6-1 比例と一次関数、直線の方程式

Keyword　比例関係　比例定数　媒介変数

本節では、ゲームに必要な数学のうち、最も基礎となるものの1つである「比例」と、それを一般化するための「一次関数」を解説します。
さらに、一次関数を使って直線を表す方法についてもあわせて解説していきます。

比例とは？

ある数が、別の数に定数aを掛けた数として表せるとき、両者は$\boxed{\quad}$関係にあるといいます。また、その場合のaを$\boxed{\quad\quad}$といいます。

例えば、「10円のアメを買う数と、その代金」は比例関係にあります。これは、買うアメの数をx、その代金をyとすると

$$y = \boxed{\quad}x$$

と表すことができ、この場合、比例定数aは10ということになります。この式を使って計算すると、例えば、$x=5$、つまりアメを5個買うなら代金yは

$$y = 10\cdot\boxed{\quad} = \boxed{\quad}(\text{円})$$

となりますし、アメ100個を買うなら代金yは

$$y = 10\cdot\boxed{\quad} = \boxed{\quad}(\text{円})$$

と求められます。

比の形で表現する

さらに、別な書き方でこれを表してみましょう。

今、アメ1つと10円が等しいので、これをアメ:代金＝1：10と表現します。この書き方を$\boxed{\quad}$と呼びます。このように書くと、アメ2つと20円も等しいので、アメ：代金＝2：20でもあり、またアメ7つと70円も等しいですからアメ：代金＝7：70でもあります。

これらをまとめて書いてみると

$$\text{アメ：代金} = 1:\boxed{\quad} = \boxed{\quad}:20 = 7:\boxed{\quad}$$

ということになります。

ここで、1：10＝2：20という部分に注目すると、内側2つの数を掛けると$10 \cdot 2 = 20$、外側2つの数を掛けると$1 \cdot 20 = 20$で、同じ数になっています（図6-1-1）。

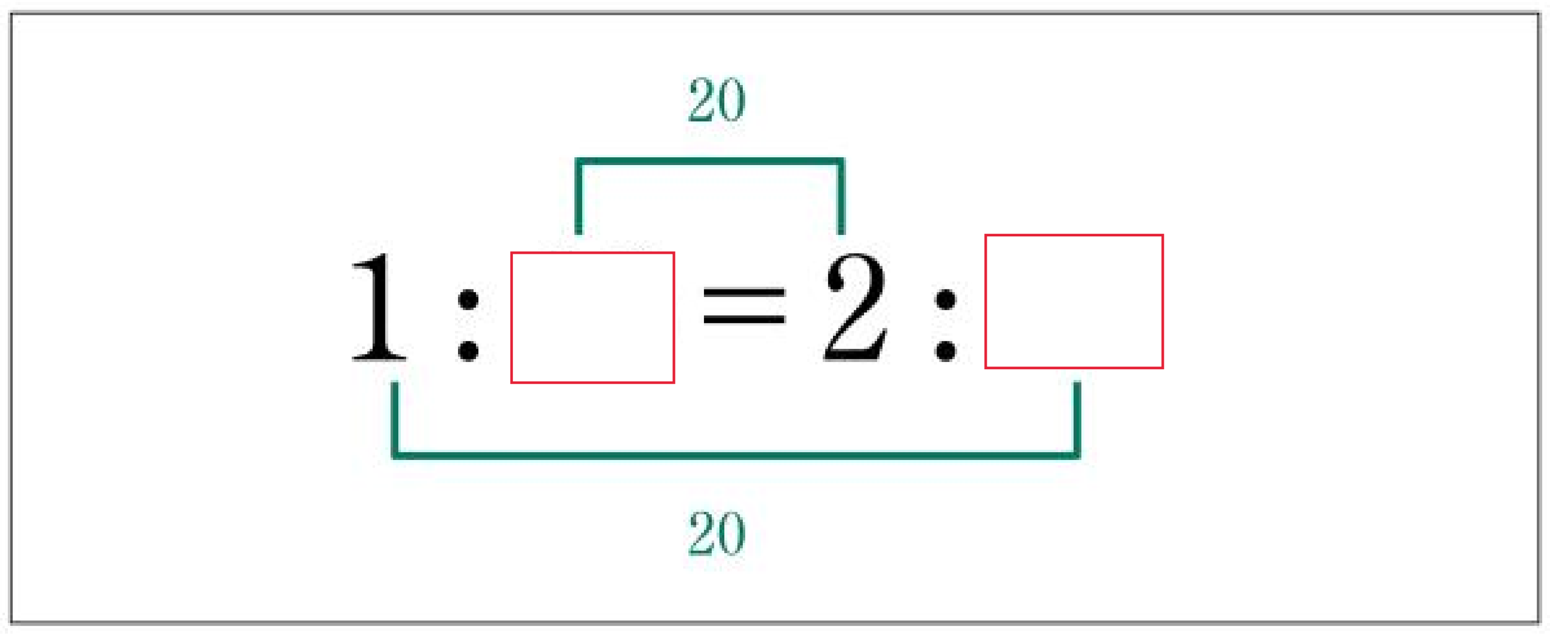

図6-1-1 内側2つの数を掛けたものと、外側2つの数を掛けたものは、ともに20となり等しい

また、2：20＝7：70という部分に注目しても、内側2つの数を掛けると$20 \cdot 7 = 140$、外側2つの数を掛けると$2 \cdot 70 = 140$で、やはり同じ数です。ということで、

$$a : b = c : d \text{ であれば、} \boxed{} = \boxed{}$$

という関係が常に成り立っているといえます。

試しに、その事実を使ってアメの代金を出してみましょう。アメ：代金＝1：10なのですから、アメ5個を買ったときの代金をyとすれば

$$1 : 10 = \boxed{} : y$$

となります。内側2つの数を掛けると$10 \cdot 5 = 50$、外側2つの数を掛けると$1 \cdot y = y$で、それらは等しいですから$y = 50$、つまりアメ5個を買ったときの代金は50円とわかります。

また、アメ：代金＝2：20でもありますから、これを使ってアメ100個の代金yを求めてみると

$$2 : 20 = \boxed{} : y$$

内側2つの数を掛けたものと外側2つの数を掛けたものが等しいですから

$$20 \cdot 100 = 2 \cdot y$$

$$\therefore y = \frac{\boxed{}}{2} = \boxed{} \text{(円)}$$

つまり、アメ100個の代金は1000円とわかります。

このような比例関係にある数同士の場合、比例定数をaとして

$$y = \boxed{}x$$

という関係が成り立ちます。先ほどのアメx個とその代金y円の場合は、$a = 10$だったわけです。

他にも例えば、1フレームに3ドットの速さで進む物体の場合、経過フレーム数をx、進む距離をyとすれば、

$$y = \boxed{}$$

となります。この場合も、アメの場合と同じように比例計算をすることで、ある時間での移動距

離を簡単に導くことができます。

一次関数

ただ、アメの代金とは違って、物体の運動の場合、最初にどの位置にいたのか、ということも関係してきます。例えば、最初10という位置にいて、かつ1フレームに3ドットの速さで進むなら、経過フレーム数をx、位置をyとして

$$y = \boxed{\quad}x + \boxed{\quad}$$

と表せるでしょう。

それでは、これを一般化してみましょう。最初bという位置にいて、1フレームにaドットの速さで進むなら、xフレーム経過後のyは

$$y = \boxed{\qquad}$$

と表せますが、この形の式を、$\boxed{\qquad}$といいます。ここで、$b = \boxed{\quad}$であれば単純な比例の式$y = ax$になりますから、単純な比例の式も一次関数です。

一次関数は、グラフに書いてみると必ず直線になります。グラフにした場合、aを$\boxed{\quad}$、bを$\boxed{\quad}$と呼びます（図6-1-2）。

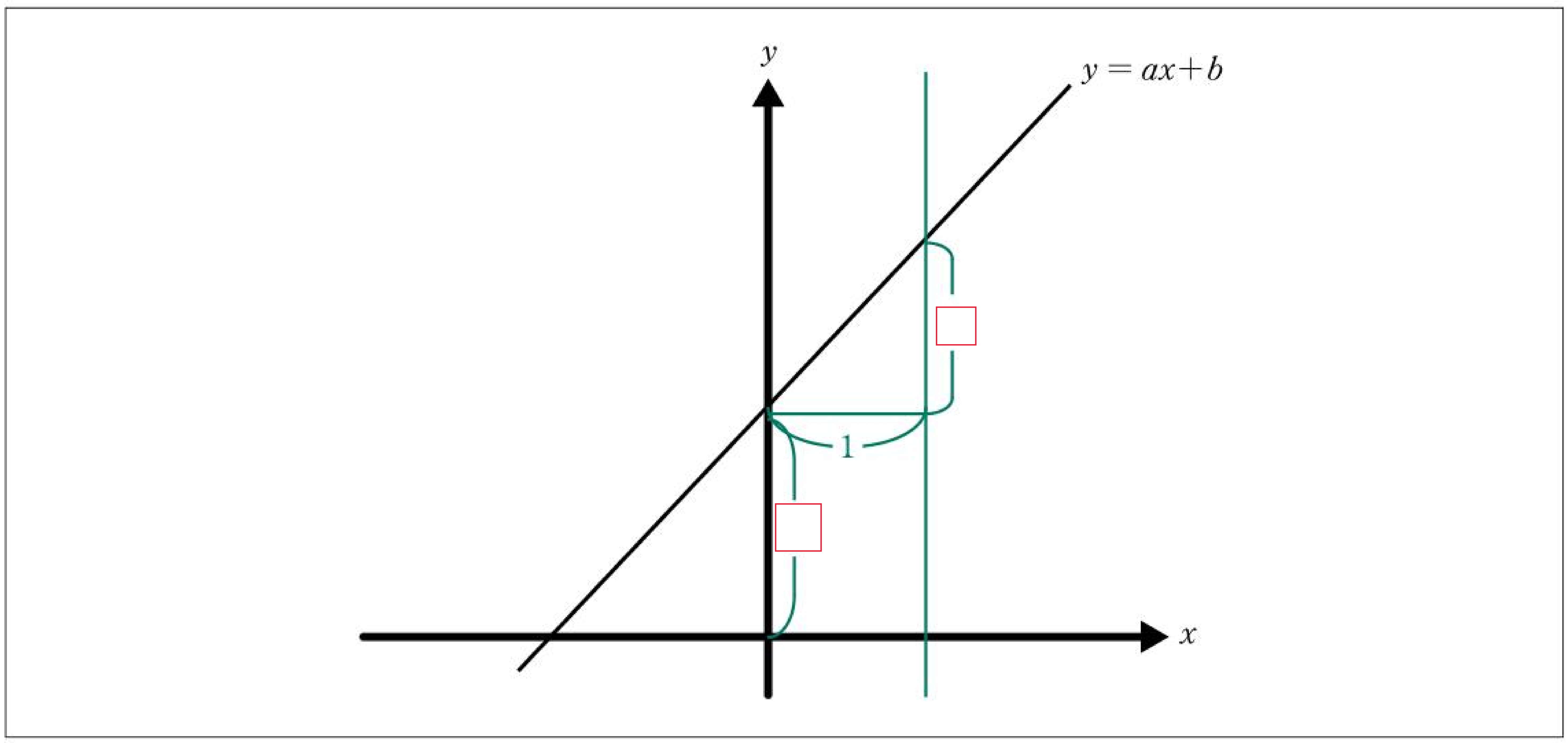

図6-1-2 一次関数のグラフ。aは傾き、bは切片と呼ぶ

直線を一次関数で表す

一次関数のグラフが直線で表せるということは、逆に直線という図形を一次関数で表せる、ということでもあります。

ただし、平面上の直線すべてを先ほどの

$$y = ax + b$$

という一次関数で表せるわけではありません。この式では、y軸に平行な、完全に立ってしまっている直線は表現できません。その場合、数学的には傾きaが無限大になってしまいますからね。

また、完全にy軸に平行でなくても、y軸に対してあまり傾いていない直線を表現しようとすると、切片bの値が極端なものになってしまって、特にコンピュータ上ではとても扱いにくくなってしまいます（図6-1-3）。

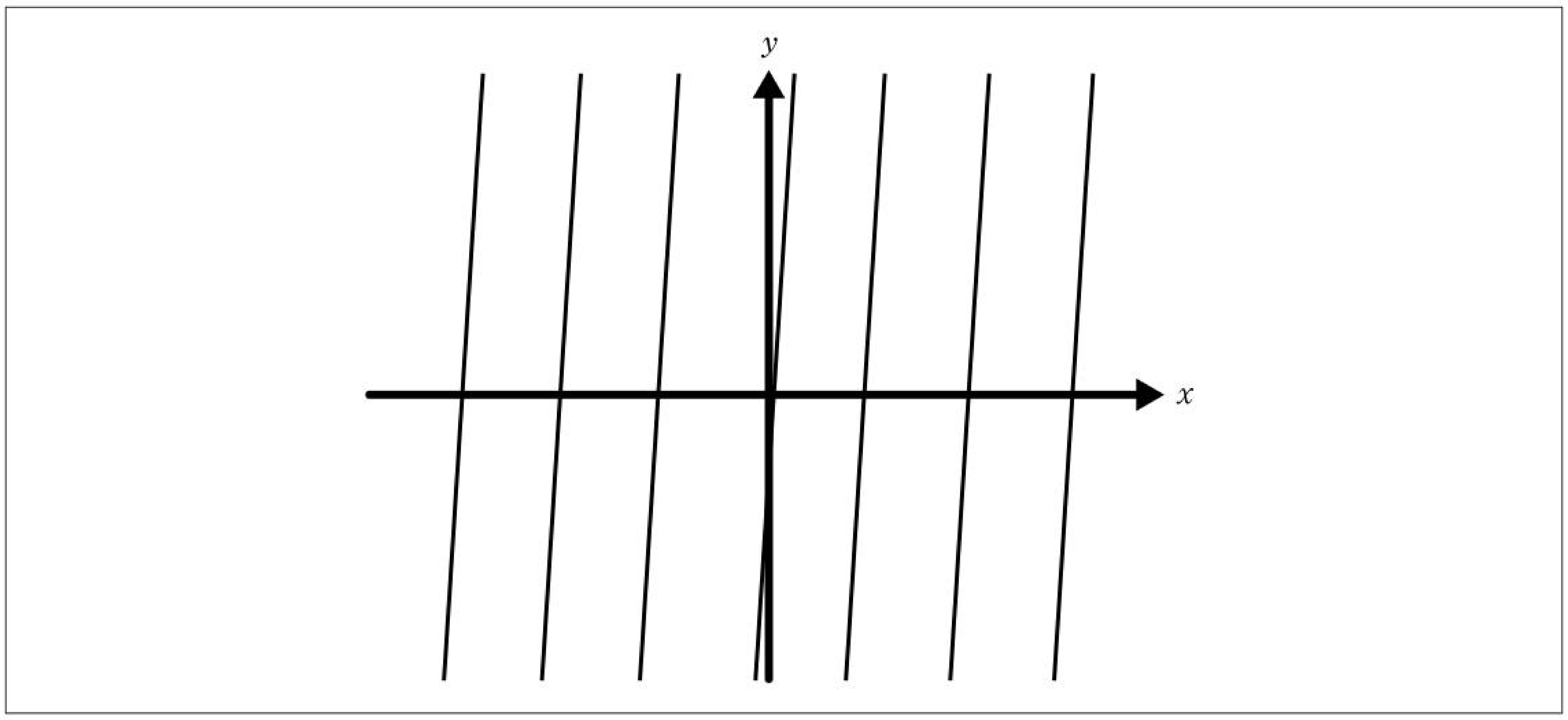

図6-1-3 y軸に対してほとんど傾いていない直線の例

媒介変数

そこで、コンピュータ上で図形としての直線を扱うときには、$\boxed{\quad}$ tというものを導入して、以下のような形で表現しておくと便利です。

$$x = \boxed{\quad}$$
$$y = \boxed{\quad}$$

つまり、1つの一次関数で直線を表現するのではなくて、x座標、y座標についてそれぞれ1つずつ、つまり平面ならば2つの一次関数を使って表すわけです。

ここで、媒介変数tは、例えば時刻と考えることができます。その場合、上の式は「時刻0に(b_x, b_y)という位置にいて、一定速度(a_x, a_y)で動くものが描く直線」と考えることができ、例えば

$$x = 3t + 1$$
$$y = 4t + 2$$

という直線なら、「時刻0に$\boxed{\quad}$という位置にいて、一定速度$\boxed{\quad}$で動くものが描く直線」ということになります。

この表現方法なら、$y = ax + b$という表現とは違って、a_xをゼロにすればy軸に平行な直線も無理なく表現できるため便利です。さらに、媒介変数tの値の範囲を制限すれば、ある点からあ

る点までを結ぶ線分を表現することも無理なく可能なので、いろいろと使い道が広がります。

例えば、先ほどの

$$x = 3t+1$$
$$y = 4t+2$$

という直線で、tの値を$0 \leq t \leq 2$と制限すれば、「点　　から点　　までを結ぶ線分」を簡単に表現することができます（図6-1-4）。

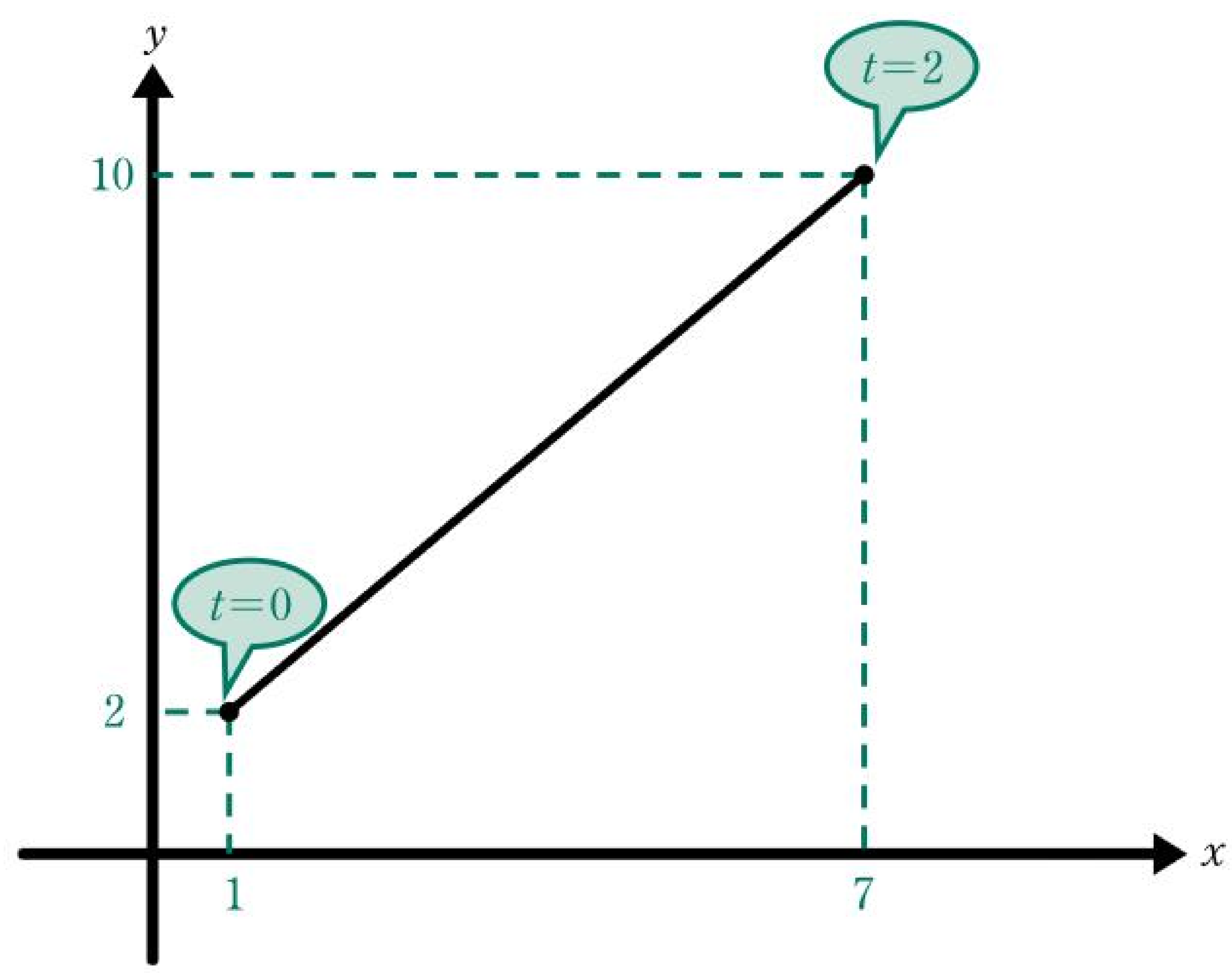

図6-1-4 点(1, 2)から点(7, 10)までを結ぶ線分

このように、2D（平面）の場合には、2組の一次関数を組み合わせた媒介変数表示で直線を表せば、無理なくさまざまな直線・線分を表せるため、これは特にゲームで直線や線分を表すときによく使われます。

直線の方程式

またそれ以外にも、平面上のすべての直線を表現できる形式として、以下のような直線の方程式があります。

$$\boxed{} = 0$$

先ほどの簡単な直線の方程式$y = ax+b$を式変形してみると

$$ax-y+b = 0$$

となるため、これは

$$\boxed{} = 0$$

という式の特殊な場合（$b = -1$とし、定数項cをbで置き換えたもの）であることがわかります。

つまり、$ax+by+c=0$という式は、$y=ax+b$という式も特殊な場合として含んでいるのです。

また、$ax+by+c=0$という式をyについて解いてみると

$$by=-ax-c$$

となり、ここで、$b\neq 0$として、両辺をbで割ると

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

となります。

ここで、$-\dfrac{a}{b}=a'$、$-\dfrac{c}{b}=b'$と置き換えてみると

$$y=a'x+b'$$

となりますから、$b\neq 0$の場合には、$ax+by+c=0$という式を$y=ax+b$という形式に変換することもできることがわかります。

y軸に平行な直線を表現する

さてここで、$ax+by+c=0$という形式を使って、$y=ax+b$という形式では表現できなかった、y軸に平行な直線を表現してみましょう。

・$b\neq 0$の場合には$ax+by+c=0$を$y=\boxed{\quad}$という形に変換できること
・$y=ax+b$という形では$\boxed{\qquad\qquad}$は表現できないこと

から、$ax+by+c=0$という式でy軸に平行な直線を表すには、$\boxed{\quad}$である必要があることがわかります。これは論理的な思考ですが、おわかりでしょうか。

さて、実際$b=0$としてみると、$ax+by+c=0$は

$$ax+c=0$$

となりますが、これを$a\neq 0$としてxについて解いてみると

$$ax=-c$$

$$\therefore x=-\frac{c}{a}$$

となります。

ここで、右辺はすべて定数の組み合わせであり、全体としても単なる定数です。そこで右辺をc'と置くと、

$$x=c'$$

という式になります。

つまりこれは、xがc'という定数に等しく、y座標については式に含まれていないのだから何でもいい、という図形を表し、それはy軸に平行な直線を表します（図6-1-5）。

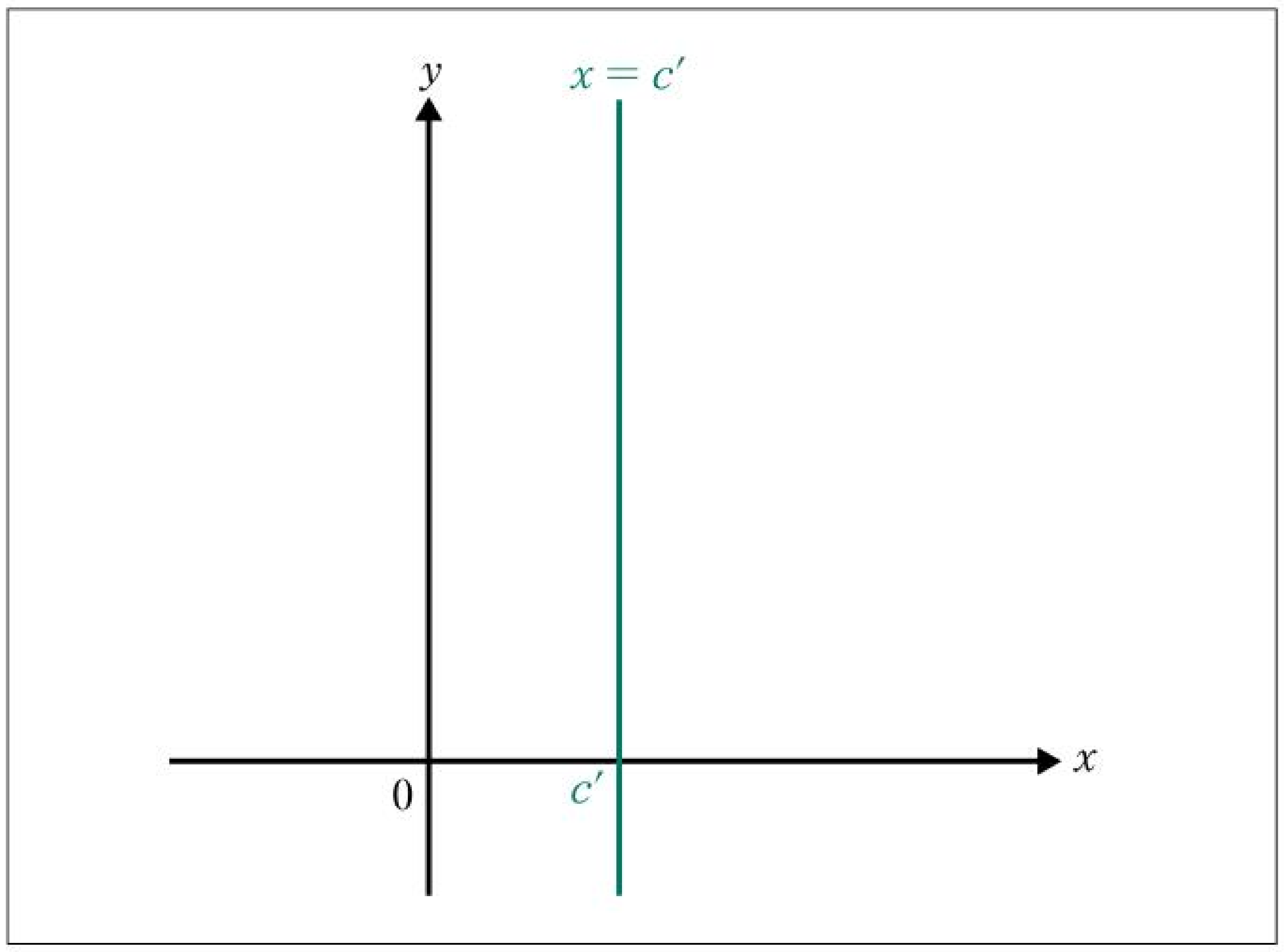

図6-1-5 y軸に平行な直線

これで、$ax+by+c=0$という形式の直線の方程式は、y軸に平行な直線も表現できることがわかりました。

NOTE

ちなみに、上の$ax+c=0$という式をxについて解くときに、$a \neq 0$としましたが、では$a=0$の場合にはどうなるでしょうか。
その場合、すでに$b=0$という条件を設定していますから$a=b=0$となり、$ax+by+c=0$という式は、$c=0$という何も表していない式になって意味がない、ということになります。
なお、$b \neq 0$の場合には、$a=0$のとき$ax+by+c=0$という式はx軸に平行な直線を表します。このことについては、ご自分で確かめてみてください。

同じ直線を表現する方程式は無数にある

さて、この$ax+by+c=0$という形式の直線の方程式を扱うときに気を付けなければならないことの1つが、同じ直線を表現する方程式が無数にある、ということです。

例えば、

$$ax+by+c=0$$

という式の両辺に、dという0でない定数を掛けてみると

$$d(ax+by+c)=0$$
$$dax+dby+dc=0$$

となり、形式的には元の式とは違ったものになりますが、両辺に定数を掛けても式は変化しない

ため、これは元の式と同じ図形を表していることになります。つまり、$d \neq 0$ならば、$ax+by+c=0$も$dax+dby+dc=0$も、同じ図形を表しているのです。

これは3Dでの平面の式でもいえることなのですが、見た目の形が違っていても同じ直線を表している場合もあり、またこれを応用して、得られた直線の方程式を、計算量を減らせるような形に変形できることもありますから覚えておいてください。

直線の方程式の性質

さて、この$ax+by+c=0$という直線の方程式の重要な性質として、(a, b)という、xとyに掛かっている係数をそれぞれx、y成分としたベクトル（ベクトルについては6-5.ベクトルとその演算を参照）を作ると、それは元の直線の　、つまり　ベクトルになる、という性質があります。

それでは実際に確かめてみましょう。まず、$ax+by+c=0$という直線上に異なる2点(x_1, y_1)と(x_2, y_2)があったとします。これら2点は、直線上にあるので、両方とも直線の方程式を満たします。

そこで、2点の座標をそれぞれ直線の方程式$ax+by+c=0$に代入すると、

$$\quad = 0$$
$$\quad = 0$$

となり、ここで、上の式から下の式を引いてみると、

$$\quad = 0$$

となります。

さて、この式をよく見てみると、左辺は(a, b)というベクトルと(x_1-x_2, y_1-y_2)というベクトルの内積と同じ形になっています。それが0になるということは、つまり(a, b)と(x_1-x_2, y_1-y_2)というベクトルは　ということになります（291ページ内積の使い道②：2つのベクトルが直交していることを確かめられる参照）。

一方、(x_1-x_2, y_1-y_2)というベクトルは、ちょうどベクトルの引き算になっていますから、点　から点　へと向かうベクトルとなっていて、それは直線と平行なベクトルになっています（図6-1-6）。

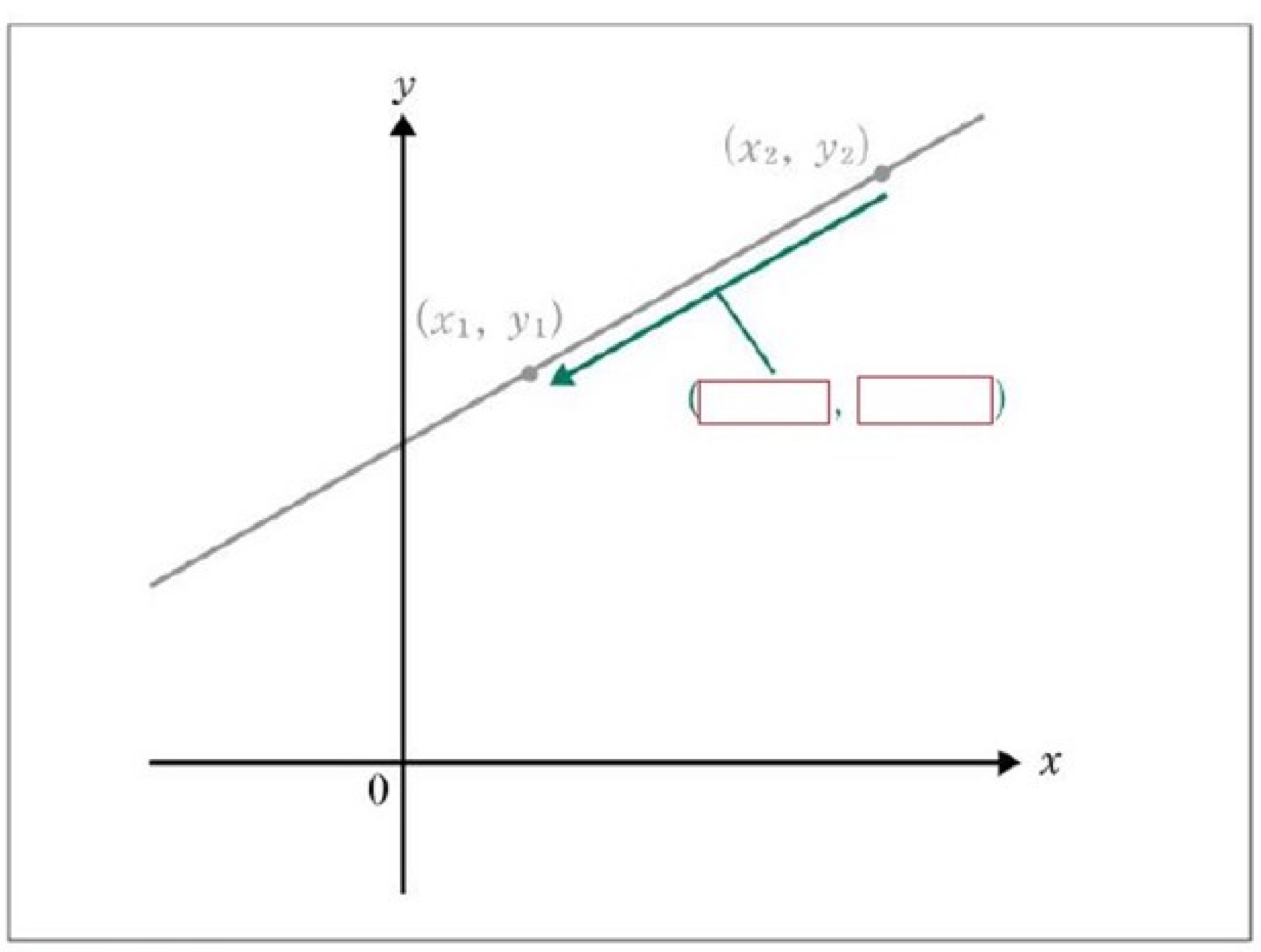

図6-1-6 点(x_2, y_2)から点(x_1, y_1)へと向かうベクトル

つまり、

(x2,y2)から(x1,x2)に向かうベクトルと
直交していれば直線とも直交するので、
(a,b)ベクトルは直線と直交する。

よって、(a,b)ベクトルは

ax+by+c = 0

と直交する。