1.平行移動

行列において、平行移動は以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \pm dx \\ y_0 \pm dy \\ z_0 \pm dz \\ 1 \end{bmatrix}$$

元の座標に**移動距離を加減した**だけだと分る。
これを**行列の積**で表すと、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + dx \\ y_0 + dy \\ z_0 + dz \\ 1 \end{bmatrix}$$

上記のようになる。3×3行列を4×4行列に拡張することで、3次元の移動を積で表せる。

変換処理を全て積で表す事で、場合分けを減らして処理を簡単にできます。また、この後に出てくる拡大縮小などの処理と合成できるので、一度の処理で複数の変換が行えます。

2.拡大縮小

行列において、拡大縮小は以下のように表せる。
(s_x: x軸倍率, s_y: y軸倍率s_z: z軸倍率)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x_0 \\ s_y y_0 \\ s_z z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これを平行移動と合わせ一つの行列にすると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & dx \\ 0 & s_y & 0 & dy \\ 0 & 0 & s_z & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x_0 + dx \\ s_y y_0 + dy \\ s_z z_0 + dz \\ 1 \end{bmatrix}$$

これは拡大縮小をしてから平行移動したものです。平行移動してから拡大縮小だと行列が変わります。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + dx \\ y_0 + dy \\ z_0 + dz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x(x_0 + dx) \\ s_y(y_0 + dy) \\ s_z(z_0 + dz) \\ 1 \end{bmatrix}$$

このように掛ける順番は非常に大事です。

3.行列の回転

行列において、回転は以下のように表せる。

z軸回転(二次元回転)：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\Theta & -sin\Theta & 0 & 0 \\ sin\Theta & cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 cos\Theta - y_0 sin\Theta \\ x_0 sin\Theta + y_0 cos\Theta \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x軸回転：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\Theta & -sin\Theta & 0 \\ 0 & sin\Theta & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 cos\Theta - z_0 sin\Theta \\ y_0 sin\Theta + z_0 cos\Theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

y軸回転：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\Theta & 0 & sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\Theta & 0 & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 cos\Theta + z_0 sin\Theta \\ y_0 \\ -x_0 sin\Theta + z_0 cos\Theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

三次元ベクトルの回転と同じになっていることが分る。なお、
z軸回転(ロール), **x軸回転(ピッチ)**, **y軸回転(ヨー)**
と呼ばれる。

このように三次元回転は、
各軸に沿って回転させることで表現する。
しかし、これでは全て軸沿いでしか回転できず。
任意の回転位置に段々と変換する、などという動作ができない。
なので、行列の合成を行って、それを単位行列化し、単位時間毎に積を取るようなやり方をする。

4.行列の合成

通常ゲームプログラミングでは、1~3までの変換を一回の積で行えるように行列を**合成**し、それを各頂点座標に掛けていって物体を動かす。

例えば、拡大縮小したあと平行移動してz軸回転したとする。

$$\begin{bmatrix} cos\Theta & -sin\Theta & 0 & 0 \\ sin\Theta & cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

合成すると、

$$\begin{bmatrix} cos\Theta & -sin\Theta & 0 & 0 \\ sin\Theta & cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & dx \\ 0 & s_y & 0 & dy \\ 0 & 0 & s_z & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} s_x cos\Theta & -s_y sin\Theta & 0 & dxcos\Theta - dysin\Theta \\ s_x sin\Theta & s_y cos\Theta & 0 & dxsin\Theta + dycos\Theta \\ 0 & 0 & s_z & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

これらをオブジェクトの各頂点に掛ける。
この行列の合成はゲームプログラミングでは非常に大事で、**各頂点に掛ける**と書いてあるように、各頂点全てに処理を行う必要があり、ここの計算を如何に減らすかがそのまま速度に直結します。
なので、合成できる処理はできる限り合成してから、計算を行うのが重要です。

$H=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$,E(単位行列)

1　次の行列を求めよ。

(1)　HN　でHを xに3,yに7 移動させる行列N

(2)　IN　でIを xに5,yに7,zに12 移動させる行列N

(3)　HN　でHを、xを1/2,yを1/3　にする行列N

(4)　IN　でIを xを1/3,yを1/4,zを1/5 にする行列N

2　次の行列を求めよ。

(1)　HN　でHを　30度回転させる行列N

(2)　IN　でIを　z軸周り(ロール)で30度回転させる行列N

(3)　HN　でIを　y軸周り(ピッチ)で45度回転させる行列N

(4)　HN　でIを　z軸周り(ヨー)で60度回転させる行列N

3　次の問いに答えよ。

・Iを+(1,2,3)移動させたあと、

・y軸周りにを30度回転させ、

・(1/2,1/2,1/2)に縮小したい。

上記の合成行列を求めよ。

また、最終的なIの座標を求めよ。

4　次の問いに答えよ。

A(0,0),B(4,0),C(2,3)とする。

三角形ABCに

・xに２移動

・yに4移動

・ABCの中点を基準としてy軸周りにを30度回転

・ABCの中点を基準としてx軸周りにを30度回転

・(1/2,1/2,1)縮小

上記の変換をかけるとする。

合成行列を求めよ。

また、最終的な三角形ABCの

中点 / 点A / 点B / 点C　を求めなさい。