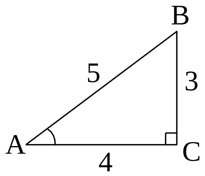
1 直角三角形の三角比

(1) 右の図の直角三角形ABCにおいて，

sin$A$,　cos$A$,　tan$A$

の値を求めよ。



$\sin A = \frac{3}{5}$

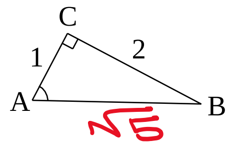
$\cos A = \frac{4}{5}$

$\tan A = \frac{3}{4}$

(2) 右の図の直角三角形ABCにおいて，

sin$A$,　cos$A$,　tan$A$

の値を求めよ。



$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan A = 2$

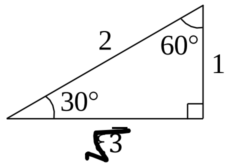
(3) 右の図の直角三角形を参考に，

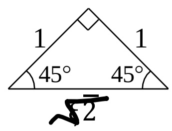
次の三角比の値を求めよ。

① sin30°　$\frac{1}{2}$

② cos45°　$\frac{1}{\sqrt{2}}$

③ tan60°　$\sqrt{3}$





2 三角比の表

三角比の表を用いて，次の図の直角三角形 ABC における∠A のおよその大きさ A を求めよ。

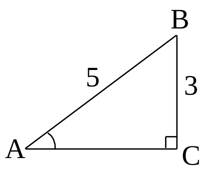
三角比の表

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
～			
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
～			

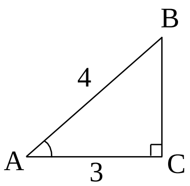
当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

(1)



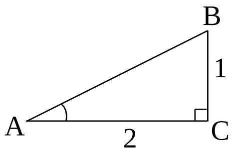
37°

(2)



41°

(3)

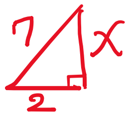


27°

3 鋭角の三角比の相互関係

シータ
θ は鋭角とする。

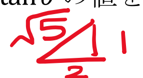
(1) $\cos\theta = \frac{2}{7}$ のとき，　$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。



$x = \sqrt{49-4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\sin\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\tan\theta = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

(2) $\tan\theta = \frac{1}{2}$ のとき，　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。



$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

4 三角比から θ を求める

シータは0° ~90° とする 。

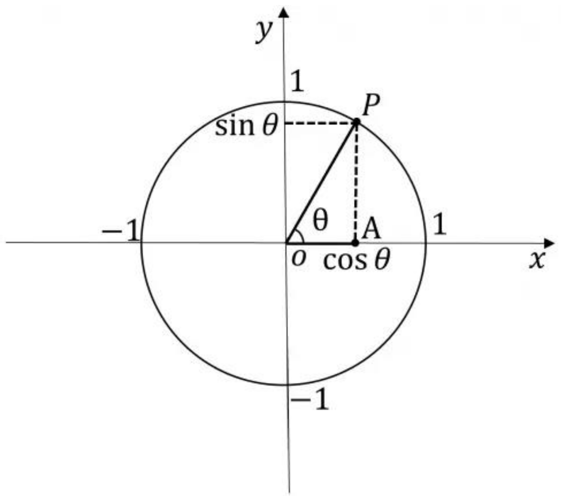
(1) sinθ=1/√2　　$\theta = 45°$

(2) cos=1/2　　$\theta = 60°$

(3) tanθ=1　　$\theta = 45°$

・三角比の拡張

三角比があればあらゆる直角三角形を作れる。
そのための基準として、
斜辺を1とした直角三角形が使われるようになった。
これが**<u>単位円の三角比</u>**である。



単位円ベースで考えることで、常に斜辺は１として考えられる。
三角比は基本的にこの**<u>単位円の三角比</u>**として考えられている。

左の図で考えると分かりやすいが、
結局、

Cosθ	**:**	**x座標**
Sinθ	**:**	**y座標**

を出しているだけだと分かる。
斜辺を１にすることで、特に整理することなく直角三角形の比率を求める事が出来る。

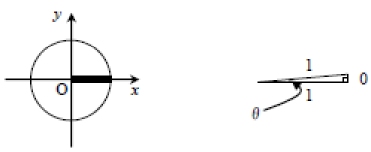
・三角比の性質

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

色々あるが、これさえ覚えておけば良い。

・基本問題

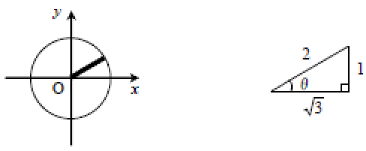
$\theta = 0^\circ$ のとき



$\sin 0^\circ = 0$　$\cos 0^\circ = 1$

$\tan 0^\circ = 0$

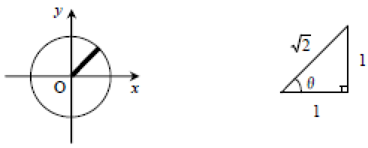
$\theta = 30^\circ$ のとき



$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$　$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

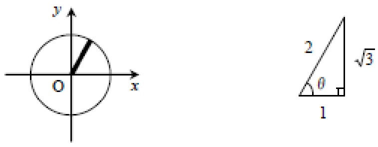
$\theta = 45^\circ$ のとき



$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$　$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = 1$

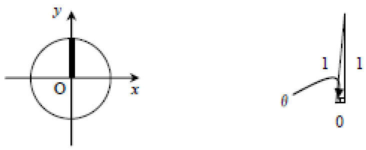
$\theta = 60^\circ$ のとき



$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

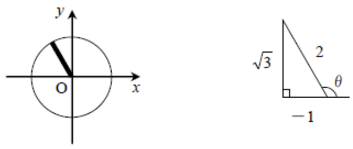
$\theta = 90^\circ$ のとき



$\sin 90^\circ = 1$　$\cos 90^\circ = 0$

$\tan 90^\circ$　×

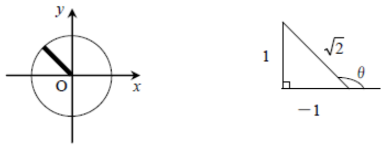
$\theta = 120^\circ$ のとき



$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

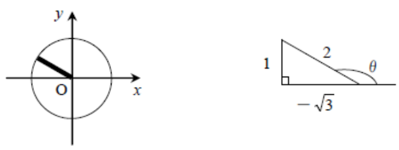
$\theta = 135^\circ$ のとき



$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$　$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135^\circ = -1$

$\theta = 150^\circ$ のとき



$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$　$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

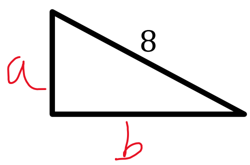
$\theta = 180^\circ$ のとき

$\sin 180^\circ = 0$　$\cos 180^\circ = -1$

$\tan 180^\circ = 0$

・基本問題2

斜辺の長さが8mであり、θ=30°の直角三角形の底と高さを求めよ。



$a = 8 \cdot \sin 30$
$\quad = 8 \cdot \frac{1}{2} = \underline{4}$

$b = 8 \cdot \cos 30$
$\quad = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{4\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

4 鋭角の三角比の相互関係

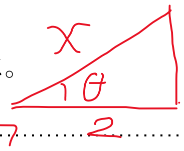
$\overset{シータ}{\theta}$ は鋭角とする。

(1) $\cos\theta = \frac{2}{7}$ のとき， $\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

(2) $\tan\theta = \frac{1}{2}$ のとき， $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。



$x = \sqrt{5}$

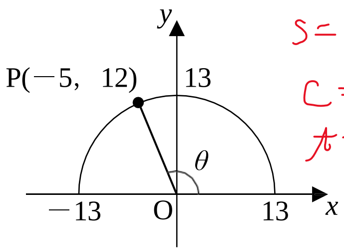
(2) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

6 鈍角の三角比

(1) 次の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

①

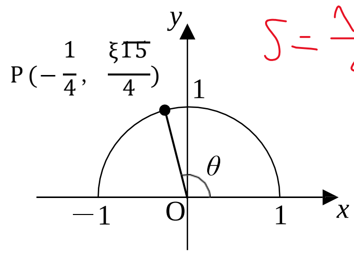


$s = \frac{12}{13}$

$c = \frac{-5}{13}$

$t = -\frac{12}{5}$

②



$s = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $c = -\frac{1}{4}$

$t = -\sqrt{15}$

(2) 次の三角比の値を求めよ。

① $\sin 135°$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　② $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　③ $\tan 120°$ $-\sqrt{3}$

7 180° − θ の三角比

次の三角比を 90° より小さい角の三角比で表せ。

(1) $\sin 140°$ $\sin 40°$　　(2) $\cos 165°$ $-\cos 15°$　　(3) $\tan 130°$ $-\tan 50°$

8 三角比を含む方程式

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $45°$, $135°$　　(2) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $120°$　　(3) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $150°$

9 鋭角・鈍角の三角比の相互関係

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

$\theta \leqq 90°$

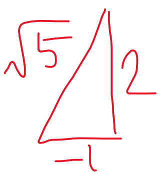
(1) $c = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$　$t = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\theta \geqq 90°$

$c = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(1) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき， $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta = -2$ のとき， $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。



$s = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $c = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

・三角関数

三角比の性質元に、**様々な法則を式にまとめたの**が三角関数です。
代表例は以下の三つです。

- 余弦定理
- 正弦定理
- 加法定理

本当は全部覚えたほうが良いですが、
ゲームなら加法定理だけ覚えておけばどうにかなります。
(※ただし、加法の証明には余弦と正弦が必要です)

覚えたほうが良いですが、
覚えれないなら覚えれないで良いです。

なんとなく形を覚えて、
必要なときに探して使えるようになりましょう。

三角関数の加法定理

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{3}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{4}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{5}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\boxed{6}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

・弧度法とπ(ラジアン)

これまで弧度法で考えてきましたが、
計算の簡便さから一般的にはπ(ラジアン)で計算します。
難しいことは考えずに、π=180°だと思いましょう。
(π=3.1415….. つまり、円周率です)

πで考えていくと、
表記もいろいろ変わります。

(円周の長さ)　＝　$2\pi r$
(円の面積)　＝　πr^2
(円柱の面積)　＝　πr^2 ＊ 高さ
(円錐の面積)　＝　πr^2 *高さ / 3

これは覚える

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \boxed{\sin}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

<0 から π>

角度										
角度	θ 度	0	30	45	60	90	120	135	150	180
	θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

・基本問題

$\frac{5}{12}\pi$

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)=\sin\frac{1}{3}\pi\cos\frac{1}{4}\pi+\cos\frac{1}{3}\pi\sin\frac{1}{4}\pi$$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\pi\right)=$$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)=\cos\left(\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$=\cos\frac{1}{3}\pi\cdot\cos\frac{1}{4}\pi-\sin\frac{1}{3}\pi\cdot\sin\frac{1}{4}\pi$$

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)=$$

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$s\frac{1}{3}\pi\, c\frac{1}{4}\pi - c\frac{1}{3}\pi\, s\frac{1}{4}\pi$　　$- c\frac{1}{3}\pi\, c\frac{1}{4}\pi - s\frac{1}{3}\pi \cdot s\frac{1}{4}\pi$

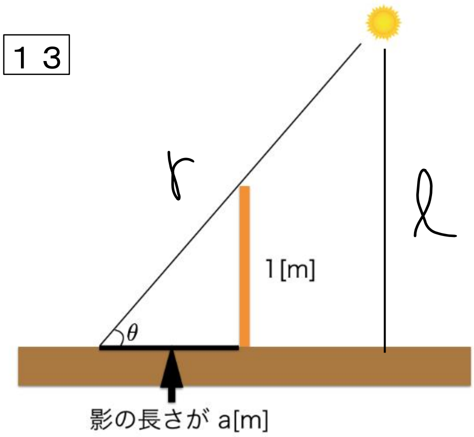
$-\cos\frac{1}{12}\pi$

１２　次の値を求めよ。

(1)　sin 15°　$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2)　cos 195°　$= \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

１３



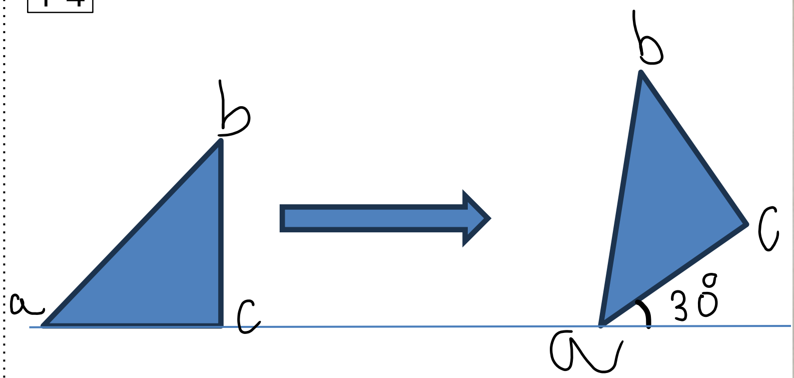
1.影の長さを1としたときのθを求めよ。　45°

2. 太陽は一定速度で動いている。
日の入りから現在まで3時間掛かったとする。
日没まであと何時間か？　9h

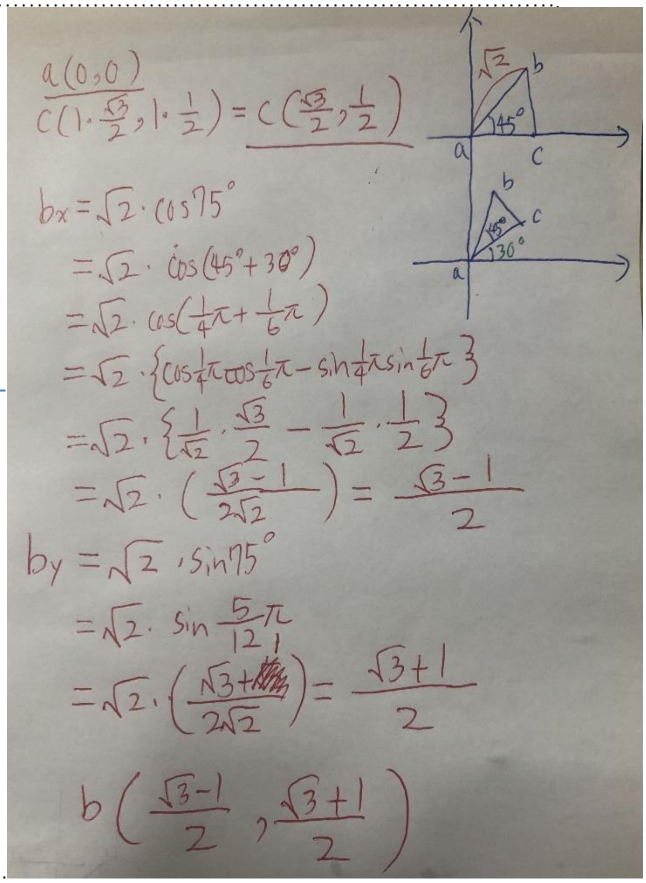
3.rを用いてLを求めよ。

$l = r\cos\theta$

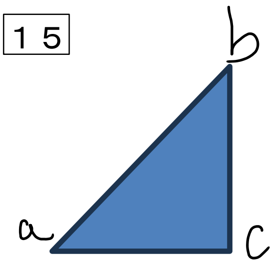
１４



a(0,0),c(1,0),b(1,1)
の三角形をaを基準点として
30°回転させる。
a,b,cの座標を求めよ。



１５

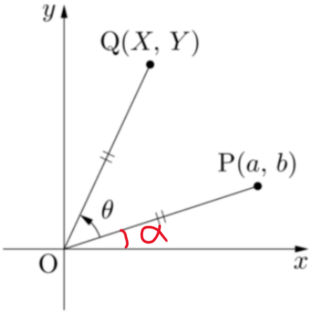


a(-1,-1),c(1,-1),b(1,1)
の三角形を原点を基準点と
して45°回転させる。
a,b,cの座標を求めよ。

$a = (0, -\sqrt{2})$, $c = (\sqrt{2}, 0)$
$c = (0, \sqrt{2})$

・回転

座標平面上の点P $(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転させた点をQ$(X,\ Y)$ とする。



$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2+b^2}$ であるから，OPと x 軸の正の方向となす角を α とすると，

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$ であるから

$$X = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\theta)$$
$$Y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)$$

となる。加法定理と①を用いて変形すると，次のようになる。

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right) \\ &= a\cos\theta - b\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right) \\ &= b\cos\theta + a\sin\theta \end{aligned}$$

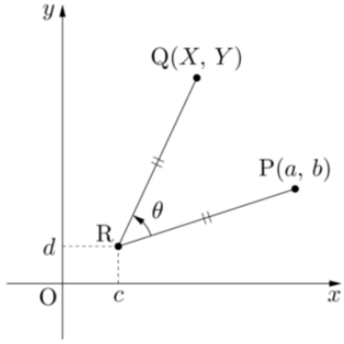
したがって，点P$(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転させた点Qの座標は

$$\mathrm{Q}(a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)$$

となる。

原点回転

座標平面上の点P$(a,\ b)$ を点R$(c,\ d)$ のまわりに θ だけ回転させた点をQ$(X,\ Y)$ とする。



回転の中心Rが原点と重なるように，3点P，Q，Rを平行移動して考える。2点P，Qの平行移動後の点をそれぞれP$'$，Q$'$ とすると，

$$\mathrm{P}'(a-c,\ b-d),\ \mathrm{Q}'(X-c,\ Y-d)$$

となる。Q'はP'を原点のまわりに θ だけ回転した点であるから

$$\begin{cases} X-c = (a-c)\cos\theta - (b-d)\sin\theta \\ Y-d = (a-c)\sin\theta + (b-d)\cos\theta \end{cases}$$

よって，求める点Qの座標は

$$\mathrm{Q}((a-c)\cos\theta - (b-d)\sin\theta + c,\ (a-c)\sin\theta + (b-d)\cos\theta + d)$$

となる。

任意点回転

ごちゃごちゃ証明したが、
赤枠を覚えておけば良い
（※一度くらいは証明してみよう）

２つ覚えられないなら、
任意点回転の方だけ覚えれば良い。

・基本問題

1.点P(2,1)を原点周りに45°回転させた点Qの座標を求めよ。

$$Q_x = 2\cos 45^o - 1\cdot\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

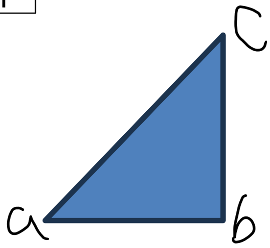
$$Q_y = 2\sin 45^0 + 1\cdot\cos 45^0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

2.点P(2,1)を点R(1,1)周りに45°回転させた点Qの座標を求めよ。

$$Qx = (2-1)\cos 45^0 - (1-1)\sin 45^0 + 1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$Qy = (2-1)\sin 45^0 + (1-1)\cos 45^0 + 1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

1



a(0,0),b(1,0),c(1,1)

の三角形を原点を基準点として
30°,60°回転させる。

a,b,cの座標を求めよ。

$\theta = 30^0$

$a(0,0)$

$b\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$Cx = 1\cos 30^0 - 1 \cdot \sin 30^0$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$C_y = 1 \cdot \sin 30^0 + 1 \cdot \cos 30^0$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 60^0$

$a(0,0)$

$b\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

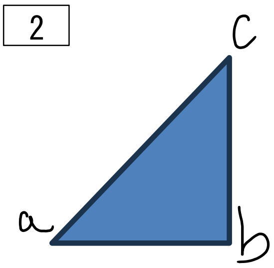
$Cx = 1\cos 60^0 - 1 \cdot \sin 60^0$

$= \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$C_y = 1 \cdot \sin 60^0 + 1 \cdot \cos 60^0$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2



中心：$r\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right)$

a(-1,-1),b(1,-1),c(1,1)

の三角形を中心点を基準点として45°回転させる。

その際のaの座標を求めよ。

中心：$r\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

$Q_{ax} = \left(-1-\frac{1}{3}\right)\cos 45^\circ - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\sin 45^\circ + \frac{1}{3}$

$= -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$

$= -\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$

$= -\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3} = \frac{-2+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}+2}{6}$

$= \frac{1-\sqrt{2}}{3}$ //

$Q_{ay} = -\frac{4}{3}\cdot\sin 45^\circ + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\cos 45^\circ - \frac{1}{3}$

$= -\frac{4}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3}$

$= \frac{-6}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} = \frac{-6-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}-2}{6}$

$= \frac{-3\sqrt{2}-1}{3}$ //

$a\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3},\frac{-3\sqrt{2}-1}{3}\right)$

同様にして、

$Q_{bx} = \frac{1}{3}$, $Q_{by} = \frac{-2\sqrt{2}-1}{3}$

$Q_{cx} = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$, $Q_{cy} = \frac{3\sqrt{2}-1}{3}$