6-3 二次関数、二次方程式と放物線・円

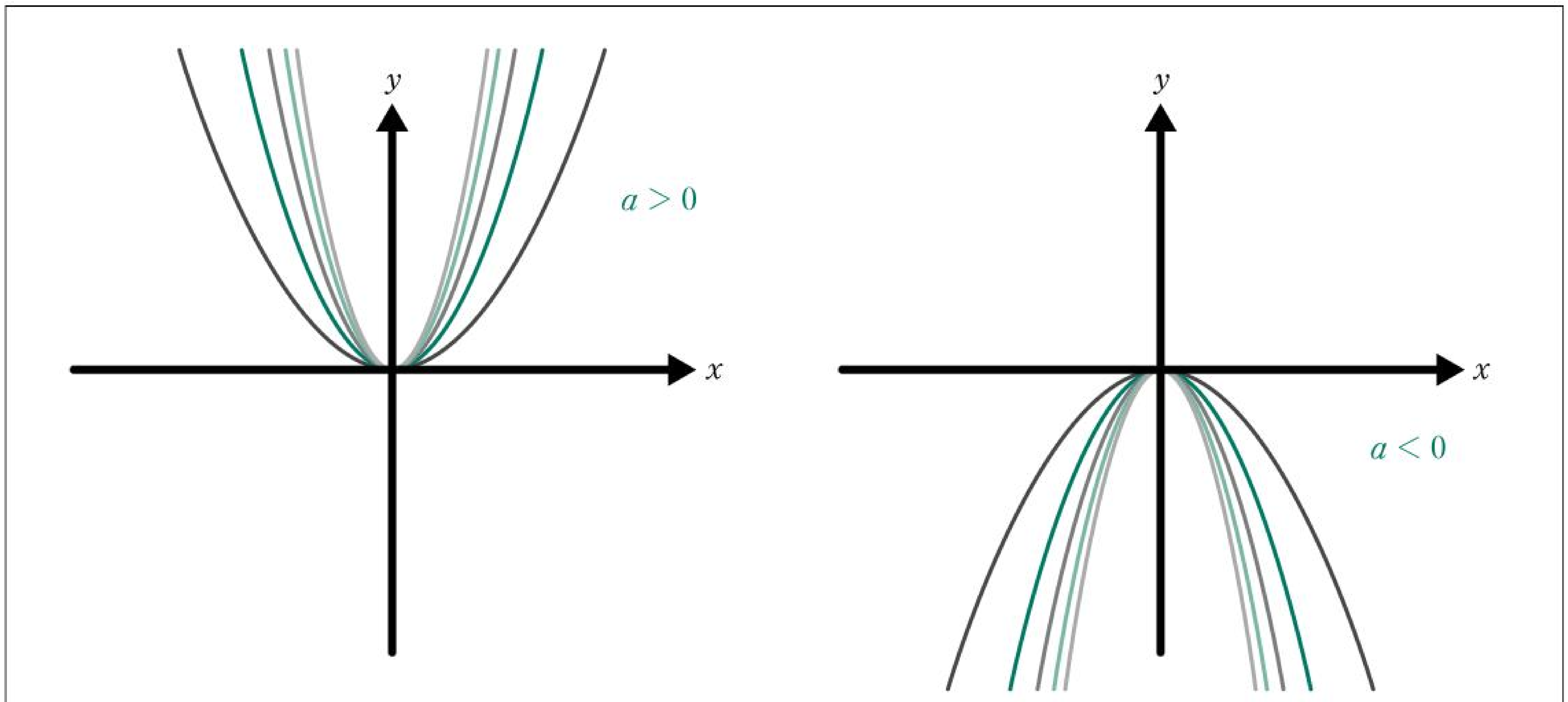
Keyword　平方完成　解の公式　ピタゴラスの定理

本節ではゲームで使われる複雑な形の一例として、放物線を表すことができる二次関数と、円を表す方程式について解説します。

二次関数と放物線

というのは、$y=$ という式で表される関数で、x^2 という「との掛け算」の項が含まれているのが特徴です。

一番簡単な形の二次関数は $y=$ と表され、図6-3-1①や②のような形のグラフになります。



①0かプラスの値を取る二次関数　②0かマイナスの値を取る二次関数

図6-3-1 二次関数のグラフ

この曲線はと呼ばれていて、名前通り、物体を空中に放り出すとこの曲線を描くことが知られています。

NOTE
実際には、空気抵抗などが原因で厳密な放物線は描きませんが、ほぼ近しい軌道を描きます。

二次関数の性質

また、x^2は自分自身との掛け算ですから、xがプラスの数であればもちろんx^2はプラスになりますし、xがマイナスの数であっても、マイナスの数×マイナスの数でプラスになりますから、$y=ax^2$という関数には「$a>0$の場合、xが実数ならどんな値でもyは　　　　になる」という性質があります。

またこれは「$a<0$の場合、xが実数ならどんな値でもyは　　　　になる」という性質でもあります。つまり、$y=ax^2$という関数は、

- 　　　　値ばかり取る（図6-3-1①）
- 　　　　値ばかり取る（図6-3-1②）

のどちらか、ということになります。

二次関数の一般式

この、$y=ax^2$というxの二次の項のみがある関数に、xの一次の項bxと定数cを加えると、　　　　と呼ばれる、$y=$　　　　という形になります。

この式で表される二次関数のグラフは、$y=ax^2$のグラフをx方向とy方向に　　　　させたものに等しくなります。つまりax^2に一次式$bx+c$を足しても、　　　　だけで　　　　自体は変わりません。

これは少し不思議な気もしますが、式$y=ax^2+bx+c$を以下のように変形することで示すことができます。

平方完成

まず、

$$y=ax^2+bx+c$$

という式を$y=a\square^2+\triangle$という形に変形することを考えます。このような形にできれば、この式は2乗の式による放物線を△だけy方向に平行移動したものとわかるからです。

そのためには、bxというxの1次の項を消し去りたいので、2乗の項にbxを取り込んでしまうことを考えます。そのためにまず、bxの部分を強引にaという係数が掛かった形にまとめ、以下のような形にします。

$$y=a\left(\quad\quad\right)+c$$

次に、上の式のカッコ内を強引に2乗の形にします。手がかりは、2乗の展開の式$(x+\alpha)^2=x^2+2\alpha x+\alpha^2$です。この展開の式では、$x$の1次の項の係数は$2\alpha$ですから、先ほどのカッ

コ内の一次の係数$\dfrac{b}{a}$を2αにする、つまり$2\alpha=\dfrac{b}{a}$すなわち $\alpha=\dfrac{b}{2a}$としてしまえば、2乗にしてしまうことができそうです。

ただし、そのためにはα^2つまり$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$が足りませんから、$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$を足してから同じものを引く、というトリックを使います。

$$y=a\left\{\boxed{\qquad\qquad\qquad}\right\}+c$$

すると、カッコ{　}の中身の最初の3項が、ちょうど$x^2+2\alpha x+\alpha^2$という形になりましたから、これを$(x+\alpha)^2$の形にまとめます。

$$y=a\left\{\boxed{\qquad\qquad\qquad}\right\}+c$$

ここで、カッコ{　}の中身のうち、$-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$の項は、$x$を含まない単なる定数ですから、カッコの外に出してしまいましょう。

$$y=\boxed{\qquad\qquad\qquad}+c$$

そして、外に出した定数と、元から外にあった定数cを、通分してまとめます。

$$y=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

ここで、$X=x+\dfrac{b}{2a}$と置くと

$$y=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

となります。先ほど置いたように$x=X-\dfrac{b}{2a}$ですから、$y=ax^2+bx+c$のグラフは、$y=ax^2$のグラフを$\left(\boxed{\quad},\boxed{\qquad}\right)$だけ平行移動したものであることがわかります（図6-3-2）。

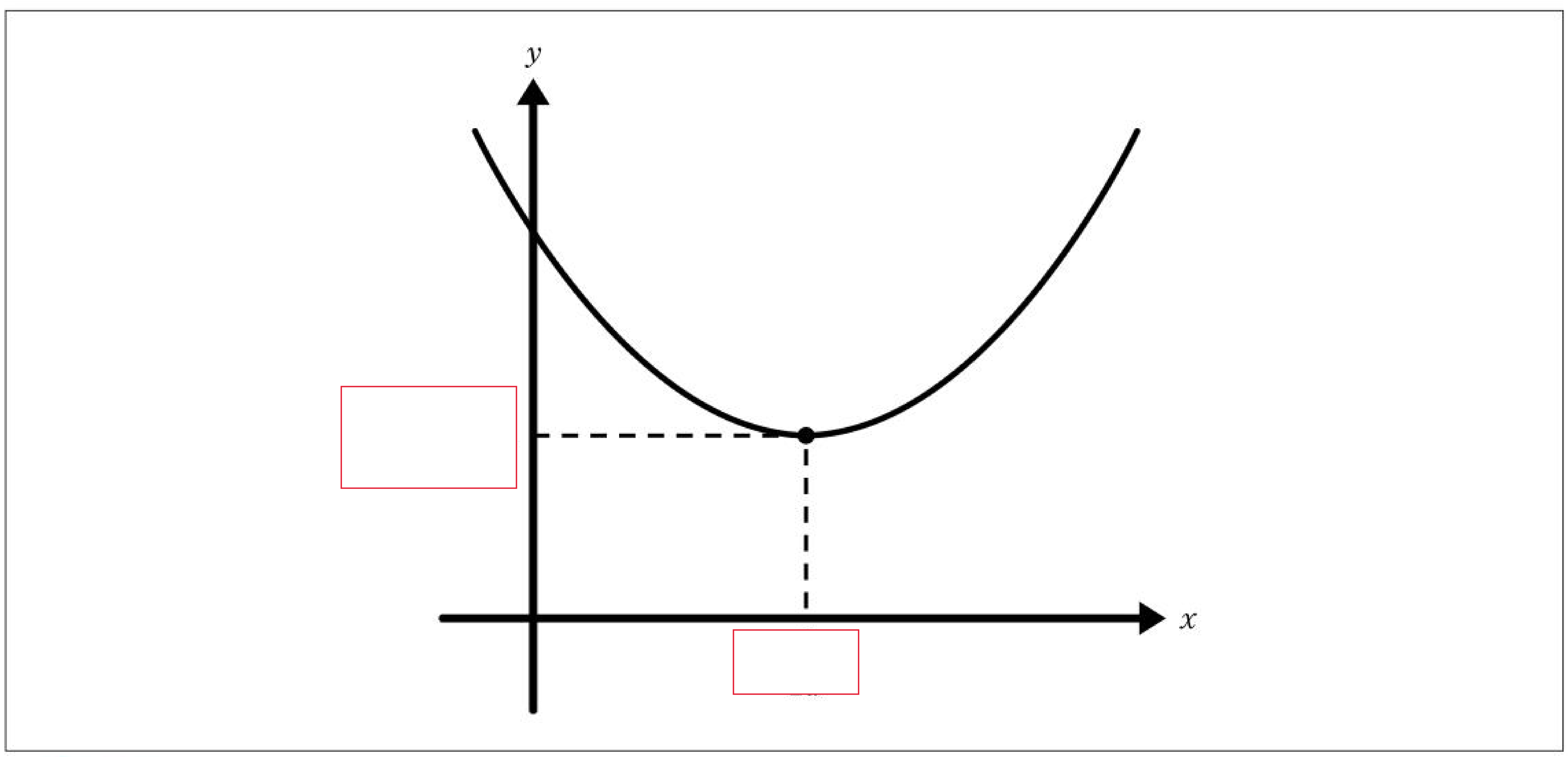


図6-3-2 二次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフ

1
2
3
4
5
6
7
基本的な数学理論

二次関数をこのような形に式変形することは、$\boxed{\quad\quad}$と呼ばれます。

二次方程式の解の公式

さて、この平方完成された二次関数から、二次関数で$y=0$としたもの、つまり二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解を求めることができます。

このような二次方程式のうち簡単なものを手計算で解くときには、場当たり的に因数分解を行いますが、これから求める式は$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$というもので、基本的にどのような$a$、$b$、$c$の値でも解$x$が求められるという、コンピュータで二次方程式を解くときには特に便利なものです。

実際にやってみましょう。二次方程式$ax^2+bx+c=0$があるときに、先ほどの結果から

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

となります。

この両辺をaで割ると、

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

となり、さらに左辺を因数分解すると、

$$\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\boxed{\quad\quad}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\boxed{\quad\quad}\right\}=0$$

となります。

よって

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\&=\boxed{\quad\quad}\end{aligned}$$

となりますが、$\dfrac{b}{2a}$を右辺に移項すると、

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\boxed{\quad\quad\quad}$$

と求められます。これこそが二次方程式の解の公式と呼ばれているものです。この式は、ゲームのプログラミングをするならば必ず覚えておきたいものです。

そしてさらに、二次方程式が

$$ax^2+2bx+c=0$$

という形になっている、つまり、xの一次の項に定数2が掛かっている場合には、少しだけ結果を簡単にできます。実際に解を求めてみましょう。

$$ax^2+2bx+c=0$$

$$a\left(\boxed{\qquad}\right)+c=0$$

$$a\left\{x^2+2\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}+c=0$$

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a}+c=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\boxed{\qquad}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-ac}{a^2}=0$$

$$\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)+\boxed{\qquad}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)-\boxed{\qquad}\right\}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)=\boxed{\qquad}$$

$$x=-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

$$x=\boxed{\qquad}$$

となります。この結果もゲームプログラミングには大変有用ですから、覚えておくとよいと思います。

円錐曲線と円の方程式

さて、上の二次関数は、変数xだけが二乗になった式で与えられていますが、もし変数xだけでなく、変数yの方にも二乗の項が含まれていた場合にはどうなるでしょうか？

その場合、一般には$\boxed{\qquad}$と呼ばれる曲線になり、各項の係数の値によって楕円や双曲線などの曲線になることが知られています。本書では、その中でも特に重要な、$\boxed{\qquad}$について解説します。

円の方程式とは？

円の方程式は、一般には

$$\boxed{\qquad\qquad}=0$$

となります。ただ、このままだとこれが本当に円になるのかもわかりにくいですし、円の特徴的な値である、円の半径や中心の位置も読み取れません。

そこでこれを、よりわかりやすい形に変形します。

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+ax+by+c&=0\\
x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2+by+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c&=0\\
\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c&=0\\
\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2&=\boxed{\qquad\qquad}
\end{aligned}
$$

ここで、上の式に含まれている$\frac{a}{2}$や$\frac{b}{2}$、$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$などは、複雑な形はしていますが全部ただの定数ですから、わかりやすくするために、まとめて別の定数に置き換えてしまいましょう。

具体的には、$\frac{a}{2}$を$-x_0$と置き換え、$\frac{b}{2}$を$-y_0$と置き換え、さらに右辺の$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$をまとめて$r^2$と置き換えます。すると、上の式$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$は、

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}=\boxed{\quad}$$

と書くことができます。

さて、この式は、$\boxed{\qquad\qquad}$そのものになっています。そのため、変数xとyは、「座標$(x_0,\ y_0)$から距離rの位置にある点」でなければならないことになります。

そのような、ある一点からの距離が等しいような点の集合はまさに円のことですから、

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}=\boxed{\quad}$$

は、中心座標($\boxed{\qquad}$)、半径$\boxed{\ }$の円を表す式であることがわかります。

この式はゲームプログラミングにおいても大変重要ですから、ぜひ覚えておきましょう。