6-4 三角関数

Keyword 直角三角形 単位円 ラジアン

本節では、ゲーム数学で大変重要であり、たびたび登場する「三角関数」と、角度を表す際に使われる「弧度法」「ラジアン」について解説します。

「コサイン、サイン、タンジェント」

　　　　というのは、その名の通り三角形の辺の長さと角度についての関数です。多くの種類がありますが、ゲームプログラミングで特に重要なのは cos（　　　）、sin（　　　）、tan（　　　）の3つです。

　これら3つの関数の原始的な定義としては、直角三角形の1つの鋭角θを考えた場合、以下のようになります（図6-4-1も参照してみてください）。

$$\cos\theta = \square$$

$$\sin\theta = \square$$

$$\tan\theta = \square$$

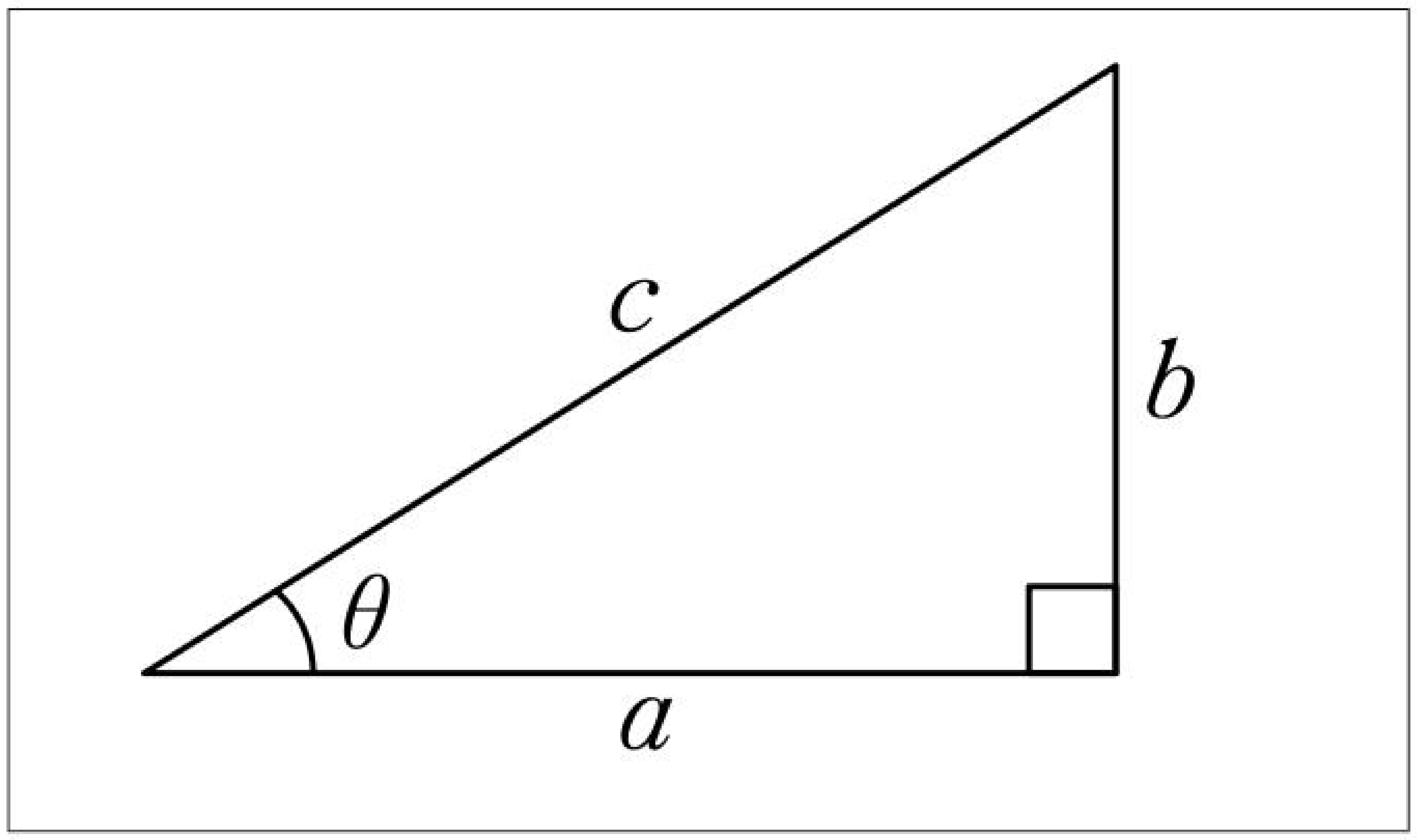


図6-4-1 直角三角形abcと辺a、cがなす角度θ

基本的な数学理論

ゲームプログラミングにおける三角関数の重要性

これらの関数がゲームプログラムで重要になるのは、主に、座標上のある一点P(x, y)（ただし$x > 0$かつ$y \geq 0$）を考えたとき、点Pと原点Oを結ぶ線分の長さをr、線分OPとx軸のなす角をθとすると（図6-4-2）、

$$\cos\theta = \boxed{\quad}$$
$$\sin\theta = \boxed{\quad}$$
$$\tan\theta = \boxed{\quad}$$

という関係となるためです。

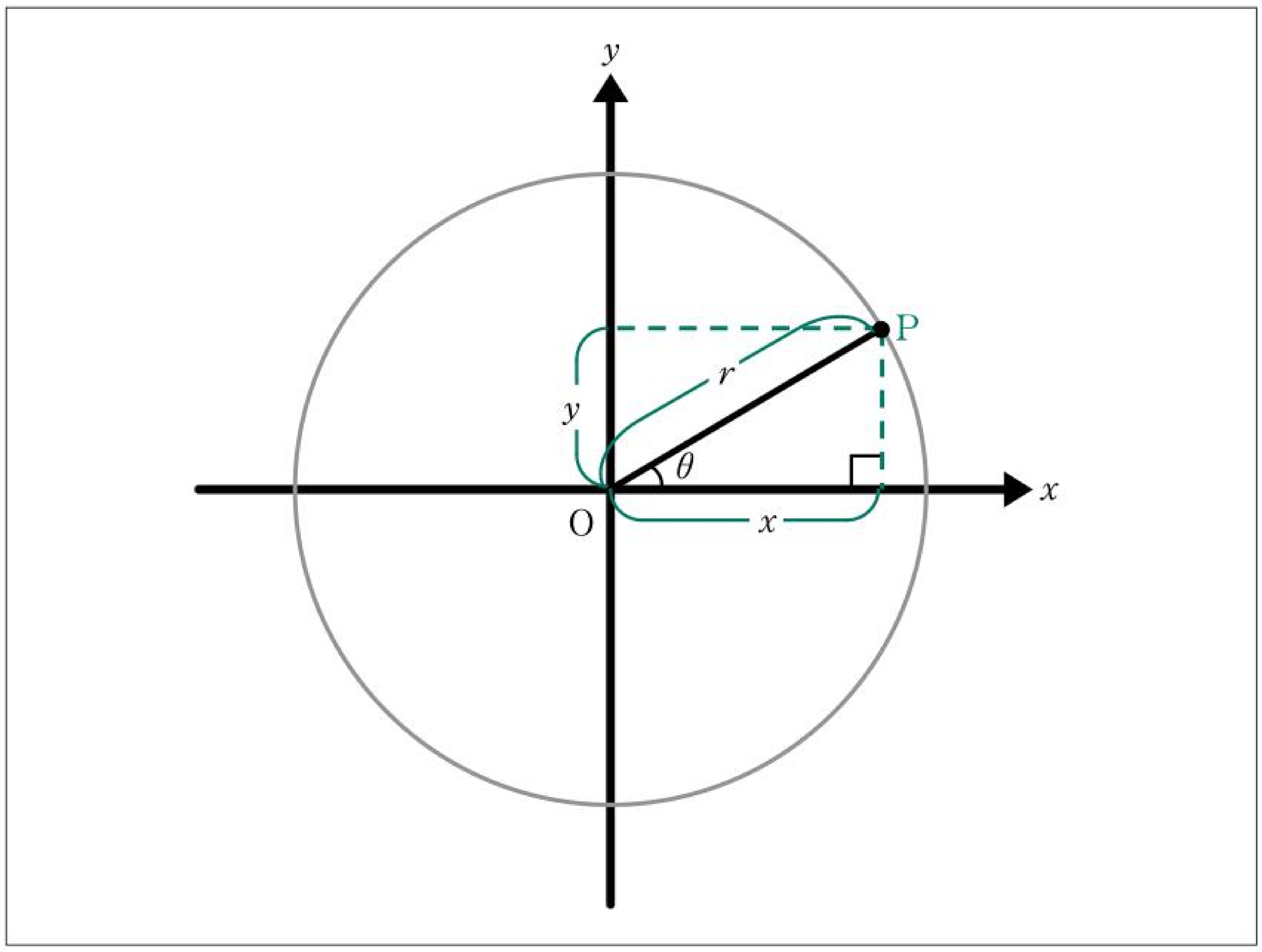
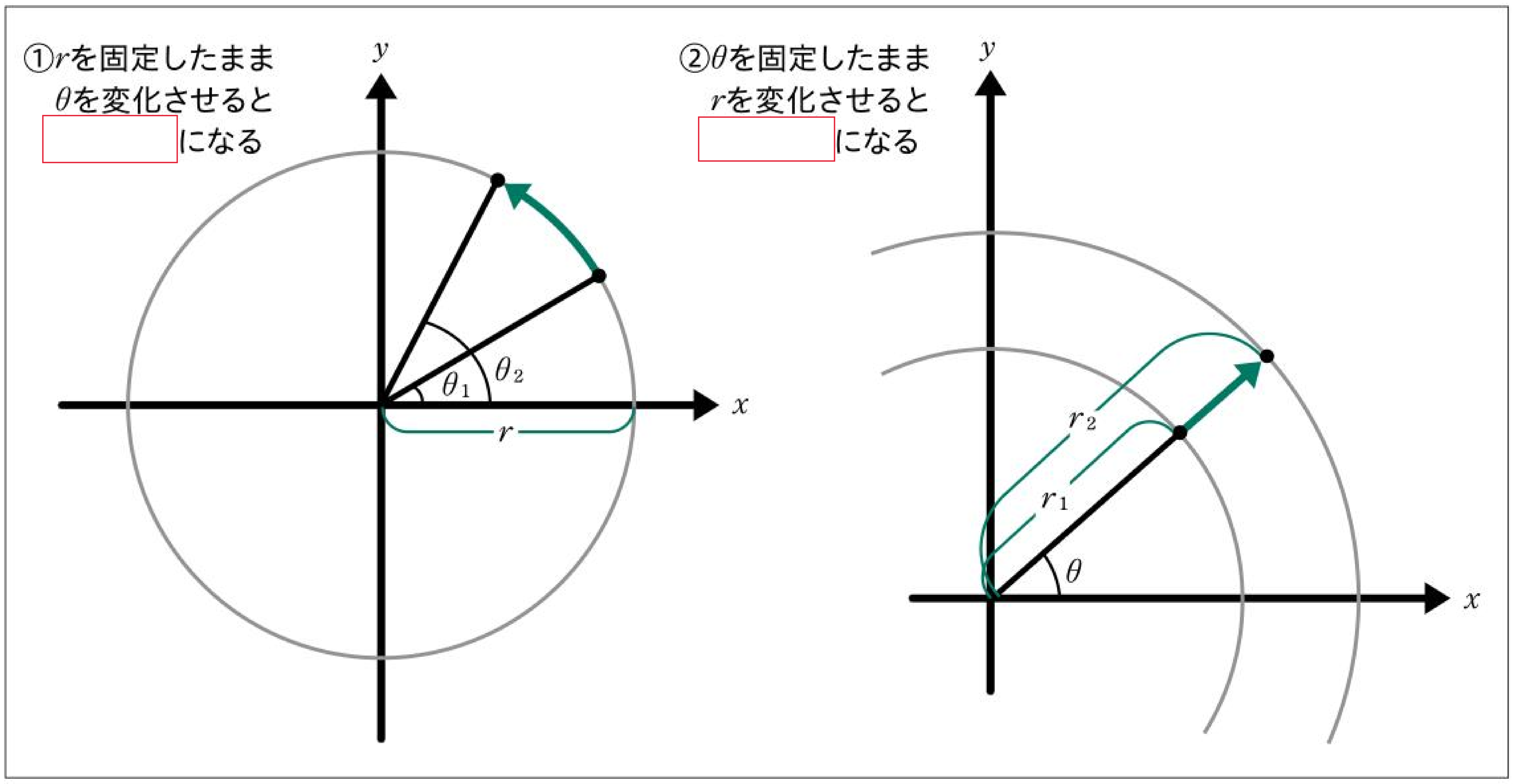


図6-4-2 点Pと、原点Oとの距離r

特に、cosとsinの式を変形すると

$$x = \boxed{\quad}$$
$$y = \boxed{\quad}$$

となりますが、これは大変有用な式です。例えば、この式でrを固定したままθを変化させれば、半径rの回転運動をさせることができますし（図6-4-3①）、θを固定したままrを変化させれば、角度θの方向に物体を直線運動させることもできます（図6-4-3②）。



▶図6-4-3 回転運動（①）と直線運動（②）

アークタンジェント

tanについては、直接ゲームプログラミングで使う機会は少ないのですが、tan関数の逆関数である**tan**$^{-1}$（　　　　）という関数を使うと

$$\theta = \boxed{}$$

となるため、座標$(x,\ y)$から角度を求めるのに便利です。

NOTE

特に、xの絶対値が非常に小さい場合の例外処理などを考えなくても、正しい象限の角度を出してくれる、（C言語などに実装されている）atan2関数は重宝します。

角度を限定しない定義

さて、以上の話は、（atan2関数は別として）まだ$x>0$かつ$y \geq 0$の場合、つまり座標系でいえば第一象限（182ページ、図4-3-9参照）に限定された議論です。それは、三角関数cos、sin、tanを、直角三角形によって定義していたのでは、角度θは90度より小さくなければならないからです。

そこで、角度θの範囲が限定されず、かつ上の議論がそのまま成り立つようにするため、　　円というものを使って三角関数を定義し直します。この定義では、原点Oを中心とした　　の円（単位円）を考え、その単位円上の点$P(x,\ y)$を使って、以下のように定義します（図6-4-4も

参照してみてください)。

$$\cos\theta = \boxed{\quad}$$
$$\sin\theta = \boxed{\quad}$$
$$\tan\theta = \boxed{\quad}\ (\boxed{\quad\quad})$$

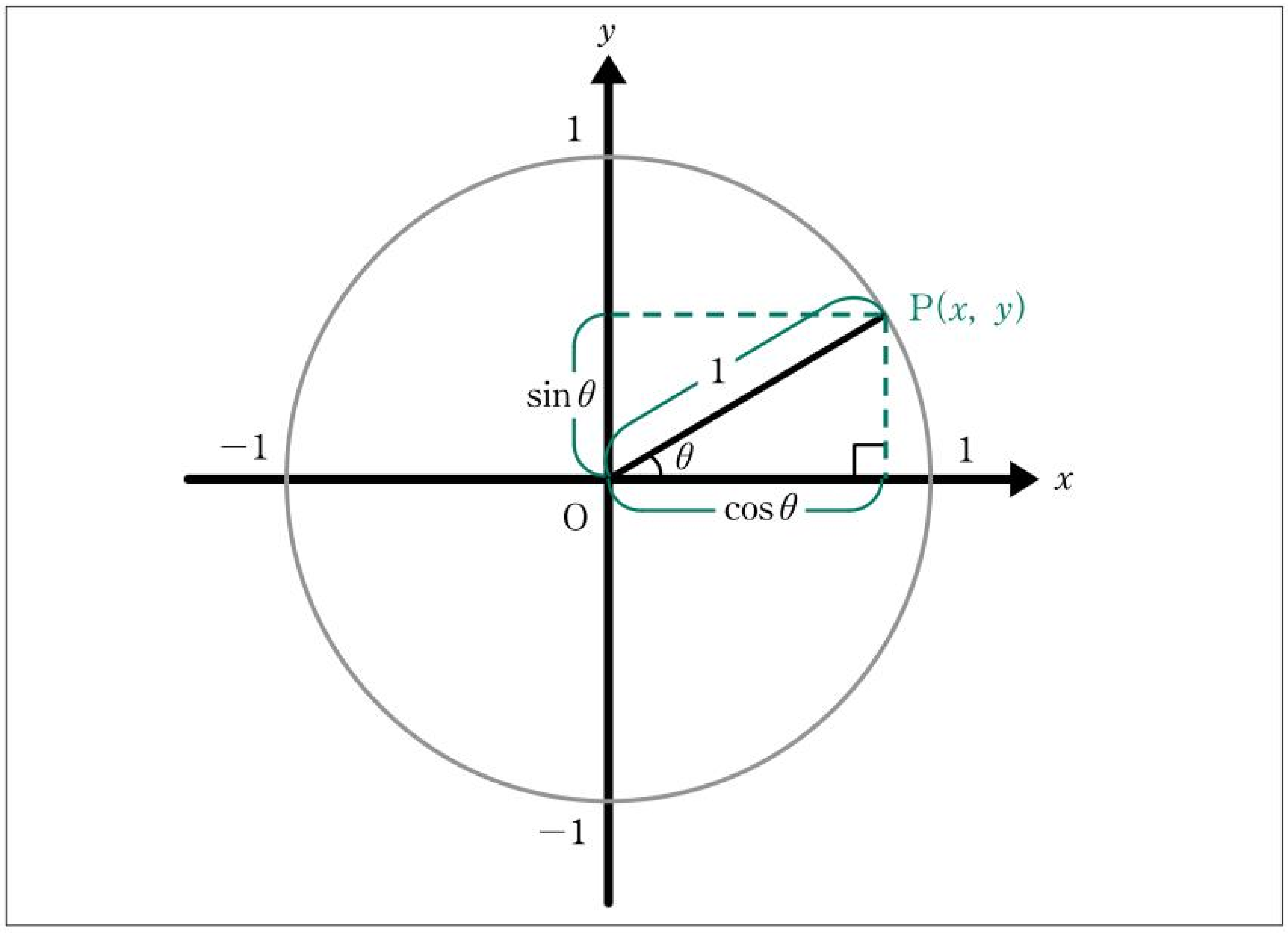


図6-4-4 単位円を使った三角関数の再定義

このようにすれば、角度が限定されずに三角関数を定義できるので、座標上のどの象限でも使えて便利です。なお、コンピュータ上の三角関数cos、sin、tanなどは、この単位円を使った定義を元にきちんと作られているため、角度の大きさを気にしないで使うことができます。

度数法とラジアン

さてここで、角度θの単位について考えてみます。

日常生活では、角度の単位としては、$\boxed{\quad\quad}$(1周が360度)が使われることが多いでしょうが、高等数学やコンピュータ上の三角関数では$\boxed{\quad\quad}$という単位が使われるのが一般的です。これは、$\boxed{\quad\quad}$の単位円を考えたとき、角度を単位円上の弧の長さとして表すものです(図6-4-5)。

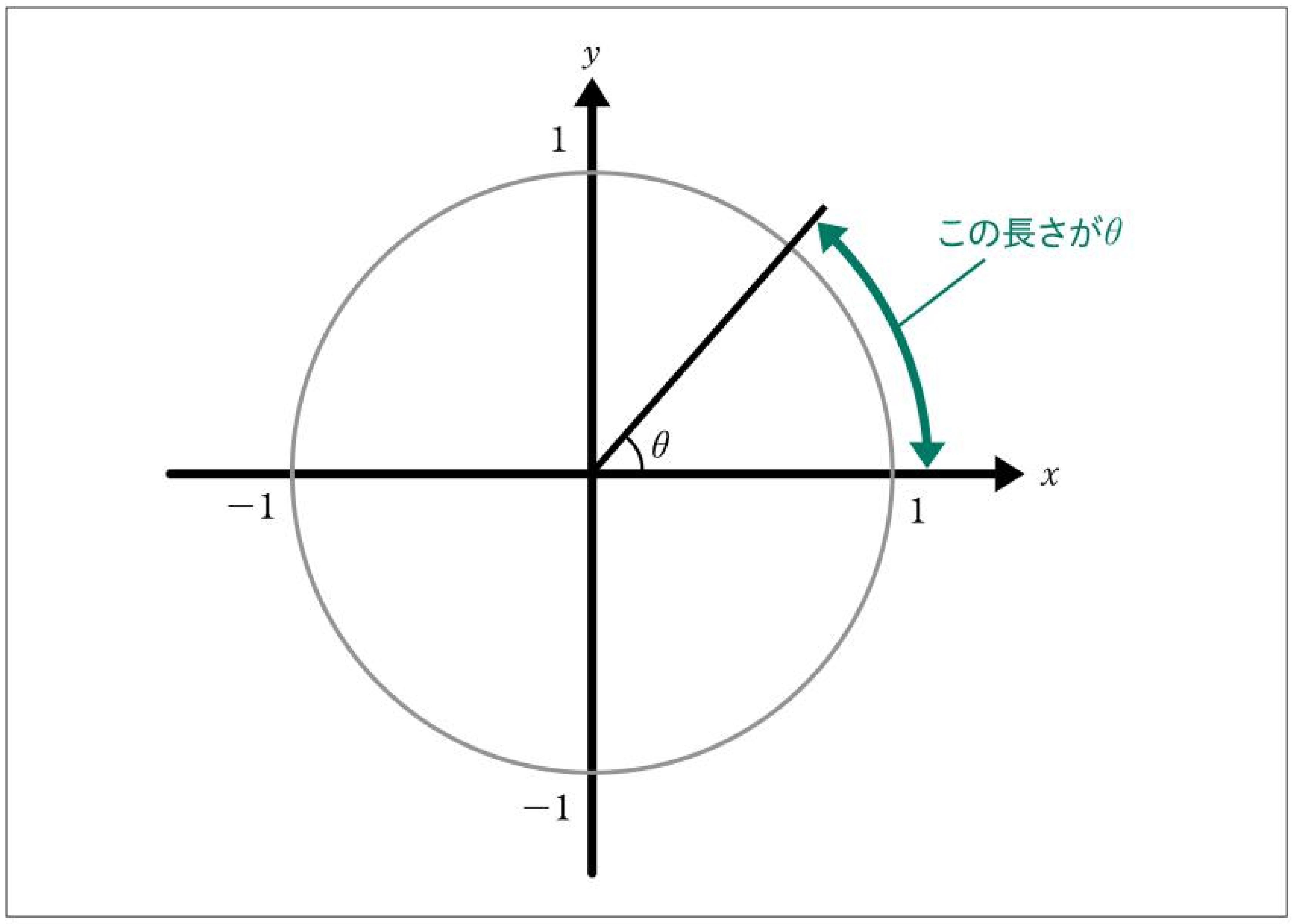


図6-4-5 弧度法では、単位円の弧の長さを使って角度を表す

単位円1周分の周の長さは2πですから、1周（360度）の角度はラジアン単位では2πとなります。他の例としては、30度なら□、60度なら□、90度なら□、180度ならちょうど□になります。

このラジアンという単位を使うことで、三角関数の微分積分が非常に取り扱いやすくなるため、とても重宝します。実際、ゲームプログラミングで角度を扱うときには、度数法を使うことはそれほどなく、多くの場合このラジアンを角度の単位として使います。

マイナスの角度

また、角度には「マイナスの角度」というものも定義されています。y軸が上を向いた通常の座標系では、角度のプラス方向（角度が増える方向）は反時計回りと決められていますが、角度のマイナス方向は、その逆回転、時計回りの回転方向がマイナス方向と決められています（図6-4-6。ただし、y軸が下を向いたコンピュータの2D座標では、それぞれ逆回転になる）。

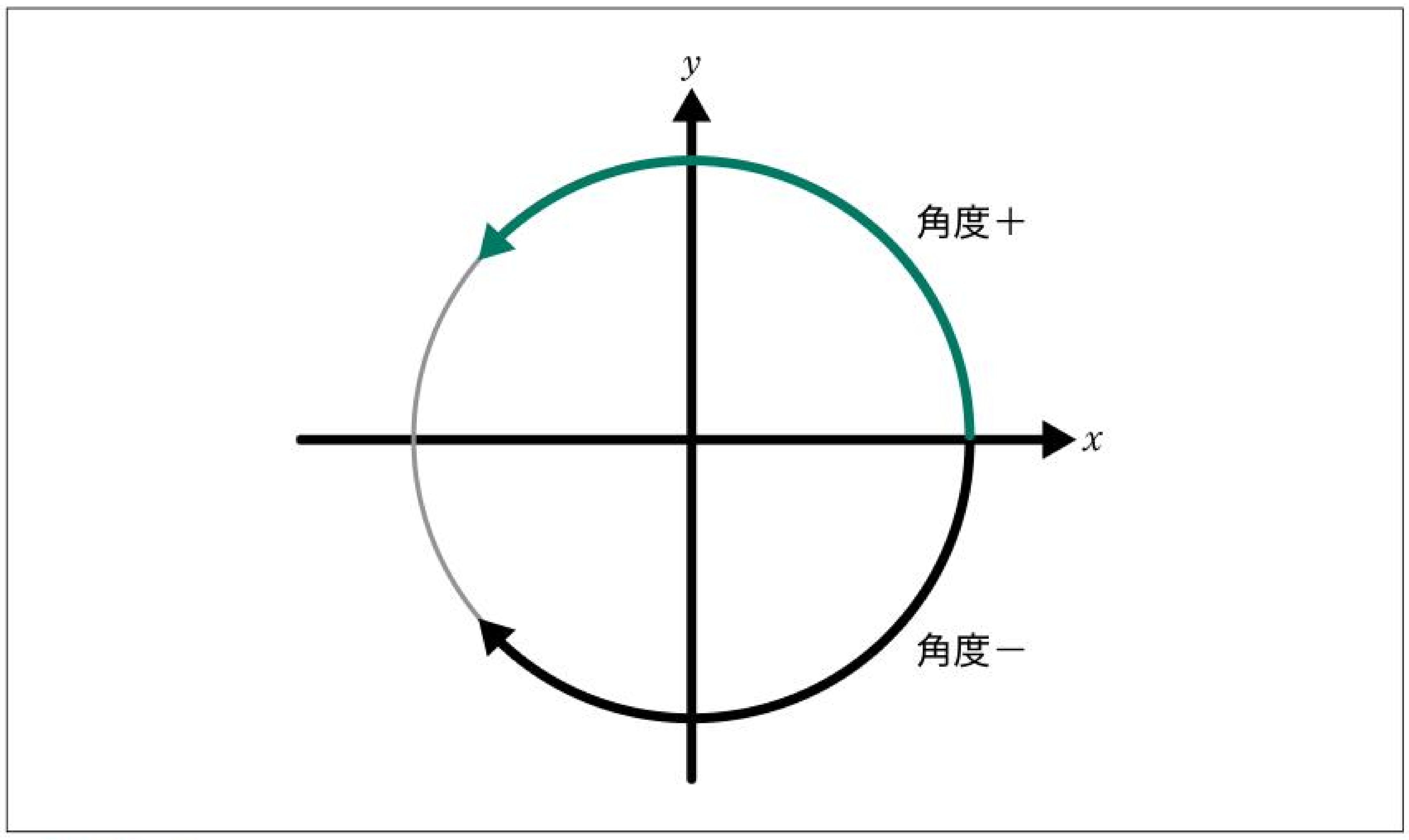


図6-4-6 プラスの角度とマイナスの角度

このようにマイナスの角度も定義すると、あらゆる値、つまり実数全体に渡って三角関数を定義することができます。

NOTE

ただし、tanは一部の値について定義できません。

最初、直角三角形で三角関数を定義したときには0度～90度しか定義できなかったため、かなり大幅に拡張できたことになりますね。その実数全体について定義された三角関数cos、sin、tanのグラフを示したのが図6-4-7です。この図を見ると、cosとsinは形が同じで、x方向の位置がずれているだけであることがわかると思います。

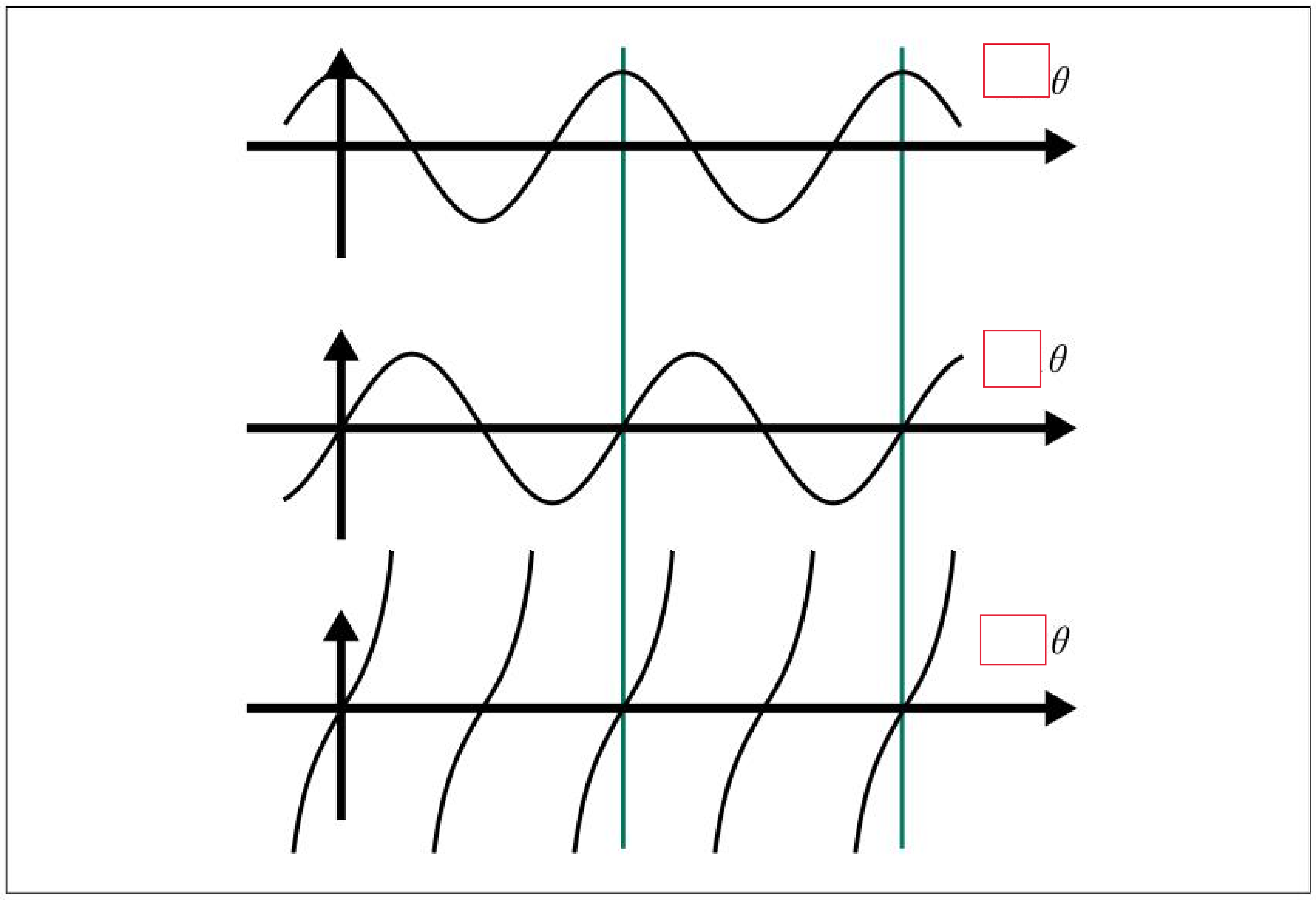


図6-4-7 $\cos\theta$、$\sin\theta$、$\tan\theta$それぞれのグラフ

加法定理

こうして定義域が実数全体に拡張された三角関数に対しては、さまざまな公式が成り立ちます。

それら公式は数も多いですし、中には大変複雑な公式もあって、三角関数が嫌われる原因にもなってしまっていますが、ここではまず、それら公式のうち、ゲームプログラミングでも特に重要になるcos、sinについての　　　について説明します。

加法定理とは、$\cos(\alpha+\beta)$や$\sin(\alpha+\beta)$についての公式で、「単位円上で　　　点を、そこからさらに　　　回転させるとどうなるのか？」という公式だと考えておけばわかりやすいかと思います（図6-4-8）。

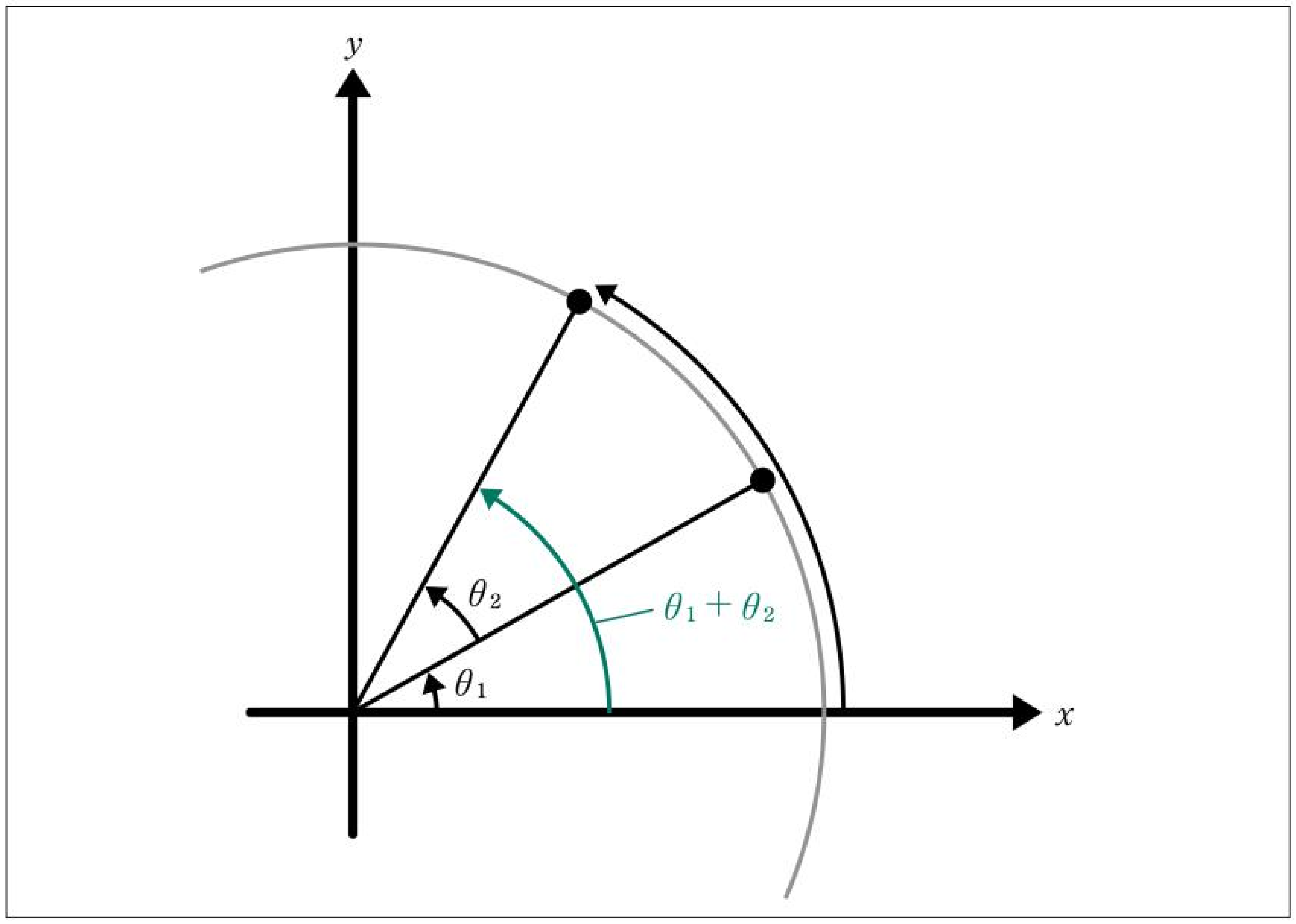


図6-4-8 加法定理の図解。単位円上でθ_1にある点をさらにθ_2だけ回転させる

ある点をある角度だけ回転させるので、ゲームプログラムをしようとしている方であれば、回転の行列を使うのがわかりやすいと思います。

具体的には、点$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$は点$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$を角度$\beta$だけ回転させたものであり、回転の行列を使うと

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

となります。

この式のx成分から

$$\cos(\alpha+\beta)=$$

という式が得られ、また、y成分からは、

$$\sin(\alpha+\beta)=$$

という式が得られます。

これら2本の式は、三角関数を含んだ式変形のときに使える場合があるので、覚えておくと便利です。

また、ゲームプログラムをしているときには、βとして$\frac{\pi}{2}$を代入したものが便利なこともよくあります。実際にやってみましょう。

垂直なベクトルを求める

先ほどの式、

$$\cos(\alpha+\beta)=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

に$\beta=\frac{\pi}{2}$（90度）を代入すると、

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)&=\boxed{\qquad\qquad\qquad}\\&=\cos\alpha\cdot 0-\sin\alpha\cdot 1\\&=\boxed{\qquad}\end{aligned}$$

となり、角度に$\frac{\pi}{2}$を足すことで、cosが−sinに変わりました。

次は、sinについてやってみましょう。

$$\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

という式に$\beta=\frac{\pi}{2}$を代入すると、

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)&=\boxed{\qquad\qquad\qquad}\\&=\cos\alpha\cdot 1+\sin\alpha\cdot 0\\&=\boxed{\qquad}\end{aligned}$$

となり、角度に$\frac{\pi}{2}$を足すことで、sinがcosに変わりました。

三角関数のグラフ（図6-4-7）の所で見たように、「cosとsinは角度的な位置（これを「$\boxed{\quad}$」といいます）がずれているだけである」、というのが式のうえでもわかると思います。

ちなみに、上と同じようにして$\beta=-\frac{\pi}{2}$（90度）とすると

$$\cos\left(\boxed{\qquad}\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\boxed{\qquad}\right)=-\cos\alpha$$

となります。

このような「角度的に$\boxed{\quad}$や$\boxed{\quad}$だけ回転したときに、三角関数がどうなるか」というのは、あるベクトルに垂直なベクトルを求めたい場合などに便利ですから、覚えておくとよいと思います。