$$\boxed{F(x) = \int_0^{\tan(x)} e^{-(t-1)^2}\,dt}$$

محاسبه $F(x)$

محاسبه $\tan(x)$

- برای محاسبه تابع تانژانت، ابتدا توابع سینوس و کسینوس را با استفاده از چند جمله ای تیلور مربوطه، با خطای لاگرانژ مربوطه، تقریب می‌زنیم و سپس با تقسیم نتایج به تقریبی برای تابع تانژانت می‌رسیم:

• به ازای $x \in [0, 0.5]$; $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}\cos(\varepsilon_x)}{(2n+3)!}$$

که $0 \le \varepsilon_x \le 0.5$. پس اگر از چند جمله ای تیلور درجه $(2n+1)$ام تابع سینوس برای محاسبه $P^{(1)}(x)$ استفاده کنیم، آنگاه:

$$|\sin(x) - P^{(1)}(x)| = \frac{x^{2n+3}|\cos(\varepsilon_x)|}{(2n+3)!} \le \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

• همین طور برای تابع کسینوس،

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}\cos(\varepsilon'_x)}{(2n+2)!}$$

پس اگر از چند جمله تیلور درجه $2n$ تابع کسینوس $P^{(2)}(x)$ استفاده کنیم:

$$|\cos(x) - P^{(2)}(x)| = \frac{x^{2n+2}|\cos(\varepsilon'_x)|}{(2n+2)!} \le \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \le \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

- اگر n را زوج اختیار کنیم :

$$0 \le \sin(x) \le P^{(1)}(x) \le \sin(x) + \frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$0 < \cos(x) \le P^{(2)}(x) \le \cos(x) + \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

پس :

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x) + \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}} \le \frac{P^{(1)}(x)}{P^{(2)}(x)} \le \frac{\sin(x) + \frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\cos(x)}$$

سمت راست

$$= \tan(x) + \frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)! \cdot \cos(x)} \le \tan(x) + \frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)! \cos(0.5)}$$

$$< \tan(x) + \frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)! \cdot (0.8)} = \boxed{\tan(x) + \frac{5}{8} \cdot \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+3)!}}$$

سمت چپ

$$= \tan(x)\left(\frac{\cos(x)}{\cos(x) + \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}}\right) = \tan(x)\left(1 - \frac{\frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\cos(x) + \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}}\right)$$

$>0 \longrightarrow$ پس $P_{\tan}(x) > 0$

$$= \tan(x) - \frac{(0.5)^{2n+2} \tan(x)}{(2n+2)! \cos(x) + (0.5)^{2n+2}} \ge \tan(x) - \frac{(0.5)^{2n+2} \tan(0.5)}{(2n+2)! \cos(0.5) + (0.5)^{2n+2}}$$

$$> \tan(x) - \frac{(0.5)^{2n+2}(0.6)}{(2n+2)!(0.8) + (0.5)^{2n+2}} > \tan(x) - \frac{(0.5)^{2n+2}(0.6)}{(2n+2)!(0.8)}$$

$$= \boxed{\tan(x) - \frac{3}{4} \cdot \frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!}}$$

$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ یکنوا

$\frac{P_1(0)}{P_2(0)} = 0$ و $x \in (0, 0.5]$

در نتیجه :

$$\left|\frac{P^{(1)}(x)}{P^{(2)}(x)} - \tan(x)\right| < \frac{3}{4}\cdot\frac{(0.5)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \boxed{\frac{3}{2^{2n+4}(2n+2)!}}$$

- اگر مقدار محاسبه شده با این روش، به ازای $n\in\mathbb{N}$ زوج، را با $P_{\tan}(x)$ نمایش دهیم، آنگاه به ازای هر $x\in[0,0.5]$:

$$\boxed{\left|P_{\tan}(x) - \tan(x)\right| < \frac{3}{2^{2n+4}(2n+2)!}} \qquad (6)$$

مثال) برای دقت تا چهار رقم با معنا (یعنی خطایی کمتر از 0.5×10^{-4}) کافی است n دو اختیار شود.

یعنی :

$$P_{\tan(x)} := \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}, \quad \left|P_{\tan}(x) - \tan(x)\right| < \frac{3}{256\times720} = \frac{1}{61440}$$

$$< 0.1628\times10^{-4} < 0.5\times10^{-4}$$

مثال) برای پنجاه رقم با معنا، کافی است n 18 اختیار شود.

مثال) برای $n=50$ (که در کد پیاده سازی شده استفاده شده)، 192 رقم با معنا خواهیم داشت.

محاسبه $e^{-(t-1)^2}$

- از چند جمله‌ای تیلور تابع نمایی (e^x) برای محاسبه استفاده می‌کنیم:

• به ازای $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi_x} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

که ξ_x بین x و صفر است.

• پس اگر از چند جمله‌ای تیلور درجه n تابع نمایی برای محاسبه استفاده کنیم: $P^{(1)}(x)$

$$|P^{(1)}(x) - e^x| = \frac{e^{\xi_x} |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

به ازای $t \in [0, 0.5]$, $-1 \le -(t-1)^2 \le -0.25$. در نتیجه:

$$|P^{(1)}(-(t-1)^2) - e^{-(t-1)^2}| = \frac{e^{\xi_{-(t-1)^2}} (t-1)^{2n+2}}{(n+1)!} \le \frac{e^0 (t-1)^{2n+2}}{(n+1)!} = \frac{(t-1)^{2n+2}}{(n+1)!}$$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}$$

• اگر تقریب نمایی، یعنی $P^{(1)}(-(x-1)^2)$ را با $P_{e^{-(x-1)^2}}(x)$ نمایش دهیم، آنگاه به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، هر $x \in [0, 0.5]$:

$$\boxed{|P_{e^{-(x-1)^2}}(x) - e^{-(x-1)^2}| \le \frac{1}{(n+1)!}} \qquad (2)$$

مثال) برای $n=50$ ، حاصل حداقل 64 رقم با معنا دارد.

- حال اگر m, n زوج و عدد طبیعی s قرار دهیم:

$P_{\tan}(t)$: محاسبه tan با استفاده از محاسبه sin و cos درجه $2n+1$ تا درجه $2n$

$g(t) := e^{-(t-1)^2}$,

$P_g(t)$: تقریب $g(t)$ با محاسبه exp تا درجه s

$S(f, n)$: مقدار محاسبه شده $\int_0^1 f$ با روش سیمپسون با استفاده از m نقطه (به ازای هر تابع f)

- آنگاه: به ازای هر $x \in [0, 0.5]$:

$$F(x) = \int_0^{\tan(x)} g(t)\,dt \approx S(P_g, P_{\tan}(x))$$

$$\Downarrow$$

$$|S(P_g, P_{\tan}(x)) - F(x)| \leq |S(P_g, P_{\tan}(x)) - S(g, P_{\tan}(x))| \rightarrow \text{(تاثیر خطای محاسبه } e^{-(t-1)^2}\text{)}$$

$$+ \left|S(g, P_{\tan}(x)) - \int_0^{P_{\tan}(x)} g(t)\,dt\right| \rightarrow \text{(تاثیر خطای محاسبه انتگرال با روش سیمپسون)}$$

$$+ \left|\int_0^{P_{\tan}(x)} g(t)\,dt - \int_0^{\tan(x)} g(t)\,dt\right| \rightarrow \text{(تاثیر خطای محاسبه } \tan(x)\text{)}$$

$\left(h := \frac{P_{\tan}(x)}{m},\ x_i := ih \ (i \in \{0, \dots, m\})\right)$

- از (2) داریم:

$$|S(P_g, P_{\tan}(x)) - S(g, P_{\tan}(x))| \leq \frac{h}{3}\left(\frac{1}{(s+1)!} + 4\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{1}{(s+1)!}\right) + 2\left(\frac{m-2}{2}\right)\left(\frac{1}{(s+1)!}\right) + \frac{1}{(s+1)!}\right)$$

$$= \frac{h}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}m}{(s+1)!}\right) = \frac{mh}{(s+1)!} = \frac{P_{\tan}(x)}{(s+1)!} < \boxed{\frac{0.55}{(s+1)!}}$$

(کران 0.55 برای $P_{\tan}$ انتخاب شده)

- از خطای روش سیمپسون:

$$\left|S(g, P_{\tan}(x)) - \int_0^{P_{\tan}(x)} g(t)\,dt\right| \leq \frac{h^4 \cdot P_{\tan}(x) \cdot M}{180} = \frac{P_{\tan}^5(x) \cdot M}{180 m^4}$$

که M کران بالایی برای مشتق چهارم $g(t) = e^{-(t-1)^2}$ است، با استفاده از قطب $M = 7.42$ انتخاب می‌کنیم:

$$\left|S(g, P_{\tan}(x)) - \int_0^{P_{\tan}(x)} g(t)\,dt\right| \leq \frac{(0.55)^5 (7.42)}{180 m^4} < \boxed{\frac{0.00208}{m^4}}$$

همچنین طبق با استفاده از (1):

$$\left| \int_0^{P_{tan(n)}} g(t)\,dt - \int_0^{tan(n)} g(t)\,dt \right| = \left| \int_{tan(n)}^{P_{tan(n)}} g(t)\,dt \right| \le |P_{tan(n)} - tan(n)|\, M_g$$

$$< |P_{tan(n)} - tan(n)|$$

$$< \boxed{\frac{3}{2^{2n+4}\,(2n+2)!}}$$

که M_g کران بالایی برای $e^{-(t-1)^2}$ که همه دانیه در کل دامنه از 1 کوچکتر است.

پس در نهایت:

$$\boxed{|S(P_g, P_{tan(n)}) - F(n)| < \frac{0.55}{(s+1)!} + \frac{0.00208}{m^4} + \frac{3}{2^{2n+4}\cdot(2n+2)!}}$$

مثال) برای نتیجه با 14 رقم بامعنا (خطای کمتر از 0.5×10^{-14}) کافی است $n=6$ ، $m=1000$ ، $s=16$ اختیار کنیم.

توجه: در کران خطای بدست آمده، جمله دوم (خطای ناشی از انتگرال‌گیری عددی) با سرعت بسیار کمتری نسبت به دو جمله دیگر کاهش پیدا می‌کند، در نتیجه m باید نسبتا بزرگ (مثلا 1000 برای 14 رقم بامعنا) اختیار شود، در حالی که با ثابت شدن m، افزایش n و s از حد کافی (مثلا $n=6$ ، $s=16$ برای 14 رقم بامعنا)، تاثیری در کران خطا نخواهد داشت.