Równanie

$$-k(x)u''(x) = 0$$

$$u(2) = 3$$

$$u'(0) + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1,2] \end{cases}$$

Sformułowanie wariacyjne

$$\forall_{x\in[0,2]}\ k(x) \neq 0$$

$$-k(x)u''(x) = 0\ /{:}(-k(x))$$

$$u''(x) = 0$$

Jako, że z prawej strony dziedziny występuje warunek Dirichleta, funkcja bazowa v przyjmuje tam wartość 0.

$$\int_0^2 u''v dx = 0, \forall_v\ v(2) = 0$$

Lewą stronę równania scałkowano przez części.

$$[u'v]_0^2 - \int_0^2 u'v'dx = 0$$

$$u'(2)v(2) - u'(0)v(0) - \int_0^2 u'v'dx = 0$$

Jako, że $v(2) = 0$:

$$-u'(0)v(0) - \int_0^2 u'v'dx = 0$$

Korzystając z warunku Cauchy'ego $u'(0) + u(0) = 20$:

$$-(20 - u(0))v(0) - \int_0^2 u'v'dx = 0$$

$$-20v(0) + u(0)v(0) = \int_0^2 u'v'dx$$

$$u(0)v(0) - \int_0^2 u'v'dx = 20v(0)$$

Można wprowadzić oznaczenia:

$$B(u,v) = u(0)v(0) - \int_0^2 u'v'dx$$

$$L(v) = 20v(0)$$

Wtedy:

$$B(u,v) = L(v)$$

Rozszerzenie warunku brzegowego

Na prawym brzegu ustalony jest niezerowy warunek Dirichleta. W takim razie stosuje się przesunięcie:

$$u = w + \tilde{u}$$

gdzie $\tilde{u}$ to dowolna funkcja spełniająca równanie:

$$\tilde{u}(2) = 3$$

Tymczasem jeśli chodzi o funkcję w:

$$w(2) = 0$$

Wstawiając równanie $u = w + \tilde{u}$ do sformułowania wariacyjnego:

$$B(w + \tilde{u}, v) = L(v)$$

$$B(w,v) + B(\tilde{u}, v) = L(v)$$

$$B(w,v) = L(v) - B(\tilde{u}, v) = L'(v)$$

Konstrukcja podprzestrzeni elementów skończonych V_h

Dziedzinę dzieli się na n równych części, tak że $h = \frac{2}{n}$. $x_{k+1} = x_k + h$, $x_{k-1} = x_k = h$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Wektory bazowe poza brzegiem:

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h} & \text{dla } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{h} & \text{dla } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wektor bazowy na brzegu:

$$e_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & \text{dla } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wektor bazowy na prawym brzegu ($e_n(x)$) jest równy 0, bo $w(2) = 0$ oraz $v(2) = 0$.

Funkcja $\tilde{u}(x)$

Jako, że $\tilde{u}(2) = 3$, można przyjąć następującą postać funkcji:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 3\frac{x-x_{n-1}}{h} & \text{dla } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Aproksymacja $w(x)$

Problem oryginalny:

Znaleźć $w \in V$ spełniające:

$$B(w, v) = L'(v), \forall v \in V$$

Problem przybliżony:

Dla $V_h \subset V$ znaleźć $w \in V_h$ spełniające:

$$B(w_h, v_h) = L'(v_h), \forall v_h \in V_h$$

Przyjmuje się aproksymację w:

$$w \approx w_h = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$$

Takie w można podstawić do równania:

$$B(\sum_{i=1}^{n} w_i e_i, v_j) = L'(v_j) \text{ dla } v_j = e_j \text{ dla } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Można w_i wyciągnąć przed nawias

$$\sum_{i=1}^{n} w_i B(e_i, e_j) = L'(e_j)$$

Powstaje układ równań, który ma postać:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_1, e_2) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ B(e_2, e_1) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n, e_1) & B(e_n, e_2) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'(e_1) \\ L'(e_2) \\ \vdots \\ L'(e_n) \end{bmatrix}$$