گزارش کار پروژه آنالیز عددی

شماره گروه: گروه ۳

اعضای گروه : معصومه مرتضوي، شیما خلیل‌پور، ماهان رحیمی، زهرا طاهری، متین عباسی

استاد درس: دکتر مختاری

تاریخ: تیر ۱۴۰۵

دانشکده علوم ریاضی

فهرست مطالب

۱ **محاسبه تابع $F(x)$** ۲
۱.۱ روش محاسبه ۲
۱.۱.۱ مرحله اول: تقریب توابع با بسط تیلور ۲
۲.۱.۱ مرحله دوم: انتگرال‌گیری عددی به روش سیمپسون ۳
۲.۱ کدها و نمودارهای مربوطه ۳
۳.۱ تحلیل خطای محاسبه ۴
۱.۳.۱ خظای محاسبه $\tan(x)$: ۴
۲.۳.۱ خطای محاسبه $e^{-(x-1)^2}$: ۶
۳.۳.۱ خطای روش انتگرال گیری سیمپسون : ۶

۲ **سوال ۱: قضیه مقدار میانگین انتگرال** ۸
۱.۲ بررسی شرایط قضیه ۸
۲.۲ روش حل سوال ۸
۳.۲ کدها، نمودارها و نتایج به‌دست آمده ۹
۴.۲ تحلیل خطای روش ۹

۳ **سوال ۲: قضیه مقدار میانگین مشتق** ۱۱
۱.۳ بررسی شرایط قضیه ۱۱
۲.۳ روش حل سوال ۱۲
۳.۳ کدها، نمودارها و نتایج به‌دست آمده ۱۲

طرح سوال

تابع $F(x)$ به صورت زیر تعریف میشود:

$$F(x) = ۱ + \int_{۰}^{\tan(x)} e^{-(t-۱)^۲} dt, \quad x \in [۰, ۰٫۵]$$

۱. **سوال ۱ (قضیه مقدار میانگین انتگرال):** با استفاده از روش های عددی ریشه‌یابی، نقطه $c_۱ \in (۰, ۰٫۵)$ را تقریب بزنید به طوری که :

$$\frac{۱}{۰٫۵ - ۰} \int_{۰}^{۰٫۵} F(x)dx = F(c_۱)$$

۲. **سوال ۲ (قضیه مقدار میانگین مشتق):** با استفاده از روش های عددی ریشه‌یابی، نقطه $c_۲ \in (۰, ۰٫۵)$ را تقریب بزنید به طوری که :

$$\frac{F(۰٫۵) - F(۰)}{۰٫۵ - ۰} = F'(c_۲)$$

۱ محاسبه تابع $F(x)$

۱.۱ روش محاسبه

برای محاسبه تقریبی تابع $F(x)$، الگوریتم دو مرحله‌ای مبتنی بر **بسط تیلور** و **انتگرال‌گیری عددی سیمپسون** به شرح زیر پیاده‌سازی شده است:

۱.۱.۱ مرحله اول: تقریب توابع با بسط تیلور

اول به ازای عدد طبیعی n توابع sin و cos با استفاده از چند جمله ای تیلور درجه $۲n + ۱$ و $۲n$ مربوطه به صورت تقریبی محاسبه می شوند:

$$\sin(t) \approx P_{\sin}(t) = t - \frac{t^۳}{۳!} + \frac{t^۵}{۵!} - \cdots + (-۱)^n \frac{t^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$
$$\cos(t) \approx P_{\cos}(t) = ۱ - \frac{t^۲}{۲!} + \frac{t^۴}{۴!} - \cdots + (-۱)^n \frac{t^{۲n}}{(۲n)!}$$

با تقسیم این دو چندجمله‌ای، تقریبی برای تابع $\tan$ که در کران انتگرال قرار دارد به‌دست می‌آید:

$$P_{\tan}(x) = \frac{P_{\sin}(x)}{P_{\cos}(x)}$$

همچنین برای تابع نمایی زیر انتگرال از بسط تیلور تابع e^x استفاده می‌کنیم:

$$e^x \approx ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$$

با جایگذاری عبارت $-(x-۱)^۲$ در بسط فوق، چندجمله‌ای تقریب تابع زیر انتگرال که آن را P_f می‌نامیم، که $f(x) = e^{-(x-۱)^۲}$، به دست می‌آید:

$$P_f(t) = ۱ - (t-۱)^۲ + \frac{(-(t-۱)^۲)^۲}{۲!} + \frac{(-(t-۱)^۲)^۳}{۳!} + \cdots + \frac{(-(t-۱)^۲)^k}{k!}$$

۲.۱.۱ مرحله دوم: انتگرال‌گیری عددی به روش سیمپسون

به ازای عدد طبیعی زوج N، بازه انتگرال‌گیری $[۰, P_{\tan}(x)]$ را به N زیربازه هم‌فاصله با طول گام $h = \frac{P_{\tan}(x)}{N}$ تقسیم می‌کنیم. گره‌های انتگرال‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

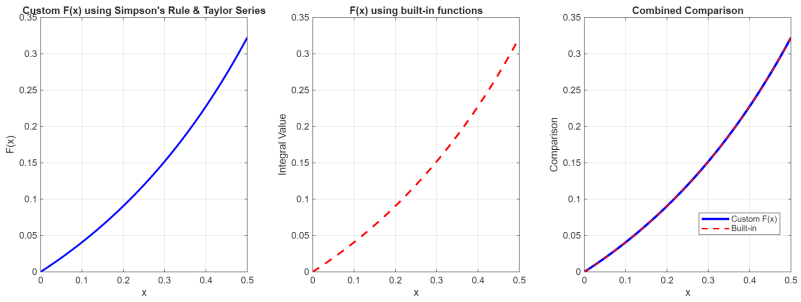
$$t_۰ = ۰, \quad t_i = t_۰ + i \cdot h \quad (i = ۰, ۱, \ldots, N)$$

در نهایت، مقدار انتگرال $F(x)$ با استفاده از فرمول سیمپسون مرکب محاسبه می‌شود:

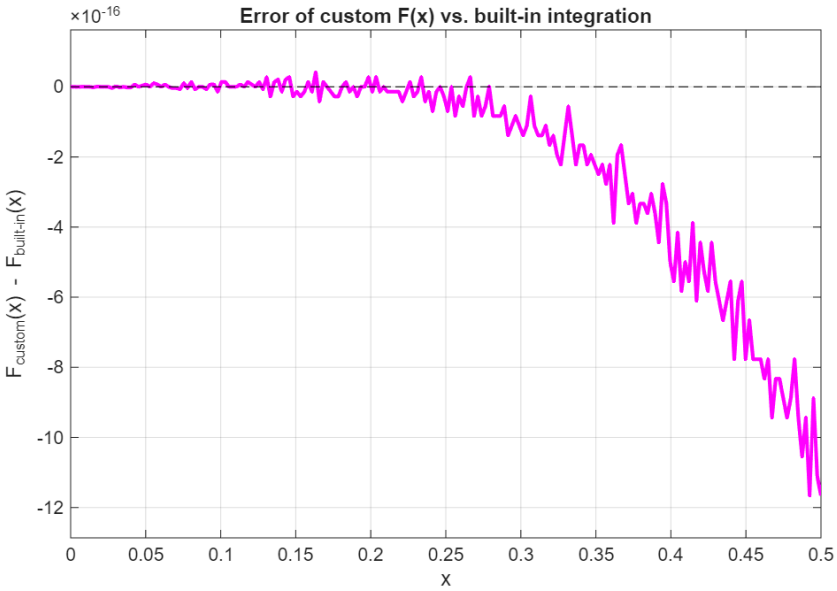
$$F(x) \approx \frac{h}{۳}\left[P_f(t_۰) + ۴\sum_{i=۱,۳,۵,\ldots}^{N-۱} P_f(t_i) + ۲\sum_{i=۲,۴,۶,\ldots}^{N-۲} P_f(t_i) + P_f(t_N)\right]$$

۲.۱ کدها و نمودارهای مربوطه

روش فوق برای محاسبه تابع F در برنامه `F.m` پیاده سازی شده و همچنین تابع به دست آمده با تابع متناظر محاسبه شده با روش های پیش‌فرض برنامه متلب مقایسه شده، که در زیر نمودار های مربوط به دو تابع در شکل ۱ و خطای میان دو تابع در شکل ۴ نمایش داده شده است؛ کد مربوط به رسم تصاویر در برنامه `plotting.m` ذخیره شده است.



شکل ۱: مقایسه تابع F محاسبه شده با روش ارائه شده و روش های پیش فرض متلب



شکل ۲: خطای میان تابع F محاسبه شده با روش ارائه شده و روش های پیش فرض متلب

۳.۱ تحلیل خطای محاسبه

در محاسبه تابع F به روش فوق، سه عامل تولید خطا وجود دارد:

۱. **خطای تقریب تیلور در محاسبه کران انتگرال ($\tan(x)$)**

۲. **خطای تقریب تیلور تابع زیر انتگرال($e^{-(x-۱)^۲}$)**

۳. **خطای روش انتگرالگیری سیمپسون**

۱.۳.۱ خظای محاسبه $\tan(x)$:

به ازای عدد طبیعی زوج n، اگر توابع $P_{\sin}$ و $P_{\cos}$ را مشابه بالا به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های تیلورِ درجه $۲n+۱$ و $۲n$ توابع sin و cos تعریف کنیم، آنگاه به ازای هر $x \in [۰, ۰,۵]$، مقادیر $\varepsilon_۱(x)$ و $\varepsilon_۲(x)$ در بازه $(۰, x)$ وجود خواهند داشت به‌طوری‌که:

$$\sin(x) = P_{\sin}(x) - \frac{\cos\big(\varepsilon_۱(x)\big)}{(۲n+۳)!}x^{۲n+۳} \geq P_{\sin}(x) - \frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}$$

$$\cos(x) = P_{\cos}(x) - \frac{\cos\big(\varepsilon_۲(x)\big)}{(۲n+۲)!}x^{۲n+۲} \geq P_{\cos}(x) - \frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}$$

و در نتیجه:

$$۰ \leq \sin(x) \leq P_{\sin}(x) \leq \sin(x) + \frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}$$

$$۰ < \cos(x) \leq P_{\cos}(x) \leq \cos(x) + \frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}$$

پس:

$$\frac{\sin(x)}{cos(x) + \frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}} \leq \frac{P_{\sin}(x)}{P_{\cos}(x)} \leq \frac{\sin(x) + \frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}}{\cos(x)}$$

برای سمت راست نامعادله داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}}{\cos(x)} &= \tan(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!\cos(x)} \\
&\leq \tan(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!\cos(۰,۵)} \\
&< \tan(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!(۰,۸)} \\
&< \tan(x)+\frac{۵}{۸}\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۳)!}
\end{aligned}$$

و برای سمت چپ:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{cos(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}} &= \tan(x)\left(\frac{\cos(x)}{\cos(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}}\right) \\
&= \tan(x)\left(۱-\frac{\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}}{\cos(x)+\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}}\right) \\
&= \tan(x)-\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}\tan(x)}{(۲n+۲)!\cos(x)+(۰,۵)^{۲n+۲}} \\
&\geq \tan(x)-\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}\tan(۰,۵)}{(۲n+۲)!\cos(۰,۵)+(۰,۵)^{۲n+۲}} \\
&> \tan(x)-\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}(۰,۶)}{(۲n+۲)!(۰,۸)+(۰,۵)^{۲n+۲}} \\
&> \tan(x)-\frac{(۰,۵)^{۲n+۲}(۰,۶)}{(۲n+۲)!(۰,۸)} \\
&= \tan(x)-\frac{۳}{۲^{۲n+۴}(۲n+۲)!}
\end{aligned}$$

اگر مقدار بیشتر این دو کران را در نظر بگیریم، و مقدار محاسبه شده تابع tan(یعنی $\frac{P_{\sin}}{P_{\cos}}$) را با $P_{\tan}$ نمایش دهیم، آنگاه به ازای هر $x \in [۰, ۰٫۵]$:

$$|P_{\tan}(x) - \tan(x)| < \frac{۳}{۲^{۲n+۴}(۲n+۲)!} \tag{۱}$$

۲.۳.۱ خطای محاسبه $e^{-(x-۱)^۲}$:

به ازای عدد طبیعی s، اگر $P_f(x)$ را مشابه بالا چندجمله‌ای تیلور درجه s تابع e^x در $-(x-۱)^۲$ تعریف کنیم، آنگاه به ازای هر $x \in [۰, ۰٫۵]$، مقداری $\varepsilon(x)$ در بازه $(-(x-۱)^۲, ۰)$ وجود خواهد داشت به‌طوری‌که

$$e^{-(x-۱)^۲} = P_f(x) + \frac{e^{\varepsilon(x)}}{(n+۱)!}\big(-(x-۱)^۲\big)^{n+۱}$$

از آنجا که

$$-۱ \leq -(x-۱)^۲ \leq -۰٫۲۵, \qquad \varepsilon(x) \in \big(-(x-۱)^۲, ۰\big),$$

خواهیم داشت

$$۱/e < e^{\varepsilon(x)} \leq ۱,$$

و همچنین

$$\big|-(x-۱)^۲\big|^{n+۱} \leq ۱.$$

در نتیجه،

$$\Big|e^{-(x-۱)^۲} - P_{\exp}\big(-(x-۱)^۲\big)\Big| \leq \frac{۱}{(n+۱)!}. \tag{۲}$$

۳.۳.۱ خطای روش انتگرال گیری سیمپسون :

اگر به ازای عدد طبیعی زوج m، تابع $g \in C^۴[۰, ۰٫۵]$ و $x \in [۰, ۰٫۵]$، مقدار انتگرال $\int_۰^x g(t)dt$ محاسبه شده با روش سیمپسون را با $S(g,x)$ نمایش دهیم، آنگاه:

$$|\int_۰^x g(t)dt - S(g,x)| \leq \frac{x^۵ M_{g^{(۴)}}}{۱۸۰m^۴} \tag{۳}$$

که $M_{g^{(۴)}}$ کران بالایی برای مشتق چهارم g است.

حال با در نظر گرفتن این سه مورد، با انتخاب اعداد زوج n و m و عدد طبیعی s، اگر $P_{\tan}$ و P_f به نحوی که توضیح داده شد محاسبه شوند(محاسبه توابع سینوس و کسینوس تا درجه $۲n+۱$ و $۲n$ و محاسبه تابع نمایی تا درجه s چندجمله‌ای تیلور های مربوطه)، $S(g,x)$ مقدار $\int_۰^x g(t)ft$ با روش سیمپسون مرکب با m گره باشد، آنگاه به ازای $x \in [۰, ۰٫۵]$، اگر قرار دهیم:

$$h := \frac{P_{\tan}(x)}{m}, \quad t_۰ := ۰, \quad t_i := t_۰ + i \cdot h \quad (i = ۰, ۱, \ldots, N)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned}
|S(P_f, P_{\tan}(x) - F(x)| &\leq |S(P_f, P_{\tan}(x) - S(f, P_{\tan}(x)| \\
&+ \left| S(f, P_{\tan}(x) - \int_۰^{P_{\tan}(x)} f(t)dt \right| \\
&+ \left| \int_۰^{P_{\tan}(x)} f(t)dt - \int_۰^{\tan(x)} f(t)dt \right|
\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی ۲ داریم:

$$|S(P_f, P_{\tan}(x) - S(f, P_{\tan}(x)| \leq \frac{P_{\tan}(x)}{(s+۱)!} < \frac{۰٫۵۵}{(s+۱)!}$$

با استفاده از نامساوی ۳ داریم:

$$|S(f, P_{\tan}(x) - \int_۰^{P_{\tan}(x)} f(t)dt| \leq \frac{P_{\tan}(x)^۵ M_{f^{(۴)}}}{۱۸۰m^۴}$$

با استفاده از برنامه `bounds.m`، که از مشتق گیری نمادین استفاده میکند، کران $M_{f^{(۴)}} = ۷٫۴۲$ را برای مشتق چهارم f پیدا میکنیم، و در نتیجه:

$$|S(f, P_{\tan}(x) - \int_۰^{P_{\tan}(x)} f(t)dt| \leq \frac{(۰٫۵۵)^۵(۷٫۴۲)}{۱۸۰m^۴} < \frac{۰٫۰۰۲۰۸}{m^۴}$$

و همین‌طور با توجه به نامساوی ۱ :

$$\begin{aligned}
\left| \int_۰^{P_{\tan}(x)} f(t)dt - \int_۰^{\tan(x)} f(t)dt \right| &= \left| \int_{\tan(x)}^{P_{\tan}(x)} f(t)dt \right| \\
&\leq |P_{\tan}(x) - \tan(x)| M_f \\
&< |P_{\tan}(x) - \tan(x)| \\
&< \frac{۳}{۲^{۲n+۴}(۲n+۲)!}
\end{aligned}$$

با کنار هم گذاشتن اینها:

$$|S(P_f, P_{\tan}(x) - F(x)| < \frac{۰,۵۵}{(s+۱)!} + \frac{۰,۰۰۲۰۸}{m^۴} + \frac{۳}{۲^{۲n+۴}(۲n+۲)!} \qquad (۴)$$

مثال) برای نتیجه با ۱۴ رقم با معنا(خطای کمتر از $۰,۵ * ۱۰^{-۱۴}$) کافی‌ست $n = ۶$، $m = ۱۰۰۰$ و $s = ۱۶$ اختیار کنیم.
توجه: در کران خطای بدست آمده، جمله دوم(خطای ناشی از انتگرال گیری عددی) با سرعت بسیار کمتری نسبت به دو جمله دیگر کاهش پیدا میکند، در نتیجه m باید نسبتا بزرگ اختیار شود، در حالی که با ثابت شدن m، افزایش n و s از حد کافی تاثیری در کران خطا نخواهد داشت.

۲ سوال ۱: قضیه مقدار میانگین انتگرال

۱.۲ بررسی شرایط قضیه

تابع F بر بازه $[۰, ۰,۵]$ مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته است؛ پس طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، نقطه $c_۲ \in (۰, ۰,۵)$ وجود دارد که:

$$\frac{\int_۰^{۰,۵} F(x)dx}{۰,۵ - ۰} = F(c_۲)$$

همین‌طور مشتق اول تابع به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F'(x) = e^{-(\tan(x)-۱)^۲}(\tan^۲(x) + ۱)$$

و از آنجایی که به ازای هر $x \in [۰, ۰,۵]$ داریم:

$$e^{-(\tan(x)-۱)^۲} > ۰ \quad , \quad \tan^۲(x) + ۱ > ۰$$

پس تابع F' در بازه $[۰, ۰,۵]$ مثبت است، و در نتیجه تابع F در این بازه **اکیداً صعودی** است. بنابراین نقطه $c_۲$ با شرایط فوق **یکتا** است.

۲.۲ روش حل سوال

اول با استفاده از روش سیمپسون، مقدار انتگرال $\int_۰^{۰,۵} F(x)dx$ را محاسبه می‌کنیم و مقدار میانگین انتگرال F را به طور تقریبی به‌دست می‌آوریم:

$$A := \frac{\int_۰^{۰,۵} F(x)dx}{۰,۵ - ۰} \approx ۱,۱۳۳۲۹۵۹۷۶۰۲۱۷۴۰$$

برای حل سوال از ترکیبی از دو روش **دوبخشی (Bisection)** و **تکرار ساده (Fixed-Point Iteration)** استفاده شده است. ابتدا پنج مرحله از روش دوبخشی انجام شده تا به بازه‌ای کوچک‌تر شامل $c_۲$ دست یابیم، که نتایج آن به صورت جدول ۱ بود:

جدول ۱: مراحل روش دوبخشی برای رسیدن به تقریب اولیه $c_۲$

نقطه وسط	بازه
۱/۴	[۰, ۱/۲]
۳/۸	[۱/۴, ۱/۲]
۵/۱۶	[۱/۴, ۳/۸]
۹/۳۲	[۱/۴, ۵/۱۶]
۱۷/۶۴	[۱/۴, ۹/۳۲]
۳۵/۱۲۸	[۱۷/۶۴, ۹/۳۲]

و در نتیجه به تقریب اولیه از $c_۲$ یعنی $\frac{۳۵}{۱۲۸}$ رسیده‌ایم. از این تقریب برای تعریف تابع $g(x)$ برای الگوریتم تکرار ساده استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$g_m(x) := x - m(F(x) - A)$$

که واضح است به ازای هر $m \neq ۰$، و هر x، x نقطه ثابت g_m است اگر و تنها اگر $F(x) = A$ باشد.
حال m را طوری انتخاب می‌کنیم که $|g'_m(x)|$ تا حد امکان کوچک شود (دلایل مربوطه در بخش تحلیل خطا). اما چون:

$$g'_m(x) = ۱ - mF'(x)$$

یک انتخاب خوب می‌تواند $m = \frac{۱}{F'(c_۲)}$ باشد که در این صورت g'_m در $c_۲$ صفر شده و در نتیجه در بازه کوچکی اطراف آن بسیار کوچک خواهد بود.
اما چون به $c_۲$ دسترسی نداریم، از تقریب اولیه به‌دست آمده استفاده می‌کنیم و مقدار $m := \frac{۱}{F'(\frac{۳۵}{۱۲۸})}$ و تابع زیر را قرار می‌دهیم:

$$g(x) := x - \frac{F(x) - A}{F'\left(\frac{۳۵}{۱۲۸}\right)}$$

مقدار $F'\left(\frac{۳۵}{۱۲۸}\right)$ را با استفاده از روش مشتق‌گیری عددی سه نقطه‌ای مرکزی تقریب می‌زنیم که به ازای $h = \frac{۰٫۵}{۱۰۰۰}$ به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$F'\left(\frac{۳۵}{۱۲۸}\right) \approx \frac{F\left(\frac{۳۵}{۱۲۸} + h\right) - F\left(\frac{۳۵}{۱۲۸} - h\right)}{۲h} \approx ۰٫۶۴۲۷۴۱$$

و در نتیجه:

$$m = \frac{۱}{F'\left(\frac{۳۵}{۱۲۸}\right)} \approx ۱٫۵۵۵۸۴$$

حال با استفاده از تابع g و نقطه شروع $\frac{۳۵}{۱۲۸}$، شش مرحله از روش تکرار ساده را پیاده‌سازی می‌کنیم و به نتایج جدول ۲ می‌رسیم:

۳.۲ کدها، نمودارها و نتایج به‌دست آمده

کد متلب مربوط به ریشه‌یابی: **توجه:** کد مربوطه در برنامه `derivative_mvt.m` ذخیره شده است.

۴.۲ تحلیل خطای روش

در این بخش به تحلیل خطای روش و اینکه آیا اصلاً تابع g تعریف شده در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق می‌کند یا خیر می‌پردازیم.
تابع $g(x)$ را در بازه $\left[\frac{۱۷}{۶۴}, \frac{۱۸}{۶۴}\right]$ که از طریق روش دوبخشی به‌دست آورده‌ایم در نظر می‌گیریم.

جدول ۲: نتایج شش مرحله از روش تکرار ساده برای محاسبه $c_۲$

تکرار (k)	مقدار x_k
۱	۰,۲۷۱۸۲۴۱۱۶۴۲۰۳۸۴
۲	۰,۲۷۱۸۲۱۳۶۹۳۵۳۵۶۸
۳	۰,۲۷۱۸۲۱۳۵۹۹۹۷۶۴۱
۴	۰,۲۷۱۸۲۱۳۵۹۹۶۵۷۴۹
۵	۰,۲۷۱۸۲۱۳۵۹۹۶۵۶۴۰
۶	۰,۲۷۱۸۲۱۳۵۹۹۶۵۶۴۰

چون مشتق دوم تابع F در بازه تعریف مثبت است، در نتیجه F' اکیداً صعودی بوده و به ازای هر $x \in \left[\frac{۱۷}{۶۴}, \frac{۱۸}{۶۴}\right]$ داریم:

$$F'\left(\frac{۱۷}{۶۴}\right) \leq F'(x) \leq F'\left(\frac{۱۸}{۶۴}\right) \tag{۵}$$

و در نتیجه برای مشتق $g'(x)$ خواهیم داشت:

$$۱ - mF'\left(\frac{۱۸}{۶۴}\right) \leq g'(x) \leq ۱ - mF'\left(\frac{۱۷}{۶۴}\right)$$

که با محاسبه عددی حدود این مقادیر به نابرابری‌های زیر می‌رسیم:

$$-۰,۰۱۶۶۷ < ۱ - mF'\left(\frac{۱۸}{۶۴}\right) < ۰ < ۱ - mF'\left(\frac{۱۷}{۶۴}\right) < ۰,۰۱۶۳۶$$

بنابراین به ازای هر $x \in \left[\frac{۱۷}{۶۴}, \frac{۱۸}{۶۴}\right]$ داریم:

$$|g'(x)| < ۰,۰۱۶۶۷$$

همین‌طور برای مشتق دوم تابع g داریم:

$$g''(x) = -mF''(x)$$

از آنجایی که F'' در بازه همواره مثبت است، پس g'' در این بازه منفی بوده و در نتیجه g' در بازه اکیداً نزولی است. همچنین چون $g'\left(\frac{۱۷}{۶۴}\right) > ۰$ و $g'\left(\frac{۱۸}{۶۴}\right) < ۰$، پس g' در بازه دقیقاً یک ریشه دارد که آن ریشه، نقطه ماکزیمم g در بازه است. این نقطه را با روش دوبخشی تقریب می‌زنیم:

$$x_{max} \approx ۰,۲۷۳۴۳۷۵۰۱۸۷۲۰۰۵ \quad , \quad g(x_{max}) \approx ۰,۲۷۱۸۲۴۱۱۶۴۲۰۳۹۵$$

و مقادیر تابع g در دو انتهای بازه به صورت زیر است:

$$g\left(\frac{۱۷}{۶۴}\right) \approx ۰,۲۷۱۸۲۴۱۱۶۴۲۰۳۹۵ < ۰,۲۷۱۸۲۵$$
$$g\left(\frac{۱۸}{۶۴}\right) \approx ۰,۲۷۱۷۵۹۲۱۵۵۳۲۲۹۳ > ۰,۲۷۱۷۵$$

پس به ازای هر $x \in \left[\frac{۱۷}{۶۴}, \frac{۱۸}{۶۴}\right]$ داریم:

$$\frac{۱۷}{۶۴} < ۰,۲۷۱۷۵ < g(x) < ۰,۲۷۱۸۲۵ < \frac{۱۸}{۶۴} \implies g\left(\left[\frac{۱۷}{۶۴}, \frac{۱۸}{۶۴}\right]\right) \subseteq \left[\frac{۱۷}{۶۴}, \frac{۱۸}{۶۴}\right]$$

بنابراین تابع g در شرایط **قضیه نقطه ثابت (Fixed-Point Theorem)** صدق می‌کند.
همچنین با توجه به قضایای خطای روش تکرار ساده و به ازای تقریب‌های x_i به‌دست آمده با نقطه آغاز $\frac{۳۵}{۱۲۸}$، به ازای هر تکرار i رابطه خطای زیر برقرار است:

$$|x_i - c_۲| \leq M_{g'}^i \cdot \left(\frac{۱}{۱۲۸}\right) < \frac{(۰,۰۱۶۶۷)^i}{۱۲۸}$$

که در آن $M_{g'}$ کران بالایی مشتق $|g'|$ است.
برای مثال به ازای $i = ۶$ مرحله تکرار داریم:

$$|x_۶ - c_۲| < ۱,۶۸ \times ۱۰^{-۱۳}$$

بنابراین حداقل تا **۱۲ رقم بامعنا** دقت انتظار می‌رود.

۳ سوال ۲: قضیه مقدار میانگین مشتق

۱.۳ بررسی شرایط قضیه

برای بررسی شرایط قضیه و اثبات وجود و یکتایی نقطه c، ابتدا وجود چنین نقطه‌ای را بررسی می‌کنیم:

- تابع $e^{-(t-۱)^۲}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، در نتیجه طبق قضیه اساسی حساب، تابع زیر نسبت به x مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\left(\int_۰^x e^{-(t-۱)^۲} dt\right)' = e^{-(x-۱)^۲}$$

همچنین تابع $\tan(x)$ روی بازه $[۰, ۰,۵]$ مشتق‌پذیر است و $(\tan(x))' = ۱ + \tan^۲(x)$ روی $(۰, ۰,۵)$ است.

- پس طبق قضیه مشتق زنجیره‌ای، تابع $F(x)$ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن برابر است با:

$$F'(x) = e^{-(\tan(x)-۱)^۲} \cdot (۱ + \tan^۲(x))$$

بنابراین تابع بر بازه $[۰, ۰,۵]$ پیوسته و بر $(۰, ۰,۵)$ مشتق‌پذیر است، پس طبق قضیه مقدار میانگین، نقطه $c \in (۰, ۰,۵)$ وجود دارد که:

$$F'(c) = \frac{F(۰,۵) - F(۰)}{۰,۵ - ۰}$$

- همین‌طور طبق قضایای مشتق، تابع F' روی $(۰, ۰,۵)$ مشتق‌پذیر است و اگر قرار دهیم:

$$g(x) := \left(e^{-(\tan(x)-۱)^۲}\right)' = -۲e^{-(\tan(x)-۱)^۲}(\tan(x) - ۱)(۱ + \tan^۲(x))$$

آنگاه مشتق دوم $F''(x)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F''(x) = g(x) + g(x)\tan^۲(x) + ۲e^{-(\tan(x)-۱)^۲}\tan(x) = (۱+\tan^۲(x)) \cdot \left[g(x) + ۲e^{-(\tan(x)-۱)^۲} \cdot \tan(x)\right]$$

عبارات $e^{-(\tan(x)-۱)^۲}$ و $(۱ + \tan^۲(x))$ کلاً روی $\mathbb{R}$ مثبت هستند و عبارت $۱ - \tan(x)$ در $[۰, ۰,۵]$ مثبت است، در نتیجه $g(x)$ در $[۰, ۰,۵]$ مثبت است. همین‌طور $\tan(x)$ در $(۰, ۰,۵)$ مثبت است و در نتیجه $F''(x)$ در $(۰, ۰,۵)$ مثبت بوده و تابع F' در بازه $[۰, ۰,۵]$ **اکیداً صعودی** می‌باشد.
پس نقطه یکتای $c \in (۰, ۰,۵)$ موجود است که:

$$F'(c) = \frac{F(۰,۵) - F(۰)}{۰,۵ - ۰}$$

۲.۳ روش حل سوال

نقاط x_i از بازه مربوطه را به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم و به ازای مقدار مثبت کوچک h، به ازای هر x_i، مقدار تقریبی مشتق F در x_i را با **روش سه نقطه‌ای مرکزی** محاسبه می‌کنیم:

$$y_i := \frac{F(x_i + h) - F(x_i - h)}{۲h}$$

تابع درون‌یاب $P(x)$ گذرنده از نقاط (x_i, y_i) را با **روش لاگرانژ** محاسبه می‌کنیم. این تابع تقریباً برای تابع $F'(x)$ در بازه مربوطه است.

قرار می‌دهیم:

$$m := \frac{F(۰٫۵) - F(۰)}{۰٫۵ - ۰}$$

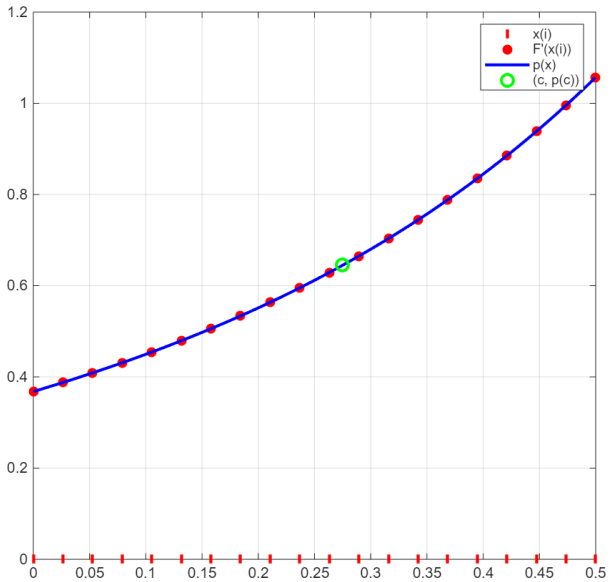
اگر خطای میان $P(x)$ تا حد کافی کوچک باشد، آنگاه $(P(۰) - m)(P(۰٫۵) - m) < ۰$ خواهد بود و در نتیجه تابع $P(x) - m$ در بازه حداقل یک ریشه خواهد داشت. با استفاده از **روش دو بخشی** یک چنین ریشه‌ای را به طور تقریبی محاسبه می‌کنیم و نقطه بدست آمده را به عنوان تقریبی برای c در نظر می‌گیریم.

۳.۳ کدها، نمودارها و نتایج به‌دست آمده

روش فوق به ازای $n = ۲۰$ نقاط هم‌فاصله در برنامه `derivative_mvt.m` پیاده‌سازی شده و در آخر هم با استفاده از روش دو بخشی تا ۸ رقم با معنا محاسبه شده و نتیجه زیر حاصل شده است:

$$c = ۰٫۲۷۴۹۲۷۹۰$$

نمودار مربوط به برنامه بالا، شامل نقاط انتخاب شده، مقادیر مشتق محاسبه شده، منحنی درون‌یاب گذرنده از آن‌ها و نقطه c پیدا شده در شکل ۳ نشان داده شده و کد مربوط به رسم آن در برنامه `Plotting.m` ذخیره شده است.



شکل ۳: نمودار مشتق عددی $F'(x_i)$، منحنی درون‌یاب لاگرانژ $P(x)$ و تعیین نقطه $(c, P(c))$