1 Ćwiczenia 7.10.2022

Aksjomat Archimedesa. *Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna n taka, że $n > a$.*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ n > a$$

Lemat 1. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry, a M pewnym ograniczeniem górnym zbioru A. Wówczas równoważne są zdania:*

(i) $M = \sup A$;

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\ a > M - \varepsilon$.

Lemat 2. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu, a m pewnym ograniczeniem dolnym zbioru A. Wówczas równoważne są zdania:*

(i) $m = \inf A$;

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\ a < m + \varepsilon$.

Wnioski.

(I) Jeśli $0 < a < b$. to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \cdot a > b$.

(II) Jeśli $x_1 < x_2$, to istnieją $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ takie, że $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cap (x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$

(III) $\forall_{h>0,a\in\mathbb{R}}\exists_{k\in\mathbb{N}}\ (k-1)h \leqslant a < kh$

(IV) $\forall_{a<b}\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\exists_{c\in\mathbb{R}}\exists_{c'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\ c, c' \in (a,b)$

Lemat 3. *Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mamy*

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Lemat 4. *Dla niepustego podzbioru $A \subseteq$ mamy* $\sup(-A) = -\inf A$

Definicja. *O ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ mówimy, że jest zstępujący, jeśli $A_1 \supseteq a_2 \supseteq \ldots$*

Twierdzenie 1. *Jeśli $I_1, I_2, \ldots$ jest ciągiem zstępujących przedziałów domnkniętych prostej rzeczywistej to $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.*

2 Ćwiczenia 11.10.2022

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że a jest ograniczeniem górnym zbioru A. Jeśli istnieje ciąg $a_n \in A$ taki, że $a_n \to a$, wówczas $a = \sup A$.*

Lemat 5. *Niech $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $\alpha_k = \sup A_k$, $\beta_k = \inf A_k$ i załóżmy, że $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, wówczas*

$$\sup A = \sup\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}, \quad \inf A = \inf\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}.$$

3 Ćwiczenia 14.10.2022

Lemat 6. *Niech dane będą zbiory* $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$, *wtedy* $\sup(A \cdot B) = \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}$.

Lemat 7. *Jeśli* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *są liczbami dodatnimi oraz* $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, *to*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n.$$

Nierówności między średnimi.

$$\begin{aligned}
H(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} - \textit{średnia harmoniczna} \\
G(x_1, \ldots, x_n) &= \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} - \textit{średnia geometryczna} \\
A(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \textit{średnia arytmetyczna} \\
K(x_1, \ldots, x_n) &= \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} - \textit{średnia kwadratowa}
\end{aligned}$$

Jeśli $x_1, \ldots, x_n$ *są liczbami nieujemnymi, to*

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leqslant H(x_1, \ldots, x_n) \leqslant G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant K(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

4 Ćwiczenia 18.10.2022

Twierdzenie 3. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem liczb rzeczywistych.*

(a) Jeśli ciąg (a_n) *jest rosnący, wówczas* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$.

(b) Jeśli ciąg (a_n) *jest malejący, wówczas* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Lemat 8. *Dla dowolnej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Lemat 9. *Dla dowolnej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$ *mamy*

$$(n!)^2 \geqslant n^{n+1}.$$

5 Ćwiczenia 21.10.2022

Lemat 10. *Dane są dwa ciągi* (x_n), (y_n). *Jeśli* (y_n) *jest ograniczony oraz* $x_n \to 0$, *wówczas* $x_n y_n \to 0$.

Twierdzenie 4. *Jeśli* $a_n \to g$, *to* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to g$.

Lemat 11. *Niech* a *będzie dowolną liczbą rzeczywistą i* $n \in \mathbb{N}$, *wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[na]}{n} = a.$$

Lemat 12. *Dla* $a \geqslant 1$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *mamy* $\frac{n^a}{a^n} \to 0$.

6 Ćwiczenia 25.10.2022

Twierdzenie o przenikających się ciągach. *Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych* $(x_n), (y_n)$ *oraz* (c_n). *Jeśli* $x_n \to x$ *i* $y_n \to y$ *oraz* $c_n = \frac{x_1 y_n + \ldots + x_n y_1}{n}$, *wówczas* $c_n \to xy$.

Lemat 13. *Niech* (a_n) *będzie ograniczonym ciągiem o wyrazach dodatnich, wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n} = \sup_n \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

7 Ćwiczenia 28.10.2022

Lemat 14. *Niech* $S = \{\lim_{n\to\infty} x_n : (x_{n_k}) -$*podciąg zbieżny, ciągu* (x_n), *do granicy skończonej lub nie*$\}$. *Jeśli* $+\infty, -\infty \notin S$, *to zbiór* S *jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny, zatem* $S \neq \emptyset$.

Lemat 15. *Przyjmując oznaczenia jak powyżej:*

(a) *Jeśli* $-\infty \notin S$, *to* $\inf S \in \mathbb{R}$ *lub* $\inf S = +\infty$,

(b) *Jeśli* $+\infty \notin S$, *to* $\sup S \in \mathbb{R}$ *lub* $\sup S = -\infty$.

Lemat 16. *Jeśli* (a_n) *jest ograniczony z góry/dołu, to* $\sup S / \inf S \in S$.

Definicja.

$$\text{Granicą górną ciągu } (x_n) \text{ nazywamy } \limsup_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} \sup S.$$

$$\text{Granicą dolną ciągu } (x_n) \text{ nazywamy } \liminf_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} \inf S.$$

Lemat subaddytywny Fekete. *Jeśli ciąg* (x_n) *spełnia warunek:* $x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$, *to istnieje granica* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ *i co więcej*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Lemat 17. *Niech* (x_n) *będzie takim ciągiem, że* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ *oraz dany jest ciąg* (b_n) *taki, że* $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *wówczas*

$$\frac{b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n}{b_1 + \cdots + b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$