

4. 転置行列

行と列を入れ替えた物が**転置行列**です。
行列をDと置くと、Dの転置行列は

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

という風に書きます。

5.2×2型逆行列

逆行列とは**変換を元に戻す行列**です。
変換する行列をAとした場合、 A^{-1} と表します。
どういふことかを行列Dで考えると

$$D = A^{-1} A D$$

となる。つまり、DにAの返還をかけた後、元に戻す。という処理で使います。
具体的に式で表すと以下になります。

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 12 & 0 & -16 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, E(\text{単位行列})$$

1 次の行列計算をせよ。

- (1) $A+B$ (4) $(1/2)D$
(2) $A-B$ (5) $(-1/4)X = (1/2)B - 3A$
(3) $-3C$ (6) $2X = 3C - D$

$$(1) \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} 6 & -9 & -15 \\ 0 & -3 & 12 \\ -30 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$(4) \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix} (5) \begin{bmatrix} 34 & 32 \\ -12 & -12 \end{bmatrix} (6) \begin{bmatrix} -6 & 17/2 & 17/2 \\ 0 & -7/2 & -4 \\ 9 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}$$

2 次の行列計算をせよ。

- (1) AB (3) BH (5) AE
(2) CD (4) CI (6) ED

$$(1) \begin{bmatrix} -10 & 20 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} 48 & 46 & -88 \\ -48 & 10 & 60 \\ 48 & -80 & -4 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix}$$
$$(4) \begin{bmatrix} 19 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix} (5) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (6) \begin{bmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 12 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

3 次の行列の転置行列を求めよ。

B, C, D

$$B^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} D^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

4 次の逆行列を求め、逆行列であることを確かめよ。

A

$$A^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} 1/3 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 単位行列

単位行列は行列での1を表すものです。

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

という風に斜めに1を配置します。
この行列は掛けても変化しない行列です。
変化してほしくないが、掛け算自体はしなければならぬ場面などで使用します。

5.3×3型逆行列

ゲームプログラミングにおいて、
逆行列が必要なのは3×3までが一般的です。
なので、3×3までは把握しておきましょう。
3×3型の行列をAとすると、

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det A = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - eg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

となります。

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, E(\text{単位行列})$$

1 次の行列を求めよ。

- (1) HN でHを xに3, yに7 移動させる行列N
- (2) IN でIを xに5, yに7, zに12 移動させる行列N
- (3) HN でHを、xを1/2, yを1/3 にする行列N
- (4) IN でIを xを1/3, yを1/4, zを1/5 にする行列N

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 次の行列を求めよ。

- (1) HN でHを 30度回転させる行列N
- (2) IN でIを z軸周り(ロール)で30度回転させる行列N
- (3) HN でIを x軸周り(ピッチ)で45度回転させる行列N
- (4) HN でIを y軸周り(ヨー)で60度回転させる行列N

$$(1) \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 次の問いに答えよ。

- ・Iを+(1, 2, 3)移動させたあと、
- ・y軸周りにを30度回転させ、
- ・(1/2, 1/2, 1/2)に縮小したい。

上記の合成行列を求めよ。

また、最終的なIの座標を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 & 0 & 1/4 & (3 + \sqrt{3})/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ -1/4 & 0 & \sqrt{3}/4 & (3\sqrt{3} - 1)/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5\sqrt{3} + 5)/4 \\ 5/2 \\ (5\sqrt{3} - 5)/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 次の問いに答えよ。

A(0, 0), B(4, 0), C(2, 3) とする。

三角形ABCに

- ・ABCの中点を基準として30度回転
- ・(1/2, 1/2, 1)縮小
- ・xに2移動
- ・yに4移動

上記の変換をかけるとする。

合成行列を求めよ。

また、最終的な三角形ABCの

中点 / 点A / 点B / 点C を求めなさい。

まずは合成行列を作る。

中点基準に回転するにはまずは中心が原点まで移動したと考える。そこから中心(2, 1)なので、

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

そこから、縮小と移動を行うので

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

そこから、元の位置に戻す。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここから、合成行列を作り、

それを全ての点に掛けてそれぞれの点の座標を求める。

(手計算は面倒なので、プログラムで確認して下さい。)