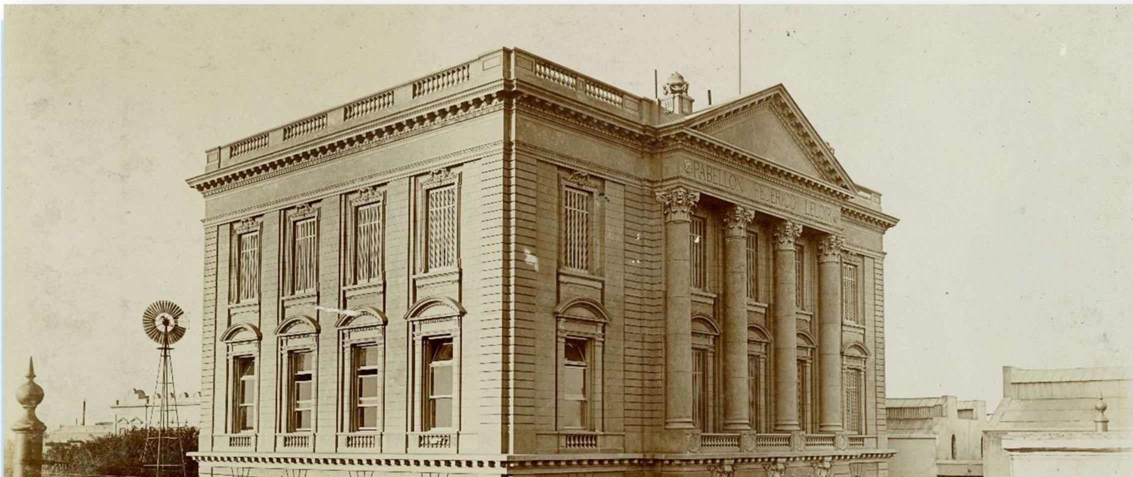
Tecnicatura Universitaria de Programación

Matemática

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL



CUADERNILLO

Álgebra de Boole – Parte 2

ÍNDICE

ÁLGEBRA DE BOOLE – PARTE 2

INTRODUCCIÓN

CONCEPTO

La idea de esta clase es que veamos como, a partir de un enunciado, diseño de una máquina o una problemática, hacemos un análisis lógico, luego expresamos la solución en una expresión booleana, para ahorrar componentes la simplificamos lo que podamos y luego, con la expresión simplificada, el circuito se obtiene fácilmente.

EJEMPLO DE COMO INICIAR EL PROCESO

"Al ganador de un concurso, le dan como premio una orden de compra de $ 70000. Debe adquirir en el negocio "DESIGUAL" al menos uno de los siguientes artículos, con la condición de que la compra no incluya más de un artículo del mismo tipo y el monto de esta sea de por lo menos $ 40000":

Artículo	Precio unitario
Pantalón	15.000
Tapado	50.000
Zapatos	20.000
Camisa	5.000

a) Determinar a través de una tabla de verdad una función booleana con salida 1 en caso de que la compra pueda efectuarse y 0 en caso contrario.
b) Expresarla en una forma canónica (ya llegaremos).
c) Simplificarla (ya veremos cómo).
d) Armar el circuito.

A lo largo de la clase vamos aprendiendo como realizar cada punto.

ANALISIS DEL ENUNCIADO Y TABLA DE VERDAD

Construimos una tabla de verdad. Ponemos una columna por cada variable y analizamos cada posibilidad. Claro que 1 indica el artículo comprado y 0 si no lo compramos. Tengo 70.000 pesos como máximo y 40.000 pesos como mínimo.

Por ejemplo:

En la primera línea no compramos productos, por ende, no llegamos a gastar el mínimo. Ponemos 0 en la función.

En la segunda línea compramos camisa (en 1 la columna C) y gastamos 5000 pesos, no llegamos a los 40000 pesos del mínimo. Ponemos 0 en la función.

P: Pantalón, T: Tapado, Z: Zapatos, C: Camisa, F: Función Booleana.

P	T	Z	C	F(P, T, Z, C)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

¿Y ahora qué hacemos con esto?

Función booleana

El siguiente paso es expresar matemáticamente nuestro hallazgo con el uso del álgebra de Boole.

Pensemos un poco. Tenemos el resultado, última columna, indicado como F(P, T, Z, C) ¿Qué significa?

Básicamente es una máquina matemática que le introducís valores, y según sean, genera un valor mediante una operación matemática.

En nuestro caso definimos FUNCION BOOLEANA como aquella cuyas variables son boolenas (valores 1 y 0) y entrega como valor 1 ó 0.

FORMAS CANÓNICAS O NORMALES

Hasta ahora relacionamos los operadores OR y AND con compuertas OR o AND.

Ahora buscaremos llevar nuestro análisis lógico del enunciado a un circuito con compuertas.

¿Cómo? "Traducimos" nuestra tabla de verdad a una expresión booleana, que llamaremos función, con un formato que llamamos FORMA CANÓNICA.

¿Y luego? Cada operación de (+) es una compuerta OR, cada operación (.) es una AND, pero no nos apresuremos. Veamos las formas canónicas primero.

FORMA CANÓNICA DISYUNTIVA (FND)

Primero definimos al MINITÉRMINO.

Consiste en las variables booleanas, directas o negadas, multiplicadas entre sí. Ejemplos:

$$\mathbf{A \,.\, B \,.\, C}$$

La FORMA CANÓNICA, también llamada NORMAL, DISYUNTIVA consiste en una SUMA de MINTÉRMINOS.

Recordá que las variables pueden estar en forma directa o negada.

Ejemplo:

$$\mathbf{F(A, B, C) = (A \,.\, B \,.\, C) + (A \,.\, B \,.\, \overline{C}) + (\overline{A} \,.\, B \,.\, C)}$$

Fijate que definimos una función booleana F de tres variables booleanas, A, B y C.

FORMA NORMAL CONJUNTIVA (FNC)

Primero definimos al MAXITÉRMINO.

Consiste en las variables booleanas, directas o negadas, sumadas entre sí. Ejemplos:

$$\mathbf{A + B + C}$$

EXPRESIÓN DEL ANÁLISIS CON LA FORMA NORMAL DISYUNTIVA

Tomamos los 1 de la tabla de verdad. En cada fila fíjate como está la variable, directa o negada.

P	T	Z	C	F(P, T, Z, C)	FND
0	0	0	0	0	-
0	0	0	1	0	-
0	0	1	0	0	-
0	0	1	1	0	-
0	1	0	0	1	$\overline{P} . T . \overline{Z} . \overline{C}$
0	1	0	1	1	$\overline{P} . T . \overline{Z} . C$
0	1	1	0	1	$\overline{P} . T . Z . \overline{C}$
0	1	1	1	0	-
1	0	0	0	0	-
1	0	0	1	0	-
1	0	1	0	0	-
1	0	1	1	1	$P . \overline{T} . Z . C$
1	1	0	0	1	$P . T . \overline{Z} . \overline{C}$
1	1	0	1	1	$P . T . \overline{Z} . C$
1	1	1	0	0	-
1	1	1	1	0	-

Ahora sabemos que son 6 minitérminos, los sumamos entre sí.

$$F(P, T, Z, C) = (\overline{P}.T.\overline{Z}.\overline{C}) + (\overline{P}.T.\overline{Z}.C) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C) + (P.T.\overline{Z}.\overline{C}) + (P.T.\overline{Z}.C)$$

EXPRESIÓN CON LA FORMA NORMAL CONJUNTIVA

Tomamos los 0 de la tabla de verdad. En cada fila fíjate como está la variable, directa o negada.

P	T	Z	C	F(P, T, Z, C)	FND
0	0	0	0	0	$P+T+Z+C$
0	0	0	1	0	$P+T+Z+\bar{C}$
0	0	1	0	0	$P+T+\bar{Z}+C$
0	0	1	1	0	$P+T+\bar{Z}+\bar{C}$
0	1	0	0	1	-
0	1	0	1	1	-
0	1	1	0	1	-
0	1	1	1	0	$P+\bar{T}+\bar{Z}+\bar{C}$
1	0	0	0	0	$\bar{P}+T+Z+C$
1	0	0	1	0	$\bar{P}+T+Z+\bar{C}$
1	0	1	0	0	$\bar{P}+T+\bar{Z}+C$
1	0	1	1	1	-
1	1	0	0	1	-
1	1	0	1	1	-
1	1	1	0	0	$\bar{P}+\bar{T}+\bar{Z}+C$
1	1	1	1	0	$\bar{P}+\bar{T}+\bar{Z}+\bar{C}$

F(P, T, Z, C) = $(P+T+Z+C)\,.\,\boldsymbol{(P+T+Z+\bar{C})\,.\,(P+T+\bar{Z}+C)\,.\,(P+T+\bar{Z}+\bar{C})\,.\,(P+\bar{T}+\bar{Z}+\bar{C})\,.\,(\bar{P}+T+Z+C).\,(\bar{P}+T+Z+\bar{C}).\,(\bar{P}+\bar{T}+\bar{Z}+C).\,(\bar{P}+\bar{T}+\bar{Z}+\bar{C})}$

TIPS

1) En un término siempre están todas las variables, directas o negadas.
2) Si en un término están multiplicadas entre si es MINI, sino es MAXI.
3) Si le damos bolilla a los 1 multiplicamos las variables tal como están en las columnas, directas o negadas. Si le damos bolilla a los 0, las sumamos.
4) Si usamos a los 1, sumamos los minitérminos y tenemos la FORMA NORMAL o CANONICA DISYUNTIVA. En cambio, si usamos a los 0, la CONJUNTIVA.

RELACIÓN DE LAS FORMAS CANÓNICAS CON LAS COMPUERTAS

Claramente la **FORMA NORMAL DISYUNTIVA** tiene más multiplicaciones, por lo menos una por minitérmino. Así **minimizamos el uso de compuertas OR**.

Por el contrario, la **FORMA NORMAL CONJUNTIVA** tiene más sumas, por lo menos una por minitérmino. Así **minimizamos el uso de compuertas AND**.

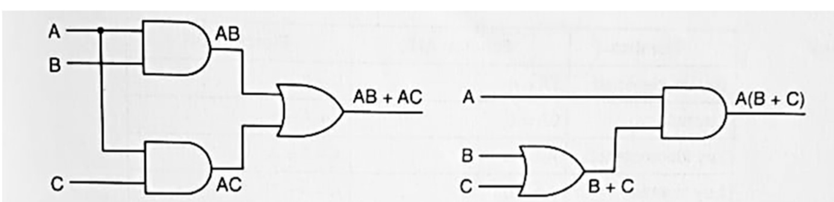
Genial, ahora tenemos expresiones con un montón de sumas y multiplicaciones y por ende, varias compuertas. Eso implica muchos trasnsistores, ¿Hay alguna forma de simplificar esto?

SIMPLIFICAR

Conceptualmente vamos a valernos de las propiedades y reglas de Boole para simplificar las formas normales o canónicas.

Si lo hacemos bien llegamos a una forma simplificada, que luego nos lleve a un circuito de compuertas más sencillo, que a su vez tenga el mismo efecto, o sea la misma tabla de verdad.

Miremos estos circuitos y sus tablas de verdad:



A	B	C	A.B	A.C	A.B + A.C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

A	B	C	A	B+C	A.(B+C)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Ambas tablas de verdad indican que ambos circuitos son equivalentes.

Si los observás con cuidado, el de la derecha, tiene una compuerta menos. Es decir, a la izquierda usamos 6 transistores y a la derecha 4. ¡Un 33% menos!

Así que tener menos transistores en un chip no es solo por la miniaturización, es también gracias al uso del álgebra de Boole.

ALGUNAS COMBINACIONES ÚTILES

Te vas a encontrar con ejercicios con varias variables booleanas, operaciones, negaciones de un elemento, de un grupo... pero muchas se pueden descomponer es combinaciones simples y luego resolverlas usando las propiedades y reglas que estudiamos en el cuadernillo anterior (divide y conquista).

1) $C + \overline{C} . D = C + D$	Usando la Ley de absorción
2) $C . (C + D) = C$	Usando la Ley de absorción
3) $\overline{C + D} . \overline{C . D}$	Primero usamos las Leyes de De Morgan
$\overline{C} . \overline{D} . \overline{C} + \overline{D}$	Los C negados podemos simplificarlo por idempotencia.
$\overline{D} . \overline{C} + \overline{D}$	Usamos Ley de absorción
$\overline{C + D} + \overline{D}$	
$\overline{(D+C).D} = \overline{D}$	
4) $(A + B) . (A + \overline{B})$	Aplicá la propiedad distributiva
$(A . A) + (A . \overline{B}) + (B . A) + (B . \overline{B})$	Usamos idempotencia en A.A
$A + (A . \overline{B}) + (B . A) + (B . \overline{B})$	Usamos complemento en el 4°
$A + (A . \overline{B}) + (B . A) + 0$	Si sacamos factor común
$A + A . (B + \overline{B})$	Usamos complemento
$A + A . 1$	Usamos identidad
$A + A$	Usamos idempotencia
$(A + B) . (A + \overline{B}) = A$	

Interpretación: La salida no depende de B, solo de A.

5) A + (A . B) + (A . B . C)	Usamos un truco A.B como una variable para usar la Ley de absorción
A + A . B	Y la volvemos a aplicar

A + (A . B) + (A . B . C) = A

Interpretación: La salida no depende de B, ni C, solo de A.

De esta manera podemos simplificar enormemente a los circuitos electrónicos ahorrando espacio y logrando mayor poder de cómputo en un espacio reducido.

FORMAS DE SIMPLIFICAR

Los métodos principales son:

1. Uso de las leyes del Álgebra de Boole.
2. Mapas de Karnaugh.
3. Método de Quine-McCluskey (para más de 4 variables, no lo veremos aquí).

USO DE LAS LEYES DE BOOLE EN EL EJEMPLO DE LA TIENDA

Analizada la tabla de verdad llegamos a la siguiente forma normal disyuntiva:

$$\mathbf{F(P, T, Z, C) = (\overline{P}.T.\overline{Z}.\overline{C}) + (\overline{P}.T.\overline{Z}.C) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C) + (P.T.\overline{Z}.\overline{C}) + (P.T.\overline{Z}.C)}$$

Lo primero que se hace es agrupar términos buscando factores comunes.

Si no te acordás de que se trata, es buscar términos que repitan variables para aplicar las leyes distributivas, pero al revés:

$$(A.B.C) + (A.B.\overline{C}) + (A.\overline{B}) = A.B(C+\overline{C}) + (A.\overline{B})$$

Así podemos usar la ley del complemento

$$(A.B.C) + (A.B.\overline{C}) + (A.\overline{B}) = A.B.1 + (A.\overline{B}) = (A.B) + (A.\overline{B})$$

De nuevo factor común y ley de complemento

$$(A.B) + (A.\overline{B}) = A.(B+\overline{B}) = A.1 = \mathbf{A}$$

De las dos formas elegimos la disyuntiva por tener menos términos para trabajar:

$$F(P, T, Z, C) = (\mathbf{\overline{P}.T.\overline{Z}}.\overline{C}) + (\mathbf{\overline{P}.T.\overline{Z}}.C) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C) + (\mathbf{P.T.\overline{Z}}.\overline{C}) + (\mathbf{P.T.\overline{Z}}.C)$$

$$F(P, T, Z, C) = (\mathbf{\overline{P}.T.\overline{Z}}.(\overline{C}+C)) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + \mathbf{(P.T.\overline{Z}}.(C+\overline{C})\mathbf{)} + (P.\overline{T}.Z.C)$$

Los factores comunes los destacamos en negrita para que puedas visualizaros. En ambas agrupaciones podés simplificar el paréntesis interno por ley de complemento, $\overline{C}+C = 1$:

$$F(P, T, Z, C) = (\overline{P}.T.\overline{Z}) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.T.\overline{Z}) + (P.\overline{T}.Z.C)$$

Volvemos a observar un factor común, donde lo que queda son dos complementos:

$$F(P, T, Z, C) = (\overline{P}.\mathbf{T.\overline{Z}}) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\mathbf{T.\overline{Z}}) + (P.\overline{T}.Z.C)$$

$$F(P, T, Z, C) = \mathbf{T.\overline{Z}}.(\overline{P}+P) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C)$$

$$F(P, T, Z, C) = (\mathbf{T.\overline{Z}}) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C)$$

Ya no podemos seguir simplificando. Hemos logrado lo siguiente:

1) De 6 minitérminos a 3.
2) De 5 compuertas OR a 2.
3) De 18 compuertas AND a 7.

¿Habrá alguna forma más de simplificar y así usar aún menos componentes?

MAPA DE KARNAUGH

Consiste en una técnica gráfica de simplificación.

Se usa una tabla al estilo batalla naval. En el caso que estamos analizando de 4 variables se colocan dos en las filas y dos en las columnas. Tantas como combinaciones entre ellas.

PASO 1: Armado tabla

Se arman combinaciones simples, lo más compactas. Por ejemplo, todas de a 2 variables si es par, si es impar una de ellas queda solita.

Según las combinaciones calculás el tamaño de la tabla. En nuestro caso tenemos 4 variables o sea hacemos combinaciones de a dos, un par para columna, un par para filas.

NOTA: Si hay más de 4 variables conviene otro método que no vamos a ver en este curso. En realidad, hasta 5 se puede con Karnaugh, pero es muy complicado.

IMPORTANTE: Notar la combinación 11. Se colocá en esa posición siguiendo una ordenación llamada de Gray y es para que sea más fácil el análisis que luego haremos.

ORDENAMIENTO DE GRAY: Básicamente nos indica que cuando pasas de una fila a la continua, de una columna a la siguiente, solo cambie el valor de una variable.

Por ejemplo, de 00 paso a 01, una variable cambia. De 01 a 10 son dos, ahí elegimos 11 porque solo cambia la primera.

(Z, C)→ **↓(P, T)**	**00**	**01**	**11**	**10**
00				
01				
11				
10				

Tip: Si te confunde a que corresponde cada combinación hagamos un pequeño cambio visual, reemplacemos las combinaciones en bits con las variables directas o negadas.

Fijáte en las columnas de la 1 a la 2 tenemos que Z esta negada, en la 3 y la 4 directa. En cambio, C esta directa en el centro y negada en los extremos.

La forma que recomendamos:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$\overline{Z}$</td><td colspan="2">Z</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{P}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\overline{T}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\overline{T}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\overline{C}$</td><td colspan="2">C</td><td>$\overline{C}$</td><td></td></tr>
</table>

Si la armas así, el siguiente paso te resultará más fácil. Por lo menos si jugaste a la batalla naval.

PASO 2: UBICAMOS LOS MINITÉRMINOS

Usamos la expresión original, por si le erramos la simplificación.

$$\mathbf{F(P, T, Z, C) = (\overline{P}.T.\overline{Z}.\overline{C}) + (\overline{P}.T.\overline{Z}.C) + (\overline{P}.T.Z.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C) + (P.T.\overline{Z}.\overline{C}) + (P.T.\overline{Z}.C)}$$

Te marcamos en rojo y negrita el primer minitérmino para que veas como nos ubicamos (T directa y resto negadas). En la casilla correspondiente ponemos un 1, en las demás 0.

Si hiciste bien, si tenés 6 minitérminos, te quedan distribuidos 6 unos.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$\overline{Z}$</td><td colspan="2">Z</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\overline{P}$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$\overline{T}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="2">T</td></tr>
<tr><td>P</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

	0	0	1	0	$\bar{T}$
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$	

PASO 3: BUSCAMOS AGRUPACIONES

Ahora trabajamos con los 1. Buscamos grupos de 1, 2, 4, 8 términos. Múltiplos de 2, horizontal y/o vertical.

Ojo, si vemos la última columna de una misma fila, con relación a la primera solo cambia una variable. Podemos armar grupos entre la última y la primera, sean filas o columnas. Nunca oblicuo.

	$\bar{Z}$		Z		
$\bar{P}$	0	0	0	0	$\bar{T}$
$\bar{P}$	1	1	0	1	T
P	1	1	0	0	T
P	0	0	1	0	$\bar{T}$
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$	

PASO 4: ANALIZAMOS GRUPOS

Así que analicemos cada agrupación:

La de 4 (rojo): Tenemos que la variable T mantiene su valor y es directo, y mantiene Z que es negada. Las demás varían:

$T.\bar{Z}$

La de 2 (verde): Tenemos un lazo que "sale" de la frontera para alcanzar el otro lado. La única variable que varía es Z por lo que queda es:

$\bar{P}.T.\bar{C}$

La de 1 (azul): Tenemos un lazo que engloba una sola casilla:

$P.\bar{T}.Z.C$

En cada grupo armamos términos, estrictamente ya no podemos decir menos términos, donde una o varias variables fueron simplificadas. Además de 6 minitérminos, pasamos a 3.

Ahora juntamos todos:

$$\mathbf{F(P, T, Z, C) = (T.\overline{Z}) + (\overline{P}.T.\overline{C}) + (P.\overline{T}.Z.C)}$$

Es un poco más simplificada que la que conseguimos con las leyes de Boole, Y MÁS SENCILLA.

Si tuviéramos que desarrollar un software para optimizar circuitos, es más fácil de hacerlo usando el método gráfico.

Intenta en varios modelos de IA pidiendo primero la expresión a partir de una tabla de verdad y que la simplifique paso a paso usando las Leyes de Boole y luego que lo haga por mapa de Karnaugh. En la mayoría de los casos es más sencilla la expresión por mapa, que por leyes.

¿Y SI USAMOS MAXITÉRMINOS?

Lo mismo, pero colocando 0, son los mismos que ves en el diagrama que acabamos de armar.

Los grupos los armás con los 0. Lo único que las combinaciones halladas son de sumas y los términos se enlazan con multiplicaciones.

PASO A UN CIRCUITO

Ahora tenemos:

1. Dos (+), compuertas OR.
2. Seis (.), compuertas AND.
3. Cuatro líneas de alimentación, una por variable.
4. Si ves directa es conexión directa, si es negada ponemos una compuerta NOT.
5. Agregamos cuatro compuertas NOT.

PROCEDIMIENTO

Tomamos cada variable y establecemos cuatro líneas de alimentación de señal.

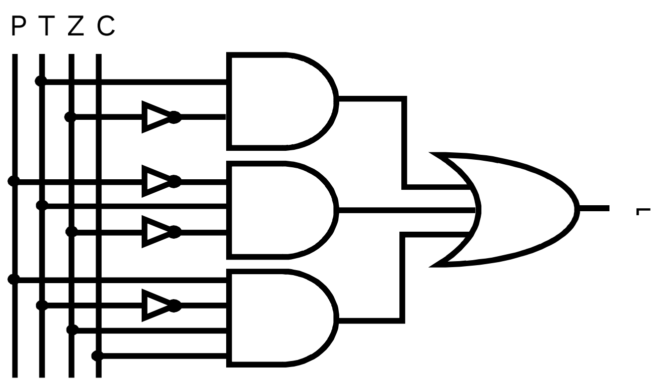
Si lo tomamos directo, es variable directa. Si a la señal la debemos negar le ponemos una compuerta inversora o NOT.

Para cada término, son multiplicaciones, usamos una compuerta AND. Cada entrada será la variable directa o negada.

La salida se suma, es la entrada a una compuerta OR.

La salida es la función booleana F.

CIRCUITO SIMPLIFICADO



¿Te animás a dibujar el circuito de la forma canónica disyuntiva sin simplificar?