

1 Ćwiczenia 7.10.2022

Aksjomat Archimedesza. Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna n taka, że $n > a$.

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \quad n > a$$

Lemat 1. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z góry, a M pewnym ograniczeniem górnym zbioru A . Wówczas równoważne są zdania:

- (i) $M = \sup A$;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \quad a > M - \varepsilon$.

Lemat 2. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu, a m pewnym ograniczeniem dolnym zbioru A . Wówczas równoważne są zdania:

- (i) $m = \inf A$;
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \quad a < m + \varepsilon$.

Wnioski.

- (I) Jeśli $0 < a < b$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \cdot a > b$.
- (II) Jeśli $x_1 < x_2$, to istnieją $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ takie, że $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \cap (x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2) = \emptyset$
- (III) $\forall h > 0, a \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{N} \quad (k-1)h \leq a < kh$
- (IV) $\forall a < b \forall a, b \in \mathbb{R} \exists c \in \mathbb{R} \exists c' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad c, c' \in (a, b)$

Lemat 3. Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mamy

- (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
- (b) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Lemat 4. Dla niepustego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ mamy $\sup(-A) = -\inf A$

Definicja. O ciągu zbiorów A_1, A_2, \dots mówimy, że jest zstępujący, jeśli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$

Twierdzenie 1. Jeśli I_1, I_2, \dots jest ciągiem zstępujących przedziałów domkniętych prostej rzeczywistej to $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

2 Ćwiczenia 21.10

Lemat 5. Dane są dwa ciągi $(x_n), (y_n)$. Jeśli (y_n) jest ograniczony oraz $x_n \rightarrow 0$, wówczas $x_n y_n \rightarrow 0$.

Twierdzenie 2. Jeśli $a_n \rightarrow g$, to $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow g$.

3 Ćwiczenia 25.10

Twierdzenie o przenikających się ciągach. Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych $(x_n), (y_n)$ oraz (c_n) . Jeśli $x_n \rightarrow x$ i $y_n \rightarrow y$ oraz $c_n = \frac{x_1 y_n + \dots + x_n y_1}{n}$, wówczas $c_n \rightarrow xy$.

4 Ćwiczenia 28.10.2022

Lemat 6. Niech $S = \{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n : (x_{n_k})\text{--podciąg zbieżny, ciągu } (x_n), \text{ do granicy skończonej lub nie}\}$. Jeśli $+\infty, -\infty \notin S$, to zbiór S jest ograniczony, więc zawiera podciąg zbieżny, zatem $S \neq \emptyset$.

Lemat 7. Przyjmując oznaczenia jak powyżej:

(a) Jeśli $-\infty \notin S$, to $\inf S \in \mathbb{R}$ lub $\inf S = +\infty$,

(b) Jeśli $+\infty \notin S$, to $\sup S \in \mathbb{R}$ lub $\sup S = -\infty$.

Lemat 8. Jeśli (a_n) jest ograniczony z góry/dółu, to $\sup S / \inf S \in S$.

Definicja.

Granice górną ciągu (x_n) nazywamy $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup S$. Granice dolną ciągu (x_n) nazywamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf S$.

Lemat subaddytywny Fekete. Jeśli ciąg (x_n) spełnia warunek: $x_{n+m} \leq x_n + x_m$, to istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ i co więcej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \inf \left\{ \frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$