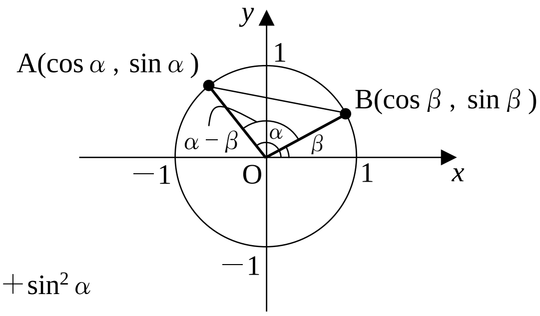
三角関数の加法定理

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　　$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{3}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　$\boxed{4}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{5}$ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　$\boxed{6}$ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

証明



右の図のように，角 α，β の動径と単位円の交点を
それぞれ A，B とする。

2 点 A，B の座標は　A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$
であるから，2 点間の距離の公式により

$$\begin{aligned}AB^2&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\&=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha\\&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-2(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\qquad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

また，$\angle AOB=\alpha-\beta$ から，$\triangle AOB$ に余弦定理を用いると

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\qquad\cdots\cdots②$$

①，②から　$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$

よって　$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$　　$\cdots\cdots③$

以上により，公式$\boxed{4}$が証明できた。③の β を $-\beta$ に置き換えると，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
から　$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$　　よって，公式$\boxed{3}$が証明できた。

また，③の α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ に置き換えると　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

ここで，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$であり，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

であるから　$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$　$\cdots\cdots④$　　よって，公式$\boxed{1}$が証明できた。

④の β を $-\beta$ に置き換えると　$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$　　よって，公式$\boxed{2}$が証明できた。

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ であることを利用して　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

この右辺の分母と分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ると

$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot1+1\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\boldsymbol{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

よって，公式$\boxed{5}$が証明できた。この等式の β を $-\beta$ に置き換えると，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ から

$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$　　よって，公式$\boxed{6}$が証明できた。