Feuille TD 4

Exercice 1 : Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2+x+3x^4+\dfrac{4}{x} \end{array}$

2) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4}{\sqrt{x}}+5e^x+\dfrac{2}{x^2} \end{array}$

3) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^3} \end{array}$

4) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{5}{x^4} \end{array}$

5) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

6) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-3}{x\sqrt{x}} \end{array}$

7) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\left(x^3+2\right)^3 \end{array}$

8) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \end{array}$

9) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{\left(x^3+2\right)^3} \end{array}$

10) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2} \end{array}$

11) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^3 \end{array}$

12) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{array}$

13) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x\sqrt{1+x^2} \end{array}$

Exercice 2 : On pose $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0;-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x(x+1)} \end{array}$

1) Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$
2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 3 : On pose $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{(x+1)^2} \end{array}$

1) Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$
2) En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 x^3+2x^2+x-3\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^2 x^2+e^{2x}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$

Exercice 5 : À l'aide d'intégrations par parties calculer :

1) $\int_0^1 xe^x\,dx$ 2) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ 3) $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

4) $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$ 5) $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$ 6) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$

Exercice 6 : À l'aide des changements de variables proposés, calculer :

1) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$ avec $t=e^x$ 2) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ avec $t=\sqrt{x}$

3) $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ avec $t=\sqrt{x}$ 4) $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx$ avec $t=e^x-1$

5) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ avec $t=\sqrt{e^x+1}$

Exercice 7 : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1 x^ne^{-x}\,dx$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.
2) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$.
3) Donner le sens de variation de (u_n).
4) En déduire que (u_n) admet une limite finie ℓ.
5) À l'aide d'une intégration par parties trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.
6) En déduire u_3 et u_4.
7) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\frac{1}{n+1}$
8) Calculer ℓ.

Exercice 8 : On pose $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^{-x^2}\end{array}$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\int_0^1 x^ne^{-x^2}\,dx$.

1) a) Démontrer que $\forall x\in[0;1],\ \frac{1}{e}\leq f(x)\leq 1$.
   b) En déduire que : $\frac{1}{e}\leq u_0\leq 1$.
2) Calculer u_1.
3) a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n$.
   b) Donner le sens de variation de la suite (u_n).
4) a) Démontrer que $\forall n,\ u_n\leq\frac{1}{n+1}$.
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9 :

1) Montrer que $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt \leq \frac{1}{k^2}$.
2) Montrer que $\forall k \geq 2$, $\displaystyle\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.
3) En déduire que $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t^2}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t^2}\, dt$.
4) En déduire que $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
5) Vérifier l'encadrement pour $n = 10$.

Exercice 10 : Le but de l'exercice est de trouver un encadrement de $n!$.

1) Soit $k \geq 2$, montrer que : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x\, dx \leq \ln k$.
2) Soit $k \geq 2$, montrer que : $\displaystyle\ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln x\, dx$.
3) En déduire que $\forall n \geq 1$, $\displaystyle\int_1^{n} \ln x\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln x\, dx$.
4) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\displaystyle\int_1^{n} \ln x\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{n+1} \ln x\, dx$.
5) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ on a :
$$n \ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq (n+1) \ln (n+1) - (n+2)$$
6) Écrire $\ln(n!)$ à l'aide du symbole $\sum$.
7) En déduire un encadrement de $n!$.
8) Tester cet encadrement pour $n = 40$.
9) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f^+(x) = \mathrm{Max}(f(x)\,; 0)$ et

$f^-(x) = -\mathrm{Min}(f(x)\,, 0)$.

1) On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$.
   a) Représenter graphiquement g^+ sur $[-2; 2]$.
   b) Représenter graphiquement g^- sur $[-2; 2]$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f^+(x) - f^-(x)$.
3) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f^+(x) + f^-(x)$.
4) En déduire que : $\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.