ベクトル③ ～外積～

■ベクトルの外積（cross product、 vector product）

2つのベクトル $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ の外積はつぎのように定義される。

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{(a_yb_z-a_zb_y),\ (a_zb_x-a_xb_z),\ (a_xb_y-a_yb_x)\}$$

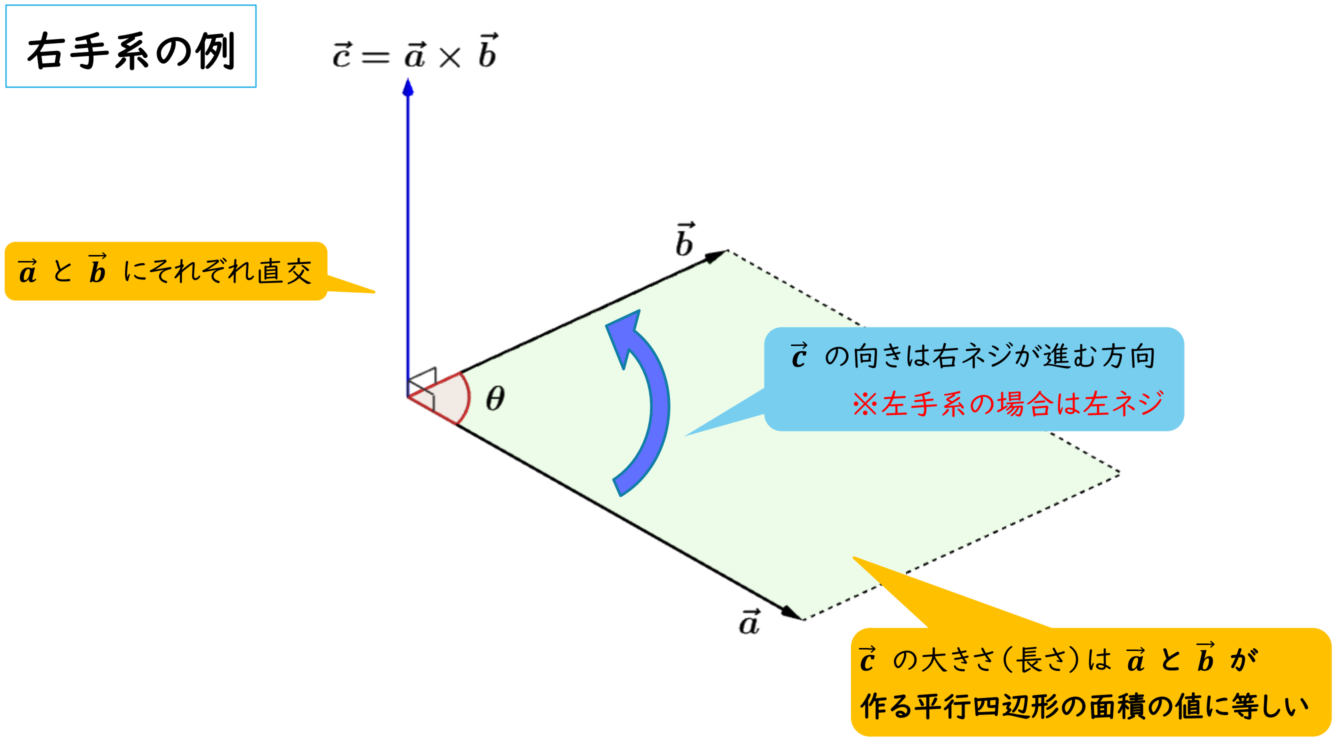
ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積を $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$ としたときの成分表示は

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y$$
$$c_y=a_zb_x-a_xb_z$$
$$c_z=a_xb_y-a_yb_x$$

となる。また、次のような性質がある。

性質① 外積 $\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ にそれぞれ直交するベクトルである
性質② 外積 $\vec{c}$ の向きは、右手系では右ねじの進む方向、左手系では左ねじの進む方向となる
性質③ 外積 $\vec{c}$ の大きさ（長さ）は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しい

右手系の例



「 ベクトル③ ～外積～ 」

岡山情報ITクリエイター専門学校

ゲームにおける外積の用途

・カメラやキャラクタの姿勢制御
・当たり判定の計算
・2次元の領域判定
・ジオメトリシェーダにおけるポリゴン頂点の法線計算

練習問題

① $\vec{a} = (-3, 1, 4)$ と $\vec{b} = (1, -1, -2)$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めてください。

$$\boldsymbol{c_x = 1 * (-2) - 4 * (-1) = -2 + 4 = 2}$$
$$\boldsymbol{c_y = 4 * 1 - (-3) * (-2) = 4 - 6 = -2}$$
$$\boldsymbol{c_z = (-3) * (-1) - 1 * 1 = 3 - 1 = 2}$$

(2, -2, 2)

② $\vec{a} = (1, 0, 0)$ と $\vec{b} = (0, 1, 0)$ の外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めてください。

$$\boldsymbol{c_x = 0 * 0 - 0 * 1 = 0}$$
$$\boldsymbol{c_y = 0 * 0 - 1 * 0 = 0}$$
$$\boldsymbol{c_z = 1 * 1 - 0 * 0 = 1}$$

(0, 0, 1)

「 ベクトル③ ～外積～ 」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

グループワーク： プリント1ページにある外積の性質①を証明せよ

ヒント：直交するベクトル同士の内積は？ … 内積： $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y)$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ と表す。

定義より $\vec{a}\times\vec{b} = \{(a_y b_z - a_z b_y),\ (a_z b_x - a_x b_z),\ (a_x b_y - a_y b_x)\}$

直交するベクトルの内積は $\boxed{0}$ であるから

$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})}\cdot\vec{a} = \boxed{0}$ かつ $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})}\cdot\vec{b} = \boxed{0}$ となればよい。

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})}\cdot\vec{a} = (a_y b_z - a_z b_y)a_x + (a_z b_x - a_x b_z)a_y + (a_x b_y - a_y b_x)a_z$$

$$= a_y b_z a_x - a_z b_y a_x + a_z b_x a_y - a_x b_z a_y + a_x b_y a_z - a_y b_x a_z$$

$$= \boxed{0}$$

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})}\cdot\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)b_x + (a_z b_x - a_x b_z)b_y + (a_x b_y - a_y b_x)b_z$$

$$= a_y b_z b_x - a_z b_y b_x + a_z b_x b_y - a_x b_z b_y + a_x b_y b_z - a_y b_x b_z$$

$$= \boxed{0}$$

証明以上。

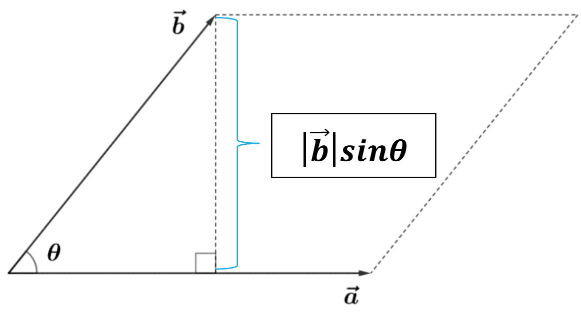
「 ベクトル③ ～外積～ 」

岡山情報ITクリエイター専門学校

グループワーク：プリント1ページにある外積の性質③を証明せよ

ヒント：平行四辺形の面積の公式。三角関数、内積の定義

2つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$、$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ が成す角 θ の平行四辺形を考える。



ベクトル $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ の大きさ（長さ）をそれぞれ $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$ とすると、
その平行四辺形の面積 S は「底辺x高さ」の公式より

$$\boldsymbol{S} = |\vec{a}| \times \boxed{|\vec{b}|sin\theta} \qquad \cdots(1)$$

両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sin^2\theta \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - cos^2\theta) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 cos^2\theta \end{aligned}$$

ヒント：sin を cos に変形 $(x^2 + y^2 = 1$ を使う?$)$

$\cdots\ cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

また、内積の定義より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

式(1)に代入すると

$$\boldsymbol{S}^2 = \boxed{|\vec{a}|}^{\,2}\ \boxed{|\vec{b}|}^{\,2} - \boxed{(\vec{a} \cdot \vec{b})}^{\,2} \qquad \cdots(2)$$

となる。

「 ベクトル③ ～外積～ 」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

式(2)の右辺を x, y, z 成分表示で計算すると

$$式(2) = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2 \left(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\right)^2 - \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right)^2$$

$$= \left(a_x^2 b_x^2 + a_y^2 b_x^2 + a_z^2 b_x^2 + a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_y^2 + a_z^2 b_y^2 + a_x^2 b_z^2 + a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_z^2\right)$$

$$- \left(a_x^2 b_x^2 + a_y^2 b_y^2 + a_z^2 b_z^2 + 2a_x b_x a_y b_y + 2a_x b_x a_z b_z + 2a_y b_y a_z b_z\right)$$

$$= \left(a_y^2 b_z^2 + a_z^2 b_y^2 - 2a_y b_y a_z b_z\right) + \left(a_z^2 b_x^2 + a_x^2 b_z^2 - 2a_x b_x a_z b_z\right)$$

$$+ \left(a_x^2 b_y^2 + a_y^2 b_x^2 - 2a_x b_x a_y b_y\right)$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)^2 + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2 \qquad \cdots (\mathbf{3})$$

また、外積 $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ の定義より

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left\{ \boxed{a_y b_z - a_z b_y}, \boxed{a_z b_x - a_x b_z}, \boxed{a_x b_y - a_y b_x} \right\}$$

$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$、$\vec{\mathbf{c}} = (c_x, c_y, c_z)$ とおけば

$$c_x = \boxed{a_y b_z - a_z b_y}$$

$$c_y = \boxed{a_z b_x - a_x b_z}$$

$$c_z = \boxed{a_x b_y - a_y b_x}$$

となり、式(3)に代入すると

$$式(3) = \boxed{c_x^2}^{\mathbf{2}} + \boxed{c_y^2}^{\mathbf{2}} + \boxed{c_z^2}^{\mathbf{2}}$$

$$= \left| \boxed{\vec{\boldsymbol{c}}} \right|^{\mathbf{2}}$$

となり、すなわち

$$\mathbf{S} = \left| \boxed{\vec{\boldsymbol{c}}} \right|$$

よって、式(1)から $\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right| = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\boldsymbol{sin\theta}$

証明以上。