6.ベクトルの計算

ベクトルの計算は以下のように定義される。
kはスカラーであり、a(1,2), b(2,3)なら、

$\overrightarrow{ab} = (2-1, 3-2) = (1,1)$

$\overrightarrow{ba} = (2-1, 3-2)$ =(-1,-1)

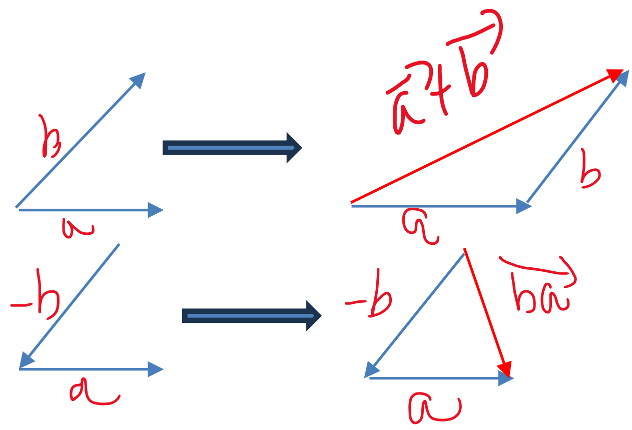
$\vec{a} + \vec{b}$ =(1+2,2+3)=(3,5)

$\vec{a} - \vec{b}$ =(1-2,2-3)=(-1,-1)

k$\vec{a}$ =(k*1,k*2)=(k,2k)

$\vec{a}/k$ =(1/k,2/k)

6. 計算の図示



1

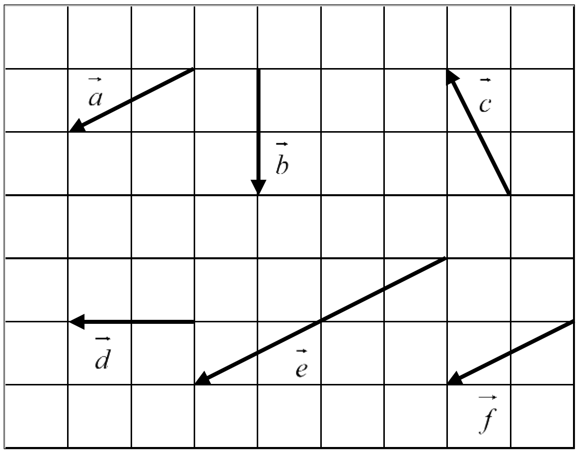
右の図において，次のベクトルを選べ。

(1)　等しいベクトル　$\vec{a}, \vec{f}$

(2)　大きさが等しいベクトル　$\vec{a}, \vec{c}, \vec{f}$ と $\vec{d}, \vec{b}$

(3)　向きが等しいベクト

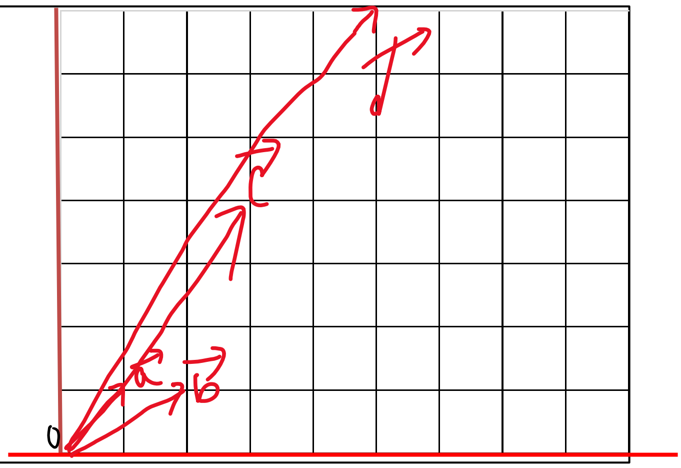
$\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$



2

右の図に，次のベクトルを図示し、
それぞれの大きさを求めよ。
原点は0とする。

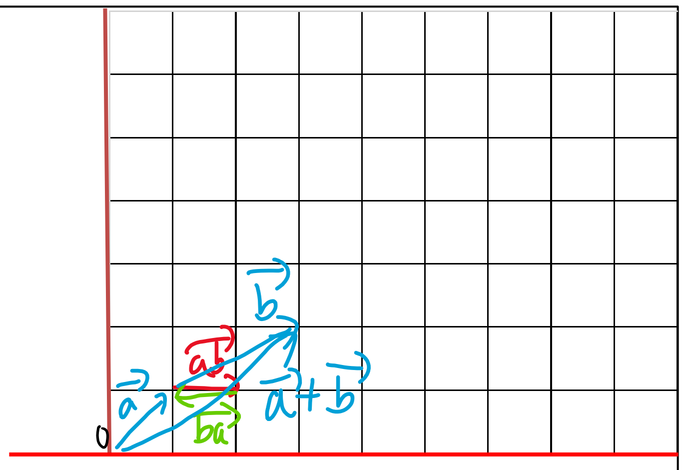
$\vec{a}$ = (1, 1)
$\vec{b}$ = (2, 1)
$\vec{c}$ = (3, 4)
$\vec{d}$ = (5, 7)



3

右の図に，次のベクトルを図示せよ。
また、それぞれの成分を出せ。
原点は0とし、a = (1, 1), b = (2, 1) とする。

$\overrightarrow{ab}$ = (2-1, 1-1) = (1, 0)
$\overrightarrow{ba}$ = (1-2, 1-1) = (-1, 0)
$\vec{a} - \vec{b}$ = $\overrightarrow{ba}$ = (-1, 0)
$\vec{a} + \vec{b}$ = (3, 2)



1.ベクトルの内積

ベクトルには**内積と呼ばれる計算がある。**
これは、

$$\vec{a}\ \cdot \vec{b}$$

という風に書く。
内積の定義は $\vec{a}(1,2), \vec{b}(2,3)$ならば、

$\vec{a}\ \cdot \vec{b}$ = 1*2 +2*3 = 8

となり、これは何を表しているかというと、

$\vec{a}\ \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

を表している。
(※θは$\vec{a}, \vec{b}$のなす角)

2.内積により何が分かるか？

成分同士の計算で、なす角が求められる。
というのが内積のポイントである。

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\vec{a}$方向に**進む物体と、**$\vec{\mathbf{b}}$方向に進む物体が**あった**とき、 $\vec{a}$または$\vec{b}$を**どれだけ回転させれば同じ方向を向くか、**という事が分かる。

また、もし**内積の計算結果が0ならば、**
三角比の性質より、
それはθが90°,もしくは270°のときだけです。

それは即ち、 $\vec{a}$と$\vec{b}$**が垂直である**ことを表します。

3.ベクトルの物理への拡張

物理において速度は向きと量がある数値である。
それは数学上ではベクトルと同じものと言える。
(というより、速度を表すためにベクトルが誕生)

二次元空間において、
1秒間にx方向に1, y方向に2進む物体があるとする。

その物体の速度$\vec{v}$は**ベクトル成分**として

$$\vec{v} = (1,2)[/s]$$

と表せる。

これは向きと量を持つベクトルである。

4.ベクトルの成分と座標

二次元空間において、
物体の位置もxとyの二要素で表せるので
座標として表せる。

物体の位置を$\vec{p}$とすると、
pの位置がx=3,y=4であったならば、

$$p = (3,4)$$

と表せる。

見た目が似ているが、これはベクトルでは無い。
座標である。向きがない。
→のある無しで判定する。

5.ベクトルの成分から座標へ

3で示したように、数学上の概念的な話でなければベクトルは通常**何らかの単位時間ごとにどれだけ移動**する。というのを表した物である。
(単位時間は1秒でも,1/60秒でも何でも良い)

そこで、物体の運動を考えたとき、ベクトル成分から物体の座標を計算で出すことができる。
例えば、

ある物体の移動後の位置を: p
移動前の位置を: p0
速度を: $\vec{v}$ 時間を: t

とすると、

$$p = \vec{v}t + p0$$

でt秒後の物体の位置が出せる。

・基本問題

速度$\vec{v} = (1,2)[/s]$,初期位置p0 = (2,3)
経過時間 t = 3[/s] とする。
t秒後の座標p(x座標,y座標)を求めよ。

$P = p0 + \vec{v}\cdot t$

$= (2,3) + (1,2)\cdot 3$

$= (2,3) + (3,6)$

$= (5,9)$

1

(1) $\vec{x}=-2\vec{a}+15\vec{b}$
(2) $\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=3\vec{a}-\vec{b}$

次の問いに答えよ。

(1) 等式 $2(\vec{a}+2\vec{x})-4\vec{a}=5(\vec{x}-3\vec{b})$を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 等式 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。

2

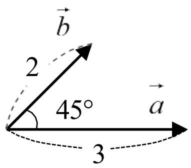
$-3\vec{a}+2\vec{b}=(-6,12)+(10,-6)=(4,6)$ //　大きさ $=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ //

$\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5,\ -3)$のとき，$-3\vec{a}+2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

3

次の内積を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45°
のときの，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=3\cdot2\cdot\cos45^\circ=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
$=3\sqrt{2}$



(2) $\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5,\ 3)$のときの，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=10-12=-2$

4

次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-15-14$
$=-29$
$\cos\theta=\frac{-29}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{29}}=-\sqrt{\frac{29}{58}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\theta=135^\circ$

(1) 2 つのベクトル$\vec{a}=(3,\ 7)$，$\vec{b}=(-5,\ -2)$のなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5+x,\ 3+x)$が垂直であるとき，x の値を求めよ。 $10+2x-12-4x=0$より
$x=-1$ //

5

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角 θ を求めよ。ただし，0° ≦ θ ≦180° とする。

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=3^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times4^2=73+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

これと，$|\vec{a}+2\vec{b}|=7$ から　$73+4\vec{a}\cdot\vec{b}=49$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

したがって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-6}{3\cdot4}=-\frac{1}{2}$　　0° ≦ θ ≦180° であるから　$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

6

球Aと球Bの中心の座標を
A(Xa,Ya),B(Xb,Yb)とする。
半径をrとする。

ＡとＢの最短距離をdとすると、

d = $\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a+y_b)^2}$

となり、

d < $2r$

のとき、AとBは衝突している。

これをベクトルで考えると、

$\overrightarrow{AB}=(x_b-x_a,\ y_b-y_a)$

であり、この大きさが距離なので、

$|\overrightarrow{AB}|<$ $2r$

のとき、AとBは衝突している。

1

次の座標から、以下の４つのベクトルを作成せよ。

a (1, 2) , b (3, 4) , c (−1, 5) , d (−2, −3)

$\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{cd}, \overrightarrow{da}$

$\overrightarrow{ab} = (2, 2)$　$\overrightarrow{cd} = (-1, -8)$

$\overrightarrow{bc} = (-4, 1)$　$\overrightarrow{da} = (3, 5)$

2

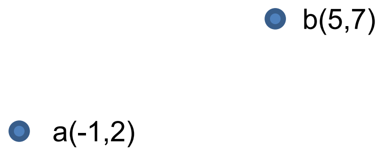
右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

2. bからaに向かうベクトルを求めよ。

$\overrightarrow{ab} = (4, 5)$

$\overrightarrow{ba} = (-6, -5)$

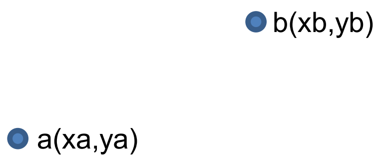


3

右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

1. $\overrightarrow{ab} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ //



2.　$\overrightarrow{ab}$を正規化したものを$\vec{n}$とする。aがその際に$t[/s]$でbたどり着くための速度ベクトルを求めよ。

解答には$|\overrightarrow{ab}|$を使用して良い。

$\vec{v} = \vec{n} \cdot \frac{|\overrightarrow{ab}|}{t}$ //

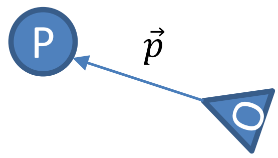
4

あるオブジェクトが、常にプレイヤーを正面にとらえて欲しい。

P (px, py) , O (ox, oy) とすると、

右図の$\vec{p}$の式を求めよ。

$\vec{p} = (P_x - O_x, P_y - O_y)$ //



5

次の運動をする物体を考える。

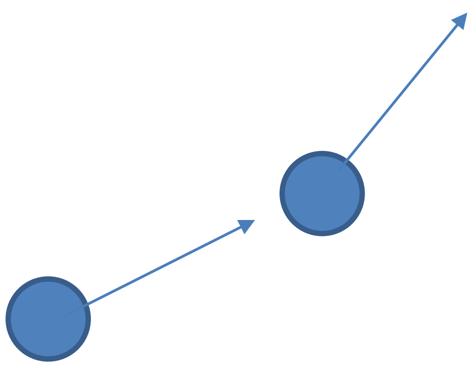
加速度：α,現在地：P, 初速度：$\overrightarrow{v0}$, 初期位置：$\overrightarrow{p0}$　とする。

経過時間はtとする。

1. $t = 0 \sim t = 3$ **のとき、**$\overrightarrow{v0} = (1,2), P0 = (1,1), \vec{\alpha}(1,0)$

2. $t = 3 \sim t = 5$ **のとき、物体Aは30°　回転し、**$\vec{\alpha}(1,1)$　**となる。**

1と２、それぞれの状況でのPの式を立てよ。



$t \leqq 3$のとき、

$P = p0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$= (1,1) + (1,2) \cdot t + \frac{1}{2}(1,0) \cdot t^2$

$= \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1, 2t + 1\right)$ //

$t \leqq 5$のとき

$P_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot 9 + 3 + 1, 6 + 1\right) = \left(\frac{17}{2}, 7\right)$

$V_0 = V_0 + \alpha t = (4, 2)$

ベクトルの回転は原点にそった回転なので

$V_0 = (4\cos 30° - 2\sin 30°, 4\sin 30° + 2\cos 30°)$

$= (2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})$

よって、

$P = P_0 + V_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\cancel{= \left(\frac{17}{2}, 7\right) + (4, 2)t + \frac{1}{2}(1,1)t^2}$

$= \left(\frac{17}{2}, 7\right) + (2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})t + \frac{1}{2}(1,1) \cdot t^2$

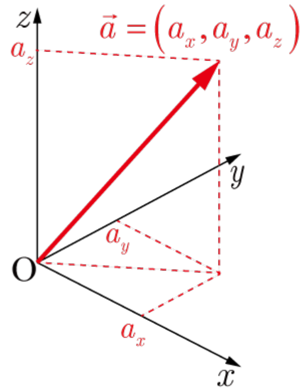
$= \left(\frac{1}{2}t^2 + (2\sqrt{3} - 1)t + \frac{17}{2}, \frac{1}{2}t^2 + (2 + \sqrt{3})t + 7\right)$ //

1.空間(３次元)ベクトル

これまでは2次元のベクトルについて考えてきましたが、ベクトルは実際には三次元で使用される事が主になります。
例えば、三次元ベクトル$\vec{a}$を例示すると

$$\vec{a} = (ax, ay, az)$$

となり、
z方向の成分も持つベクトルとなります。



２.３次元ベクトルの計算

$\vec{a} = (ax, ay, az), \vec{b} = (bx, by, bz)$とする。
正規化された単位ベクトルを$\vec{n}$とする。

$$\vec{a} + \vec{b} = (ax + bx, ay + by, az + bz)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (ax - bx, ay - by, az - bz)$$
$$k\,\vec{a} = (k * ax, k * ay, k * az)$$
$$\vec{a}/k = (k * ax, k * ay, k * az)$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathrm{ax} * \mathrm{bx} + \mathrm{ay} * \mathrm{by} + \mathrm{az} * \mathrm{bz}$$

三次元に拡張されただけで、二次元と基本的に同じです。
これ以外でも殆どのベクトルの計算は、
二次元ベクトルの計算に z 成分を追加しただけになります。

手計算での公式の確認などは基本的に二次元でやりましょう。ここでは、３次元によって新たに出現した概念などを扱っていきます。

3.外積

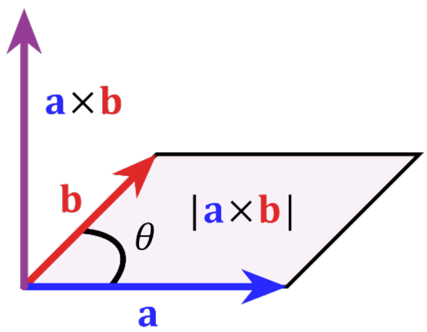
三次元ベクトルには外積という概念が存在します。
$\vec{a} = (ax, ay, az), \vec{b} = (bx, by, bz)$とすると、

外積 = $\vec{a} \times \vec{b}$
　　= **<u>(ay*bz – az*by, az*bx –ax*bz, ax*by – ay*bx)</u>**

これにより何が求まるかというと、

$\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に対して垂直なベクトルが求まります。

<u>$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ **かつ** $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$</u>



また、外積の大きさは
上図のような$\vec{a}$と$\vec{b}$で描かれる**平行四辺形の面積と等しい**という性質があります。
なので、次の性質が成り立ちます。

$$\underline{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| sin\theta}$$

・基本問題

$\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(3,2,1)$ とする。

$\vec{a} + \vec{b} = (4,4,4)$

$\vec{a} - \vec{b} = (-2, 0, 2)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3+4+3=10$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+4+9} = \sqrt{14} = \sqrt{14}$

$\vec{a}$の単位ベクトル$= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (2-6, 9-1, 2-6) = (-4, 8, -4)$

$\vec{a}, \vec{b}$のなす角をθとした際の

cosθ = $\frac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

sinθ = $\frac{\sqrt{16+64+16}}{14} = \frac{\sqrt{96}}{14} = \frac{4\sqrt{6}}{14} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$

$\vec{a}, \vec{b}$で描かれる平行四辺形の面積

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 4\sqrt{6}$

1

球Aと球Bの中心の座標を
A(Xa,Ya,Za),B(Xb,Yb,Zb)とする。
半径をrとする。

ＡとＢの最短距離をdとすると、

d = $\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2}$

となり、

d < $2r$

のとき、ＡとＢは衝突している。

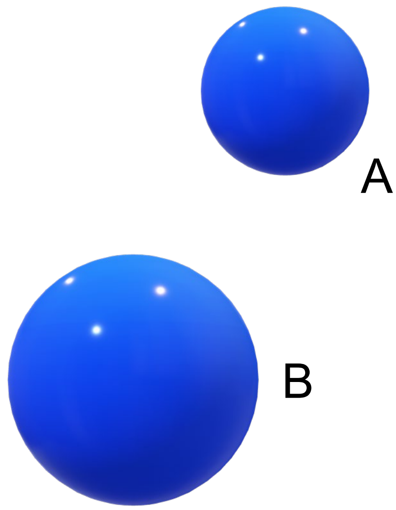
これをベクトルで考えると、

$\overrightarrow{AB}$ = $(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$

であり、この大きさが距離なので、

$|\overrightarrow{AB}|$ < $2r$

のとき、ＡとＢは衝突している。

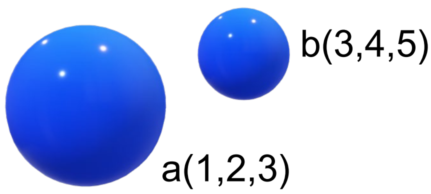


2

右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

$\overrightarrow{ab} = (2, 2, 2)$



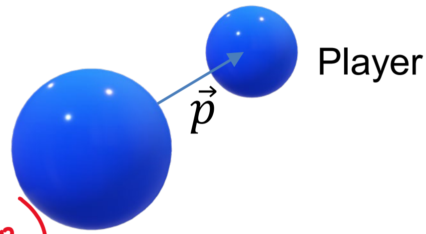
2. $\overrightarrow{ab}$を正規化したものを$\vec{n}$とする。aがその際に$t[/s]$でbたどり着くための速度ベクトルを求めよ。
解答には$|\overrightarrow{ab}|$を使用して良い。

$\vec{v} = \vec{n} \cdot \frac{|\overrightarrow{ab}|}{t}$

3

あるオブジェクトが、常にプレイヤーを正面にとらえて欲しい。
P(px, py, pz), O(ox, oy, oz) とすると、
右図の$\vec{p}$の式を求めよ。

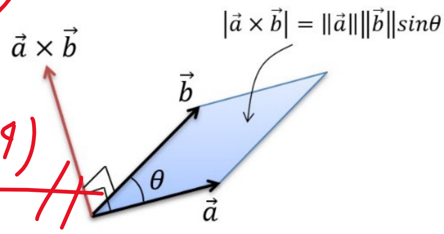
$\vec{p} = (P_x - O_x, P_y - O_y, O_z - P_z)$



4

ある面の中に交差するベクトル$\vec{a}, \vec{b}$がある。
$\vec{a}$=(1, 2, 3), $\vec{b}$=(3, 2, 1)
とすると、その面に垂直なベクトルを一つ求めよ。

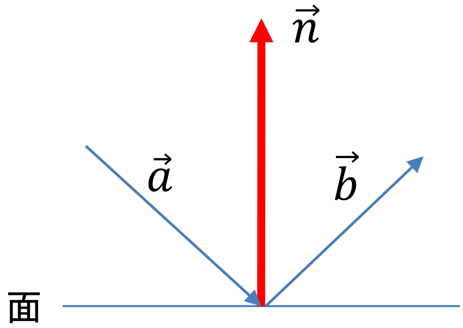
$\vec{a} \times \vec{b} = (2-6, 9-1, 2-6) = (-4, 8, -4)$



5

ある面に垂直なベクトルを求めることで、
その面で反射した際の反射ベクトルを求める事が出来る。
垂直なベクトルを$\vec{n}$=(0, 1, 0) とする。
入射ベクトルを$\vec{a} = (1,1,1)$とする。
反射ベクトル$\vec{b}$を求めよ。

$\vec{b} = (1, -1, 1)$



面に沿って
真横から見た図

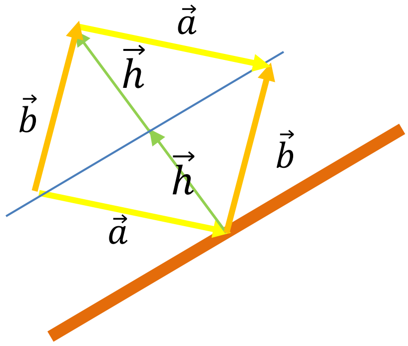
1.面法線と内積による反射の導出

ある面に対しての入射ベクトルを$\vec{a}$
反射ベクトルを$\vec{b}$,面法線を$\vec{n}$とする。
$\vec{a}$から$\vec{n}$への射影ベクトル$\vec{h}$は

$$\vec{h} = \vec{n}\,|\vec{a}|cos\theta$$

反射は右図のようなベクトル経路を取る。
よって、

$$\vec{b} = 2\,\vec{h} + \vec{a}$$



上記のような形で、
面法線と内積で反射ベクトルを求められる。

1

次の外積によって求められる法線ベクトルを答えよ(正規化しなくてよい)。
また、$\vec{a},\vec{b}$において$\vec{b}$方向の射影ベクトル$\vec{h}$を求めよ。
なお、$\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (-1,2,-3), \vec{c} = (2,4,6)$とする。

$$\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$$

$\vec{a}\times\vec{b} = (-12,6,4)$
$\vec{b}\times\vec{c} = (24,0,-8)$
$\vec{c}\times\vec{a} = (0,0,0)$

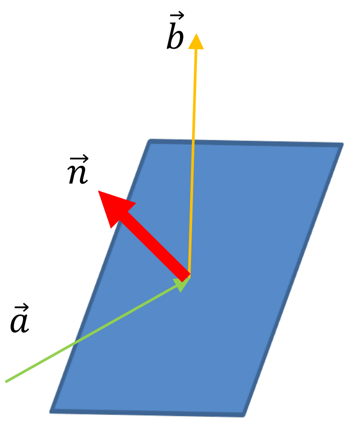
$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)$
$\vec{h} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$= \frac{1}{\sqrt{14}}(6,-12,18)$

2

次の衝突状態の反射について考える。

入射ベクトル$\vec{a} = (1,2,3)$, 反射面上のベクトル $\vec{b} = (2,3,4), \vec{c} = (4,3,2)$とする。

面の法線ベクトル: $\vec{n}$,　$\vec{a}$から$\vec{b}$への射影ベクトル: $\vec{h}$,　反射ベクトル: $\vec{l}$　を求めよ。



$\vec{b}\times\vec{c} = (-6,12,-6)$
$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{54}}(-3,6,-3)$
$\vec{h} = \vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{b})$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = 20$
$\vec{h} = 20\cdot\frac{1}{\sqrt{54}}(-3,6,-3)$

$\vec{b} = 2\vec{h} + \vec{a} = \frac{40}{\sqrt{54}}(-3,6,-3) + (1,2,3)$ //

1.2次元ベクトル回転

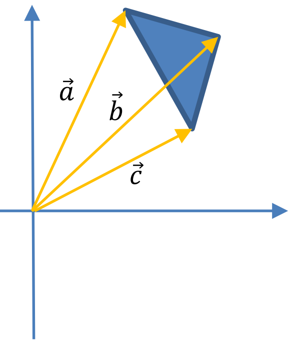
ベクトル成分は常に原点からの成分として考えられる。
そのため、2次元ベクトルの回転は原点基準での座標回転と同じである。

> したがって，点P$(a,\ b)$ を原点のまわりに θ だけ回転させた点Qの座標は
>
> $\mathrm{Q}(a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)$
>
> となる。

であったので、2次元ベクトル回転は

$$\vec{p} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

2.2次元ベクトルでの図形回転(原点基準)



図形を描く頂点それぞれに原点からのベクトルが伸びていると考える。

それらのベクトルを回転させれば、その成分が回転した図形の座標になる。

$$\vec{a} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$
$$\vec{b} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$
$$\vec{c} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

3.3次元ベクトル回転

3次元ベクトルの回転を考える。
全ての回転は、

- x軸上の回転
- y軸上の回転
- z軸上の回転

の組み合わせで表せる。
各軸上の回転は2次元ベクトルの回転と同じであるので、

x軸上の回転：
$$\vec{p} = (x,\ y\cos\theta - z\sin\theta,\ y\sin\theta + z\cos\theta)$$
y軸上の回転：
$$\vec{p} = (x\cos\theta + z\sin\theta,\ y, -x\sin\theta + z\cos\theta)$$
Z軸上の回転：
$$\vec{p} = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)$$

導出は省くが、
それぞれの軸に対して考えれば上記が出る。

x軸上にθ=~ , y軸上にθ=~ , z軸上にθ=~
とそれぞれやって、求める。

4.3次元ベクトルでの図形回転(原点基準)

図示するのが難しいので図示は省略するが、2次元ベクトルと同じで、全ての頂点に向かうベクトルを作成して回転させる。

2次元ベクトルとの比較としては、
作成するベクトルの数が多くなるのと、
計算過程が３倍になることである。

・基本問題

1.次の2次元ベクトルをΘ=30°回転させよ。

$$\vec{a} = (3,4)$$

$$\vec{a} = (3\cdot\cos\theta - 4\sin\theta,\ 3\sin\theta + 4\cos\theta)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$$

2.次の3次元ベクトルを
x軸上でθ=60°回転させよ。

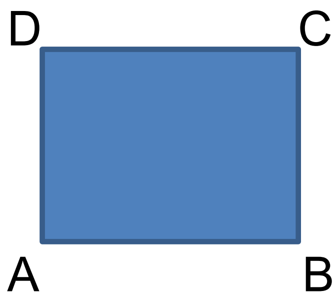
$$\vec{b} = (3,4,5)$$

$$\vec{b} = (3, 4\cos\theta - 5\sin\theta, 4\sin\theta + 5\sin\theta)$$

$$= \left(3, \frac{10-5\sqrt{3}}{2}, \frac{4\sqrt{3}+5}{2}\right)$$

1.

次の2次元図形を回転させる。A(2,2),B(4,2),C(4,4),D(2,4)とすると、
原点基準で30°　回転させた際の、それぞれの座標を求めよ。



$A = (\sqrt{3}-1,\ 1+\sqrt{3})$

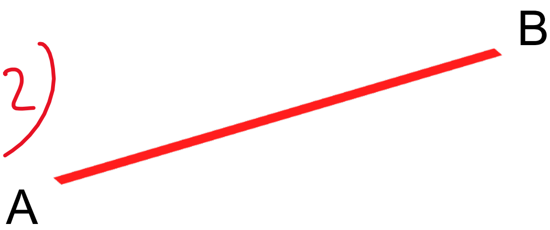
$B = (2\sqrt{3}-1,\ 2+\sqrt{3})$

$C = (2\sqrt{3}-2,\ 2+2\sqrt{3})$

$D = (\sqrt{3}-2,\ 1+2\sqrt{3})$

2.

次の3次元図形の直線を回転させる。A(2,2,2),B(4,4,4)とすると、
原点基準でz軸上で30°　x軸上で60°　回転させた際の、それぞれの座標を求めよ。



$z: \theta = 30^\circ$

$A' = (2\cos\theta - 2\sin\theta,\ 2\sin\theta + 2\cos\theta,\ 2)$

$= (\sqrt{3}-1,\ 1+\sqrt{3},\ 2)$

$x: \theta = 60^\circ$

$A'' = \left(\sqrt{3}-1,\ (1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ (1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\right)$

$= \left(\sqrt{3}-1,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$

$B'' = (2\sqrt{3}-1,\ 1-\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3})$