28 listopada 2021

Przemysław Kacprzak
Grupa 4a

24. Obliczanie całek $\iint_D f(x,y)dxdy$ na obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ przez transformację na kwadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ i zastosowanie złożonych kwadratur Simsona ze względu na każdą zmienną

Spis treści

1 Wstęp

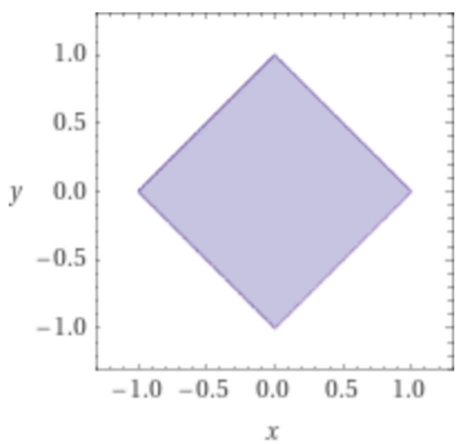
Obliczenie całki podwójnej funkcji dwóch zmiennych na obszarze nie będącym prostokątem lub trójkątem jest zadaniem wymagającym dwóch części: transformacji obszaru całkowania oraz użycia kwadratury do przybliżenia wyniku.

W raporcie zbadano czy zwiększenie ilości podprzedziałów prowadzi do mniejszych błędów w obliczeniach, oraz w jakim tempie błędy te maleją. Sprawdzono również, czy dla wielomianów stopnia mniejszego niż 4 błąd maleje wraz z ilością przedziałów. Wykonano także eksperyment polegający na sprawdzeniu działania tranformacji obszaru.

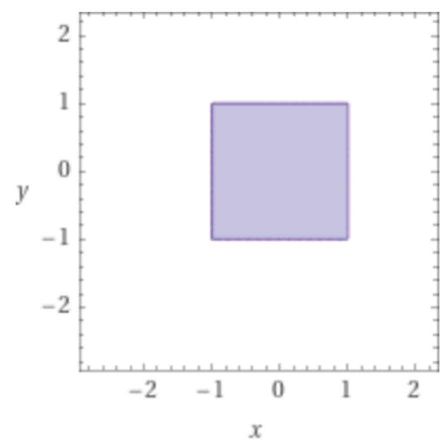
Porównano także działanie programu z bliźniaczą funkcją używającą kwadratury trapezów.

2 Opis użytej metody

Metodą użytą w programie jest przekształcenie obszaru całkowania przy pomocy macierzy Jakobiego oraz zastosowanie złożonych kwadratur Simpsona.
Na poniższych wykresach przedstawione są 2 obszary:
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ oraz $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$.



(a) Obszar D



(b) Obszar E

Aby otrzymać obszar E z obszaru D należy obrócić obszar o 45 stopni, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara oraz pomniejszyć obszar $\sqrt{2}$ razy. Czyli nasze funkcje przekształcające będą miały postać

$$\phi(x, y) = \frac{x + y}{2} \qquad \psi(x, y) = \frac{y - x}{2}. \tag{1}$$

Wtedy:

$$D = \{(u, v) : u = \phi(x, y), v = \psi(x, y), (x, y) \in E\}. \tag{2}$$

Macierz Jakobiego będzie miała postać

$$J(x,y) = J_{\phi,\psi}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\delta\phi}{\delta x}(x,y) & \frac{\delta\phi}{\delta y}(x,y) \\ \frac{\delta\psi}{\delta x}(x,y) & \frac{\delta\psi}{\delta y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Zatem Jakobian to $\frac{1}{2}$.
Obliczymy wiec całkę

$$\iint_E f(\phi(x,y),\psi(x,y))\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Użyjemy do tego złożonych kwadratur Simpsona ze względu na każdą zmienną. Kwadratura prosta Simpsona dla przedziału $[a,b]$ polega na pobraniu wartości funkcji dla punktów a, $\frac{a+b}{2}$, b i skorzystania ze wzoru

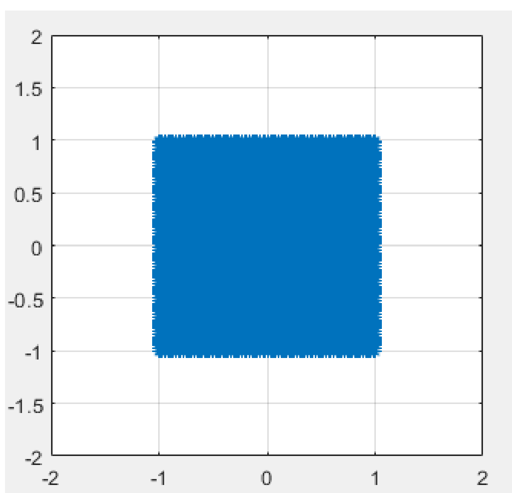
$$S(f) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) \tag{5}$$

Metoda złożona polega na wykonaniu tej operacji dla większej liczby przedziałów i zsumowaniu wyników. W naszym przypadku działamy na funkcji 2 zmiennych, więc wykonujemy metodę na siatce $n \times m$ gdzie n i m to odpowiednio ilość podprzedziałów, na które dzielimy nasz obszar E po osi x i y.

3 Opis eksperymentów

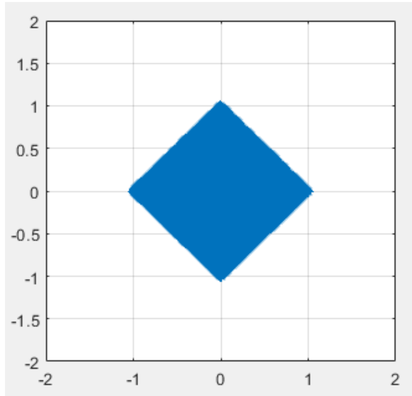
3.1 Test transformacji przedziału całkowania

Poniżej pokazany jest wykres przedstawiający obszar [-1,1]x[-1,1].



Rysunek 2: $[-1,1] \times [-1,1]$ wygenerowany w programie Matlab

Został on otrzymany poprzez narysowanie równo rozłożonych punktów po tym obszarze. Teraz przekształcimy każdy z tych punków za pomocą przekształcenia z programu i porównamy obszary.

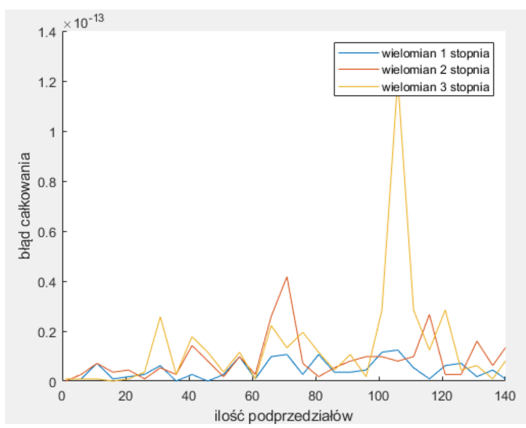


Rysunek 3: $[-1, 1] \times [-1, 1]$ po przeksztauceniu za pomocą ϕ oraz ψ.

Jak widać poniższy obszar to $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, co pokazuje poprawność przekształcenia.

3.2 Test błędów dla wielomianów maksymalnie trzeciego stopnia

Do testu tego użyto trzech losowo wygenerowanych wielomianów stopni: 1, 2, 3. Dla każdego z nich obliczano wynik całkowania przy użyciu rosnącej ilości podprzedziałów. Poniższy wykres przedstawia błędy przy całkowaniu tych funkcji.

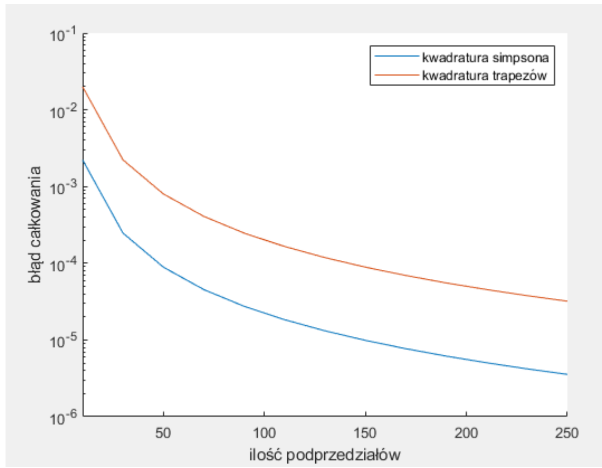


Rysunek 4: Błędy dla rosnącej liczby podprzedziałów dla wielomianów stopnia niewiększego niż 4.

Jak widać błąd nie maleje wraz z ilością przedziałów co pokazuje, że program jest użyteczny do liczenia całek z wielomianów stopnia mniejszego niż 4 oraz, że optymalne przy liczeniu tych wielomianów jest używanie tylko jednego podprzedziału. Powyższy wykres pokazuje rówież, że kwadratura Simpsona jest co najmniej czwartego rzędu.

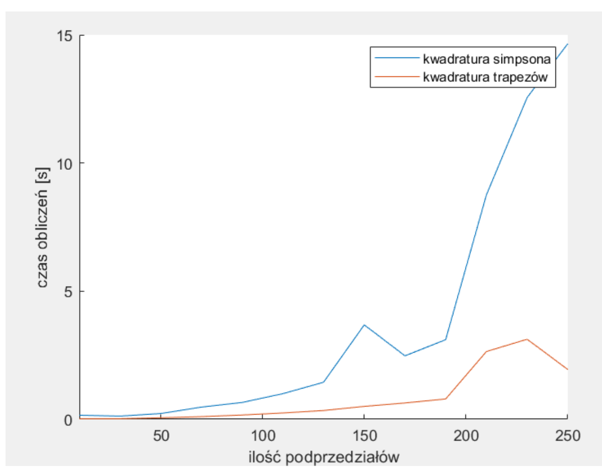
3.3 Porównanie błędów dla kwadratury trapezów i Simpsona

Na poniższych 2 wykresach widzimy błędy całkowania 2 funkcji. Na obu wykresach widoczne są 2 krzywe gdzie jedna oznacza błąd przy liczeniu całki przy pomocy kwadratury trapezów a druga przy pomocy kwadratury Simpsona.



Rysunek 5: Błąd całkowania dla rosnącej liczby podprzedziałów dla kwadratury trapezów oraz Simpsona

Kwadratura trapezów osiąga większe wartości błędów, co potwierdza to, że jest kwadraturą mniejszego rzędu niż kwadratura Simpsona. Co więcej widać, że błędy dla kwadratury trapezów są w przybliżeniu 10 razy większe, co pokazuje, że kwadratury te różnią się dokładnie jednym rzędem. Poniżej znajduje się wykres przedstawiający czas obliczeń funkcji dla różnych ilości podprzedziałów.



Rysunek 6: Czas obliczeń dla rosnącej ilości podprzedziałów przy użyciu kwadratury Simpsona i Trapezów.

Jak widać ceną za wiąkszą dokładność jest wydłużony czas obliczeń.

3.4 Test błędów dla rosnącej ilości podprzedziałów

Do testu tego wykorzystano skomplikowanie zachowujące się losowo wybrane funkcje. Poniższa tabela przedstawia błąd funkcji dla rosnących ilości podprzedziałów.

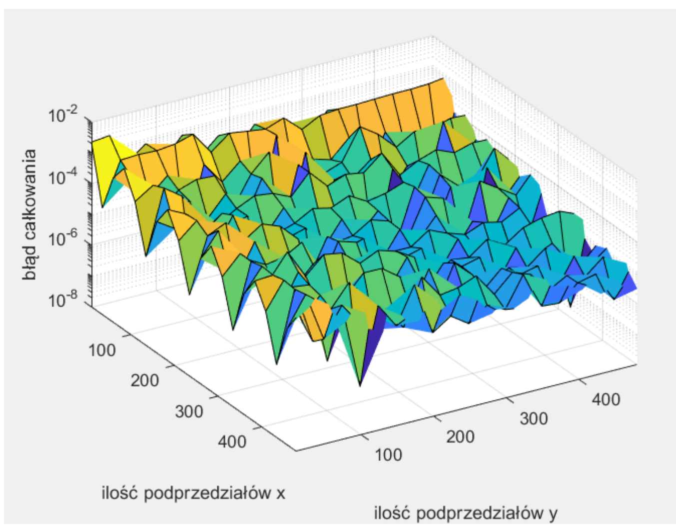
	Liczba podprzedziałów		
Funkcje	10	100	1000
$x^8y^2 - xsin(\pi * x) + 7y^3 + 3$	7.254060e−6	7.378045e−10	7.993606e−15
$5y^2x^8 - 2yx + 50 + sin(x)$	1.000034e2	1.943860e−9	8.469669e−12
$25.683x^{16} + 42.534y^{10} + 23x^9 + 6243y^6 + 17$	5.450827e−2	5.479765e−6	6.052119e−10
$-123.563y^{14} + 62.236y^{10} + 52.532x^12 + 642y^6 + x$	2.728260e−3	2.586763e−7	2.258105e−11

Jak możemy zauważyć błąd ten maleje, kiedy liczba podprzedziałów się zwiększa.

Na kolejnym wykresie przedstawiony jest błąd dla funkcji

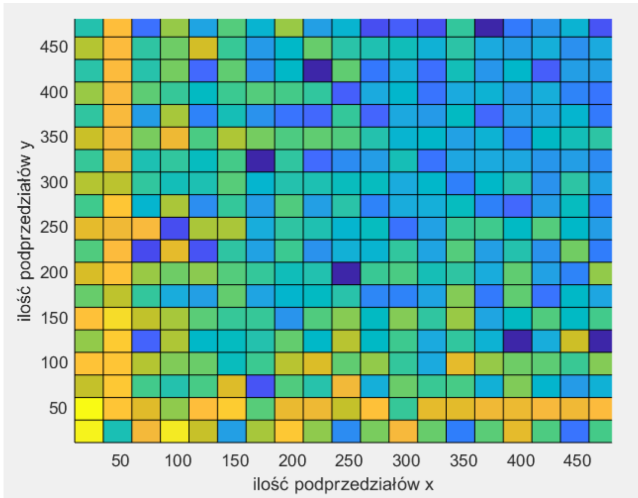
$$f(x) = sawtooth(x) * sawtooth(y)$$

uzależniony od ilości podprzedziałów dla odpowiedniej współrzędnej.



Rysunek 7: Błędy dla rosnącej liczby podprzedziałów po odpowiednich współrzędnych

Jak widać, wystarczy aby liczba podprzedziałów była mała dla jednego z wymiarów by błąd był o wiele większy. Ponadto na tym wykresie nadal widać, że błąd maleje dla coraz większej ilości przedziałów. Aby lepiej zobrazować ten efekt poniżej umieszczony został ten wykres widziany od góry.



Rysunek 8: Błędy dla rosnącej liczby podprzedziałów po odpowiednich współrzędnych pokazany od góry

Im jaśniejszy jest kolor tym większe są błędy, dzięki czemu widać, że kolor najjaśniejszy jest najbliżej osi wykresu czyli tam gdzie ilość podprzedziałów jest najmniejsza.
Wszystkie testy wykonane w tym punkcie dowodzą również, że funkcja dla odpowiednio dużej ilości podprzedziałów wyznacza całkę funkcji dwóch zmiennych z akceptowalną dokładnością.

4 Podsumowanie

Podsumowując, powyższe eksperymenty pokazały użyteczność funkcji obliczającej tytułowe zadanie. Zostało pokazane, że:

- Metoda użyta w zadaniu do przekształcenia obszaru całkowania jest poprawna.
- Program działa dobrze dla wielomianów stopnia mniejszego niż 4, oraz optymalne jest używanie tylko jednego podprzedziału do całkowania tych funkcji.
- Dla wystarczającej liczby podprzedziałów program z zadowalającą dokładnością oblicza całki bardziej skomplikowanych funkcji. Ponadto im więcej podprzedziałów użyjemy, tym większa będzie ta dokładność. Wystarczy jednak aby w jednym wymiarze było niewystarczająco podprzedziałów aby obliczenia stały się dość niedokładne.
- Metoda Simpsona daje dokładniejsze wyniki niż metoda trapezów. Co więcej na bazie tej dokładności możemy wnioskować, że jest to metoda rzędu o jeden wyższego. Czas działania programu dla metody Simpsona jest jednak istotnie dłuższy.