# TP 2 : Évaluation d'actifs financiers

## Techniques Numériques - M2 Actuariat

Armand Bernou armand.bernou@univ-lyon1.fr

**Exercice 1 :** On considère une option européenne portant sur un actif $(S_t)_{t\geq 0}$ de payoff $(S_T - K)_+$, où $T > 0$ est la maturité et $K$ la prime.

La dynamique de l'actif est donnée par le modèle de Black-Scholes :

$$S_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant.

1. A la date $t = 0$, donner le prix (payoff actualisé) de cette option.
2. En utilisant les paramètres suivants : $K = 800$, $S_0 = 1000$, $r = 0 : 05$, $\sigma = 0,2$ $T = 1$, estimer par un schéma d'Euler le prix de l'option. L'estimation sera faite avec $N$ (le nombre de pas dans le schéma) variant de 100 à 10000 et $n = 1000$ (le nombre d'estimation pour la méthode de Monte-Carlo).
3. Même question à l'aide d'un schéma de Milstein. Comparer les variances des deux schémas.
4. Reprenez les deux questions précédentes avec $N = 1000$ et en faisant varier $n$ de 1000 à 5000. Quel paramètre vous paraît impacter le plus l'estimation ?
5. Comparer vos résultats avec une évaluation directe du prix du call donné par la formule de Black-Scholes.

**Exercice 2 : Dépréciation d'actifs financiers sous la norme IFRS.** Il s'agit d'un modèle simplifié de dépréciation d'un actif financier sous la norme comptable. Si un assureur détient un actif $S$ dont la valeur d'acquisition est $S_a = 120$ (valeur d'achat), il doit reporter dans son compte de résultat une éventuelle dépréciation de cet actif. Cette dernière est provisionnée. Il y a dépréciation au temps $t$ si ces deux événements se réalisent :

$$\begin{cases} S_t \leq 0.8 \times S_a, \\ \max\{S_u, t - \frac{1}{2} \leq u \leq t\} \leq S_a. \end{cases}$$

Si ces deux événements se réalisent, une perte de valeur nette est constatée pour l'excédent par rapport à la valeur recouvrable de l'actif, i.e. l'assureur réalise une perte comptable nette de $S_a - S_t$ au temps $t$.

On suppose que l'actif $S$ suit une dynamique de Brownien géométrique :

$$dS_t = S_t\big(rdt + \sigma dW_t\big)$$

avec $S_0 = 100$ (en pratique on peut avoir $S_a = S_0$, mais ce n'est pas toujours le cas), $r = 0.03$ le taux d'intérêt sans risque, $\sigma = 0.45$ la volatilité et $W$ un mouvement Brownien standard.

Dans cet exercice, on va estimer la provision pour dépréciation durable (PDD) future sur un an, avec $T = 1$, définie par

$$PDD = \mathbb{E}\Big[e^{-rT}(S_a - S_T)\mathbf{1}_{S_T \leq 0.8 S_a}\mathbf{1}_{\max\{S_u : T-\frac{1}{2} \leq u \leq T\} \leq S_a\}}\Big].$$

**A/ Schémas naïfs.** Dans un premier temps, on utilisera une estimation naïve de la barrière portant sur le max, i.e. on vérifie juste qu'à chaque pas de temps, le max n'est pas dépassé.

1. Transformer la dynamique de $(S_t)_{t\geq 0}$ pour se ramener à une diffusion de la forme

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

2. Proposer un schéma d'Euler avec deux périodes de temps et $n = 1000$ pour une estimation de la PDD par méthode de Monte-Carlo.
3. On prend maintenant un pas de temps $dt = 200$. Proposer un schéma d'Euler avec $n = 1000$, et tracer l'évolution de votre estimation en fonction de la taille d'échantillon utilisée.
4. Tester les deux algorithmes avec $dt = 300$ puis $dt = 1000$ pas de temps. Que constatez-vous ?

**B/ Raffinement par pont Brownien.** A l'aide des propriétés du pont Brownien, on a l'estimation suivante pour la probabilité de franchissement de la barrière (admise) :

$$p_k = \mathbb{P}\big(\exists t \in [t_k, t_{k+1}] : X_t > L \big| X_{t_k} = x, X_{t_{k+1}} = y\big) = e^{-2\frac{(x-L)(y-L)}{\sigma^2 \triangle n}}.$$

1. Implémenter, à l'aide d'un rejet, cette probabilité dans le calcul de la barrière (cf cours). On prendra à nouveau $dt = 200$ et $n = 1000$.
2. Comparer la méthode précédente et ce raffinement en traçant les deux estimations pour $n$ allant de 1 à 1000.

**C/ Présence d'un deuxième actif** On considère le cas de deux actifs corrélés avec deux mouvements browniens $W^1$ et $W^2$. On suppose que $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$. On testera les méthodes avec $\rho = 0$, $\rho = 0.3$ et $\rho = -0.8$.

1. Ecrire une fonction simCholesky pour simuler $(W_1^1, W_1^2)$.
2. Utiliser cette dernière pour implémenter un premier schéma d'Euler naïf et estimer

$$\mathbb{E}[PDD_1 + PDD_2].$$

3. Raffiner ce schéma à l'aide d'un pont Brownien.