تکلیف دوم

سوال یک

چارک اول:

$$(n+1)p = 41 \times 0.25 = 10.25 \Rightarrow k = 10,\ r = 0.25$$
$$Q_{0.25} = (1-r)x_k + r.x_{k+1} = (1-0.25)(45) + (0.25)(47) = 45.5$$

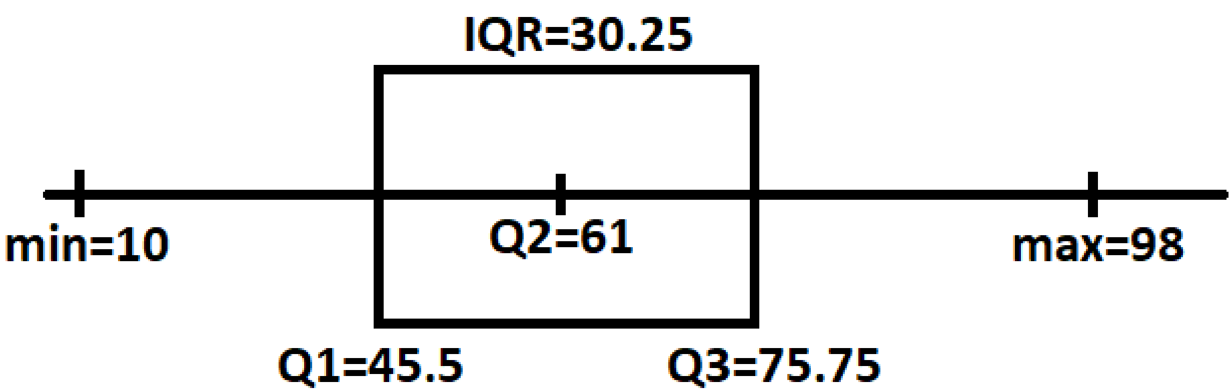
چارک دوم:

$$(n+1)p = 41 \times 0.5 = 20.5 \Rightarrow k = 20,\ r = 0.5$$
$$Q_{0.25} = (1-r)x_k + r.x_{k+1} = (1-0.5)(61) + (0.5)(61) = 61$$

چارک سوم:

$$(n+1)p = 41 \times 0.75 = 30.75 \Rightarrow k = 30,\ r = 0.75$$
$$Q_{0.25} = (1-r)x_k + r.x_{k+1} = (1-0.75)(75) + (0.75)(76) = 75.75$$

نمودار جعبه‌ای:



داده پرت وجود ندارد.

$$\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1 = 30.25$$
$$Q_1 - 1.5 \times \mathrm{IQR} = 45.5 - 1.5 \times 30.25 = 0.125$$
$$Q_3 + 1.5 \times \mathrm{IQR} = 75.75 + 1.5 \times 30.25 = 121.25$$

سوال دوم

الف)

$$M(a,b) = h^{-1}((h(a) + h(b)) / 2)$$

$$h(x) = kx \qquad h^{-1}(x) = \frac{x}{k}$$

$$M(a,b) = \frac{1}{k}\left(\frac{ka+kb}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$

ب)

$$M(a,b) = h^{-1}((h(a) + h(b)) / 2)$$

$$h(x) = \ln(x) \qquad h^{-1}(x) = e^{x}$$

$$M(a,b) = e^{(\ln a + \ln b)0.5}$$

$$= \sqrt{e^{\ln a + \ln b}} = \sqrt{e^{\ln a} \times e^{\ln b}} = \sqrt{ab}$$

ج)

$$M(a,b) = h^{-1}((h(a) + h(b)) / 2)$$

$$h(x) = x^2 \qquad h^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$M(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

د)

$$M(a,b) = h^{-1}((h(a) + h(b)) / 2)$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \qquad h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$M(a,b) = \frac{1}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) / 2} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

سوال سوم

حدود طبقات	فراوانی	فراوانی تجمعی
60-62	5	5
63-65	18	23
66-68	42	65
69-71	27	92
72-74	8	100

طبقه میانه

$$\bar{x} = \frac{(5\times61)+(18\times64)+(42\times67)+(27\times70)+(8\times73)}{5+18+42+27+8} = 67.45$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} =$$

$$\frac{5(61-67.45)^2+18(64-67.45)^2+42(67-67.45)^2+27(70-67.45)^2+8(73-67.45)^2}{5+18+42+27+8}$$

$$= 8.5275$$

$$STD = 2.92$$

میانه:

$$Q_{0.5} = L_{0.5} + \frac{0.5n-F_{0.5}}{f_{0.5}} \times w = 66 + \frac{50-23}{42} \times 2 = 67.29$$

ضریب چولگی پیرسون:

$$b_2 = \frac{3(\bar{x}-m)}{STD} = \frac{3(67.45-67.29)}{2.92} = 0.16$$

سوال چهار

برای به دست آوردن متوسط زمان اجرای برنامه توسط این ۳ کامپیوتر، از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم:

$\overline{x_H} = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3$

هر کامپیوتر به طور میانگین یک برنامه را در ۳ دقیقه اجرا می‌کند. بنابراین ۳ کامپیوتر اگر به طور هم‌زمان کار کنند، یک برنامه را در **۱ دقیقه** اجرا می‌کنند.

سوال پنج

$$\text{mean} - \text{mode} = 3 \times (\text{mean} - \text{median})$$
$$\text{mode} = \text{mean} - 3 \times (\text{mean} - \text{median})$$
$$\text{mode} = 52.4 - 3 \times (52.4 - 51.8) = 50.6$$

سوال شش

$$\overline{x_A} = \sqrt[5]{x_V x_W x_X x_Y x_Z} = 346.57$$
$$\overline{x_B} = \sqrt[5]{x_V x_W x_X x_Y x_Z} = 579.94$$
$$\overline{x_C} = \sqrt[5]{x_V x_W x_X x_Y x_Z} = 840.72$$

$$\overline{x_{An}} = \frac{346.57}{579.94} = 0.60$$
$$\overline{x_{Bn}} = 1$$
$$\overline{x_{Cn}} = \frac{840.72}{579.94} = 1.45$$

$$\overline{x_{An}} = \frac{346.57}{840.72} = 0.41$$
$$\overline{x_{Bn}} = \frac{579.94}{840.72} = 0.69$$
$$\overline{x_{Cn}} = 1$$

سوال هفت

میانگین هندسی وزندار

$$\bar{x} = \sqrt[104]{45 \times 45 \times 45 \times 45 \times 20^{100}} = 20.63$$

سوال هشت

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots x_{20}}{20} = 15 \implies x_1 + x_2 + \dots x_{20} = 15 \times 20 = 300$$

$$4 + 8 + \dots + 80 = 20 \times \left(\frac{4 + 80}{2}\right) = 840$$

$$\implies \frac{x_1 + x_2 + \dots x_{20} + 4 + 8 + \dots + 80}{20} = \frac{300 + 840}{20} = 57$$

سوال نه

ابتدا ثابت می‌کنیم

$GM \leq AM$

(GM همان میانگین هندسی و AM همان میانگین حسابی است)

می‌دانیم $ln(x) \leq x - 1$. اگر داده‌ها را x_i بنامیم، داریم:

$$ln(\frac{x_i}{AM}) \leq \frac{x_i}{AM} - 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$
$$\Rightarrow ln(\frac{x_1}{AM}) + ln(\frac{x_2}{AM}) + ... + ln(\frac{x_n}{AM}) \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{AM} - n = 0$$
$$\Rightarrow ln(\frac{x_1 x_2 ... x_n}{AM^n}) \leq 0$$
$$\Rightarrow \frac{x_1 x_2 ... x_n}{AM^n} \leq 1$$
$$\Rightarrow x_1 x_2 ... x_n \leq AM^n$$
$$\Rightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq AM$$

بنابراین میانگین هندسی کوچکتر مساوی میانگین حسابی است. حال ثابت می‌کنیم:

$HM \leq GM$

اگر داده‌ها را x_i بنامیم، اثبات قبلی را برای داده‌های $\frac{1}{x_i}$ به کار می‌بریم:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 ... x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... \frac{1}{x_n}}{n}$$

با معکوس کردن دو طرف نامساوی داریم:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... \frac{1}{x_n}}$$

که نشان می‌دهد برای داده‌های x_i، $HM \leq GM$.

پس حکم سوال درست است.

سوال ده

$$\text{ضریب چولگی}: \frac{3 \times (\text{mean} - \text{median})}{\text{STD}}$$

$$= \frac{3 \times (17.2 - 15)}{5} = 1.32$$

سوال یازده

شماره کلاس	کلاس	فراوانی	فراوانی تجمعی
۱	۲/۰-۲/۴	۵	۵
۲	۲/۴-۲/۸	۵	۱۰
۳	۲/۸-۳/۲	۹	۱۹
۴	۳/۲-۳/۶	۴	۲۳
۵	۳/۶-۴/۰	۴	۲۷
۶	۴/۰-۴/۴	۳	۳۰

$\xrightarrow{10/30 = 0.3}$ طبقه چارک اول

$\xrightarrow{19/3 = 0.6}$ طبقه چارک دوم و مد/نما

$\xrightarrow{23/30 = 0.76}$ طبقه چارک سوم

$$Q_p = L_p + \left(\frac{p \times n - F_p}{f_p}\right) \times w$$

$$Q_{0.25} = 2.4 + \left(\frac{0.25 \times 30 - 5}{5}\right) \times (2.8 - 2.4) = 2.6$$

$$Q_{0.5} = 2.8 + \left(\frac{0.5 \times 30 - 10}{9}\right) \times (3.2 - 2.8) = 3.02$$

$$Q_{0.75} = 3.2 + \left(\frac{0.75 \times 30 - 19}{4}\right) \times (3.6 - 3.2) = 3.55$$

$$mode = L_m + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times w = 2.8 + \left(\frac{(9-5)}{(9-5)+(9-4)} \times 0.4\right) = 2.98$$