1.行列

行列とは**表形式**で同じ種類のデータを複数持つデータ形式の事です。

具体的には、

$$\begin{array}{rc} & \qquad 列 \\ 行 & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\end{array}$$

上記のように行と列の形(これを表形式と言います)でデータを扱のが行列の計算です。

行列には様々な利点がありますが、
一番の利点は**複数の処理を一つに纏めれる**事です。

なので、実際のところ行列だからこそできる何かができるわけではありません。
しかし、処理自体も速くなりますし、難解な概念も簡単化できます。

行列を使わずともゲームは作れますが、それは「ボートでも太平洋を渡れる」と言ってるようなものです。
太平洋を渡るなら飛行機に乗るように、ゲームを作るなら行列を使いましょう。

2.行列の型と加減算

行列には型があります。
左は2×2行列,右は3×3行列です。

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

同じ型でなければ加減算数はできません。

・加減算の例
ベクトルも行列の一種なので、基礎計算はベクトルと同じです。

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$k\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 2k\\ 3k & 4k\end{bmatrix},\quad 1/k * \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/k & 2/k\\ 3/k & 4/k\end{bmatrix}$$

足し算・引き算・実数算・実数除　は上記です。

3.行列の積

ベクトルと同じように行列の積も特殊です。
具体的には、以下のようになります。

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{bmatrix}$$

これは、**左の行と右の列の内積**と見なせます。
何故このように定義されているのかというと、元々は以下のように方程式を行列に変換するために作られたからです。

$$\begin{bmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

左が二次元回転の公式だとわかるでしょうか？
右のように回転の行列を作っておけば、行列の演算によりベクトルの形を保ったまま回転の計算ができる事が分かります(x成分、y成分に分けなくてよい)。
また、**変数と式を完全に分けて管理できます**。このメリットは主計算だと分かりにくいですが、プログラミングでは大変な利点です。
行列の演算さえ定義しておけば、単純に処理が減りますし、行列は配列のような形でデータを保つので非常に相性が良い事が分かります。

4.型違いの行列の積

3での回転の公式の行列変換でもやってますが、
行列の積は同じ型でなくても出来ます。
行列積の条件は以下です。

・左の列数と右の行数が一致

これが行列の積の条件です。
具体的に例を挙げると以下は計算できます。

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

具体的に計算すると

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 11\end{bmatrix}$$

つまり、左の行数に収束します。
また、

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

は計算出来ないので、交換法則が成り立ちません。

4.転置行列

行と列を入れ替えた物が**転置行列**です。
行列をDと置くと、Dの転置行列は

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

という風に書きます。

5.単位行列

単位行列は行列での1を表すものです。

E=$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,E=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

という風に斜めに1を配置します。
この行列は掛けても変化しない行列です。
変化してほしくはないが、掛け算自体はしなければならない場面などで使用します。

5.2×2型逆行列

逆行列とは**変換を元に戻す行列**です。
変換する行列をAとした場合、A^{-1}と表します。
どういうことかを行列Dで考えると

D = A^{-1} AD

となる。つまり、DにAの返還をかけた後、元に戻す。 という処理で使います。
具体的に式で表すと以下になります。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5.3×3型逆行列

ゲームプログラミングにおいて、
逆行列が必要なのは3×3までが一般的です。
なので、3×3までは把握しておきましょう。
3×3型の行列をAとすると、

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$detA = \frac{1}{aei + c\,dh + bfg - ceg - afh - b\,di}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - eg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

となります。

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, D=$\begin{bmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 12 & 0 & -16 \end{bmatrix}$, H= $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, I =$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,E(単位行列)

1　次の行列計算をせよ。

(1)　A+B　　(4)　(1/2)D
(2)　A−B　　(5)　(−1/4)X = (1/2)B - 3A
(3)　−3C　　(6)　2X = 3C - D

2　次の行列計算をせよ。

(1)　AB　(3)　HB　(5)　AE
(2)　BC　(4)　IC　(6)　ED

3　次の行列の転置行列を求めよ。

B,C,D

4　次の逆行列を求め、確かに逆行列であることを確かめよ。

A,C