

Feuille TD 2

Exercice 1 : Le but de l'exercice est démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

1) On pose $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Établir le tableau de variations de f .

$$t \mapsto t - \ln t$$

2) En déduire que $\forall t \in [1; +\infty[, 0 \leq \ln t \leq t$.

3) Poser $t = \sqrt{x}$ et déduire que $\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{1}{2} \ln x \leq \sqrt{x}$.

4) En déduire un encadrement de $\frac{\ln x}{x}$ pour $x \in [1; +\infty[$.

5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

6) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

Exercice 2 : Le but de cet exercice est le calcul de : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

1) On pose $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Établir le tableau de variations de f .

$$x \mapsto x - \ln(x+1)$$

2) En déduire que $\forall x \in]-1; +\infty[, x - \ln(1+x) \geq 0$.

3) On pose $g :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Établir le tableau de variations de g .

$$x \mapsto \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

4) En déduire que $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$.

5) En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x+1} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$.

6) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

7) De même montrer que $\forall x \in]-1; 0[, 1 \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq \frac{1}{x+1}$.

8) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

9) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 3 : On considère la fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Où E désigne la fonction partie entière.

$$x \mapsto xE(x)$$

1) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-3; 3]$.

2) Quel résultat peut-on conjecturer sur la continuité de f sur \mathbb{R} ?

3) Étude en $x = 0$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

c) f est-elle continue en 0 ?

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x + x$

- 1) Établir le tableau de variations de f .
- 2) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) : $e^x + x = 0$.
- 3) Donner un encadrement de la (les) solution(s) de (E) .

Exercice 5 : On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -3x^3 + 4x + 1$

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?