

ゲーム物理学入門

資料作成：内藤真広(HN:マヒロー)

今さら言うことでもないですが……。

- ゲームには物理は必須！
 - ー マリオがジャンプするには物理がいる
 - ー 撃った玉が敵に当たるには物理がいる
 - ー キャラをカメラで撮影するにも物理がいる

物理が要らないゲームは無い！

[※嘘 ノベルゲームにはいない]

では物理をどう学ぼう？

- 座学はもうある[西岡先生かな？]
- 実装を学べばいい

つまり、

Unityの物理演算を使わずに

Unityでゲームを作れば良い！

とは言ってもある程度は座学は必要……。

- たぶん、高校でやった物理なんて覚えてないよね……。

なんで、これから

物理[座学]やります

物理学とは何か？

- 物理学とは

物[の]理[ことわり]を学ぶ学問のことです。

なので、物理学と言います。

- 物の理とは

物体[石やら馬やら人間やら]がどのように動くのか、その規則[ルール]のこと。

- 物理を学ぶとは

物体の動きのルールを学び、
物体の動きを予測したり、
倒れない物の置き方を考えたり、
現実にした

仮想世界[ゲーム]

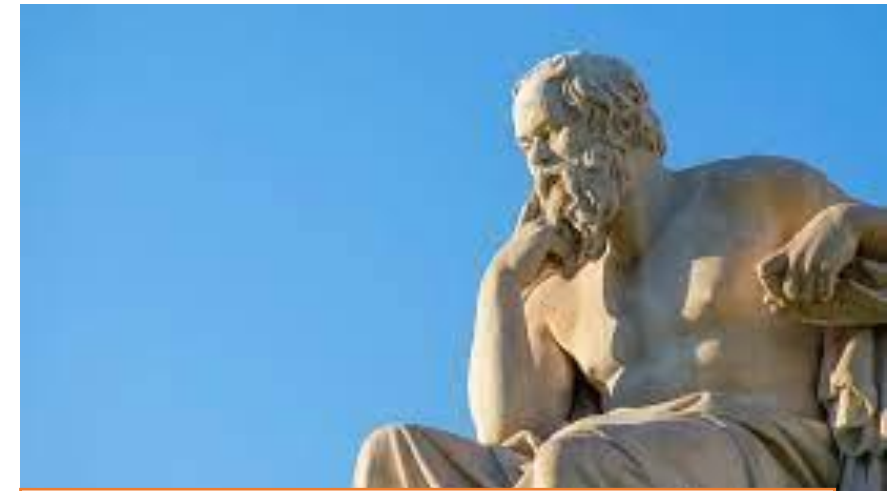
を作れるようになる
ということ。

超大雑把な物理の歴史

- 古代ギリシャ[紀元前]あたりで花開く
 - 職人の経験だったことに理屈を付けた
 - 建物の立て方とか、水の流れとか
 - 仮想[頭の中の想像]から現実[実際の動き]を考えられるようになった
 - 物理以前：とりあえずやってみて試す
 - 物理以後：理論上いけるものを試す
 - つまり、物理学によりモノ造りの失敗が格段に減った[コストが安くなった]

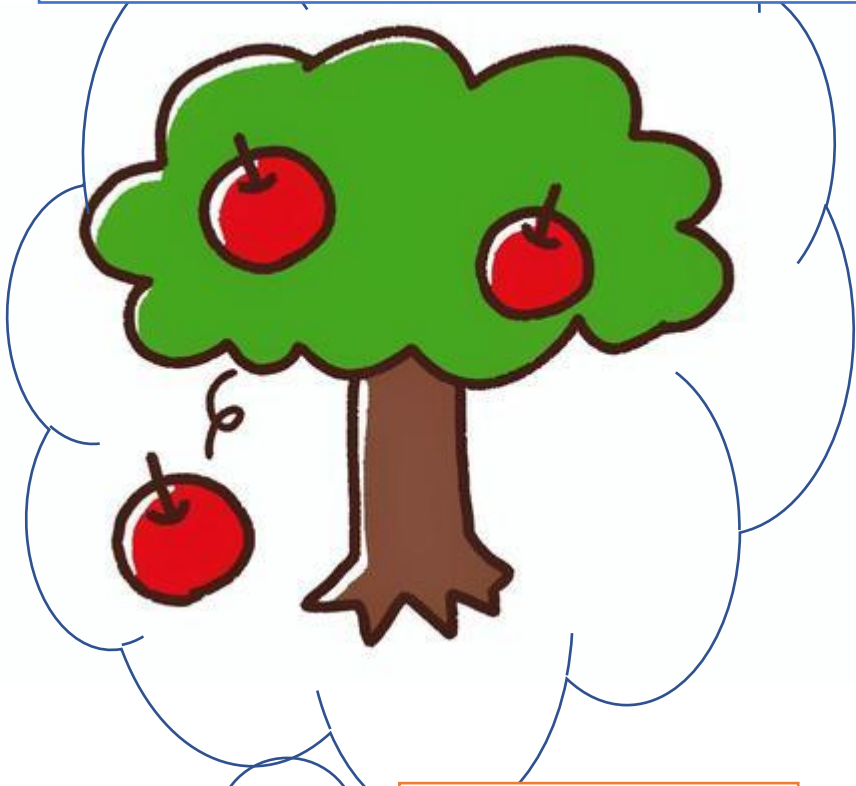


このへん



知の巨人：アリストテレス

つまり 物理学は：仮想[バーチャル]を作る学問



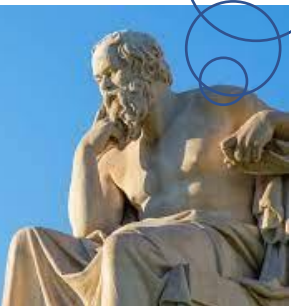
物理[予測]

りんごは木から落ちるかもしれへん

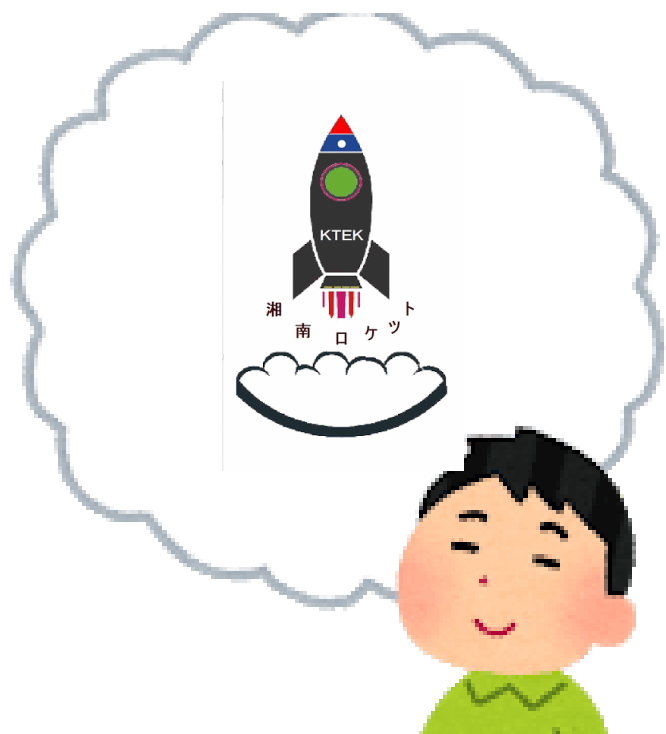


現実[実証]

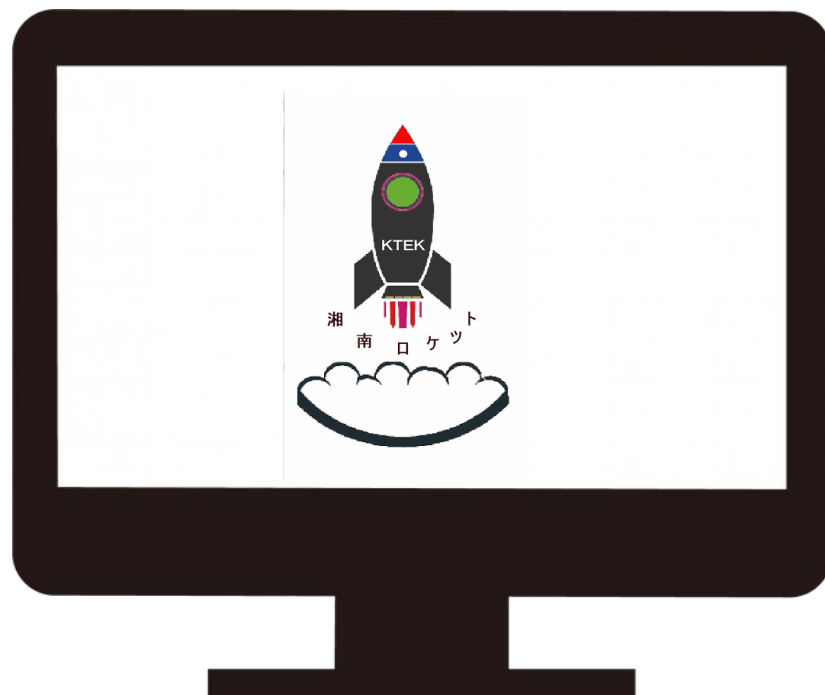
確かに落ちたな！



最近の物理



理論を立てる



シュミレーション

Unityで出来る！



実証

物理に数学は避けられない

- ところで物理には数学が必須
- プラトンさんも言ってます

「幾何学を知らざる者は、
この門をくぐるべからず」



By: プラトン

- 理由：物理現象は数式で表す
- 例：物体の落下

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

g:重力加速度

t:時間

物理数学基礎 1 — 関数の基礎

- 関数、覚えていますか？
 - CやC#の関数とはちょい違う
 - 本質的には同じ
 - $y = 2X + 1$
 - こういうのを方程式
 - $y = 2x^2 + 1$
 - こういうのを二次関数
- とか言いましたよね？

- $y =$ じゃ使いにくいのもうちょっと便利な形にします。

$$f(x) = 2x^2$$

のような形です。

$$f(2) = 2 \times 2^2$$

のように書けて便利です。

[$y=$ だと $x = 2$ のときとか書かないといけなくて不便]

物理数学基礎 1 — 関数の基礎 2

- 入力値[引き数]は増やせる

引き数 2 : $f(x, y) = 2xy + y$

引き数 3 : $f(x, y, z) = 2xy + zx$

みたいにも出来る。

[プログラミングと同じ]

- 出力[返り値]は増やせない

$$f(x, y, z) = 2xy + zx$$

左辺は要素 1 つなので当然。

[プログラミングの関数の返り値が 1 つしかないのは元々数学から来ているから]

物理数学基礎 1 関数の基礎 3

- 別に名前は $f(x)$ じゃなくても良い
- 例えば落下の運動なら

- $g[x]$ でも $J[x]$ でも
- $h[n]$ でも $U[y]$ でも良い
- その時々

分かりやすい記号を付ける

$$y(g, t) = \frac{1}{2}gt^2$$

とか書くと分かりやすい

[g:重力加速度]

[t:時間]

[y(g,t):物体の位置]

ほんとは微分とか三角関数とかいるけど

とりあえずこんなもんで！

0章：ディメンション（次元・単位）

• ディメンション（次元）とは何か？

ディメンション（以後、次元と書く）とは簡単に言うと単位の事である。

物理において単位の事をなぜわざわざ次元という言い方をするのかと言うと、

同じ単位同士

でないと計算できないからである。

例：

- ・ 速度と長さは計算できない
（足したり引いたりできない）
- ・ 重さと速度は計算できない
- ・ 力と重さは計算できない

etc...

0章：ディメンション（次元・単位）

• 単位の違いは世界の違い

計算が出来ない（お互いの影響を観測できない）ということは、それは世界が違うのと同じである（少なくとも数学上では別の世界として定義される）。なので、

次元（ディメンション）

という言い方をする。（2次元の出来事と3次元の出来事は次元そのままだとお互いの影響を計算できないということ）

例：

- ・ 2次元と3次元は計算できない（別の世界だから）

例：ベクトルの的に考える

- ・ $A(0,1,2)B(1,2)$ は計算できない

（これを足したら $AB(1,3,2)$ になるとか思うやつはベクトルの学習が足りていない）

0章：ディメンション（次元・単位）

• 次元の統一

では別次元（単位）の物同士は計算できないのか？

そんな事はなく、次元の統一を行う事で計算できます。

最終的に求めたい次元になるように、次元を構成する要素を増やしたり減らしたりして計算することができます。

例：ベクトルの的に考える

- $A(0,1,2)B(1,2)$ は計算できないが、 $B(1,2,0)$ に変換すればいける
 $AB(1,3,2)$

例：速度の例

速度の次元は $v[m/s]$ ：メートル毎秒
 $n[s]$ 後の $s[m]$ を出したいなら
 $s[m] = v * n[m/s * s] = vn[m]$
(これが計算による次元の統一です)

0章：ディメンション（次元・単位）

• MLT単位

単位とは定義によりいくらでも増えていくものなので、国際的に統一された単位がある。それがMLT単位。

質量（Mass） → **kg(キログラム)**

長さ（Lenght） → **m(メートル)**

時間（Time） → **s(秒)**

これらを基本単位として物理は計算される。

例：色々な単位（次元）

速度:距離/時間　なので[m/s]

加速度:速度/時間　なので[m/s/s]

力:質量*加速度　なので[kg*m/s/s]

[kg*m/s/s]は[N]とも書く。

1章：速度と加速度1

- **v:速度**[速度は物理ではvと書く]

m/s:メートル毎秒

m/s:一秒間に何M進むか。

みたいな事は覚えてますよね？

ある物体が、1秒間に何メートル進むのか。

それをその物体の速度[v]と言う。

例1：

2[m/s]なら、3秒[s]で6[m]進む
式にすると、

$$6[m] = 2[m/s] * 3[s]$$

例2：

4[m/s]なら、8秒[s]で32[m]進む
式にすると、

$$32[m] = 4[m/s] * 8[s]$$

1章：速度と加速度2

- **α ：加速度[加速度は α と言う]**

- 現実には物体の速度は一定ではない
- 段々遅くなったり早くなったりする
- 現実の物体の計算をするには1秒毎にどれだけ物体の速度が変化するか知る必要がある
- それが加速度

- **加速度とは秒間の速度の変化量**

- v/s : 速度毎秒
- $m/s/s$: v は m/s なので
- 何秒その加速度でいたか分かれば、現在の速度が分かる

例：加速度から物体の速度を出す
加速度 $9 [m/s/s]$ の物体Aの速度は現在 $0 [m/s]$ である。 $3 [s]$ の速度は？

$$9 [m/s/s] * 3 [s] + 0 [m/s] = 27 [m/s]$$

元の速度が $3 [m/s]$ のときは？

$$9 [m/s/s] * 3 [s] + [m/s] = 30 [m/s]$$

1章：速度と加速度　　—　　例題 1

問題 1：

8 秒間[s]に 32メートル[m]進んだ物体Aの速度[m/s]を求めよ。

問題 2：

5[m/s]の物体は5[s]後に何[m]進むかを求めよ。

1章：速度と加速度

— 例題 1 : 答え

問題 1 :

8 秒間[s]に 32メートル[m]進んだ物体Aの速度[m/s]を求めよ。

問題 2 :

5[m/s]の物体は5[s]後に何[m]進むかを求めよ。

解 1 :

$32[\text{m}] = 8[\text{s}] * v[\text{m/s}]$ の v が求める速度なので、 $4[\text{m/s}]$

解 2 :

$n[\text{m}] = 5[\text{m/s}] * 5[\text{s}]$ の n が求める距離なので、 $25[\text{m}]$

1章：速度と加速度 — 例題 2

問題 1：

速度 $4[\text{m/s}]$ の物体Aの速度が $2[\text{s}]$ 後に $8[\text{m/s}]$ になった。

この物体の加速度 $[\text{m/s/s}]$ は？

問題 2：

加速度 $4[\text{m/s/s}]$ の物体の速度は $4[\text{m/s}]$ である。 $2[\text{s}]$ 後の速度は？

1章：速度と加速度

— 例題 2：答え

問題 1：

速度 $4[\text{m/s}]$ の物体Aの速度が $2[\text{s}]$ 後に $8[\text{m/s}]$ になった。

この物体の加速度 $[\text{m/s/s}]$ は？

解 1：

$8[\text{m/s}] = 2[\text{s}] * \alpha [\text{m/s/s}] + 4[\text{m/s}]$ の α が求める加速度なので、
 $4[\text{m/s/s}]$

問題 2：

加速度 $4[\text{m/s/s}]$ の物体の速度は $4[\text{m/s}]$ である。 $2[\text{s}]$ 後の速度は？

解 2：

$n[\text{m/s}] = 2[\text{s}] * 4[\text{m/s/s}] + 4[\text{m/s}]$ の n が求める速度なので、
 $12[\text{m/s}]$

1章：速度と加速度：公式

• 速度

速度： v [m/s]

t [s]で進んだ距離： x [m]

x [m]進んだ時間： t [s]

とすると、

$$v[m/s] = x[m] / t[s]$$

• 加速度

現在の速度： v [m/s]

加速度： α [m/s/s]

時間： t [s]

元の速度： u [m/s]

とすると、

$$\alpha [m/s/s] = v[m/s] / t[s]$$

$$v[m/s] = \alpha [m/s/s] * t[s] + u[m/s]$$

1章：速度と加速度：Unityでの実装

- ・仕様 1

Scene名：speed

オブジェクト名：A

内容：

オブジェクトAを作成し、
右方向に一定の速度で進ませよ。

- ・仕様 2

Scene名：acceleration

オブジェクト名：B

内容：

オブジェクトBを作成し、
右方向に一定の加速度で進ませよ。

2章：水平方向の運動

- ・ 物体の動きを考える上で、

速度と加速度

があることがわかった。

- ・ リアルな物体ほど元々の速度を持ち、加速度によって速度を変化させる（マリオもそう）。
- ・ 速度が変化するので、1秒間に進む距離も当然変化する

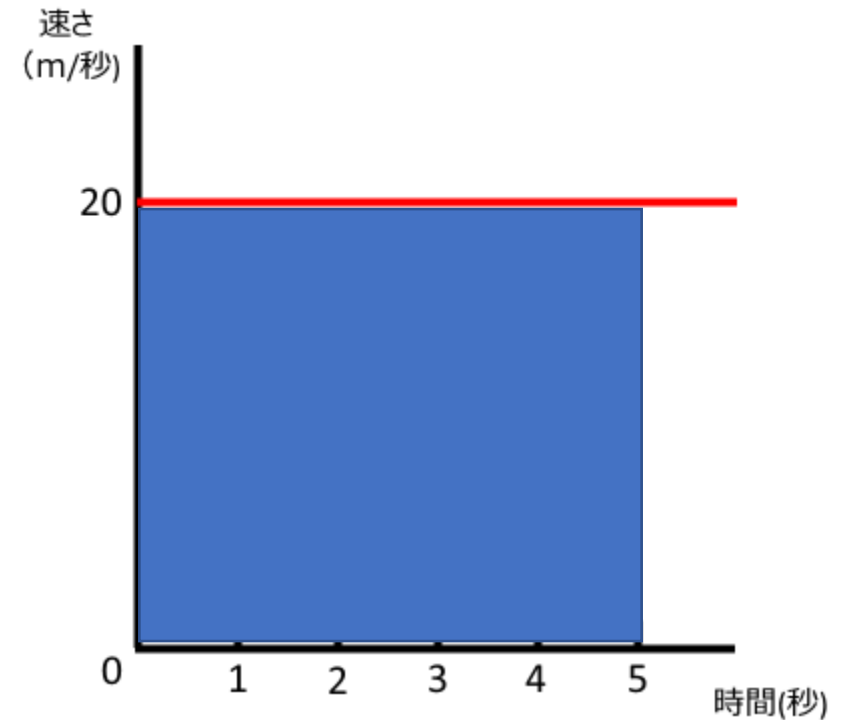
実際の物体の運動は以下の式のような動きをする

$$x[m] = \frac{1}{2} \alpha[m/s/s] * t^2[m/s] + v[m/s] * t[s]$$

これがどういう意味かを学ぶ

2章：水平方向の運動

- ・ 等速度運動、
速度の変化しない運動について考える
- ・ 物体Aが速度 v で t 秒間移動した場合の移動距離と時間のグラフを考えると、右のようになる。



**20[m/s]で5秒移動したら、
100[m]なので面積と同じになる。**

**つまり移動距離は
速さと時間のグラフの面積と等しい**

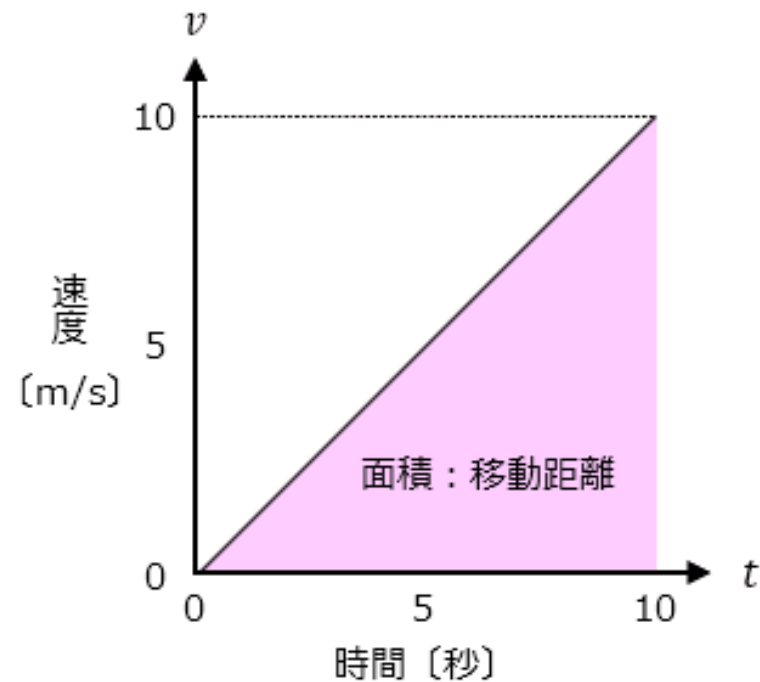
2章：水平方向の運動

- ・ 等加速度運動、
加速度の変化しない運動について考える

- ・ 物体Aが加速度 v で t 秒間移動した場合の移動距離と時間のグラフを考えると、右のようになる。

$$\text{よって、} x = \frac{1}{2} vt$$

$$v = at \text{ より } \mathbf{x = \frac{1}{2} at^2}$$



**1[m/s/s]で10秒移動したら、
10[m/s]になる。**

**等速度運動と同じで
移動距離は面積と等しい**

このグラフの傾きが加速度

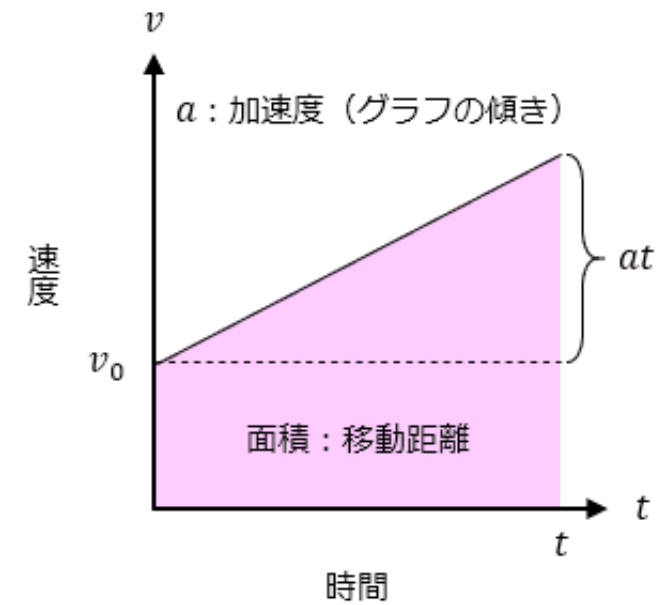
※ディメンション ([m/s]とか) は省略してます

2章：水平方向の運動

- ・元々速度がある等加速度運動
- ・つまり速度 v_0 で動いていた物体があるタイミングで加速度 a で動きだしたような運動

$$\text{三角形のとき} : x = \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{四角形のとき} : x = vt$$



点線下部の長方形 … 縦 : v_0 , 横 : t → 面積 : $v_0 t$

点線上部の三角形 … 底辺 : t , 高さ : at → 面積 : $\frac{1}{2}at^2$

面積の合計 … $v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

等加速度直線運動の様子

X[m]は面積なので、

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

2章：水平方向の運動の公式

・ 水平方向の運動：公式

初速： v_0

速度： v

時間： t

加速度： α

移動距離： x

$$x = \frac{1}{2} \alpha t^2 + v_0 t$$

例：初速 2 [m/s], 加速度
3[m/s/s], で 2 [s] 移動したとき
の移動距離は？

$$n[m] = (1/2) * 3 * 2^2 + 2 * 2$$

の n が求める移動距離なので、
 $4 + 6 = 10$ [m]

2 章：水平方向の運動の公式 ：Unityでの実装

・仕様 1

Scene名：Suihei 1

オブジェクト名：A

内容：

オブジェクトAを作成し、
初速度と加速度を右方向に設定して、
右方向に等加速度運動をさせよ。

（どんどん早くなる）

・仕様 2

Scene名：Suihei 2

オブジェクト名：B

内容：

オブジェクトBを作成し、
初速度と加速度を左方向に設定して、
右方向に等加速度運動をさせよ。

（はじめ左に進むが、どんどん遅くなり、やがて右に進み始める）

3章：加速度は何故発生するか？

- ・ 速度は加速度から生じる

前章の話で、

- ・ 移動距離は速度を用いて

- ・ 速度は加速度を用いて

計算出来ることが分かった。

つまり、速度があるから移動距離が生まれ、加速度があるから速度は生まれることがわかる。

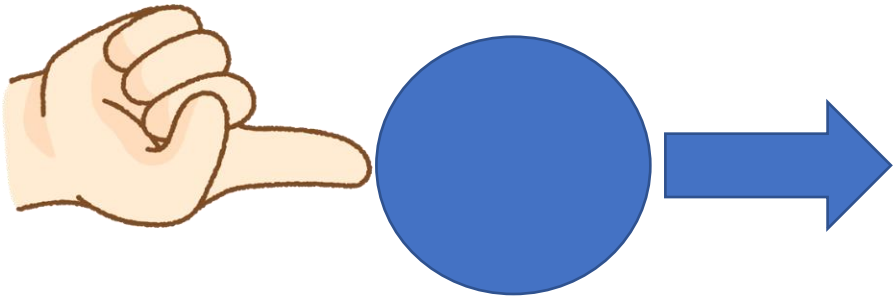
では、

**加速度はどこから
生まれているのだ
ろうか？**

3章：加速度は力から生まれる

・ 加速度は力から生じている

高尚な話を無視すると
加速度は力から生じます。



物体に力を加える事で加速度が発生

つまり、
速度も加速度も移動距離も
力から発生しています。
(電気も光も質量さえも
力から発生している)

なので、
物理の基本は**力**のなのです。

3章：加速度は力から生まれる

・力から加速度へ

ここで、超有名なあの式が登場します。

$$F = ma$$

ディメンションで考えると、

$F[\text{N}]$ であり、 $[\text{N}] = [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$

つまり、この式は力 F が重さ $m(\text{kg})$ の物体に加速度 $a(\text{m}/\text{s}^2)$ を与えることが出来ると示している。

・具体例

質量 $5[\text{kg}]$ の物体を $5[\text{N}]$ の力で**押し続ける（超重要）**と、

$$5 = 5 \cdot a$$

なので、

$$a = 1$$

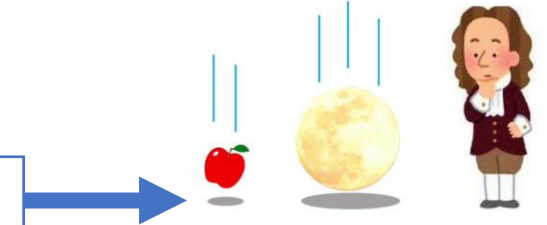
よって、加速度 $1[\text{m}/\text{s}^2]$ の加速度が物体Aに発生し続ける。

（押すのを止めると加速度は消滅します）（速度は残ります）

リンゴも月も落ちる

3章：重力という例外

リンゴも月も落ちる速度は一緒



・重力

我々は常に地球から力を受けている。それが重力だ。

$F = ma$ の式から、

力が一定なら、質量が小さいほど加速度が大きく、質量が大きいほど加速度は小さい。と分かるので。

ビルなどから飛び降りた時、体重が軽いほうが落ちるのが早いような気がする。でも実際は落ちる速度はみな一定だ。

・重力は質量に応じて増減する

左に書いた事には理由がある。

重力は質量が大きければ大きいほど**増加する**という性質を持っているからである。

質量が大きくなったぶん、地球から受け取る力も増えるので、体重が重かろうが軽かろうが、地球から受ける力による加速度は変化しない。

4章：落体の運動



・重力加速度

前章の話により、リンゴでもダン
プカーでも同じ、どんな物体でも一
定の重力加速度持つという事が分
かった。これは既に調べられている。
だいたい、

$9.8[\text{m/s/s}]$ である。

これを重力加速度 g と表現する。

例：

ビルの上から物体Aを落とした。
3秒後の速度は？

$$9.8[\text{m/s/s}] * 3[\text{s}] = 29.4[\text{m/s}]$$

時速に直すと、

$$\text{時速: } 105840\text{m} = 105.84\text{km}$$

つまり、**たった3秒でほぼ助からな
い速度に達する。**

(どうしてもビルから飛ばなきゃいけなくなっ
たら10M以内を選ぼう (およそ40キロ))

4章：落体の運動

・ 重力による移動

上下の運動も左右の運動も基本的に同じである。

上下の運動は加速度が重力加速度というだけである。

重力加速度を g とすると、

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (y: \text{移動距離})$$

例：100Mのビルの上から物体Aを落とした。3秒後、物体は地上から何mの位置にあるか？

$$\begin{aligned} &100[\text{m}] - \frac{1}{2} \cdot 9.8[\text{m/s}^2] \cdot (3[\text{s}])^2 \\ &= [\text{m}] - [\text{m/s}^2 \cdot \text{s}^2] (\text{次元のみ}) \\ &= 100 - 4.9 \cdot 9 \\ &= 100 - 44.1 = 55.9[\text{m}] \end{aligned}$$

（何秒後に落ちるかを考えると、大体4秒未満である。走馬灯を見る時間があるかはかなり怪しい）

4章：落体の運動

・ 打ち上げた物体の運動

落体の運動にも初速がある場合がある。代表例としては打ち上げた物体の落体運動である。

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

(v_0 ：初速)

例：速度9.8[m/s]で打ち上げた物体Aは何秒で地面に落下するか？

$$0[m] = \frac{1}{2} \cdot 9.8[m/s] \cdot t^2[s] - 9.8t$$

$$0 = \frac{1}{2}t^2 - t$$

$$0 = t^2 - 2t$$

$$0 = t(t-2)$$

$$t = 0, 2$$

$t=0$ はそもそも打ち上げなかったということなので、2[s]後

4章：落体の運動：Unityでの実装

・仕様 1

Scene名：Rakutai 1

オブジェクト名：A

内容：

オブジェクトAを作成し、
重力加速度を持たせ、落下させよ。

・仕様 2

Scene名：Rakutai 2

オブジェクト名：B

内容：

オブジェクトBを作成し、
初速と重力加速度を持たせよ。
初速は上方向に持たせよ。

5章：放物線運動

・ ここまでの話

ここまでで横の運動と縦の運動について学んだ。

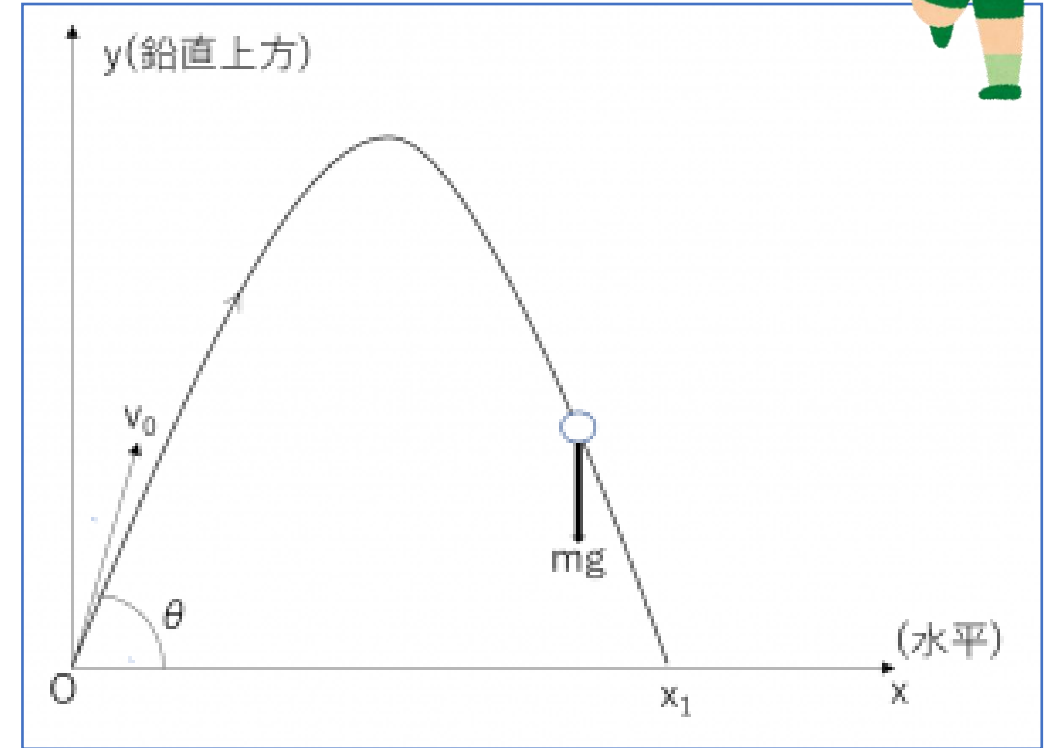
水平方向の運動：横の運動

落体の運動：縦の運動

これら二つを使い、

上下同時の運動を考えられる。

それが放物運動である。



こんなやつ、
みんな覚えてる？

5章：放物線運動 — ベクトルの分解

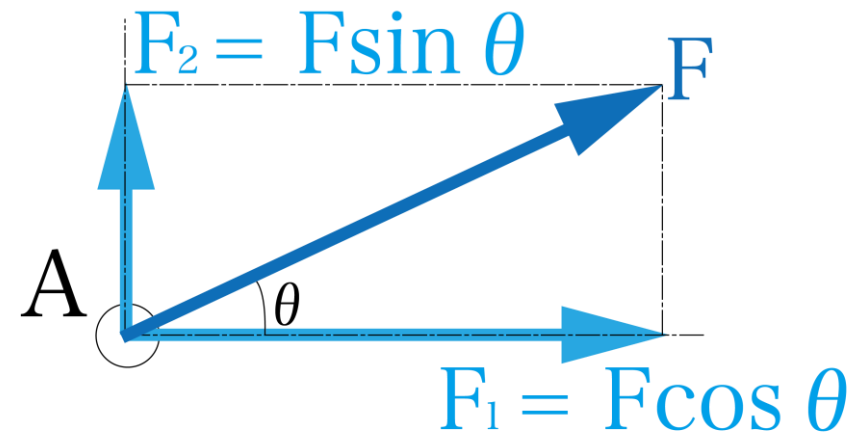
・これまで学んだ知識で放物運動を計算するには、
斜めの運動を

垂直と水平

の運動に分解しなくてはならない。
つまり、

ベクトル（向きと力（大きさ）
を持つ数値）の分解である。

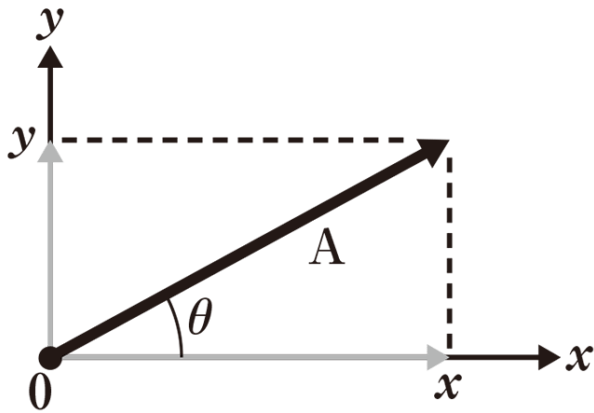
何が言いたいかというと、
斜めに力が掛かっているとは
**垂直と真横に同時に力が掛っ
ていると同じである。**



5章：放物線運動 - ベクトルの分解の式

・ぶっちゃけ下図です。

— つまりベクトルの大きさと角度が必要



$$\begin{cases} x = (A \cos \theta) \\ y = (A \sin \theta) \end{cases}$$

例：物体Aが速度8[m/s]で角度 30° で打ち出されたとき、物体Aの x 方向の速度と y 方向の速度を求めよ。

$$x: 8 * \cos 30^\circ = 8 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} [\text{m/s}]$$

$$y: 8 * \sin 30^\circ = 8 * 1/2 = 4 [\text{m/s}]$$

5章：放物線運動 - 分解した速度から運動式を求める

前スライドで分解できた

- ・ x 方向を水平方向
- ・ y 方向を落下運動（鉛直方向という）

として計算して、それぞれで x と y の座標を出せば、求めたい放物運動の x, y 座標になっている。

例（重力や加速度は無いものとする）：

物体A:速度 8 [m/s],角度30

元の位置:(0,0)

求める位置：2[s]後

$$x:8*\cos30^\circ = 8*\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}[\text{m/s}]$$

$$y:8*\sin30^\circ = 8*1/2=4[\text{m/s}]$$

なので、2秒後の物体Aの位置は
($8\sqrt{3}$, 8)

5章：放物線運動－放物運動の式

以上により、
初速度・加速度・重力まで考えて公
式を立てると

$$x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \cos \theta + v_0 t \cos \theta$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \theta$$

物体は θ 方向に
初速 v_0 加速度 α とする

ただ、大抵の放物運動は物体その
ものには加速度が設定されていな
いので、

$$x = v_0 t \cos \theta$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \theta$$

を使うことが多い。

5章：放物運動－簡単な例題

物体A：

初速4[m/s],角度30,位置(0,0)

加速度なし、重力ありの場合の、
8秒後の位置を答えよ。

$$V_x = 4 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} [\text{m/s}]$$

$$V_y = 4 * 1/2 = 2 [\text{m/s}]$$

$$X_8 = 2\sqrt{3} * 8 = 16\sqrt{3}$$

$$Y_8 = -1/2 * 9.8 * 64 + 2 * 8 \\ = -313.6 + 16 = -297.6$$

よって、

8秒後の物体Aの位置は
($16\sqrt{3}$, -297.6)
である。

5章：放物運動 — Unityでの実装

仕様 1：

Scene名：Houbutu 1

オブジェクト名：A

内容：

オブジェクトAを作成し、

斜め右上に動く運動をさせよ。

その際に速度は分解したもので考えよ。

(重力は考えなくて良い)

仕様 2：

Scene名：Houbutu2

オブジェクト名：B

内容：

オブジェクトBを作成し、

放物運動させよ。

(初速度と角度は自由。物体は重力以外の加速度は持たない)

6章：まとめ

どうだったでしょうか？

物理の入り口も入り口でしたが、ゲーム制作において物理は避けて通れない事がよく理解できたことでしょう。

ぶっちゃけ

「物理学を知らざる者は、
ゲーム作るべからず」



By: プラトン

というレベルなのですが、

皆さんも私も無限に時間があるわけじゃないので、この辺で。

衝突とか光とかモーメントとか

最近のゲームに必須な要素はきっと学校側がやってくれると信じましょう。

また会う日まで！



知の巨人：アリストテレス