Feuille TD 3

Exercice 1 :

1) Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer la dérivée de f.
2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On pose $f: \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (u(x))^2 \end{array}$. En vous inspirant de la question précédente démontrer que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Exercice 2 : Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2|x| \end{array}$.

1) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$, f est-elle dérivable ?
2) Étudier la dérivabilité de f en 0.
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.

Exercice 3 : Dans chacun des cas suivants déterminer la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est dérivable et calculer $f'(x)$.

1) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 - 3x^3 + 2x + 1 \end{array}$
2) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \ln x \end{array}$
3) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{2x-1} \end{array}$
4) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \end{array}$
5) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2 - 5x + 6) \end{array}$
6) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{2x+3} \end{array}$

Exercice 4 : On pose $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2 - 2x - 1)\, e^{2x} + 2 \end{array}$

1) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$, f est-elle dérivable ?
2) Calculer $f'(x)$, donner le résultat sous forme factorisée.
3) Établir le tableau de variations de f.
4) Donner le signe de f.

Exercice 5 : On pose $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{x^2} - 3 \end{array}$

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
5) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$, f est-elle dérivable ?

6) Calculer $f'(x)$.
7) Établir le tableau de variations de f.
8) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
9) Étudier le signe de f.

Exercice 6 : On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3) Démontrer par récurrence le résultat conjecturé précédemment.

Exercice 7 : On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1 \end{array}$

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x)$.
3) En déduire le tableau de variations de f'.
4) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α.
5) En déduire le signe de f'.
6) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 8 : On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \end{array}$

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f''(x)$.
3) En déduire le tableau de variations de f'.
4) En déduire le signe de f'.
5) En déduire le tableau de variations de f.
6) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
7) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.