TP 3 : Simulation de processus à sauts

Techniques Numériques - M2 Actuariat

Armand Bernou armand.bernou@univ-lyon1.fr

Exercice 1 : premières simulations de processus à sauts

1. Simuler un processus de Poisson de paramètre $\lambda = .5$ sur un intervalle $[0, 10]$. On simulera les instants de sauts exacts, et on présentera les résultats sur un graphe.
2. Sur ce même intervalle, simuler un processus de Poisson composé, de forme
$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$
où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda = .5$, et $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de loi binômiale de paramètre $(0.3, 5)$. On simulera les instants de sauts exacts, et on présentera les résultats sur un graphe.
3. On prend à présent $\lambda = 2$. Calculer une estimation de $\mathbb{P}(X_{10} > 50)$. Peut-on rejeter l'hypothèse que cette probabilité vaille plus de 0.02 au niveau 1% ?

Exercice 2 : Simulation d'un processus de Gauss-Poisson avec temps de sauts exacts. Dans cet exercice, on s'intéresse à la simulation de
$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i Z_i,$$
où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$, indépendant de B. Les variables $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont iid, indépendantes de B et N et suivent une loi de Rademacher
$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$
Les variables $(Z_i)_{i\geq 1}$ sont iid, indépendantes de $B, N, (Y_i)_{i\geq 1}$ et suivent une loi de Poisson de paramètres $\lambda = 4$. On prendra les paramètres suivants : $x = 100$, $\mu = 0,05$, $\sigma = 0,2$ et un horizon de temps $T = 5$.

Pour les questions 1-4, on s'intéresse à la simulation d'une unique trajectoire du processus.

1. Simuler les instants de sauts du processus sur $[0, 5]$.
2. Simuler la trajectoire du processus de Poisson composé $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i Z_i$.
3. Soit $(T_i)_{i\geq 0}$ les instants de sauts obtenus en question 1. Sur chaque intervalle de temps $[T_i, T_{i+1}]$ avec $T_{i+1} < 5$, simuler la trajectoire de la diffusion, i.e. du processus
$$X_t = X_{T_i} + \mu(t - T_i) + \sigma(B_t - B_{T_i})$$
On utilisera un schéma d'Euler avec dix étapes pour chaque intervalle.

4. En déduire une simulation de la trajectoire de $(X_t)_{t\in[0,5]}$ par schéma d'Euler avec instants de sauts exacts. On représentera la trajectoire obtenue sur un graphe. Même question avec 100 étapes de temps sur chaque intervalle.
5. Calculer le prix d'un contrat de payoff

$$V(T, r, \sigma, \lambda, \tilde{\lambda}, \mu, x) = \mathbb{E}\big[e^{-rT}(K - X_T)_+\big],$$

avec $K = 110$ et $r = 0.01$ et donner un intervalle de confiance à 95%.
6. Par méthode de Monte-Carlo, donner une estimation de la Grecque $\frac{\partial V}{\partial \tilde{\lambda}}$ pour le même choix de paramètres que précédemment. On utilisera d'abord deux trajectoires Browniennes séparées, puis la même trajectoire Brownienne dans les deux cas (cf. cours), et on comparera les résultats obtenus.

Exercice 3 : Modèle de Merton. On s'intéresse à la dynamique du modèle de Merton, donnée par

$$dS_t = (\mu - \lambda\kappa)dt + \sigma dB_t + (Y_t - 1)dN_t,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ, et, à chaque instant de saut t_i, la variable Y_{t_i} satisfait

$$\ln(Y_{t_i}) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2).$$

Enfin, on a la relation

$$\kappa = e^{\tilde{\mu}} - 1.$$

On prendra les paramètres suivants :
— $S_0 = 100$,
— $\mu = 0.07$, $\tilde{\mu} = 0.05$,
— $\sigma = 0.3$, $\tilde{\sigma} = 0.2$,
— $T = 10$,
— $\lambda = 1$.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer le prix d'un contrat de payoff $V := \mathbb{E}[\max(X_T, X_{T/2})]$ par trois méthodes différentes :

1. En utilisant la formule explicite pour S_t (cf cours.)
2. Par schéma d'Euler avec instants de sauts exacts ;
3. Par schéma d'Euler classique.

Pour chacune des méthodes, donner une estimation basée sur $n = 10000$ simulations ainsi qu'un intervalle de confiance au niveau 1%.

4. Donner une estimation, basée sur la méthode de Monte-Carlo, de $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}$ et de Vega $= \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ pour les paramètres précédents.