6-2 平面の方程式

Keyword 束縛条件 軸平行 法線ベクトル

本節では、3D内での平面の方程式について解説しましょう。

平面の方程式とは？

一般的な平面の方程式は、

$$\boxed{} = 0$$

という式で表されます。これは、2D内での直線の方程式

$$\boxed{} = 0$$

の自然な拡張になっていることがおわかりになるでしょうか。つまり、空間は3D（三次元）、平面は2D（二次元）、直線は1D（一次元）であることを踏まえると、

・空間内での平面とは、$\boxed{}$での$\boxed{}$
・平面内での直線とは、$\boxed{}$での$\boxed{}$

というように、それぞれ$\boxed{}$図形になっています。

つまり、3D内での平面というのは、平面内での直線と同じように次元を1だけ落とすために、$\boxed{}$としての方程式を1つだけ設定することで表現することができるわけです。これが、3D内での平面が2D内での直線と同じようにして表現できる大ざっぱな理由です。

NOTE

自由に動かすことのできる変数のうち、それら相互間に成り立つ（ある変数が決まれば別の変数も決まる）関係がある場合、その関係性を$\boxed{}$と呼びます。
また、変数の数から束縛条件の数を引いたものを$\boxed{}$と呼びます。

1つの軸に平行な平面

さて、この$\boxed{}$$=0$という平面ですが、$x$、$y$、$z$の頭に付いた$a$、$b$、$c$という定数の値が0を取る場合があり、その場合にはそれぞれ特殊な平面を表すことになります。

ここで、2D内での直線の方程式

$$\boxed{} = 0$$

では、$a = 0$の場合には$y =$ 定数というx軸に平行な直線を表し、$b = 0$の場合には$x =$ 定数というy軸に平行な直線を表すことに注意しましょう。

NOTE

この辺りがまだあいまいな方は、先に前節6-1.比例と一次関数、直線の方程式を参照してください。

さて、直線の方程式の場合には、直線の傾き(あるいは向いている方向)を決めている定数がaとbの2つしかありませんでしたから、そのうちのどれかの定数が0になる場合というのは上記の2つしかありませんでした(aとbの両方が0だと意味のある図形を表しません)。一方、3D内での平面の方程式

$$ax + by + cz + d = 0$$

の場合は、平面の傾きはa、b、cの3つの定数に左右されますから、このうちのどれかが0になる場合というのは、

- $\boxed{}$の場合
- $\boxed{}$の場合
- $\boxed{}$の場合
- $\boxed{}$の場合
- $\boxed{}$の場合
- $\boxed{}$の場合

と、ざっと6通りの場合があることがわかります($a = 0$かつ$b = 0$かつ$c = 0$、つまりa、b、cが全部0の場合というのは、$d = 0$という意味のない式になってしまいますから除外します)。

さて、これら6通りの特殊な平面のうち、一番わかりやすいのはcだけが0の場合でしょう。この場合、$ax + by + cz + d = 0$という式は$ax + by + d = 0$となりますが、これは定数項の名前が違っているだけで、2D内での直線の方程式

$$\boxed{} = 0$$

と同じ式になっています。つまり、この場合の平面は、「この$ax + by + d = 0$というxy平面上にある直線を、$\boxed{}$もの」になっているわけです。

この場合、xy平面上の直線をどのように3D空間内に拡張するのかといえば、「図形を表す方程式の場合、$\boxed{}$とする」というルールを適用します。

そのため、$ax + by + d = 0$という式にz座標は$\boxed{}$ため、z座標は$\boxed{}$値も取りうる、つまりはxy平面上の$ax + by + d = 0$という直線を、$\boxed{}$平面が、この$ax + by + d = 0$という方程式が表す平面だ、ということになります(図6-2-1)。

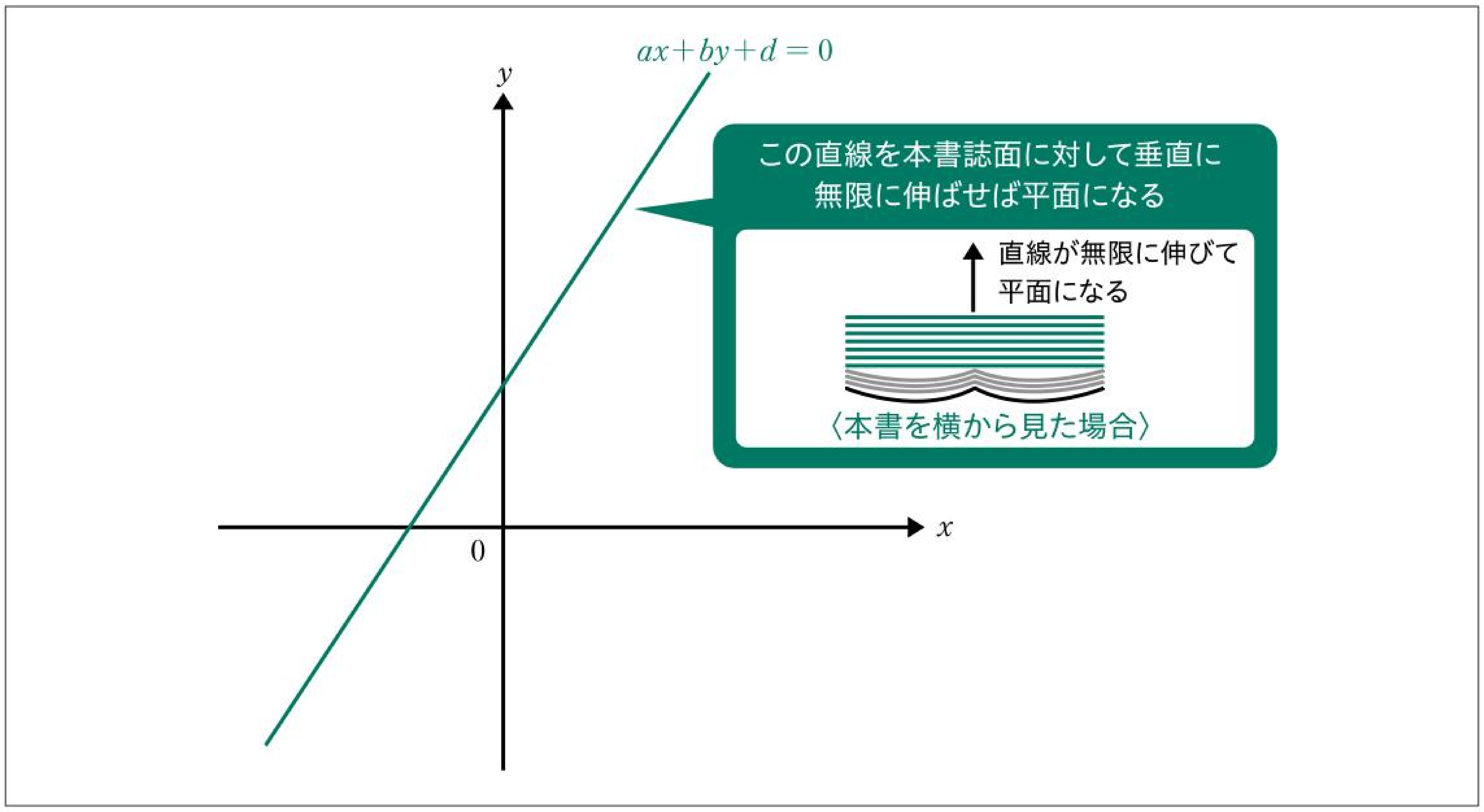

図6-2-1 $ax+by+d=0$のグラフ。本書誌面に対し垂直に伸ばすことで平面になる

この平面は、必ず　　　になります。それと同様に、aだけが0の場合は、平面の方程式は$by+cz+d=0$となってyz平面上の直線と同じ形になるので、その$by+cz+d=0$という直線を　　　無限に伸ばした、　　　な平面となります。また、bだけが0の場合には、平面の方程式は$ax+cz+d=0$となってxz平面上の直線と同じ形になるので、それをy軸方向に無限に伸ばした、　　　な平面となります。

これら3つの場合、つまりaだけが0の場合、bだけが0の場合、cだけが0の場合、というのは、3つある3D空間の軸方向のうち、　　　平行になるような平面を表すことになります。

2つの軸に平行な平面

一方、3つの3D空間の軸方向のうち、2つの軸に平行な平面というのも、当然存在するでしょう。

例えば、$a=0$かつ$b=0$の場合はどうでしょうか。この場合、平面の方程式は$cz+d=0$となり、これを$c \neq 0$としてzについて解くと

$$cz=-d$$

$$\therefore z=-\frac{d}{c}$$

となります。つまりこれは、$z=$　　　という式であり、この式に現れていない　　　はどのような値も取りうるため、x軸とy軸の両方に　　　、つまり　　　平行な平面で、かつ$z=$　　　という位置を通るような平面、ということになります。

以下同様にして、$a=0$かつ$c=0$の場合は、平面は$y=$　　　という式になって、x軸とz軸の

、つまり平面に平行な平面となり、また$b=0$かつ$c=0$の場合には、平面は$x=$定数という式になって、軸と軸の両方に平行、つまり平面に平行な平面となります。

これら特殊な場合の平面というのは、ゲームで3D空間内での平面を扱う際には、常に考えておかなければならない要素になりますので、よく覚えておいてください。

平面を決定する定数

さて、実際に平面の方程式を使う場合には、$ax+by+cz+d=0$という式に含まれる4つの定数、a、b、c、dを決定しなければなりません。ゲームなどでの応用の場合、空間上のある点を通るような平面を設定する、という場合が多いと思います。そこでまずは、いくつの点を設定すれば1つの平面をきちんと決められるのか、ということから考えてみましょう。

2D上での直線では、つの点を与えることによって1つに決まりました。しかし、3D上での平面の場合は2点では足りなさそうです。それは、例えば下敷きのような平面的なものを指で支えることを考えてみると、2本の指だけで支えてみても、グラグラと回転してしまって安定しないことからわかると思います（図6-2-2）。

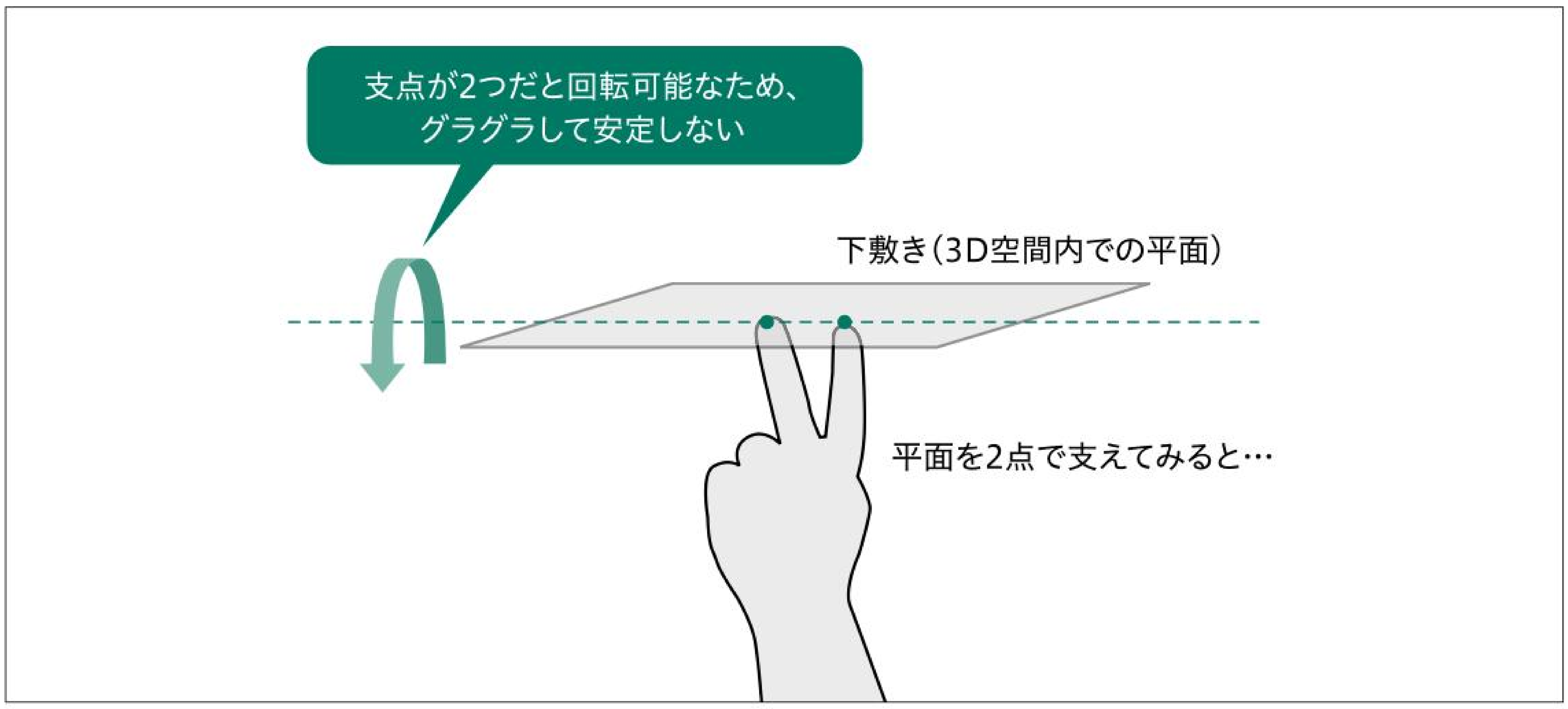

図6-2-2 下敷き（平面）を2本の指（2点）で支えようとしても安定しない

下敷きを支えるなら、3本の指を使って点で支えなければダメでしょうし、逆にいえば、点が決まれば下敷きのような平面は1つの姿勢に決められる、つまり1つの平面が決められそうです。

しかし、ここで問題が発生します。先ほども触れたように、平面の方程式は$ax+by+cz+d=0$という形をしていて、決定すべき定数はとつもあります。ここで、3点の座標を平面の方程式に代入しても、式は3本までしか立てられず、未知数は3つまでしか決定できません。これでは先ほどの議論に反して、3点を与えただけでは平面の方程式は決まらない、ということになってしまいそうですが、いったいこれはどういうことなのでしょうか？

3つの定数で平面を決定する

実は、平面の方程式には表面上、決めるべき定数がa、b、c、dと4つもあるように見えていますが、　　　　　　　定数は3つでよいのです。先ほど、ある軸に平行な平面について説明したときにも触れましたが、$ax+by+cz+d=0$という平面の方程式では、3つの定数a、b、cのうち、　　　　　は0ではありません。これは、a、b、cのすべてが0だった場合には、$ax+by+cz+d=0$という式は$d=0$という何の意味もない式になってしまうからです。

さて、a、b、cのうちどれかは0でないということは、その0でない係数で平面の方程式の両辺を割ってしまえば、定数を1つ消去してしまえることになります。例えば、$a \neq 0$だったとしましょう。その場合、

$$ax+by+cz+d=0$$

この式の両辺をaで割ると

$$\boxed{}=0$$

となります。ここで、$\dfrac{b}{a}$などは定数同士の割り算で、それ自身単なる定数ですから、$\dfrac{b}{a}=b'$、$\dfrac{c}{a}=c'$、$\dfrac{d}{a}=d'$とそれぞれまとめて1つの定数に置き換えると、上式は

$$x+b'y+c'z+d'=0$$

となり、決めるべき定数が　　　の　つに減っているのがわかると思います。

以下同様に、　　　であれば両辺をbで割り、　　　であれば両辺をcで割れば、やはり同じように決めるべき定数を3つに減らすことができます。

本質的には決めるべき定数は3つでよいのに、なぜわざわざ$ax+by+cz+d=0$などと4つも定数を使って平面を表現しているのかといえば、x軸、y軸、z軸といった　　　　　　　になるような特殊な平面も例外なく網羅するためです。そのため、何かしらの事前情報で、ある軸には平行にならない、ということがわかっていれば、決めるべき定数は問題なく3つに減らすことができます。

例えば、ゲームでよくある状況としては、平面の集まりで地面を表現していて、垂直に切り立った地面はない、ということがわかっていることがあります。この場合、高さ方向がy方向だとすると、平面は　　　　　になることはありません。すると、yに掛かっている定数bは0でないことから、通常の平面の方程式を最初からbで割って

$$a'x+y+c'z+d'=0$$

という形にしておけば、元からa'、c'、d'という3つの定数を決めるだけでよいために便利です。

3点の座標から平面の方程式を求める

さて、これで平面の方程式を決定するには3点の座標を与えるだけでよいことはおわかりかと思います。では、具体的に3点の座標から平面の方程式を定めるには、どのような計算をすればよいでしょうか？

普通に考えれば、3点の xyz 座標をそれぞれ平面の方程式に代入して3本の式を連立させ、3元連立方程式を解けばよいことになりますが、それは3×3行列の逆行列を求める問題になってしまい少々複雑です。

そのため特にゲームでは、そのようにまともに連立方程式を解くのではなく、$(a,\ b,\ c)$ というベクトルが平面 $ax+by+cz+d=0$ の　　となる、つまりベクトル $(a,\ b,\ c)$ は平面 $ax+by+cz+d=0$ に　　ことを利用して平面を決定することがよく行われます。

平面の法線ベクトル

まずは、$(a,\ b,\ c)$ というベクトルが平面 $ax+by+cz+d=0$ に直交することから確かめてみましょう。

今、平面 $ax+by+cz+d=0$ 上に2点 $\boldsymbol{p}_1(p_{1x},\ p_{1y},\ p_{1z})$ と $\boldsymbol{p}_2(p_{2x},\ p_{2y},\ p_{2z})$ があるとします。$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ は平面上にあるので、それぞれ平面の方程式を満たします。

そこで、$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ の座標を平面の方程式に代入すると、それぞれ

$$\qquad = 0$$

$$\qquad = 0$$

となります。上の式から下の式を引き算してみると

$$\qquad = 0$$

となりますが、この式の左辺はベクトル $(a,\ b,\ c)$ と　　というベクトルの　　になっており、その内積が0になるということは、「ベクトル $(a,\ b,\ c)$ と　　は　　」ということになります。

ここで、$\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2$ というベクトルは　　から　　に向かうベクトルであって、常に平面に平行です。つまり、ベクトル $(a,\ b,\ c)$ は平面に平行なベクトルに常に直交することになりますから、ベクトル $(a,\ b,\ c)$ は平面 $ax+by+cz+d=0$ に直交することになります。

以上のことから、平面に直交する法線ベクトルを先に1つ与えてしまえば、平面の方程式にある定数のうち a、b、c の3つを一挙に決めてしまうことができることがわかります。

具体的には、例えば3点の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$ が与えられた場合、$\boldsymbol{p}_1$ の位置を基準とした　　と　　という2つのベクトルを考え（図6-2-3）、それらの　　$\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)\times(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_1)$ を求めれば、この $\boldsymbol{n}$ が3点 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$ を含む　　法線ベクトルになります。

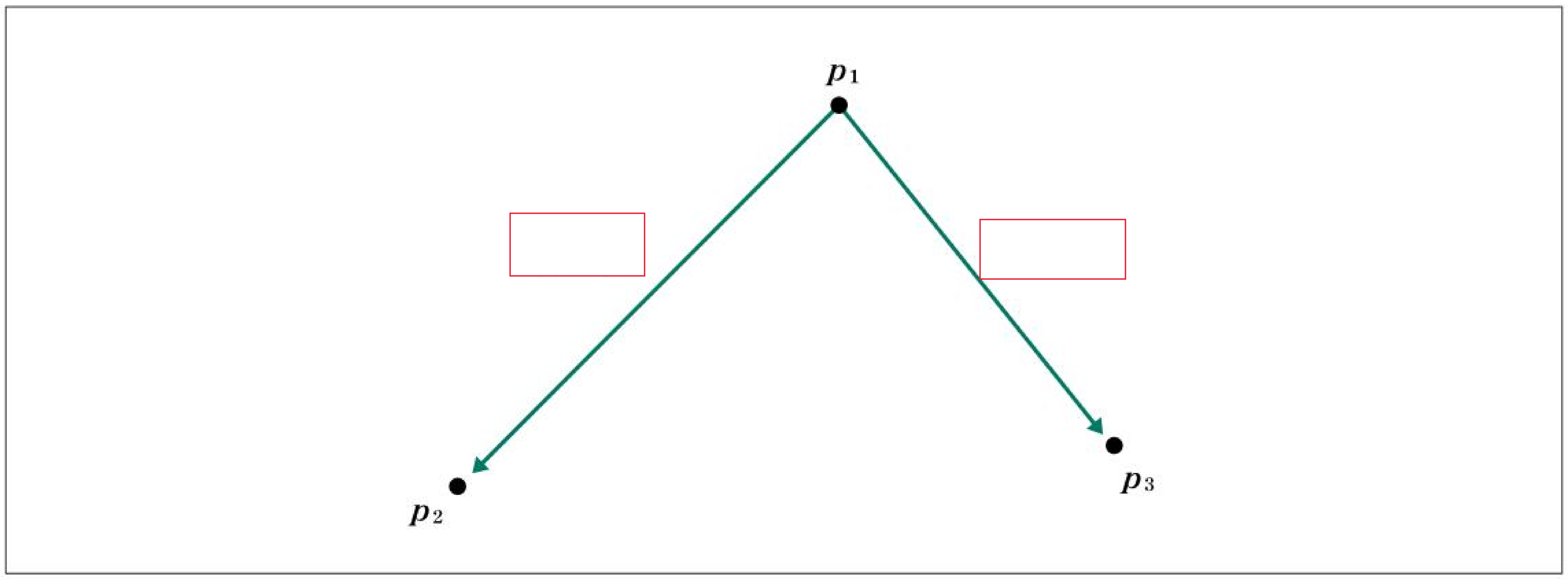

図6-2-3 位置ベクトル p_1 を基準に p_2、p_3 に向かうベクトルを考える

そこで、$ax+by+cz+d=0$ の定数 a、b、c は外積の結果 $\boldsymbol{n}$ の　　　　にそれぞれ等しくすればよく、残りの定数 d は、この平面が例えば点 $\boldsymbol{p}_1$ を通ることから、　　　　を平面の方程式に代入すれば求めることができます。

この方法の優れた所は、3点の座標を与えれば、それらの点を通る平面の方程式だけでなく、その法線ベクトルも同時に得られるところです。ゲームにおいては、法線ベクトルは光源処理や物体をその平面に沿って傾ける場合などに必要となり、何かと必要になる場面が多いため、まずは法線ベクトルを計算しておくというのは効率のよい方法なので、ぜひ覚えておきましょう。