

## 1.ベクトルの内積

ベクトルには内積と呼ばれる計算がある。  
これは、

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

という風を書く。

内積の定義は  $\vec{a}(1,2), \vec{b}(2,3)$  ならば、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

となり、これは何を表しているかというと、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

を表している。

(※ $\theta$ は $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角)

## 3.内積による垂直判定

内積の計算で、なす角が求められる。

であるので、内積の計算によって計算したベクトル同士が垂直かどうか確かめられる。

$\cos \theta = 0$  なら、 $\theta = 90$ 度or $270$ 度なので、

いずれにせよ垂直に交わっている事が分かる。

方向を向くか、という事が分かる。

$\theta$ が $90$ 度なのか、 $270$ 度なのかは内積の計算では分からないので、それは別の手段で判定する必要がある(ここでは解説しない)。

## 5.ベクトルの成分と座標

二次元空間において、  
物体の位置もxとyの二要素で表せるので  
座標として表せる。

物体の位置を $\vec{p}$ とすると、  
 $\vec{p}$ の位置が $x=3, y=4$ であったならば、

$$\vec{p} = (3, 4)$$

と表せる。

見た目が似ているが、これはベクトルでは無い。  
座標である。向きがない。  
→のある無しで判定する。

## 2.内積により何が分かるか？

成分同士の計算で、なす角が求められる。  
というのが内積のポイントである。

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$\vec{a}$ 方向に進む物体と、 $\vec{b}$ 方向に進む物体があったとき、 $\vec{a}$ または $\vec{b}$ をどれだけ回転させれば同じ方向を向くか、という事が分かる。

例えば、内積の計算結果が $1/\sqrt{2}$ なら、

$\cos \theta = 1/\sqrt{2}$  より、 $\theta = 45$ 度なので、

$\vec{a}$ と、 $\vec{b}$ のなす角は $45$ 度である。

## 4.ベクトルの物理への拡張

物理において速度は向きと量がある数値である。  
それは数学上ではベクトルと同じものと言える。  
(というより、速度を表すためにベクトルが誕生)

二次元空間において、  
1秒間にx方向に1, y方向に2進む物体があるとする。

その物体の速度 $\vec{v}$ はベクトル成分として

$$\vec{v} = (1, 2) [\text{s}]$$

と表せる。

これは向きと量を持つベクトルである。

## 6.ベクトルの成分から座標へ

3で示したように、数学上の概念的な話でなければベクトルは通常何らかの単位時間ごとにどれだけ移動する。というのを表した物である。  
(単位時間は1秒でも、1/60秒でも何でも良い)

そこで、物体の運動を考えたとき、ベクトル成分から物体の座標を計算で出すことができる。  
例えば、

ある物体の移動後の位置を:  $\vec{p}$

移動前の位置を:  $\vec{p}_0$

速度を:  $\vec{v}$  時間を:  $t$

とすると、

$$\vec{p} = \vec{v}t + \vec{p}_0$$

でt秒後の物体の位置が出せる。

1

$a = (2, -4)$ ,  $b = (5, -3)$  のとき,  $-3a + 2b$  を成分で表せ。

また, その大きさを求めよ。

2

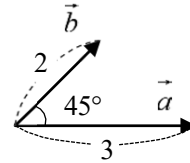
$a = (1, -2)$ ,  $b = (3, -2)$  のとき,  $3a - 2b$  を成分で表せ。

また, その大きさを求めよ。

3

次の内積を求めよ。

- (1)  $|\vec{a}|=3$ ,  $|\vec{b}|=2$ ,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角が  $45^\circ$  のときの, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$



- (2)  $\vec{a} = (2, -4)$ ,  $\vec{b} = (5, 3)$  のときの, 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

4

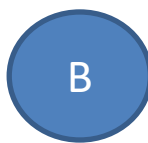
次の問いに答えよ。

- (1) 2 つのベクトル  $\vec{a} = (3, 7)$ ,  $\vec{b} = (-5, -2)$  のなす角  $\theta$  を求めよ。  
 (2)  $\vec{a} = (2, -4)$ ,  $\vec{b} = (5+x, 3+x)$  が垂直であるとき,  $x$  の値を求めよ。

5

物体Aは速度  $\vec{v} = (1, 2)$  [s], 初期位置  $p_0 = (2, 3)$  であり, その状態で  $t = 3$  [s] 経過した。  
 $t$  秒後の物体Aの座標  $p(x$  座標,  $y$  座標) を求めよ。

6



球Aと球Bの中心の座標を  
 $A(X_a, Y_a)$ ,  $B(X_b, Y_b)$  とする。  
 半径を  $r$  とする。

A と B の最短距離を  $d$  とすると、

$d =$  \_\_\_\_\_

となり、

$d <$  \_\_\_\_\_

のとき、A と B は衝突している。

これをベクトルで考えると、

$\vec{AB} =$  \_\_\_\_\_

であり、この大きさが距離なので、

$|\vec{AB}| <$  \_\_\_\_\_

のとき、A と B は衝突している。