

# Influence de l'Echantillonnage sur la Distance de Wasserstein Empirique

May 22, 2023

## 1 Semaine 3 du 24 au 31 Mai

**Lecture sur les Géodesics et les barycenters.**

- Geodesics and Interpolation: Page 102, section 7.1, Continuous formulation (surtout remark 7.1)
- Barycenter: Section 9.2 page 138

**Petit résumé de 1 page.**

Les points clés sont:

- Principe général de géodésique et d'interpolation entre 2 objects (dans un espace quelconque)
- Géodésique et l'interpolation entre deux mesures de probabilités (avec la distance) de Wasserstein
- Principe général de Fréchet mean
- Barycenter (Fréchet mean avec la distance de Wasserstein)

**Faire quelques expérimentations avec les Notebook**

- Interpolation 'naive' vs Interpolation avec la distance de Wasserstein
- Geodesic sur des images
- Exemple de barycenter

**Points à réfléchir.**

- Vérifiez que le minimum de l'équation suivante est atteint en  $x^* = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$ :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^s \lambda_i \|x_i - x\|_2^2 \quad (1)$$

avec  $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$

- Donnez un exemple où les deux interpolations suivantes sont différentes:

$$\mu_t = (1-t)\mu_1 + t\mu_2 \quad \forall 0 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

$$\mu_t = ((1-t)Id + tT^{1 \rightarrow 2})_{\#} \mu_1 \quad \forall 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

où  $T^{1 \rightarrow 2}$  est la map de transport entre  $\mu_1$  et  $\mu_2$

- Explicitez la géodesics entre 2 Gaussienne de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mu_1 = \mathcal{N}(m_1, \Sigma_1)$  et  $\mu_2 = \mathcal{N}(m_2, \Sigma_2)$ .
- Pour un barycenter, quelles sont les hypothèses tel que il y est i) l'existence et l'unicité du barycenter ii) existence, unicité, vérifie l'eq du point fixe et est almost continuous (a.c.) par rapport à la mesure de Lebesgue
- Donnez quelques exemples de façon de la calculer numériquement le barycentre (à l'aide de [\[ABA22\]](#))

## References

- [ABA22] Jason M Altschuler and Enric Boix-Adsera. Wasserstein barycenters are np-hard to compute. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*, 4(1):179–203, 2022.