Influence de l'Echantillonage sur la Distance de Wasserstein Empirique

May 3, 2023

1 Semaine 1 du 9 au 12 Mai

Lecture.

- Lecture du computational OT [PC+19]. Abstract, 1-Introduction 2- Theoretical Foundations, la section 2.5 peut être lu sans comprendre tout les détails (sauf le theorem 2.1 qui est important)

Petit résumé de 1 page.
Les points clés sont:

- Push Forward de mesure
- Formulation du problème de Monge
- Formulation du problème de Kantorovich
- Distance de Wasserstein
- Weak convergence et distance de Wasserstein
- Théorème de Brenier
- Cas particulier de la distance de Wasserstein en 1d

Faire quelques expérimentations avec les Notebook

- Distance de Wasserstein avec des mesures empiriques
- Distance de Wasserstein en 1D

Points à réfléchir.

- Soit $\mu_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \Sigma_1)$ probabilité Gaussienne avec $m_1 \in \mathbb{R}^d$ and $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Soit $T^\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tel que $x \mapsto x - \tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}^d$ et $T^c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, x \mapsto cx$ avec $c \in \mathbb{R}$. Calculer le push-forward de μ_1 par T^τ et par T^c.
- Donner un exemple de probabilités pour lesquelles le problème de Monge n'est pas définit (il n'est pas définit quand il n'existe pas de T telque $T_\# \mu_1 = \mu_2$).
- Donner un exemple de mesure pour lesquelles le problème de Kantorovich n'est pas définit (il n'est pas définit quand l'ensemble $\mathcal{U}(\mu_1, \mu_2)$ est vide).
- Soit μ_1 et μ_2 probabilités discrètes en dimension 1. En quelle dimension est $\mu_1 \otimes \mu_2$? On remarque que $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \mathcal{U}(\mu_1, \mu_2)$. Donner la matrice associée à ce plan de transport.
- Soit $\mu_1 = \delta_x$ et $\mu_2 = \delta_y$ avec $x, y \in \mathbb{R}^d$, calculer $W_2(\mu_1, \mu_2)$.
- Soit $c \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, montrer que pour μ_1, μ_2 probabilités de $\mathbb{R}^d$ avec $X \sim \mu_1$ et $Y \sim \mu_2$, on a $W_2(cX, cY) = cW_2(X, Y)$ et $W_2(X + x, Y + x) = W_2(X, Y)$
- Est ce que la distance de Wasserstein définit une norme? Si non quel axiome ne marche pas?

- Rappeler un autre critère pour la convergence faible de mesure de probabilités.
- Le théoèreme de Brenier dit que sous certaines conditions de régularitées sur les mesures le plan de transport est enfaite une map de transport. Intuitivement, donner une autre situation dans lequel le plan de transport est une map de transport (par exemple avec des probabilités discrètes).
- Calculer la distance de Wasserstein à l'aide de la distance de Bures pour les probabilités Gaussiennes unidimensionelle $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ avec $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$.
- Réfléchir à une autre distance sur l'espace des probabilités

References

[PC+19] Gabriel Peyré, Marco Cuturi, et al. Computational optimal transport: With applications to data science. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 11(5-6):355–607, 2019.