# 1 Ćwiczenia 7.10.2022

**Aksjomat Archimedesa.** *Dla każdej liczby rzeczywistej $a$ istnieje liczba naturalna $n$ taka, że $n > a$.*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ n > a$$

**Lemat 1.** *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry, a $M$ pewnym ograniczeniem górnym zbioru $A$. Wówczas równoważne są zdania:*

*(i)* $M = \sup A$*;*

*(ii)* $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\ a > M - \varepsilon$.

**Lemat 2.** *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu, a $m$ pewnym ograniczeniem dolnym zbioru $A$. Wówczas równoważne są zdania:*

*(i)* $m = \inf A$*;*

*(ii)* $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\ a < m + \varepsilon$.

**Wnioski.**

(I) Jeśli $0 < a < b$. to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \cdot a > b$.

(II) Jeśli $x_1 < x_2$, to istnieją $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ takie, że $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cap (x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$

(III) $\forall_{h>0,a\in\mathbb{R}}\exists_{k\in\mathbb{N}}\ (k-1)h \leqslant a < kh$

(IV) $\forall_{a<b}\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\exists_{c\in\mathbb{R}}\exists_{c'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\ c, c' \in (a,b)$

**Lemat 3.** *Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mamy*

*(a)* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

*(b)* $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

**Lemat 4.** *Dla niepustego podzbioru $A \subseteq$ mamy* $\sup(-A) = -\inf A$

**Definicja.** *O ciągu zbiorów $A_1, A_2, \dots$ mówimy, że jest zstępujący, jeśli $A_1 \supseteq a_2 \supseteq \dots$*

**Twierdzenie 1.** *Jeśli $I_1, I_2, \dots$ jest ciągiem zstępujących przedziałów domknniętych prostej rzeczywistej to $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.*

# 2 Ćwiczenia 21.10

**Lemat 5.** *Dane są dwa ciągi $(x_n)$, $(y_n)$. Jeśli $(y_n)$ jest ograniczony oraz $x_n \to 0$, wówczas $x_n y_n \to 0$.*

**Twierdzenie 2.** *Jeśli $a_n \to g$, to $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \to g$.*

# 3 Ćwiczenia 25.10

**Twierdzenie o przenikających się ciągach.** *Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych $(x_n), (y_n)$ oraz $(c_n)$. Jeśli $x_n \to x$ i $y_n \to y$ oraz $c_n = \frac{x_1y_n+\dots+x_ny_1}{n}$, wówczas $c_n \to xy$.*

# 4 Ćwiczenia 28.10.2022

**Lemat 6.** *Niech* $S = \{\lim_{n\to\infty} x_n : (x_{n_k}) -$*podciąg zbieżny, ciągu* $(x_n)$*, do granicy skończonej lub nie*$\}$. *Jeśli* $+\infty, -\infty \notin S$*, to zbiór* $S$ *jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny, zatem* $S \neq \emptyset$.

**Lemat 7.** *Przyjmując oznaczenia jak powyżej:*

*(a) Jeśli* $-\infty \notin S$*, to* $\inf S \in \mathbb{R}$ *lub* $\inf S = +\infty$,

*(b) Jeśli* $+\infty \notin S$*, to* $\sup S \in \mathbb{R}$ *lub* $\sup S = -\infty$.

**Lemat 8.** *Jeśli* $(a_n)$ *jest ograniczony z góry/dołu, to* $\sup S / \inf S \in S$.

**Definicja.**

*Granicą górną nazywamy ciągu* $(x_n)$ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} \sup S$. *Granicą dolną nazywam ciągu* $(x_n)$ $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} \inf S$.

**Lemat subaddytywny Fekete.** *Jeśli ciąg* $(x_n)$ *spełnia warunek:* $x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$*, to istnieje granica* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ *i co więcej*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$