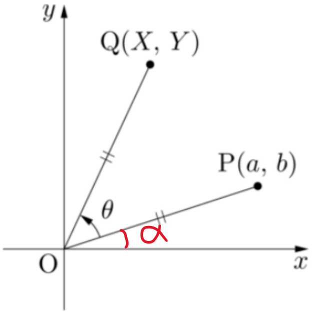
## ・回転

座標平面上の点P $(a,\ b)$ を原点のまわりに $\theta$ だけ回転させた点をQ$(X,\ Y)$ とする。




$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2+b^2}$ であるから，OPと $x$ 軸の正の方向となす角を $\alpha$ とすると，

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$ であるから

$$X = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\theta)$$
$$Y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)$$

となる。加法定理と①を用いて変形すると，次のようになる。

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right) \\ &= a\cos\theta - b\sin\theta \\ Y &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right) \\ &= b\cos\theta + a\sin\theta \end{aligned}$$

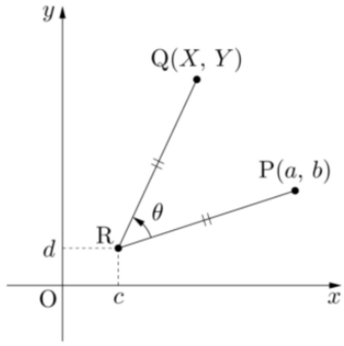
したがって，点P$(a,\ b)$ を原点のまわりに $\theta$ だけ回転させた点Qの座標は

$$\mathrm{Q}(a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)$$

となる。

**原点回転**

座標平面上の点P$(a,\ b)$ を点R$(c,\ d)$ のまわりに $\theta$ だけ回転させた点をQ$(X,\ Y)$ とする。




回転の中心Rが原点と重なるように，3点P，Q，Rを平行移動して考える。2点P，Qの平行移動後の点をそれぞれP′，Q′ とすると，

$$\mathrm{P}'(a-c,\ b-d),\ \mathrm{Q}'(X-c,\ Y-d)$$

となる。Q'はP'を原点のまわりに $\theta$ だけ回転した点であるから

$$\begin{cases} X-c = (a-c)\cos\theta - (b-d)\sin\theta \\ Y-d = (a-c)\sin\theta + (b-d)\cos\theta \end{cases}$$

よって，求める点Qの座標は

$$\mathrm{Q}((a-c)\cos\theta - (b-d)\sin\theta + c,\ (a-c)\sin\theta + (b-d)\cos\theta + d)$$

となる。

**任意点回転**

ごちゃごちゃ証明したが、
赤枠を覚えておけば良い
（※一度くらいは証明してみよう）

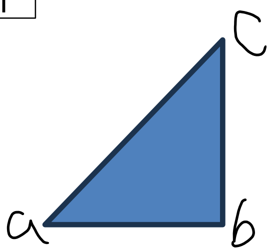
２つ覚えられないなら、
任意点回転の方だけ覚えれば良い。

## ・基本問題

1.点P(2,1)を原点周りに45°回転させた点Qの座標を求めよ。

2.点P(2,1)を点R(1,1)周りに45°回転させた点Qの座標を求めよ。

1

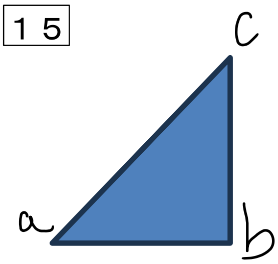



a(0,0),b(1,0),c(1,1)

の三角形を原点を基準点として
30°,60°回転させる。

それぞれの場合のa,b,cの座標を求めよ。

１５




a(-1,-1),b(1,-1),c(1,1)

の三角形を中心点を基準点とし
て45°回転させる。

その際のaの座標を求めよ。