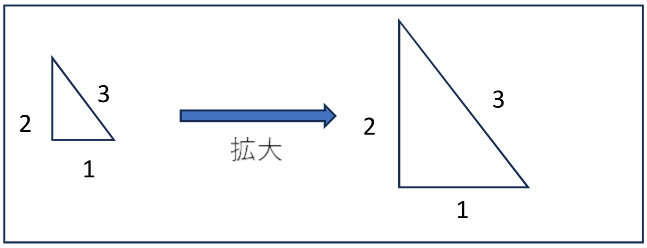
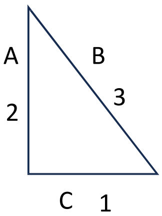
1.三角比

三角比とは**三角形に関わる比**の事である。
ある三角形において、全ての角度が同じならばどんな大きさになろうともそれぞれの辺の比率は等しい。



仮に1:2:3の比率の三角形があれば、
何倍にしようと比率は同じままである。
(これは三角形に限らず全ての図形で成り立つ)

比率は同じなので、どこかの辺の長さが分かれば残りの辺の長さも求められる。



Aが６とすれば、

B＝９
C=３

このことから、
三角形の辺の比率は角度が分かればわかり、
特に直角三角形の場合は90度の角以外の角が一つでも分かれば比率を求められる事が分かる。

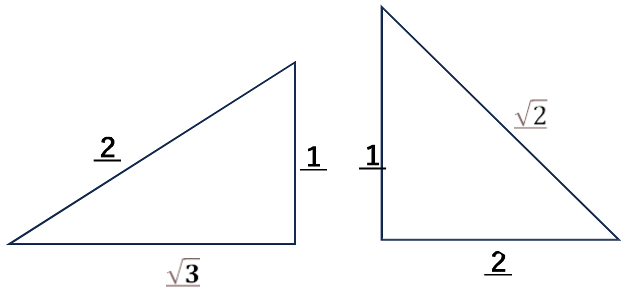
そこで頻繁によく使う角度を覚えておくことで、
色んな計算を効率よく行う事が考えられた。

そして、その数値が様々な応用計算のベースとして使われていくようになった。

これが三角比である。

覚えるとこ

三角比(あくまで比)



2.三角比

自然界において、底や高さは出せないが斜辺は出せるという状況が頻発した。
そのため、生まれたのが

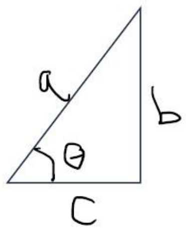
$\cos\theta$： 斜辺を掛けると底が出せる。

$\sin\theta$： 斜辺を掛けると高さが出せる。

であり、例外的に底が分かるときがあるので、

$\tan\theta$： 底を掛けると高さが分かる。

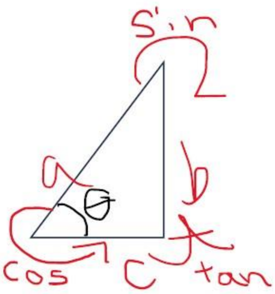
が生まれた。
これらを合わせて**三角比**と言う。



$$\cos\theta = \frac{c}{a}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{c}$$

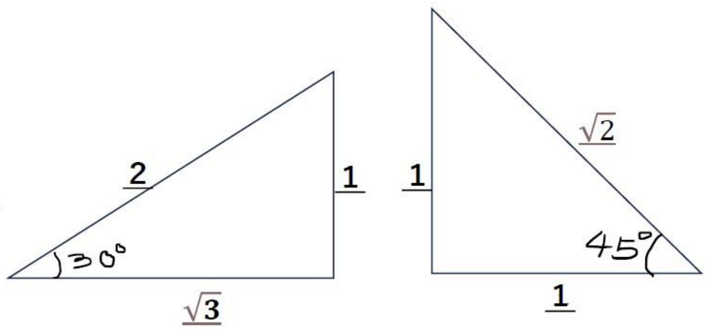


3. 覚えておくべき三角比

結局のところ、頻繁に使われる角度は決まっている。
であるから、次の角度の三角比を覚えておけば良い。

覚えるとこ

三角形の比率



$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} \qquad \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

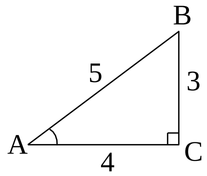
$$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 45^0 = 1 \qquad \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

1　直角三角形の三角比

(1)　右の図の直角三角形ABCにおいて，

sin$A$,　　cos$A$,　　tan$A$

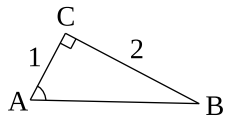
の値を求めよ。



(2)　右の図の直角三角形ABCにおいて，

sin$A$,　　cos$A$,　　tan$A$

の値を求めよ。



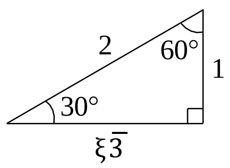
(3)　右の図の直角三角形を参考に，

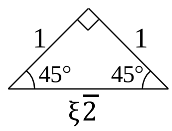
次の三角比の値を求めよ。

①　sin30°

②　cos45°

③　tan60°





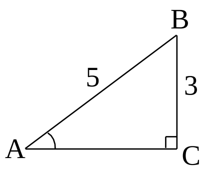
2　三角比の表

三角比の表を用いて，次の図の

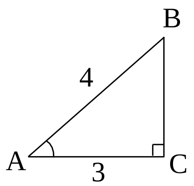
直角三角形 ABC における∠A の

およその大きさ A を求めよ。

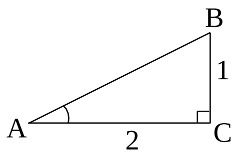
(1)



(2)



(3)



三角比の表

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
～			
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745

A	sin$A$	cos$A$	tan$A$
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000
～			

当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

3　鋭角の三角比の相互関係

θ（シータ）は鋭角とする。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{2}{7}$ のとき，　$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

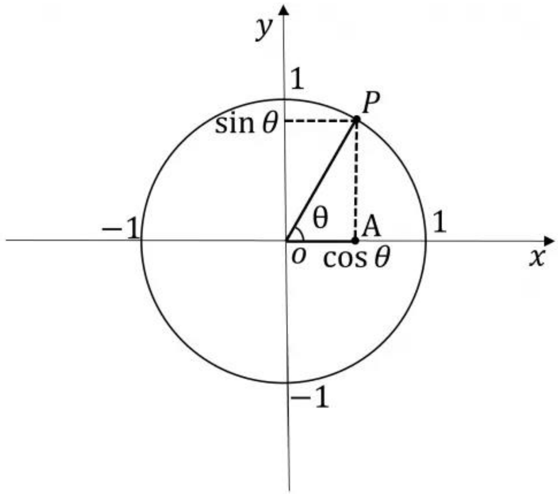
4　三角比から θ を求める

シータは0° ~90° とする 。

(1)　sinθ＝1/√2　　(2)　cos=1/2　　(3)　tanθ=1

・三角比の拡張

三角比があればあらゆる直角三角形を作れる。
そのための基準として、
斜辺を1とした直角三角形が使われるようになった。
これが**単位円の三角比**である。



単位円ベースで考えることで、常に斜辺は１として考えられる。
三角比は基本的にこの**単位円の三角比**として考えられている。

左の図で考えると分かりやすいが、
結局、

Cosθ　：　x座標
Sinθ　：　y座標

を出しているだけだと分かる。
斜辺を１にすることで、特に整理することなく直角三角形の比率を求める事が出来る。

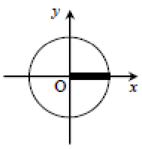
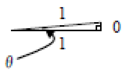
・三角比の性質

$$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}},\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

色々あるが、これさえ覚えておけば良い。

・基本問題

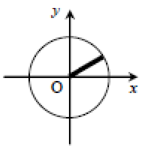
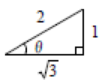
θ＝0° のとき

sin0° ＝　　cos0° ＝

tan0° ＝

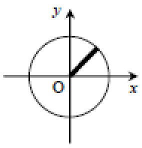
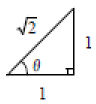
θ＝30° のとき

sin30° ＝　　cos30° ＝

tan30° ＝

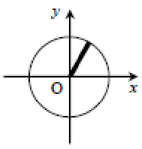
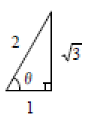
θ＝45° のとき

sin45° ＝　　cos45° ＝

tan45° ＝

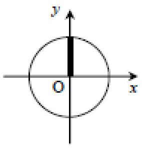
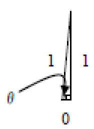
θ＝60° のとき

sin60° ＝　　cos60° ＝

tan60° ＝

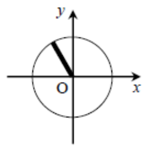
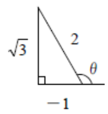
θ＝90° のとき

sin90° ＝　　cos90° ＝

tan90°

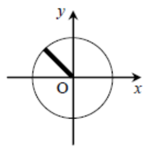
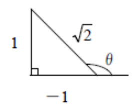
θ＝120° のとき

sin120° ＝　　cos120° ＝

tan120° ＝

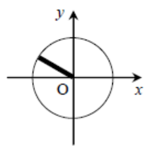
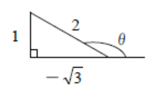
θ＝135° のとき

sin135° ＝　　cos135° ＝

tan135° ＝

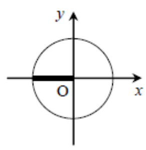
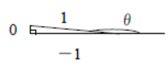
θ＝150° のとき

sin150° ＝　　cos150° ＝

tan150° ＝

θ＝180° のとき

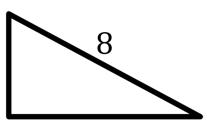



sin180° ＝　　cos180° ＝

tan180° ＝

・基本問題2

斜辺の長さが8mであり、θ=30°の直角三角形の底と高さを求めよ。



4　鋭角の三角比の相互関係

θ（シータ）は鋭角とする。

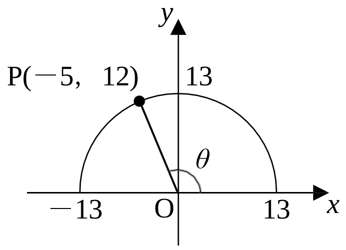
(1)　$\cos\theta = \dfrac{2}{7}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

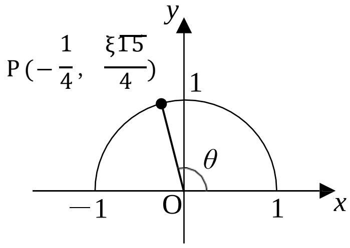
6　鈍角の三角比

(1)　次の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

①



②



(2)　次の三角比の値を求めよ。

①　sin135°　　②　cos150°　　③　tan120°

7　180° －θ の三角比

次の三角比を 90° より小さい角の三角比で表せ。

(1)　sin140°　　(2)　cos165°　　(3)　tan130°

8　三角比を含む方程式

0° ≦θ≦180° のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

9　鋭角・鈍角の三角比の相互関係

0° ≦θ≦180° とする。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

・三角関数

三角比の性質元に、**様々な法則を式にまとめたの**が三角関数です。
代表例は以下の三つです。

- 余弦定理
- 正弦定理
- 加法定理

本当は全部覚えたほうが良いですが、
ゲームなら加法定理だけ覚えておけばどうにかなります。
(※ただし、加法の証明には余弦と正弦が必要です)

覚えたほうが良いですが、
覚えれないなら覚えれないで良いです。

なんとなく形を覚えて、
必要なときに探して使えるようになりましょう。

三角関数の加法定理

1 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

5 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

6 $$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

・弧度法とπ(ラジアン)

これまで弧度法で考えてきましたが、
計算の簡便さから一般的にはπ(ラジアン)で計算します。
難しいことは考えずに、π=180°だと思いましょう。
(π=3.1415….. つまり、円周率です)

πで考えていくと、
表記もいろいろ変わります。

（円周の長さ） ＝ $2\pi r$
（円の面積） ＝ πr^2
（円柱の面積） ＝ πr^2 ＊高さ
（円錐の面積） ＝ πr^2 *高さ / 3

これは覚える

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

＜0 から π＞

角度	θ 度	0	30	45	60	90	120	135	150	180
	θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinθ		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cosθ		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanθ		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

・基本問題

$$\sin\left(\frac{l}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)=$$

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{4}\pi\right)=$$

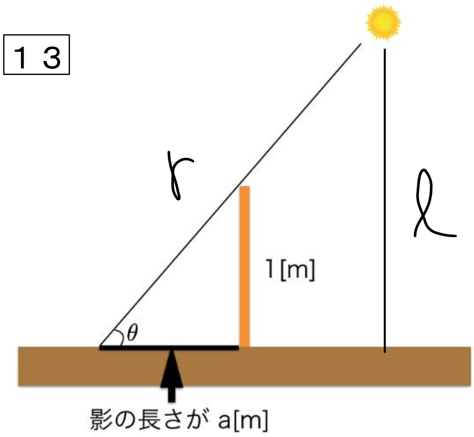
$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)=$$

$$\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right)=$$

１２　次の値を求めよ。

(1)　$\sin 15°$　　　　(2)　$\cos 195°$

１３

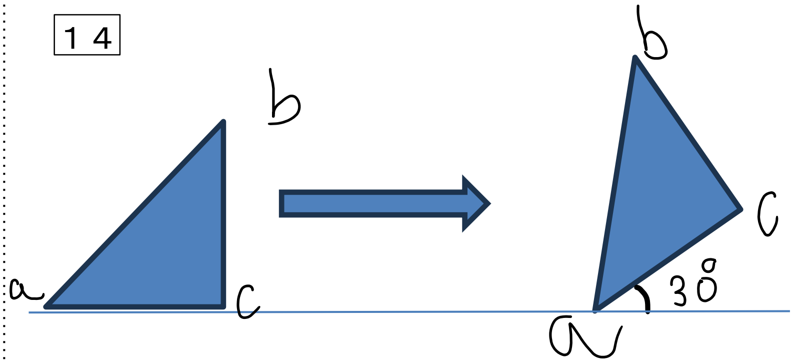


1.影の長さを1としたときのθを求めよ。

2. 太陽は一定速度で動いている。
日の入りから現在まで3時間掛かったとする。
日没まであと何時間か？

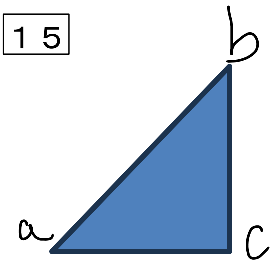
3.rを用いてLを求めよ。

１４



a(0,0),c(1,0),b(1,1)
の三角形をaを基準点として
30°回転させる。
a,b,cの座標を求めよ。

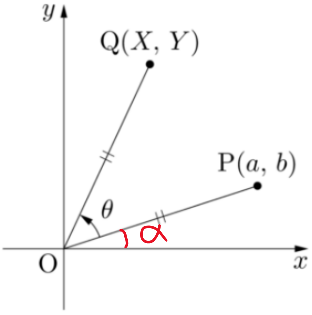
１５



a(-1,-1),c(1,-1),b(1,1)
の三角形を原点を基準点と
して45°回転させる。
a,b,cの座標を求めよ。

・回転

座標平面上の点P $(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転させた点をQ$(X,\ Y)$ とする。



$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ であるから，OPと x 軸の正の方向となす角を α とすると，

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ であるから

$$X=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\theta)$$
$$Y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)$$

となる。加法定理と①を用いて変形すると，次のようになる。

$$\begin{aligned}X&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)\\&=a\cos\theta-b\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y&=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)\\&=b\cos\theta+a\sin\theta\end{aligned}$$

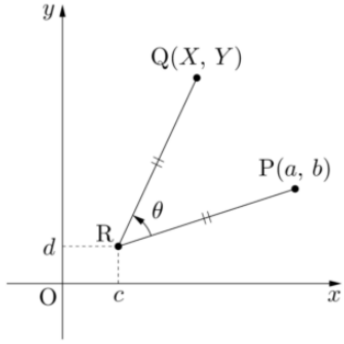
したがって，点P$(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転させた点Qの座標は

$$\mathrm{Q}(a\cos\theta-b\sin\theta,\ a\sin\theta+b\cos\theta)$$

となる。

原点回転

座標平面上の点P$(a,\ b)$ を点R$(c,\ d)$ のまわりに θ だけ回転させた点をQ$(X,\ Y)$ とする。



回転の中心Rが原点と重なるように，3点P，Q，Rを平行移動して考える。2点P，Qの平行移動後の点をそれぞれP′，Q′ とすると，

$$\mathrm{P}'(a-c,\ b-d),\ \mathrm{Q}'(X-c,\ Y-d)$$

となる。Q'はP'を原点のまわりに θ だけ回転した点であるから

$$\begin{cases}X-c=(a-c)\cos\theta-(b-d)\sin\theta\\Y-d=(a-c)\sin\theta+(b-d)\cos\theta\end{cases}$$

よって，求める点Qの座標は

$$\mathrm{Q}((a-c)\cos\theta-(b-d)\sin\theta+c,\ (a-c)\sin\theta+(b-d)\cos\theta+d)$$

となる。

任意点回転

ごちゃごちゃ証明したが、
赤枠を覚えておけば良い
（※一度くらいは証明してみよう）

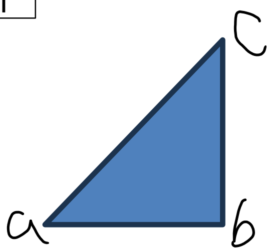
２つ覚えられないなら、
任意点回転の方だけ覚えれば良い。

・基本問題

1.点P(2,1)を原点周りに45°回転させた点Qの座標を求めよ。

2.点P(2,1)を点R(1,1)周りに45°回転させた点Qの座標を求めよ。

1

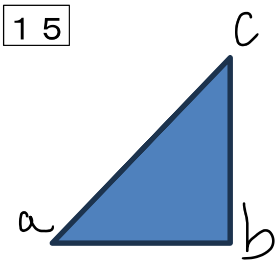


a(0,0),b(1,0),c(1,1)

の三角形を原点を基準点として
30°,60°回転させる。

それぞれの場合のa,b,cの座標を求めよ。

15



a(-1,-1),b(1,-1),c(1,1)

の三角形を中心点を基準点とし
て45°回転させる。

その際のaの座標を求めよ。