TD Analyse
Feuille 1

Exercice 1 : Écrire la table de vérité pour trois assertions logiques.

Exercice 2 : Soient p, q et r trois assertions logiques, à l'aide de tables de vérité, montrer que :

1) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
2) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Exercice 3 : Soient p, q et r trois assertions logiques, montrer que :

1) $p \vee q \equiv q \vee p$
2) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Exercice 4 : Soient p et q deux assertions logiques, à l'aide des connecteurs $\neg$; $\wedge$ et $\vee$ écrire le « ou » exclusif.

Indication : établir la table de vérité de $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

Exercice 5 : Soient p et q deux assertions logiques, montrer que :

1) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
2) $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

Exercice 6 : Soient p et q deux assertions logiques, montrer que :

1) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2) $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$.
3) $p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q$.

Exercice 7 : À l'aide de tables de vérités démontrer les lois de Morgan.

Exercice 8 : À l'aide de tables de vérités démontrer les lois de distributivité.

Exercice 9 : Soient p, q et r trois assertions logiques, à l'aide de table de vérité, montrer que les assertions suivantes sont des tautologies :

1) $p \vee \neg p$ (Principe du tiers exclu)
2) $\neg(p \wedge \neg p)$ (Loi de non contradiction)
3) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ (Règle du modus ponens)
4) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ (Règle du modus tollens)
5) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (Règle du modus barbara)
6) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ (Règle de la double implication)

Exercice 10 : Combien existe-t-il de connecteurs logiques à deux places. Indication : écrire une table de vérité et penser au dénombrement.

Exercice 11 : Que pensez-vous de l'assertion suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ est premier ?

Exercice 12 : On pose $(\mathcal{R}) \begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.
2) Démontrer par récurrence que $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 13 : Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$.

1) À l'aide des quantificateurs exprimer : f nulle sur $[0; 1]$.
2) À l'aide des quantificateurs exprimer : f s'annulle sur $[0; 1]$.
3) À l'aide des quantificateurs exprimer : f non nulle sur $[0; 1]$.
4) À l'aide des quantificateurs exprimer : f ne s'annulle pas sur $[0; 1]$.
5) À l'aide des quantificateurs exprimer : f positive sur $[0; 1]$.
6) À l'aide des quantificateurs exprimer : f croissante sur $[0; 1]$.

Exercice 14 : Soit (u_n) une suite numérique.

1) À l'aide des quantificateurs exprimer (u_n) nulle à partir d'un certain rang.
2) À l'aide des quantificateurs exprimer (u_n) non nulle à partir d'un certain rang.