ替换为$\mu(x)$即可，此时分子分母积分不再能消去$\mu(x)$．

ODE

直接积分型ODE：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

则直接积分．通解为：

$$y=\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

一阶线性齐次ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

求导后能和自身抵消，猜测函数为$Ce^{f(x)}$形式，解出．通解为：

$$y=Ce^{-\int P(x)\ \mathrm{d}x}$$

注意这里的积分符号表示任意一个原函数，因此积分结果本身不需要$+C$．

一阶线性非齐次ODE：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

常数变易法，猜测函数为$y=C(x)e^{f(x)}$，解出．通解为：

$$y=e^{-\int P(x)\ \mathrm{d}x}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x)$$

分离变量型一阶ODE：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

移项：$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\,\mathrm{d}x$，因此可以直接积分．通解为(隐函数)：

$$\int\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C$$

若存在$g(y_0)=0$，则y_0为该ODE的一个奇解．

ax+by+c型ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$$

若$b=0$，则为直接积分型ODE．通解为：

$$y=\int f(ax+c)\,\mathrm{d}x+C$$

令$u=ax+by+c$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$，为分离变量型ODE．通解为(隐函数)：

$$\int\frac{1}{a+bf(u)}\,\mathrm{d}u=x+C$$

若存在$a+bf(u_0)=0$，则$y=\frac{1}{b}(u_0-ax-c)$为该ODE的一个奇解．

y/x型ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

令$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}ux}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=F(u)$，为分离变量型ODE：$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F(u)-u$．通解为(隐函数)：

$$\int\frac{1}{F(u)-u}\,\mathrm{d}u=\ln|x|+C$$

若存在$F(u_0)-u_0=0$，则$y=u_0x$为该ODE的一个奇解．

x/y型ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{x}{y}\right)$$

令$u=\frac{x}{y}$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}uy}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+u}=F(u)$，为分离变量型ODE：$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{F(u)}-u$. 通解为(隐函数)：

$$\int\frac{1}{\frac{1}{F(u)}-u}\ \mathrm{d}u=\ln|y|+C$$

若存在$\frac{1}{F(u_0)}-u_0=0$，则$y=\frac{1}{u_0}x$为该ODE的一个奇解.

直线交点型ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

若直线$a_1x+b_1y+c_1=0$与$a_2x+b_2y+c_2=0$有唯一交点(x_0,y_0)，则 $X=x-x_0,Y=y-y_0$：

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=F(\frac{Y}{X})$$

否则两直线平行，$a_1b_2=a_2b_1$. 则：

$$f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(k+\frac{c_1-kc_2}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=F\left(a_2x+b_2y+c_2\right)$$

伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$$

若$\alpha=0$则为一阶线性非齐次ODE，若$\alpha=1$则为分离变量型一阶ODE，否则令 $z=y^{1-\alpha}$，则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，为一阶线性非齐次ODE： $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$. 通解为：

$$y=\left(e^{-(1-\alpha)\int p(x)\ \mathrm{d}x}(C+(1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

另外，若$\alpha>0$，$y=0$为该ODE的奇解.

高阶ODE与基本解组

n阶ODE：$y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}a_i(x)y^{(i)}=f(x)$. 对于任意一个柯西初值问题，区间$I$上存在唯一解.

高阶齐次ODE解集为n维线性空间. 可以找到n个线性无关的函数作为基底(基本解组).

Wronsky行列式:

$$W(f_1,f_2,\cdots,f_n)(x)=\det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & f_3^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

> THEOREM
>
> f线性相关 $\Leftrightarrow$ 在区间I上$W(f_1,f_2,\cdots,f_n)(x)\equiv 0$. 且$f$线性无关 $\Leftrightarrow$ 在区间I上$W(f_1,f_2,\cdots,f_n)(x)$恒不为0.

给定一个基本解组，构造以这个基本解组为解的ODE:

$$\det\left(\begin{array}{ccccc|c} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \cdots & f_n(x) & y \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) & \cdots & f_n'(x) & y' \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) & \cdots & f_n''(x) & y'' \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & f_3^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & f_3^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{array}\right)=0$$

高阶积分型ODE

$$y^{(n)}=f(x)$$

求n次原函数.

降阶型ODE

$$y^{(n)}=F(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)})$$

其中$k \geq 1$，则令$p(x) = y^{(k)}(x)$，阶数降低，解出$p(x)$后为高阶积分型ODE，$y(x)$为$p(x)$求k次原函数.

不显含x型二阶ODE

$$F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}) = 0$$

令$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，转换为$F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0$，为分离变量型ODE：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$.

二阶线性齐次ODE

$$y'' + py' + qy = 0$$

求导后能和自身抵消，猜测函数为$e^{\lambda x}$形式，解出$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$. 判别式$\Delta = p^2 - 4q$

若$\Delta > 0$，通解为：$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

若$\Delta = 0$，通解为：$y = (C_1 + C_2x)e^{\lambda} = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$.

若$\Delta < 0$，λ_1, λ_2可能为复数$\alpha \pm \beta i$. 对于一个复值函数解$y(x)$，$u(x) = \mathrm{Re}(x)$和$v(x) = \mathrm{Im(x)}$分别满足：

$$\begin{aligned} u'' + pu' + qu = \mathrm{Re}0 = 0 \\ v'' + pv' + qv = \mathrm{Im}0 = 0 \end{aligned}$$

故复值函数解$y = Ce^{(\alpha+\beta i)x}$可以构造两个实值函数解：

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

可以检验两个解线性无关，则实值通解为：

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$$

事实上，直接考虑复值通解：

$$y = C_1e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)x}$$

当$C_1 = \overline{C_2}$时即可得实值通解.

高阶线性齐次ODE

$$y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}a_iy^{(i)}=f(x)$$

类似于二阶求其特征多项式$P(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i$. 设其有$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$共$k$个特征根，其中$\lambda_i$重数为$m_i$，则其复值通解为：

$$y(x)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=0}^{m_i-1}C_{j,t}\cdot x^te^{\lambda_jx}$$

特殊二阶线性非齐次ODE

$$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\mu x}$$

考虑μ的重数m，假设一个特解$z_0=Q_n(x)x^me^{\mu x}$. 解出$Q_n(x)$后用特解加上其次ODE通解得到非齐次ODE通解.

因此，任意$y''+py'+qy=P_n(x)f(x)$，其中$f(x)=e^{ax}$或$e^{ax}\cos(bx)=\mathrm{Re}(e^{(a+bi)x})$或$e^{ax}\sin(bx)=\mathrm{Im}(e^{(a+bi)x})$都可以解出.

一般二阶线性非齐次ODE

$$y''+py'+qy=f(x)$$

首先求出二阶线性齐次ODE的两个线性无关解y_1,y_2，那么一个特解为：

$$z_0(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{W(y_1,y_2)(t)}f(t)\ \mathrm{d}t$$

此公式一般很难积分计算，因此通常计算上一部分的特殊二阶线性非齐次ODE.

欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^iy^{(i)}=0$$

令$t=\ln|x|$，则：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\\
&= \left(-\frac{1}{x^2}\cdot x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\cdot\frac{1}{x}\\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\\
&= \left(-\frac{2}{x^3}\cdot x\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\right)\cdot\frac{1}{x}\\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}
$$

一阶线性ODEg

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x)+\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j(x) &\quad (i\in\{1,2,\cdots,n\})\\
y_j(x_0)=\xi_j &\quad (j\in\{1,2,\cdots,n\})
\end{aligned}
$$

用向量形式可以表示为：

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}x}=\mathbf{A}(x)\mathbf{Y}+\mathbf{F}(x)
$$

如果该齐次方程存在n个线性无关的解，奇解矩阵为$\mathbf{\Phi}=(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_3,\cdots,\mathbf{Y}_n)$，则通解为$\mathbf{\Phi C}$，其中$\mathbf{C}=(C_1,C_2,C_3,\cdots C_n)^\top$. 一个特解为$\mathbf{Z}(x)=\mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\mathbf{\Phi}(t))^{-1}\mathbf{F}(t)\ \mathrm{d}t$. 因此，原非齐次方程的通解为：

$$
\mathbf{Y}(x)=\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}+\mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\mathbf{\Phi}(t))^{-1}\mathbf{F}(t)\ \mathrm{d}t
$$

如何求$\mathbf{\Phi}$？类比一阶线性齐次ODE，考虑形如$\mathbf{Y}=e^{\lambda x}\mathbf{r}$的形式：若$\mathbf{A}$有$k$个不同的特征值，特征值$\lambda_i$重数为$m_i$，则对于每个$\lambda_i$存在$m_i$个线性无关的解$e^{\lambda_i x}\mathbf{P}_i(x)$，其中$\mathbf{P}_i$为系数为向量的多项式.

向量方程的Wronsky行列式$W(x)=\det(\mathbf{\Phi}(x))$. n个解线性相关当且仅当$W(x)\equiv 0$. 进一步地，可以观察到(对行列式求到即对每一行分别求导后求行列式相加)：

$$
W'(x)=(\det(\mathbf{\Phi}))=-a_{n-1}(x)\det(\mathbf{\Phi})=-a_{n-1}W(x)
$$

故$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_{n-1}(t)\ \mathrm{d}t}$.

事实上，如果令$y_i = y^{(i)}$，一个n阶线性ODE可以表示为一个一阶n元线性ODEg：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} &= y_{i+1} & (i \in \{0, 2, \cdots, n-2\}) \\ \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} &= f(x) - \sum_i a_i(x) y_i \\ y_j(x_0) &= \xi_j & (j \in \{0, 2, \cdots, n-1\}) \end{aligned}$$

求解一阶线性ODEg的常用方法事实上是转为ODE.

技巧

$\ln$求导法

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln |f(x)|)'$$

分部积分

1. 对数函数：$\ln x$，...
2. 反三角函数：$\arcsin x$，$\arctan x$，...
3. 幂函数：x^n，$P(x)$，...
4. 三角函数：$\sin x$，$\cos x$，...
5. 指数函数：e^x，...

上述函数结合时，排名靠前的适合求导，留在原地准备分部积分后求导；排名靠后的适合积分，积分放入d后.

换元

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$$

$$\sqrt{a(x-b)(x-c)} = t(x-b)$$

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

被积函数关于$\sin x$奇函数：$\cos x = t$.

被积函数关于$\cos x$奇函数：$\sin x = t$.

被积函数关于$\sin x$，$\cos x$都为偶函数：$\tan x = t$.

$\sqrt{x^2+a^2}$：$x = a\mathrm{sh}t$或$x = a\tan t$.

$\sqrt{x^2-a^2}$：$x = a\mathrm{ch}t$或$x = \pm a\sec t$.

$\sqrt{a^2-x^2}$：$x = a\sin t$.

三角有理函数积分

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$$

$$\int \frac{-b\sin x + a\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|a\sin x + b\cos x| + C$$

而$a\sin x + b\cos x$与$-b\sin x + a\cos x$线性无关，因此可以求出所有形如下方的积分：

$$\int \frac{c\sin x + d\cos x}{a\sin x + b\cos x}\,\mathrm{d}x$$

鸣谢

感谢何昊天学长的微积分复习讲座(手动@微信公众号:乐学)。

> 扫描二维码即可在手机上查看这篇文章，或者转发二维码来分享这篇文章：