1 Ćwiczenia 7.10.2022

Aksjomat Archimedesa. *Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna n taka, że $n > a$.*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ n > a$$

Lemat 1. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry, a M pewnym ograniczeniem górnym zbioru A. Wówczas równoważne są zdania:*

(i) $M = \sup A$;

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\ a > M - \varepsilon$.

Lemat 2. *Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu, a m pewnym ograniczeniem dolnym zbioru A. Wówczas równoważne są zdania:*

(i) $m = \inf A$;

(ii) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{a\in A}\ a < m + \varepsilon$.

Wnioski.

(I) Jeśli $0 < a < b$. to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \cdot a > b$.

(II) Jeśli $x_1 < x_2$, to istnieją $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ takie, że $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cap (x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$

(III) $\forall_{h>0,a\in\mathbb{R}}\exists_{k\in\mathbb{N}}\ (k-1)h \leqslant a < kh$

(IV) $\forall_{a<b}\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\exists_{c\in\mathbb{R}}\exists_{c'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\ c, c' \in (a, b)$

Lemat 3. *Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mamy*

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Lemat 4. *Dla niepustego podzbioru $A \subseteq$ mamy* $\sup(-A) = -\inf A$

Definicja. *O ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ mówimy, że jest zstępujący, jeśli $A_1 \supseteq a_2 \supseteq \ldots$*

Twierdzenie 1. *Jeśli $I_1, I_2, \ldots$ jest ciągiem zstępujących przedziałów domnkniętych prostej rzeczywistej to $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.*

2 Ćwiczenia 21.10

Lemat 5. *Dane są dwa ciągi (x_n), (y_n). Jeśli (y_n) jest ograniczony oraz $x_n \to 0$, wówczas $x_n y_n \to 0$.*

Twierdzenie 2. *Jeśli $a_n \to g$, to $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to g$.*

3 Ćwiczenia 25.10

Twierdzenie o przenikających się ciągach. *Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych $(x_n), (y_n)$ oraz (c_n). Jeśli $x_n \to x$ i $y_n \to y$ oraz $c_n = \frac{x_1y_n+\ldots+x_ny_1}{n}$, wówczas $c_n \to xy$.*

4 Ćwiczenia 28.10.2022

Lemat 6. *Niech* $S = \{\lim_{n\to\infty} x_n : (x_{n_k})-$*podciąg zbieżny, ciągu* (x_n)*, do granicy skończonej lub nie*$\}$. *Jeśli* $+\infty, -\infty \notin S$*, to zbiór* S *jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny, zatem* $S \neq \emptyset$.

Lemat 7. *Przyjmując oznaczenia jak powyżej:*

(a) *Jeśli* $-\infty \notin S$*, to* $\inf S \in \mathbb{R}$ *lub* $\inf S = +\infty$,

(b) *Jeśli* $+\infty \notin S$*, to* $\sup S \in \mathbb{R}$ *lub* $\sup S = -\infty$.

Lemat 8. *Jeśli* (a_n) *jest ograniczony z góry/dołu, to* $\sup S / \inf S \in S$.

Definicja.

$$\textit{Granicą górną ciągu } (x_n) \textit{ nazywamy } \limsup_{n\to\infty} x_n \stackrel{def}{=} \sup S.$$

$$\textit{Granicą dolną ciągu } (x_n) \textit{ nazywamy } \liminf_{n\to\infty} x_n \stackrel{def}{=} \inf S.$$

Lemat subaddytywny Fekete. *Jeśli ciąg* (x_n) *spełnia warunek:* $x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$*, to istnieje granica* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ *i co więcej*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$