Le spectromètre à réseau

Épisode 1

Mesurer des angles pour déterminer des longueurs d'onde

Introduction

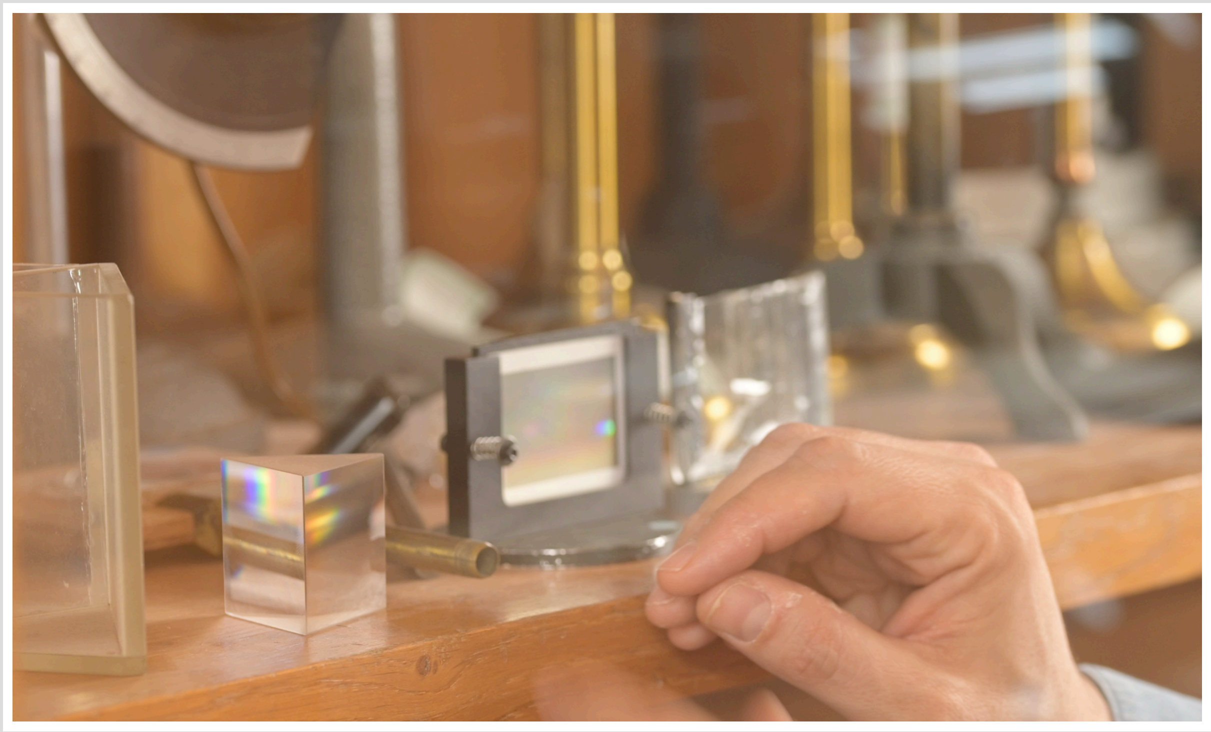
Pour un physicien, les messages de la lumière sont nombreux et riches d'enseignements. **Déterminer avec précision la longueur d'onde d'un rayonnement** est le point de départ de nombreuses analyses dans des champs d'application très variés, des plus fondamentaux aux plus quotidiens.

I - Goniomètre et spectromètre

Un **goniomètre** est un instrument de précision qui sert à **mesurer** des angles.

Le **spectromètre**, comme son nom l'indique, est l'instrument qui permet de **décomposer** le faisceau lumineux issue d'une source dans l'ensemble des lumières colorées qui constitue son spectre, et de **mesurer** leurs longueurs d'onde.

On peut obtenir un spectromètre en associant le goniomètre avec un système dispersif comme le prisme, qui **réfracte** chaque rayon coloré selon un angle différent.
On peut aussi utiliser un réseau qui, lui, **diffracte** la lumière incidente dans des directions différentes et dans des ordres différents.



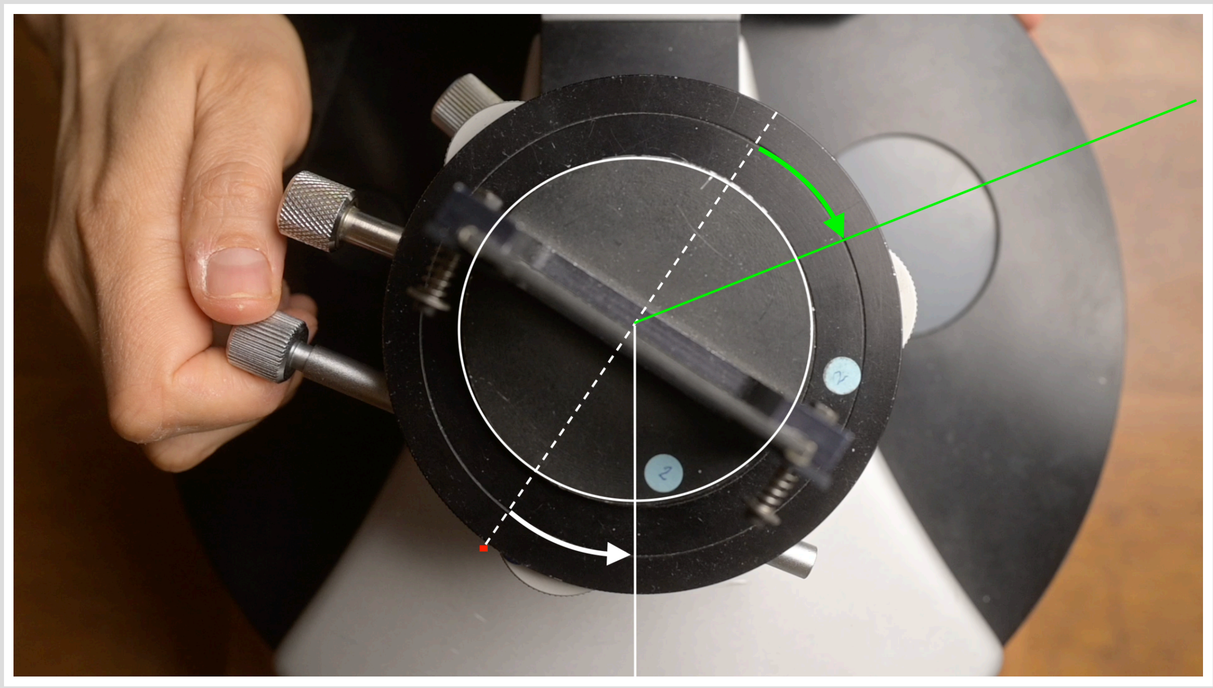
On a d'ailleurs pris l'habitude de classer les sources de lumière en fonction de la **nature de leur spectre** : une lampe blanche possède un spectre **continu** alors qu'une lampe spectrale montre un **spectre de raies**, contenant un nombre discret de contributions spectrales qui sont comme la *signature* de l'élément chimique qui les a émis.

II - Mesurer des angles pour déterminer des longueurs d'onde.

À partir de la loi de la réfraction dans le cas du prisme, ou des lois de la diffraction dans le cas du réseau, on peut établir une expression mathématique, une formule, qui nous permet de **calculer** les longueurs d'onde à partir des angles que l'on peut **mesurer directement**.

Formule fondamentale du réseau

$$sin(\theta)-sin(\theta_0)=p\frac{\lambda}{a}$$

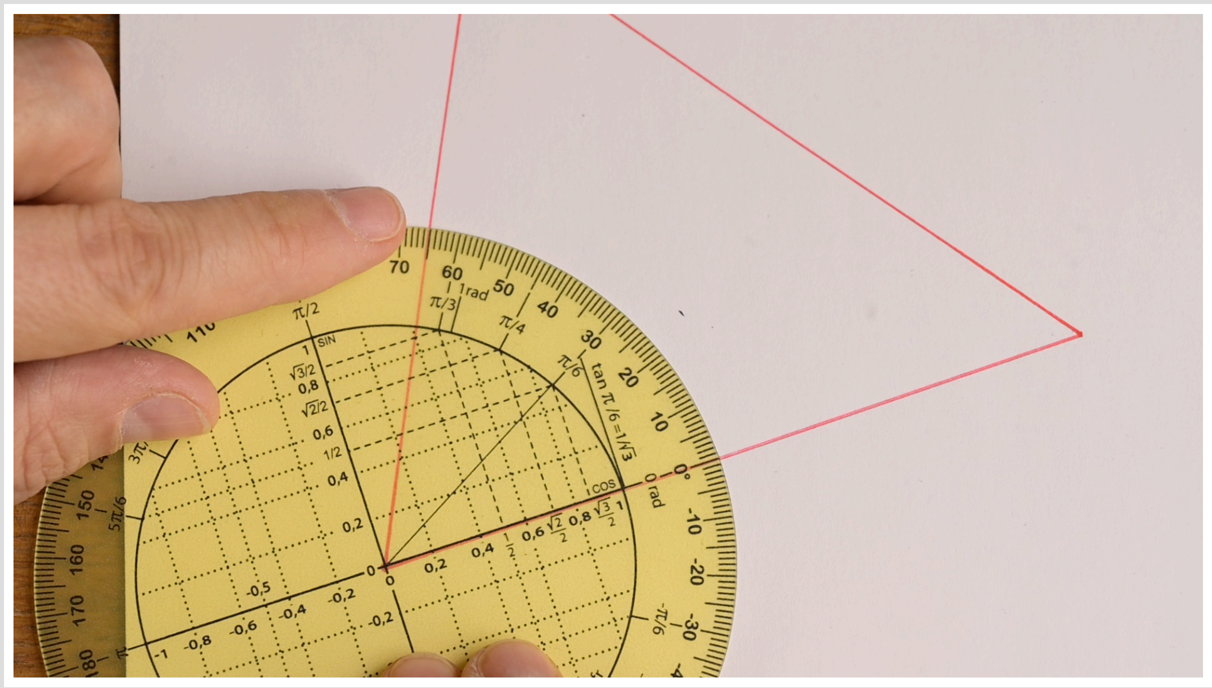


> En particulier, la *formule fondamentale du réseau* nous montre que pour calculer la longueur d'onde λ, il nous faudra, **en pratique, faire la mesure de deux angles** : *l'angle d'incidence* θ_o et l'angle θ auquel est diffractée la lumière colorée considérée dans l'ordre d'interférence p considéré :

$$\lambda = \frac{a}{p}[sin(\theta)-sin(\theta_0)]$$

III - Analogie entre un rapporteur et un goniomètre.

On pourrait dire qu'un goniomètre est comme le **rapporteur** des leçons de géométrie. Cette analogie va d'ailleurs nous permettre de préciser un point de méthode et un point de vocabulaire.



Remarquons tout d'abord que pour mesurer un angle, nous effectuons toujours **deux visées**. De la même manière que, sur un banc d'optique, on détermine toujours une distance en soustrayant **deux abscisses** ; sur un goniomètre, on détermine toujours un angle en soustrayant **deux azimuts**.
On écrira par exemple :

$$\theta_1 = (\alpha_1-\alpha_0)$$

en réservant les lettres θ_i pour les angles et les lettres α_i pour les azimuts.

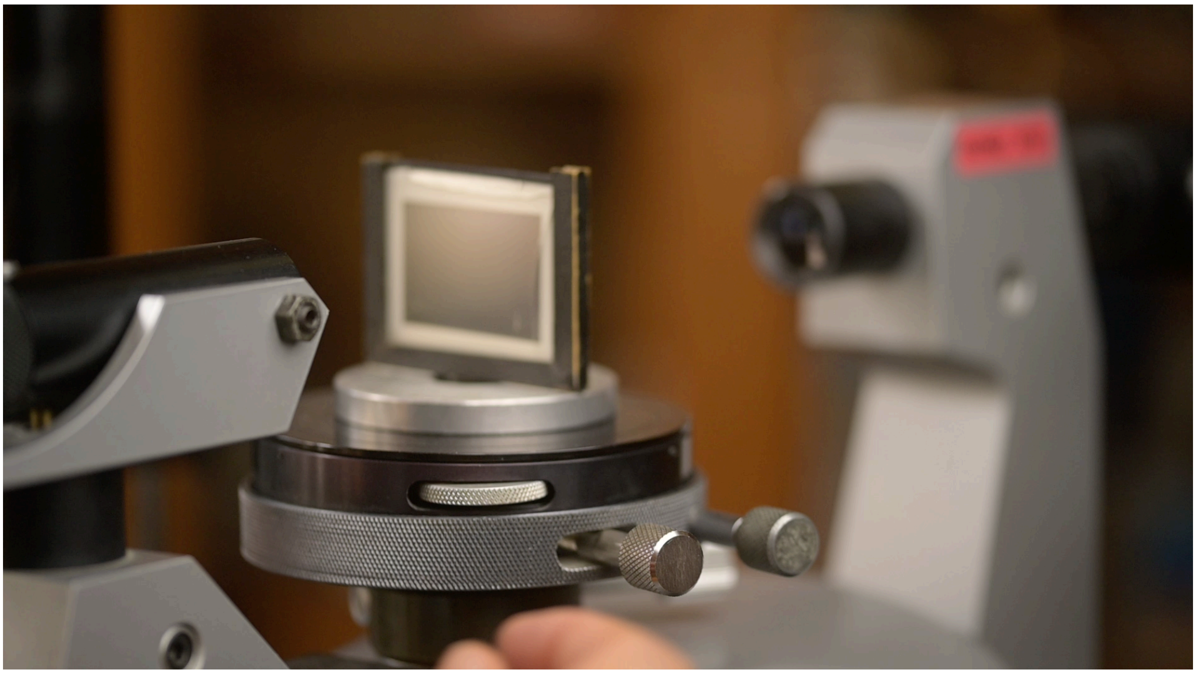
> Cette *distinction de vocabulaire* nous permet de garder en tête que chaque mesure d'angle θ_1 est "grosse" des **incertitudes expérimentales** que l'on peut attacher à chacune des **deux visées** et à chacune des **deux lectures** d'azimuts α_1 et α_2.

IV - Différences entre un rapporteur et un goniomètre.

Si le rapporteur présente bien 90 graduations pour un angle droit, 360 graduations pour un tour complet, le goniomètre, lui, présente ... **60 fois plus de graduations** ! Non pas une graduation pour chaque degré mais une graduation pour chaque minute d'arc. Commercialement, ces instruments sont dits **30 secondes**, comme la *demie-étendue* que l'on peut associer à la lecture des graduations.

Pour justifier une telle ambition, le goniomètre est équipée d'un **système de visée de précision** qui est constitué d'une *partie optique* (le **collimateur** et la **lunette**) et d'une *partie mécanique*. On distinguera la **vis de serrage**, que l'on désserre pour effectuer des mouvements grossiers avant de la ressérer, et la **vis de déplacement micrométrique** qui permet le déplacement fin de la lunette.

On notera l'existence d'un système mécanique similaire sur le plateau du goniomètre. Une vis de serrage permet des mouvements grossiers et, une fois cette dernière resserrée, la vis de déplacement micrométrique permet de contrôler des mouvements fins de rotation du plateau.



Sur des goniomètres d'étude plus anciens, on peut noter que le **plateau n'est pas mobile**. En revanche, ils étaitent équipées d'une lunette supplémentaire, dont la fonction etait de **mesurer l'angle d'incidence θ_0**, en visant la part de la lumière incidente qui est réfléchie sur la face d'entrée du prisme.

V - Comment se servir du goniomètre ? Le protocole à appliquer

La manière dont il faut se servir du goniomètre répond, bien entendu, au souci d'effectuer les mesures les plus précises possibles.

> **Protocole**
>
> En résumé, il y a quatre étapes à répéter pour chaque mesure :
>
> 1. **déplacer grossièrement la lunette** pour visualiser l'ordre d'interférence considéré ;
> 2. **régler l'angle d'incidence** dans la situation particulière du minimum de déviation, beaucoup plus

de détails sur ce sujet dans un instant ;
3. **viser la raie considérée** le plus précisément possible ;
4. **faire la lecture de l'azimut** correspondant, le relever et le faire apparaître dans son compte-rendu.

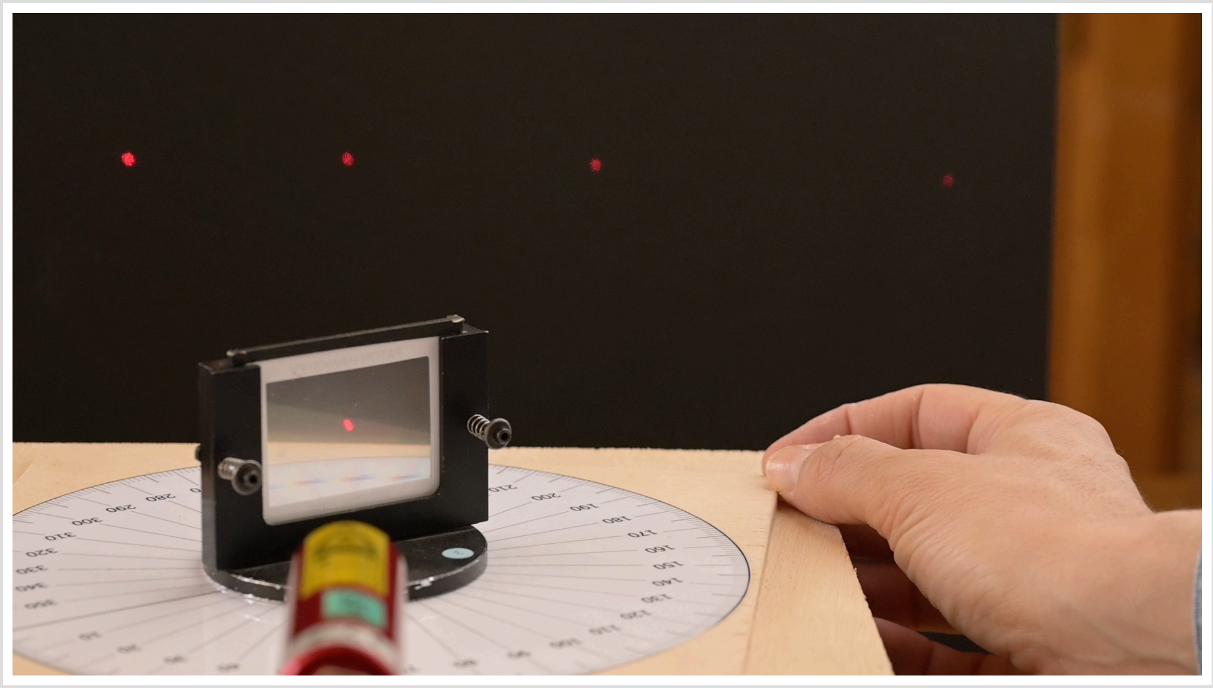
L'enjeu principal de cette vidéo est de comprendre que ce protocole découle de la prise en compte des **symétries** exibées par le phénomène physique exploité.

VI - Symétries des images diffractées au minimum de déviation

Approche expérimentale

Pour un réseau de pas donné et pour une longueur d'onde donnée (celle du laser rouge ici), les angles auxquels on peut repérer les différents ordres d'interférence sont des fonctions de l'angle d'incidence θ_0.

À l'ordre zéro, la lumière n'est pas du tout déviée, quelle que soit la longueur d'onde. Dans la pratique, nous repèrerons les raies colorées par rapport à cette direction que l'on peut viser, plutôt que par rapport à la normale au réseau, comme nous l'avions fait dans la mise en place théorique. On considèrera donc dorénavant la *déviation* D d'une raie colorée, grandeur mesurable, plutôt que son angle de sortie θ.



En faisant varier l'angle d'incidence de manière monotone entre zéro et 90 degrés puis de nouveau de manière monotone entre 90 degrés et zéro, on observe que, pour une raie colorée choisie dans un ordre donné, **l'angle de déviation passe par un minimum**.

> En réglant l'angle d'incidence de manière **à se placer au minimum de déviation**, on découvre une situation qui présente des symétries remarquables :

- on peut tout d'abord remarquer que le plan du réseau se situe alors selon **la bissectrice** de l'angle formé par les directions du collimateur et de la lunette. Autrement dit, au minimun de déviation, l'angle d'incidence et l'angle de visée sont **égaux en valeur et opposés en signe**.
- On peut ensuite remarquer que l'on retrouve ce même angle entre la direction de la normale au réseau et la direction de la lumière qui n'est pas déviée dans *l'ordre zéro*. Autrement dit, **l'angle de déviation D_{min}** vaut alors exactement **moins deux fois** l'angle d'incidence.

Mesurer la *déviation minimale* suffit donc à déterminer non seulement D_{min} mais également θ_0 et θ géométriquement, sans mesure supplémentaire.

En réglant l'angle d'incidence par rotation du plateau, de manière à se placer au minimum de déviation, la présence d'une deuxième lunette n'est plus nécessaire. Nous pouvons donc faire **l'économie de la mesure** de l'angle d'incidence.

L'expression permettant de calculer λ se ramène alors à une fonction d'un seul angle et non plus de deux.

En nous plaçant par exemple au minimum de déviation pour la raie verte de l'ordre $p= -1$, on a :

$$\theta=\frac{D_{min}}{2}=-\theta_o$$
d'où :
$$\lambda = -a[sin(\frac{D_{min}}{2})-sin(\frac{-D_{min}}{2})]$$

$$\lambda = -2a[sin(\frac{D_{min}}{2})]$$

On cherchera enfin à exprimer D en fonction des azimuts α_1 et α_0 qui sont les grandeurs mesurés directement et auxquelles on pourra attacher des incertitudes :

> $$\lambda = 2asin(\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2})$$

Approche par l'exploration du modèle mathématique

On peut commencer par remarquer que pour $p=0$, la formule fondamentale du réseau se réduit à $sin(\theta)=sin(\theta_0)$, soit $\theta = \theta_0$. Une partie de la lumière incidente n'est donc pas du tout déviée, quel que soit l'angle d'incidence et quelle que soit la longueur d'onde.

Il devient donc *plus pratique* de repérer les différentes raies colorées par rapport à l'ordre zéro que l'on peut viser à la lunette, que par rapport à la normale au réseau.

Par construction, il vient :

$$D=\theta-\theta_0$$

Et l'équation fondamentale du réseau devient :

$$sin(\theta_0+D)=sin(\theta_0)+p\frac{\lambda}{a}$$

On cherche la dérivée de cette expression par rapport à θ_0.

Pour le membre de droite de l'égalité, il vient immédiatement :

$$\frac{d(sin\theta_0+p\frac{\lambda}{a})}{d\theta_0}=cos\theta_0$$

Pour le membre de gauche de l'égalité, comme :

$$sin(\theta_0+D)=sin\theta_0cosD+cos\theta_0sinD$$

Il vient :

$\begin{align} \frac{d(sin(\theta_0+D))}{d\theta_0} & =cos\theta_0cosD-sin\theta_0sinD\frac{dD}{d\theta_0} \\ & -sin\theta_0sinD+cos\theta_0cosD\frac{dD}{d\theta_0} \\ \end{align}$

$\begin{align} \frac{d(sin(\theta_0+D))}{d\theta_0} & = cos\theta_0cosD(1+\frac{dD}{d\theta_0}) \\ & -sin\theta_0sinD(1+\frac{dD}{d\theta_0}) \end{align}$

Au minimum de déviation on a :

$$\frac{dD}{d\theta_0}=0$$

L'égalité des deux membres s'écrit alors :

$$cos\theta_0=cos\theta_0cosD_{min}-sin\theta_0sinD_{min}$$

Ce qui permet d'aboutir à l'équation :

$$cos\theta_0=cos(\theta_0+D_{min})$$

Cette équation admet deux solutions.
La première solution, $D_{min}=0$, correspond à l'ordre zéro.
La seconde correspond bien aux symétries décrites plus haut :

> $$D_{min}=-2\theta_0$$

VII - Symétrie de la situation de mesure

Approche expérimentale

Il est légitime de demander à notre *modèle physique* de rester pertinent que l'on regarde le phénomène depuis **le haut** ... ou bien qu'on le regarde depuis **le bas**.

Il existe donc nécessairement une position symétrique du réseau et de la lunette qui réalise exactement la même configuration angulaire ... de l'autre côté du goniomètre.

Protocole

Résumé en trois étapes, nous allons :
1- **viser la raie verte** dans l'ordre $p=-1$ et déterminer son azimut α_1 au minimum de déviation ;
2- **déplacer le réseau**, par rotation du plateau, approximativement dans la position symétrique à la précédente par rapport à l'axe qui est la direction de la lumière incidente ;
3- **viser la raie verte** une seconde fois, mais dans l'ordre $p=+1$ de cette nouvelle configuration et déterminer son azimut α_2 au minimum de déviation.

On obtient donc :

$$\lambda = -2asin(\frac{(2D_{min}/2)}{2})$$

On cherchera ici également à exprimer λ en fonction des azimuts α_1 et α_2 qui sont les grandeurs mesurés directement et auxquelles on pourra attacher des incertitudes :

> $$\lambda = 2asin(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4})$$

En effectuant deux visées, nous avons cette fois calculé l'angle ($2D_{min}$). L'incertitude expérimentale attachée à la détermination de l'angle D_{min} est donc de nouveau divisée par deux !

Approche par l'exploration du modèle mathématique

La transformation mathématique qui correspond au changement de point de vue haut/bas peut être vue comme un retournement de l'image, une rotation d'un demi-tour autour de l'axe qui est vertical sur la feuille et passe par son milieu.

En gardant la même convention d'orientation des angles, cette transformation :

- conserve *en norme* les valeurs des angles θ_0 et θ,
- change l'ordre $p=-1$ en un ordre $p=+1$,
- change l'angle θ_0 en $-\theta_0$ et
- change l'angle θ en $-\theta$.

$$sin(-\theta)-sin(-\theta_0)=(-p)\frac{\lambda}{a}$$

Vous noterez que l'invariance observée est traduite, dans le modèle mathématique, par la propriété de la fonction sinus d'être une **fonction impaire**, c'est à dire telle que $sin(-x)=-sin(x)$.

Les angles correspondant à la situation symétrique vérifient donc bien la formule fondamentale du réseau avec les mêmes valeurs :

$$sin(\theta)-sin(\theta_0)=p\frac{\lambda}{a}$$

Faire le bilan

Pour calculer la valeur de la longueur d'onde λ à partir de la formule fondamentale du réseau, nous sommes partis du constat qu'il était nécessaire de mesurer deux angles. L'incertitude expérimentale attachée à la connaissance de λ se calculerait donc, *a priori*, à partir de celles attachées à quatre déterminations d'azimuts.

En nous plaçant au minimum de déviation, nous avons réduit ce nombre de moitié puis, en effectuant la mesure symétrique, nous l'avons de nouveau divisé par deux.

Soit un gain de 1 à 4.

Pour conclure

Apprendre à se servir du goniomètre c'est donc réaliser que la précision de la détermination d'une longueur d'onde dépend non seulement de la **précision de la visée** et de **la précision de la lecture de l'azimut** mais également du **protocole**, c'est à dire de la **manière dont on conduit les mesures**.

On a ainsi chercher à exploiter au mieux les symétries du phénomène physique mis en jeu, en s'aidant notamment pour cela des symétries du modèle mathématique fourni.

Outro

Dans le prochaine épisode, nous nous intéresserons au problème de la précision des visées. En particulier, nous traiterons de la manière dont on règle à sa vue l'ensemble lunette et collimateur. Au revoir, et à très bientôt j'espère.