Le spectromètre à réseau

Épisode 1

Mesurer des angles pour déterminer des longueurs d'onde

Prologue

Pour un physicien, la lumière est un message duquel on peut extraire de nombreuses informations.

Dans des champs d'application très variés, le point de départ de l'analyse consiste à déterminer avec précision la fréquence d'un rayonnement, sa couleur exacte.

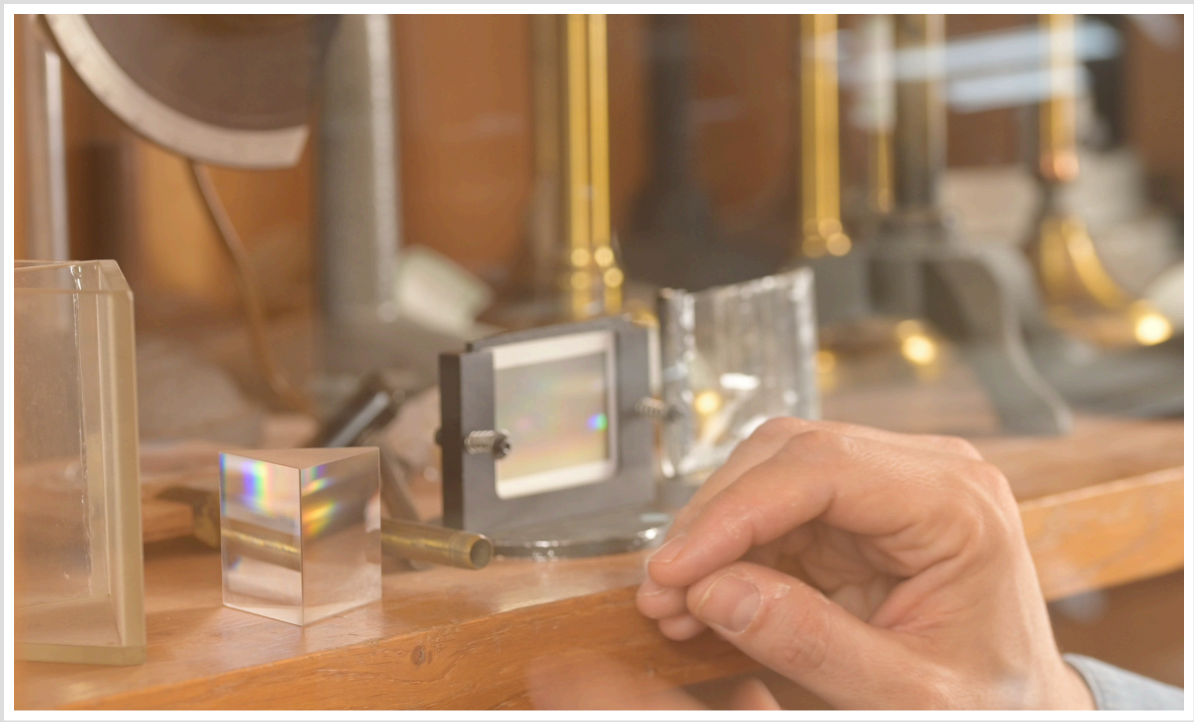
Introduction

- Goniomètre et spectromètre

> Un **goniomètre** est un instrument de précision qui sert à **mesurer** des angles.

> Le **spectromètre**, comme son nom l'indique, est l'instrument qui permet de **décomposer** le faisceau lumineux issu d'une source, comme un *mélange*, dans l'ensemble des lumières colorées *pures* qui constituent son spectre, et d'obtenir une **mesure** de leurs longueurs d'onde.

On peut obtenir un spectromètre en associant le goniomètre avec un système dispersif comme le prisme, qui **réfracte** chaque rayon coloré selon un angle différent.
On peut aussi utiliser un réseau qui lui, **diffracte** la lumière incidente dans des directions différentes et dans des ordres différents.



On a d'ailleurs pris l'habitude de classer les sources de lumière en fonction de la **nature** de leur spectre : une lampe blanche possède un spectre **continu** alors que les lampes à vapeurs métalliques ont un spectre contenant un nombre **discret** de raies, qui sont comme la *signature* de l'élément chimique qui les a émis.

I - Mesurer des angles pour déterminer des longueurs d'onde

À partir de la loi de la réfraction dans le cas du prisme, ou des principes de la diffraction dans le cas du réseau, on peut établir une expression mathématique, une formule, qui nous permet de **calculer** les longueurs d'onde à partir des angles que l'on peut **mesurer directement**.

Formule fondamentale du réseau

$$sin(\theta)-sin(\theta_0)=p\frac{\lambda}{a}$$

On peut commencer par remarquer que pour $p=0$, la formule fondamentale du réseau se réduit à :

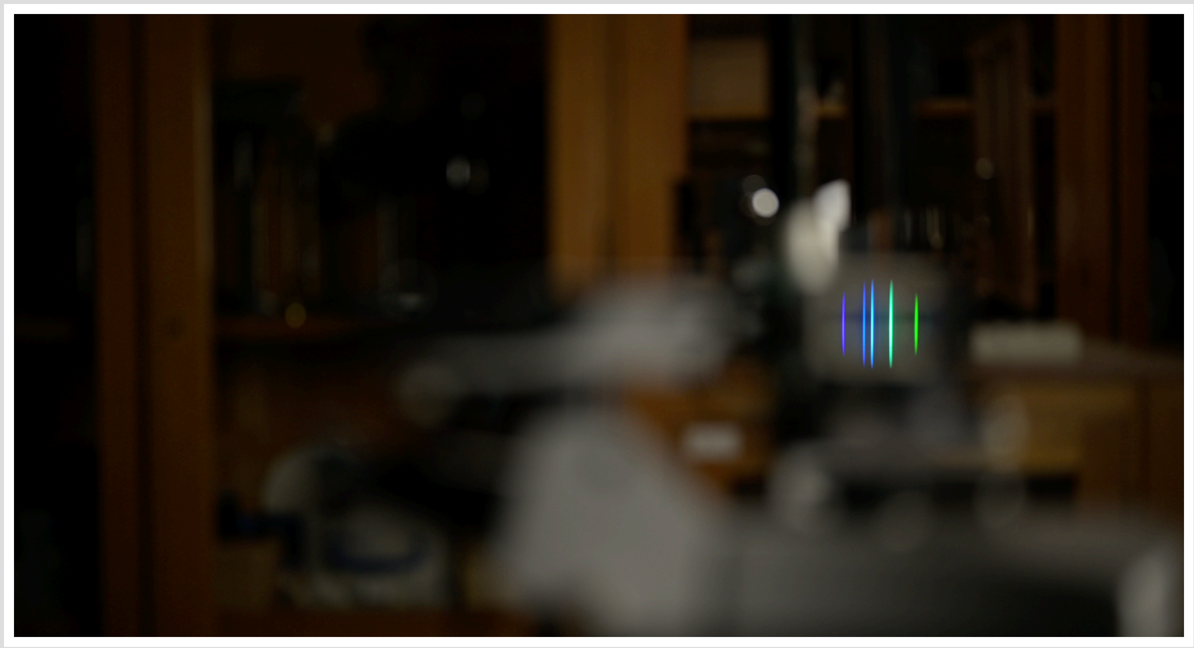
$$sin(\theta)=sin(\theta_0)$$

$$\theta = \theta_0$$

Une partie de la lumière incidente n'est donc pas du tout déviée, quel que soit l'angle d'incidence et quelle que soit la longueur d'onde.

L'image de la fente que Jean-Luc peut voir en regardant dans l'axe du collimateur et en faisant le point à l'infini, a donc la même couleur que celle de la lampe regardée directement, qui est celle du *mélange*.

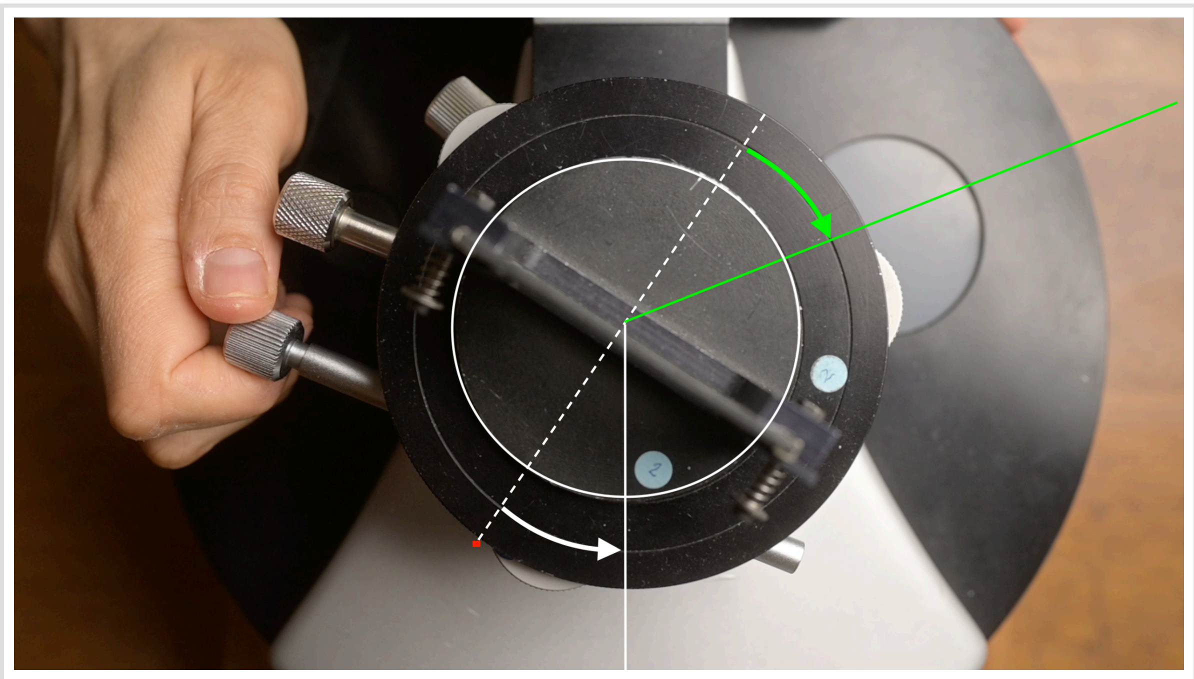
En déportant son regard dans des directions qui s'éloignent de l'axe optique du collimateur, Jean-Luc peut voir d'autres images de la fente source qui cette fois, ont des couleurs *pures*.



Contrairement à ce que l'on peut observer avec un prisme ou dans un arc-en-ciel, les longueures d'onde les plus grandes, c'est à dire les images rouges de la fente, sont plus déviées que les longueures d'onde les plus courtes, c'est à dire les images violettes de la fente source.

Voyons comment la *formule fondamentale* du réseau rend compte de cette observation.

$$sin(\theta)-sin(\theta_0)=p\frac{\lambda}{a}$$



Dans cette formule, l'angle d'incidence θ_0 et l'angle θ sous lequel on peut voir une image colorée donnée de la fente source, sont repérés par rapport à la *normale (N)* au réseau.

En pratique, nous allons repérer les différentes raies colorées par rapport à l'ordre zéro, direction que l'on peut viser à la lunette, plutôt que par rapport à la normale au réseau, qui est une direction dans laquelle on ne peut pas voir de lumière.

On considèrera donc dorénavant la *déviation* D d'une raie colorée, grandeur mesurable, plutôt que son angle de sortie θ.

Par construction, il vient :

$$D=\theta-\theta_0$$

La longeur d'onde λ se trouvant au numérateur de la formule, elle rend bien compte du fait que la déviation augmente avec la longueur d'onde.

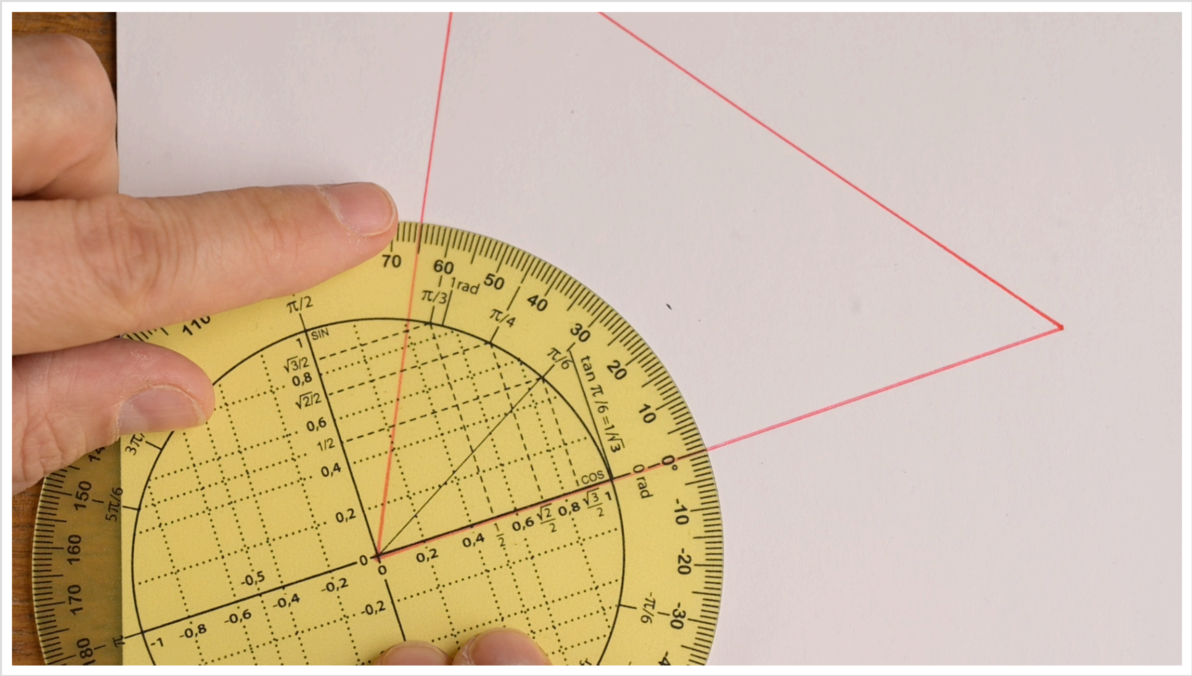
> En particulier, la *formule fondamentale du réseau* nous montre que pour calculer la longueur d'onde λ, il nous faudra, **en pratique, faire la mesure de deux angles** : *l'angle d'incidence* θ_o et l'angle θ auquel est diffractée la lumière colorée considérée dans l'ordre d'interférence p considéré :

$$\lambda = \frac{a}{p}[sin(\theta)-sin(\theta_0)]$$

II - Goniomètre et rapporteur

- Analogie entre un rapporteur et un goniomètre

On pourrait dire qu'un goniomètre est comme le **rapporteur** des leçons de géométrie. Cette analogie va d'ailleurs nous permettre de préciser un point de méthode et un point de vocabulaire.



Remarquons tout d'abord que pour mesurer un angle, nous effectuons toujours **deux visées**. De la même manière que, sur un banc d'optique, on détermine toujours une distance en soustrayant **deux abscisses** ; sur un goniomètre, on détermine toujours un angle en soustrayant **deux azimuts**.
On écrira par exemple :

$$\theta_1 = (\alpha_1-\alpha_0)$$
en réservant les lettres θ_i pour les angles et les lettres α_i pour les azimuts.

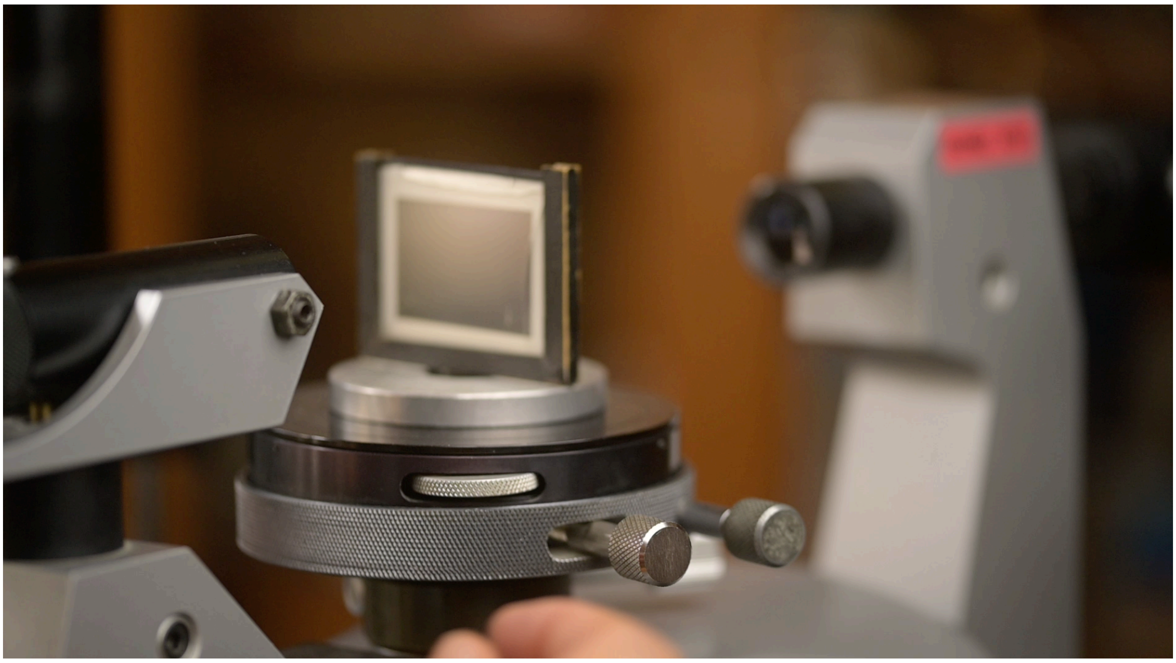
> Cette *distinction de vocabulaire* nous permet de garder en tête que chaque mesure d'angle θ_1 est "grosse" des **incertitudes expérimentales** que l'on peut attacher à chacune des **deux visées** et à chacune des **deux lectures** d'azimuts α_1 et α_2.

- Différences entre un rapporteur et un goniomètre.

Si le rapporteur présente bien 90 graduations pour un angle droit, 360 graduations pour un tour complet, le goniomètre, lui, présente ... **60 fois plus de graduations** ! Non pas une graduation pour chaque degré mais une graduation pour chaque minute d'arc. Commercialement, ces instruments sont dits **30 secondes**, comme la *demie-étendue* que l'on peut associer à la lecture des graduations.

Pour justifier une telle ambition, le goniomètre est équipée d'un **système de visée de précision** qui est constitué d'une *partie optique* (le **collimateur** et la **lunette**) et d'une *partie mécanique*. On distinguera la **vis de serrage**, que l'on désserre pour effectuer des mouvements grossiers avant de la ressérer, et la **vis de déplacement micrométrique** qui permet le déplacement fin de la lunette.

On notera l'existence d'un système mécanique similaire sur le plateau du goniomètre. Une vis de serrage permet des mouvements grossiers et, une fois cette dernière resserée, la vis de déplacement micrométrique permet de contrôler des mouvements fins de rotation du plateau.



III - Comment se servir du goniomètre ? Le protocole

La manière dont il faut se servir du goniomètre répond, bien entendu, au souci d'effectuer les mesures les plus précises possibles.

Protocole

En résumé, il y a quatre étapes à répéter pour chaque mesure :

1. **déplacer grossièrement la lunette** pour visualiser l'ordre d'interférence considéré ;
2. **régler l'angle d'incidence** dans la situation particulière du minimum de déviation, beaucoup plus de détails sur ce sujet dans un instant ;

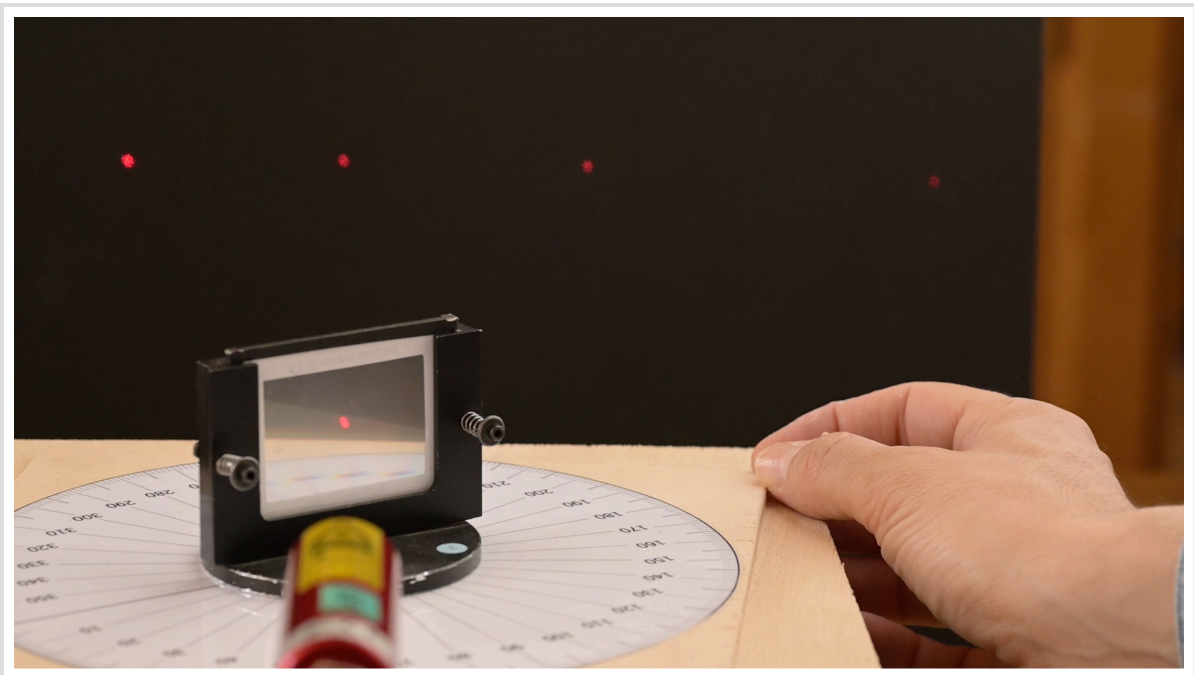
3. **viser la raie considérée** le plus précisément possible ;
4. **faire la lecture de l'azimut** correspondant, le relever et le faire apparaître dans son compte-rendu.

L'enjeu principal de cette vidéo est de comprendre que ce protocole découle de la prise en compte des **symétries** exibées par le phénomène physique exploité.

IV - Symétries des images diffractées au minimum de déviation

- Approche expérimentale

Pour un réseau de pas donné et pour une longueur d'onde donnée (celle du laser rouge ici), les angles auxquels on peut repérer les différents ordres d'interférence sont des fonctions de l'angle d'incidence θ_0.



En faisant varier l'angle d'incidence de manière monotone entre zéro et 90 degrés puis de nouveau de manière monotone entre 90 degrés et zéro, on observe que, pour une raie colorée choisie dans un ordre donné, **l'angle de déviation passe par un minimum**.

> En réglant l'angle d'incidence de manière **à se placer au minimum de déviation**, on découvre une situation qui présente des symétries remarquables :

- on peut tout d'abord remarquer que le plan du réseau se situe alors selon **la bissectrice** de l'angle formé par les directions du collimateur et de la lunette. Autrement dit, au minimun de déviation, l'angle d'incidence et l'angle de visée sont **égaux en valeur et opposés en signe**.
- On peut ensuite remarquer que l'on retrouve ce même angle entre la direction de la normale au réseau et la direction de la lumière qui n'est pas déviée dans *l'ordre zéro*. Autrement dit, **l'angle de déviation D_{min}** vaut alors exactement **moins deux fois** l'angle d'incidence.

Mesurer la *déviation minimale* suffit donc à déterminer non seulement D_{min} mais également θ_0 et θ géométriquement, sans mesure supplémentaire.

En réglant l'angle d'incidence par rotation du plateau, de manière à se placer au minimum de déviation, la présence d'une deuxième lunette n'est plus nécessaire. Nous pouvons donc faire **l'économie de la mesure** de l'angle d'incidence.

L'expression permettant de calculer λ se ramène alors à une fonction d'un seul angle et non plus de deux.

En nous plaçant par exemple au minimum de déviation pour la raie verte de l'ordre $p= -1$, on a :

$$\theta=\frac{D_{min}}{2}=-\theta_o$$
d'où :
$$\lambda = -a[sin(\frac{D_{min}}{2})-sin(\frac{-D_{min}}{2})]$$

$$\lambda = -2a[sin(\frac{D_{min}}{2})]$$

On cherchera enfin à exprimer D en fonction des azimuts α_1 et α_0 qui sont les grandeurs mesurés directement et auxquelles on pourra attacher des incertitudes :

> $$\lambda = 2asin(\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2})$$

- *Approche par l'exploration du modèle mathématique*

En considérant la déviation plutôt que l'angle par rapport à la normale :

$$D=\theta-\theta_0$$

L'équation fondamentale du réseau devient :

$$sin(\theta_0+D)=sin(\theta_0)+p\frac{\lambda}{a}$$

On cherche la dérivée de cette expression par rapport à θ_0.

Pour le membre de droite de l'égalité, il vient immédiatement :

$$\frac{d(sin\theta_0+p\frac{\lambda}{a})}{d\theta_0}=cos\

theta_0$$

Pour le membre de gauche de l'égalité, comme :

$$sin(\theta_0+D)=sin\theta_0cosD+cos\theta_0sinD$$

Il vient :

$\begin{align} \frac{d(sin(\theta_0+D))}{d\theta_0} & =cos\theta_0cosD-sin\theta_0sinD\frac{dD}{d\theta_0} \\ & -sin\theta_0sinD+cos\theta_0cosD\frac{dD}{d\theta_0} \\ \end{align}$

$\begin{align} \frac{d(sin(\theta_0+D))}{d\theta_0} & = cos\theta_0cosD(1+\frac{dD}{d\theta_0}) \\ & -sin\theta_0sinD(1+\frac{dD}{d\theta_0}) \end{align}$

Au minimum de déviation on a :

$$\frac{dD}{d\theta_0}=0$$

L'égalité des deux membres s'écrit alors :

$$cos\theta_0=cos\theta_0cosD_{min}-sin\theta_0sinD_{min}$$

Ce qui permet d'aboutir à l'équation :

$$cos\theta_0=cos(\theta_0+D_{min})$$

Cette équation admet deux solutions.
La première solution, $D_{min}=0$, correspond à l'ordre zéro.
La seconde correspond bien aux symétries décrites plus haut :

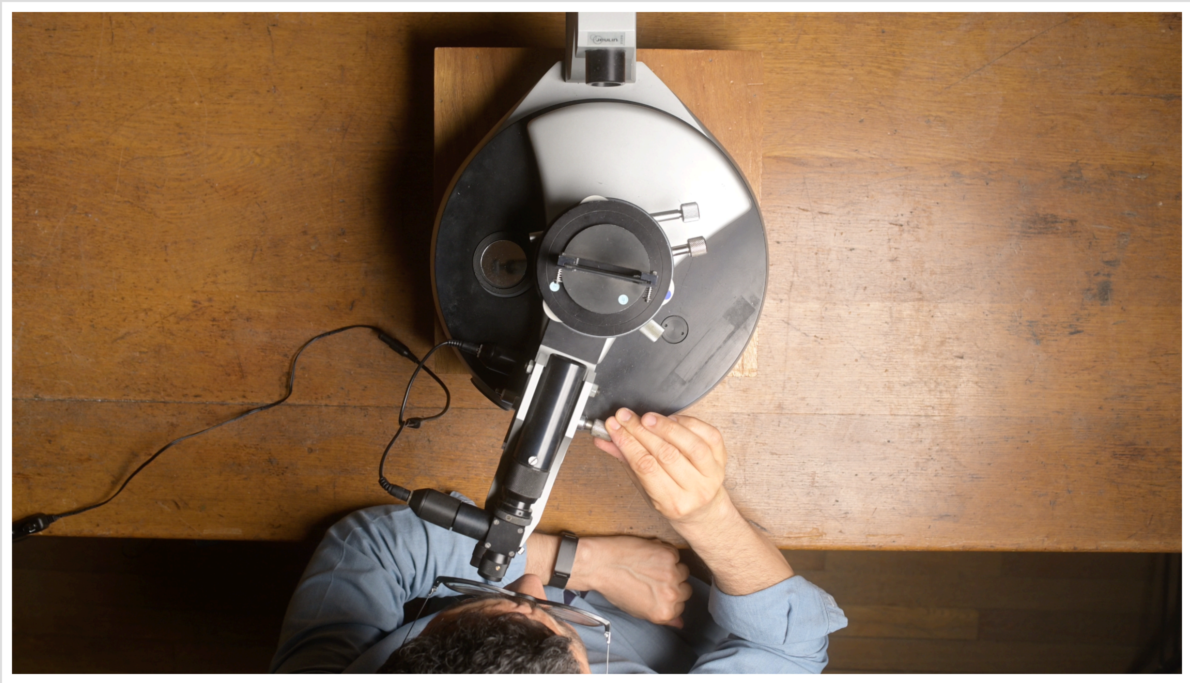
> $$D_{min}=-2\theta_0$$

V - Symétrie de la situation de mesure

– *Approche expérimentale*

Il est légitime de demander à notre *modèle physique* de rester pertinent que l'on regarde le phénomène depuis **le haut** ... ou bien qu'on le regarde depuis **le bas**.

Il existe donc nécessairement une position symétrique du réseau et de la lunette qui réalise exactement la même configuration angulaire ... de l'autre côté du goniomètre.



Protocole

Résumé en trois étapes, nous allons :
1- **viser la raie verte** dans l'ordre $p=-1$ et déterminer son azimut α_1 au minimum de déviation ;
2- **déplacer le réseau**, par rotation du plateau, approximativement dans la position symétrique à la précédente par rapport à l'axe qui est la direction de la lumière incidente ;
3- **viser la raie verte** une seconde fois, mais dans l'ordre $p=+1$ de cette nouvelle configuration et déterminer son azimut α_2 au minimum de déviation.

On obtient donc :

$$\lambda = -2asin(\frac{(2D_{min}/2)}{2})$$

On cherchera ici également à exprimer λ en fonction des azimuts α_1 et α_2 qui sont les grandeurs mesurés directement et auxquelles on pourra attacher des incertitudes :

> $$\lambda = 2asin(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{4})$$

En effectuant deux visées, nous avons cette fois calculé l'angle ($2D_{min}$). L'incertitude expérimentale attachée à la détermination de l'angle D_{min} est donc de nouveau divisée par deux !

- *Approche par l'exploration du modèle mathématique*

La transformation mathématique qui correspond au changement de point de vue haut/bas peut être vue comme un retournement de l'image, une rotation d'un demi-tour autour de l'axe qui est vertical sur la feuille et passe par son milieu.

En gardant la même convention d'orientation des angles, cette transformation :

- conserve *en norme* les valeurs des angles θ_0 et θ,
- change l'ordre $p=-1$ en un ordre $p=+1$,
- change l'angle θ_0 en $-\theta_0$ et
- change l'angle θ en $-\theta$.

$$sin(-\theta)-sin(-\theta_0)=(-p)\frac{\lambda}{a}$$

Vous noterez que l'invariance observée est traduite, dans le modèle mathématique, par la propriété de la fonction sinus d'être une **fonction impaire**, c'est à dire telle que $sin(-x)=-sin(x)$.

Les angles correspondant à la situation symétrique vérifient donc bien la formule fondamentale du réseau avec les mêmes valeurs :

$$sin(\theta)-sin(\theta_0)=p\frac{\lambda}{a}$$

Bilan

Pour calculer la valeur de la longueur d'onde λ à partir de la formule fondamentale du réseau, nous sommes partis du constat qu'il était nécessaire de mesurer deux angles. L'incertitude expérimentale attachée à la connaissance de λ se calculerait donc, *a priori*, à partir de celles attachées à quatre déterminations d'azimuts.

En nous plaçant au minimum de déviation, nous avons réduit ce nombre de moitié puis, en effectuant la mesure symétrique, nous l'avons de nouveau divisé par deux.

Soit un gain de 1 à 4.

Pour conclure

Apprendre à se servir du goniomètre c'est donc réaliser que la précision de la détermination d'une longueur d'onde dépend non seulement de la **précision de la visée** et de **la précision de la lecture de l'azimut** mais également du **prototocole**, c'est à dire de la **manière dont on conduit les mesures**.

On a ainsi chercher à exploiter au mieux les symétries du phénomène physique mis en jeu, en s'aidant notamment pour cela des symétries du modèle mathématique fourni.

Dans le prochaine épisode, nous nous intéresserons au problème de la précision des visées. En particulier, nous traiterons de la manière dont on règle à sa vue l'ensemble lunette et collimateur. Au revoir, et à très bientôt j'espère.