



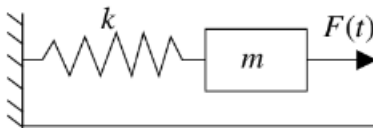
به نام خداوند مهربان  
دانشگاه تهران  
اولین سری تکلیف کامپیوتری ریاضی مهندسی  
موعد تحویل: ۲۱ اردیبهشت ماه ۱۴۰۲



تذکر:

- در حل سه سوال زیر می بایست از نرم افزار MATLAB استفاده گردد و همچنین ارسال گزارش اجباری می باشد.
- از یکی از دو سوال ۴ و ۵ صرفاً یکی را حل نمایید.

۱- در یک سیستم جرم-فنر مانند شکل زیر، که شامل یک جرم  $m$ ، با ثابت فنر  $k$  و ضریب میرایی  $c$  به جرم اعمال می شود. فرض کنید نیروی  $F(t)$  به جرم وارد شده است و با استفاده از قانون دوم نیوتون می توان عنوان معادله دیفرانسیلی آن را نوشت. (راهنمایی:  $x$ : مقدار جابجایی جرم و فنر،  $V = \frac{dx}{dt}$  و  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  می باشد)

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = F(t)$$


همچنین نیروی اعمالی را به صورت زیر تعریف می نماییم:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t \leq 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

با فرض آنکه  $c = 0$ ،  $K = 2$  و  $m = 1 \text{ kg}$  می باشد، مطلوب است:

الف. در بازه ی زمانی  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$ ، نمودار جابجایی سیستم را بر حسب زمان رسم کنید.

ب. با استفاده از دستور subplot، در همان بازه زمانی  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$ ، نیروی اعمالی  $F(t)$  را رسم کنید.

ج. پاسخ بدست آمده از  $x$  آیا با آنچه در واقعیت از این سیستم میتوان تصور نمود، تطابق دارد؟ چنانچه پاسخ شما به این سوال مثبت می باشد آن را توضیح دهید.

۲- با استفاده از تعریف سری فوریه می دانیم که:

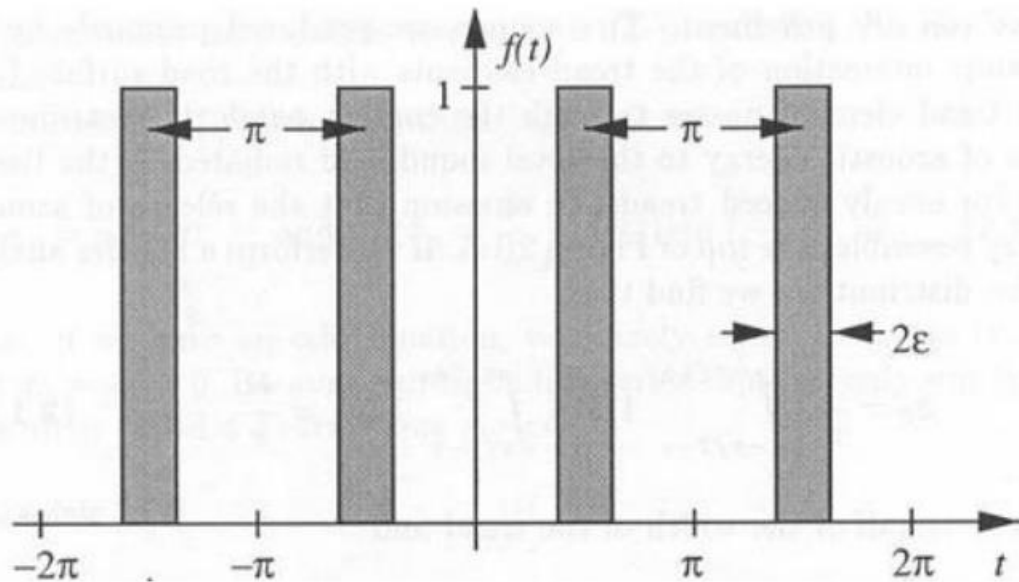
$$F(f(x)) = a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

مطلوب است محاسبه مقدار  $k$  به طوری که خطا کمتر از ۰.۰۰۱ شود.

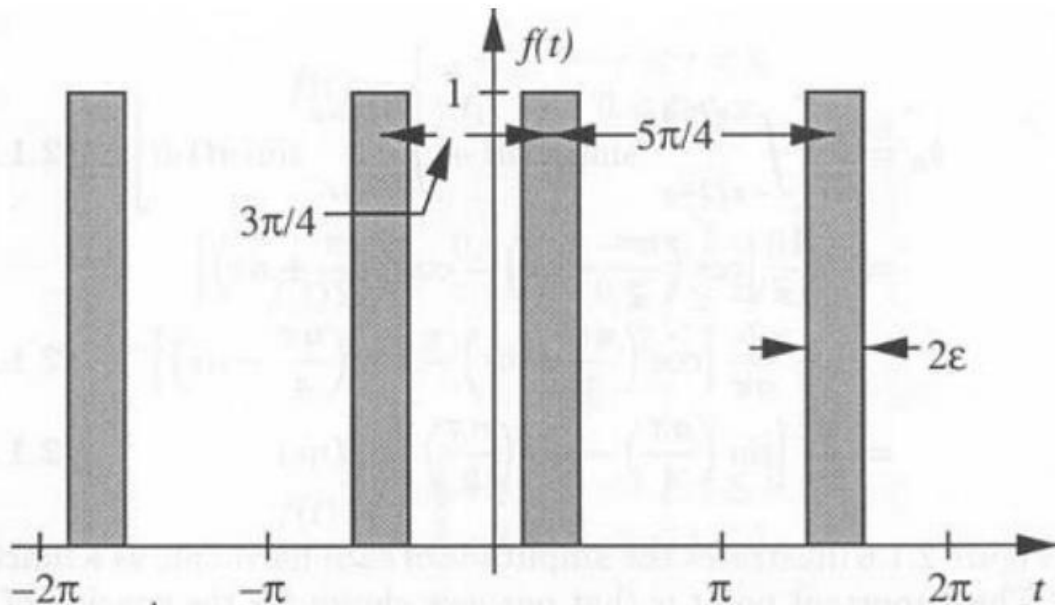
$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{error} = |F(f(x)) - f(x)| < 0.001$$

۳- یکی از کاربردهای سری فوریه مساله ای در صنعت است که سال ها پیش اتفاق افتاد. این مساله این بود که رانندگان متوجه شدند که تاپرهای یخ شکن در جاده های مرطوب صداهایی را ایجاد می کنند که این صداهای تولید شده ناشی از اثر دینامیکی متقابل سطح جاده با عاج لاستیک می باشد. در اثر برخورد این عاج ها با سطح جاده پالسی از انرژی آکوستیک (acoustic energy) ایجاد می شود که این انرژی صداهای ناهنجار را ایجاد می کند. اگر فضای بین عاج ها مساوی باشد پالس ایجاد شده به صورت زیر می باشد:



در صورتی که فاصله بین عاج ها مساوی نباشد، پالس ایجاد شده به صورت زیر می باشد:



اگر فرکانس ایجاد شده بوسیله ی عاج ها را با  $A_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  نمایش دهیم (  $a_n$  و  $b_n$  ضرایب سری فوریه پالس در نظر می گیریم ) و فرض کنید که  $\epsilon = \frac{\pi}{12}$  می باشد ، مطلوب است محاسبه :

الف . در حالتی که فاصله عاج ها برابر باشد ، نمودار  $A_n$  به ازای  $n$  های متفاوت را رسم کنید ( راهنمایی : با توجه به اینکه  $n$  صرفاً مقادیر گسسته می باشد ، نمودار فوق الذکر نیز گسسته خواهد بود )  
 ب . در حالتی که فاصله عاج ها برابر نباشد ، نمودار  $A_n$  به ازای  $n$  های متفاوت را رسم کنید ( راهنمایی : با توجه به اینکه  $n$  صرفاً مقادیر گسسته می باشد ، نمودار فوق الذکر نیز گسسته خواهد بود )

#### ۴- صدا و تبدیل فوریه!

گاهی اوقات یک بازی محبوب پخش موسیقی به عقب برای یافتن پیام های مخفی بوده است ، با استفاده از متلب اینکار را انجام دهید . ( لازم به ذکر می باشد که حتما توضیح دهید که اینکار چگونه با سری فوریه انجام شده است و به همراه گزارش می بایست فایل صوتی نیز ضمیمه گردد ) - برای راهنمایی بیشتر می توانید از رفرنس [۱] استفاده نمایید .

#### ۵- تخمین احتمال سیل با استفاده از سری فوریه

با توجه به اثرات زیانبار سیل ها که از جنبه های مختلف نظیر اقتصادی، اجتماعی، و زیست محیطی قابل بررسی می باشند و همچنین تاثیر آن روی فعالیت ها و طرح های عمرانی و توسعه ای در مقاله [۲] یک روش غیر پارامتری برای تخمین احتمالات سیل های سالانه رودخانه کارون معرفی شده است که می تواند جایگزین روش های پارامتری مرسوم باشد. این روش غیر پارامتری روش سری فوریه می باشد. با استفاده از این منبع سعی کنید با استفاده از متلب تابع چگالی احتمال را طوری محاسبه کنید که رابطه (۸) صدق کند و همچنین در انتها مقدار  $m$  محاسبه نمایید

$$- \text{رابطه ۸ درج شده در منبع مذکور : } \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \cos ms \left( \frac{x_i - x_j}{b-a} \right) \right] / n^2 \geq 2/(n+1)$$

منابع :

[۱] Y Ryan, "Linear Algebra , Signal Processing ,and Wavelets A Unified Approach -MATLAB Version " , Springer ,[Link](#)<sup>۱</sup>

[۲] ع. بهینا ، پ. حقیقت جو ، "تخمین احتمالات سیل های سالانه رودخانه کارون با استفاده از سری فوریه " ، هفتمین

سمینار بین المللی مهندسی رودخانه ، بهمن ماه ۱۳۸۵

[لینک دسترسی](#)

موفق باشید .

جمال کزازی - محمد امین غلامپور سعدی

<sup>۱</sup> کلمه لینک را لمس کنید .