

◆無理数の計算

1. 平方根を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{288} = \sqrt{2^5 \times 3^2} = 12\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{336} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3 \times 7} = 4\sqrt{21}$

2. 分母を有理化しなさい。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{8 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) $\frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

3. 次の計算をしなさい。ルートの中身・分数はできるだけ簡単にすること。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$

(2) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = (2 \times 3)\sqrt{3 \times 3} = 6 \times 3 = 18$

(3) $\sqrt{32} \times (-\sqrt{8}) = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} \times (-\sqrt{2^2 \times 2}) = 4\sqrt{2} \times (-2\sqrt{2})$
 $= -8\sqrt{2 \times 2} = -8 \times 2 = 16$

(4) $\sqrt{48} \div \sqrt{6} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{48}{6}} = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

(5) $6\sqrt{6} \div 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3 \times \sqrt{\frac{6}{2}} = 3\sqrt{3}$

(6) $8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (8 - 4 + 5)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

(7) $\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = -\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$

(8) $\sqrt{72} - \sqrt{54} - \sqrt{32} + \sqrt{6}$

$$= \sqrt{6^2 \times 2} - \sqrt{3^2 \times 6} - \sqrt{4^2 \times 2} + \sqrt{6} = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + \sqrt{6} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$$

(9) $\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{18} - \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{3^2 \times 2} - \frac{5}{\sqrt{5^2 \times 2}}$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad 2\sqrt{15} \div \sqrt{3} - \frac{20}{\sqrt{5}} &= 2\sqrt{15} \times \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{20 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}} - \frac{20\sqrt{5}}{5} = 2 \times \sqrt{\frac{15}{3}} - 4\sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

◆式の展開と因数分解

1. 次の式を展開しなさい。

$$(1) (4x + 5y) \times 3x = 12x^2 + 15xy$$

$$(2) (x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(3) (3x - y)^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$$

$$(4) (2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$$

$$(5) (x + 2)(x - 3) = x^2 + (2 - 3)x + 2 \times (-3) = x^2 - x - 6$$

$$(6) (5x + 2y)(7x - 9y) = 35x^2 - 31xy - 18y^2$$

$$(7) (3x - 2y)(5x - 8y) = 15x^2 - 34xy + 16y^2$$

$$(8) (x + 4)(x + 9) - (x - 8)^2 = x^2 + 13x + 36 - (x^2 - 16x + 64) = 29x - 28$$

$$(9) (2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 \times 3 + 4\sqrt{15} + 5 = 17 + 4\sqrt{15}$$

$$(10) (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 2 + (2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) \times \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \times 5\sqrt{3}$$

$$= 2 + 7\sqrt{6} + 30 = 32 + 7\sqrt{6}$$

2. 次の式を因数分解しなさい。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 6ab + 9bc + 15bc^2 &= 2 \times 3 \times a \times b + 3 \times 3 \times b \times c + 3 \times 5 \times b \times c \times c \\
 &= 3 \times b(2 \times a + 3 \times c + 5 \times c \times c) = 3b(2a + 3c + 5c^2)
 \end{aligned}$$

$$(2) x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$$

$$(3) x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$$

$$(4) 16x^2 - 25y^2 = (4x)^2 - (5y)^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$$

$$(5) x^2 - 10x + 16 = (x - 8)(x - 2)$$

$$(6) x^2 - 11xy + 18y^2 = (x - 9y)(x - 2y)$$

$$(7) 6x^2 + 7x + 2 = (3x + 2)(2x + 1)$$

$$(8) 5x^2 + 7x - 6 = (5x - 3)(x + 2)$$

$$\begin{aligned} (9) (2x + y)^2 - (2x - y)^2 - 8x^3y^3 \\ = 4x^2 + 4xy + y^2 - (4x^2 - 4xy + y^2) - 8x^3y^3 = 8xy - 8x^3y^3 = 8xy(1 - x^2y^2) \\ = 8xy(1 + xy)(1 - xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) x^2 - y^2 - 2y - 1 &= x^2 - (y^2 + 2y + 1) = x^2 - (y + 1)^2 \\ &= \{x + (y + 1)\}\{x - (y + 1)\} = (x + y + 1)(x - y - 1) \end{aligned}$$

◆二次方程式

1. 次の二次方程式を解きなさい。

$$\begin{aligned} (1) x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$x = \pm 2$$

$$\begin{aligned} (3) x^2 - 5x &= 0 \\ x(x - 5) &= 0 \\ x &= 0, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) x^2 - 16 &= 0 \\ (x + 4)(x - 4) &= 0 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) x^2 - 10x + 24 &= 0 \\ (x - 4)(x - 6) &= 0 \\ x &= 4, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11) x^2 + 17x + 72 &= 0 \\ (x + 8)(x + 9) &= 0 \\ x &= -8, -9 \end{aligned}$$

$$(13) x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} (2) x^2 - 7 &= 0 \\ x^2 &= 7 \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned} (4) 3x^2 + 6x &= 0 \\ 3x(x + 6) &= 0 \\ x &= 0, -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) x^2 - 10x + 24 &= 0 \\ (x - 4)(x - 6) &= 0 \\ x &= 4, 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) 9x^2 - 64 &= 0 \\ (3x + 8)(3x - 8) &= 0 \\ x &= \pm \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) 4x^2 - 16x - 48 &= 0 \\ 4(x^2 - 4x - 12) &= 0 \\ 4(x + 6)(x - 2) &= 0 \quad x = -6, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) 2x^2 + 7x + 3 &= 0 \\ (2x + 1)(x + 3) &= 0 \\ x &= -3, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(14) x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(15) x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 1 \times x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \times (-1)}}{1}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$(17) (x-1)(x+2) - 10 = 0$$

$$x^2 + x - 2 - 10 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x = -4, 3$$

$$(19) (x+3)(x-5) = 8$$

$$x^2 - 2x - 15 - 8 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 1 \times x - 23 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \times (-23)}}{1}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{24} = 1 \pm 2\sqrt{6}$$

$$(16) x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 3 \times x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 1 \times 1}}{1}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{8} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(18) x(3x+2) = (x+2)^2$$

$$3x^2 + 2x - (x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1, 2$$

$$(20) \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$x^2 + 8x + 14 = 0$$

$$x^2 + 2 \times 4 \times x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 1 \times 14}}{1}$$

$$x = -4 \pm \sqrt{2}$$

2. 大小 2 つの数があります。その差は 8 で積が 48 です。このような 2 数を全て求めなさい。

大きいほうの数を x とする。差が 8 なので、小さい方の数は $(x-8)$ である。

2 数の積が 48 なので、 $x(x-8) = 48$

この方程式を解くと

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$(x+4)(x-12) = 0$$

$$x = -4, 12$$

したがって、 $x = -4$ のとき小さいほうの数は、 $-4 - 8 = -12$

$x = 12$ のとき小さいほうの数は、 $12 - 8 = 4$

解答 12 と 4、-4 と -12

3. 連続する 3 つの自然数があります。小さいほうの 2 数の積の 3 倍は、大きいほうの 2 数の積の 2 倍より 50 大きい。この 3 つの自然数を求めなさい。

一番小さい数を x とすると、連続する 3 つの自然数は、 $x, (x+1), (x+2)$ となる。

小さい方 2 数の積の 3 倍は、 $3x(x+1)$

大きい方 2 数の積の 2 倍は、 $2(x+1)(x+2)$

$3x(x+1)$ が $2(x+1)(x+2)$ より 50 大きいので

$$3x(x+1) = 2(x+1)(x+2) + 50$$

この方程式を解くと

$$3x^2 + 3x = 2x^2 + 6x + 4 + 50$$

$$x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$(x-9)(x+6) = 0$$

$$x = 9, -6$$

ところが x は自然数なので、 $x > 0$ より $x = 9$

解答 連続する3つの自然数は 9, 10, 11

4. 周の長さが 38cm 、面積 84cm^2 の長方形の縦と横の長さを求めなさい。ただし、横のほうが長いとします。

周の長さが 38cm なので、縦と横の長さの合計が 19cm である。

縦の長さを $x\text{cm}$ とすると横の長さは $(19 - x)\text{cm}$

面積が 84cm^2 なので $x(19 - x) = 84$

これを解くと

$$19x - x^2 = 84$$

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

$$(x - 7)(x - 12) = 0$$

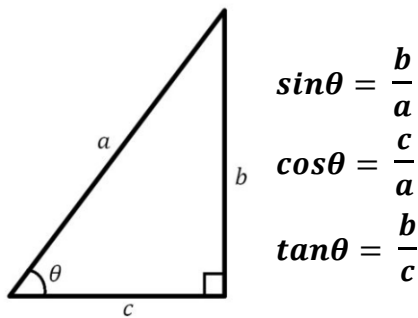
$$x = 7, 12$$

横のほうが長いので、 $x = 7$

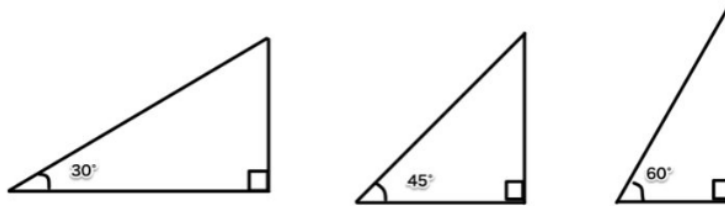
解答 縦 7cm 、横 12cm

◆三角関数

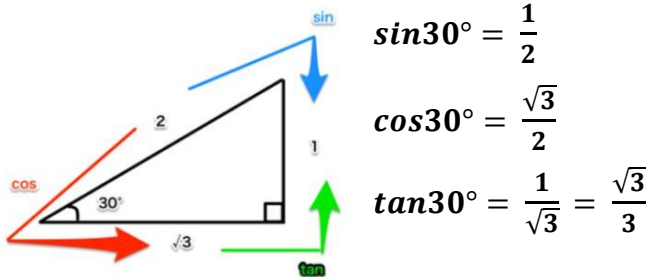
1. 次の直角三角形の三角比 ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$) を求めなさい。

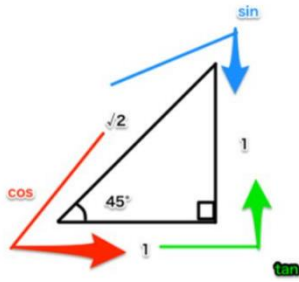


2. $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を求めなさい。



$\theta = 30^\circ$

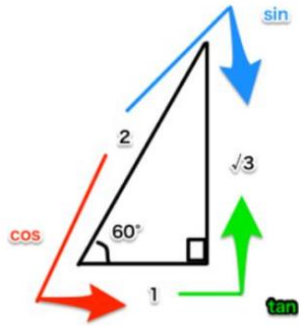




$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

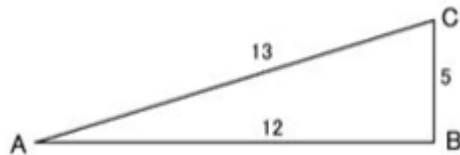


$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

3. 次の直角三角形 ABC について、次の問いに答えなさい。



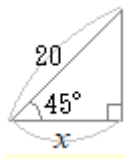
(1) $\sin \angle A, \cos \angle A, \tan \angle A$ を求めなさい。

$$\sin \angle A = \frac{5}{13} \quad \cos \angle A = \frac{12}{13} \quad \tan \angle A = \frac{5}{12}$$

(2) $\sin \angle B, \cos \angle B, \tan \angle B$ を求めなさい。

$$\sin \angle B = \frac{12}{13} \quad \cos \angle B = \frac{5}{13} \quad \tan \angle B = \frac{12}{5}$$

4. 次の直角三角形において、 x の長さを求めなさい。ただし、 $\sqrt{2} = 1.4$ とします。



$$\cos 45^\circ = \frac{x}{20}$$

$$x = 20 \times \cos 45^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14$$

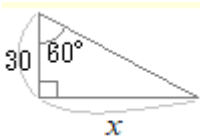
5. 次の直角三角形において、 y の長さを求めなさい。ただし、 $\sqrt{3} = 1.7$ とします。



$$\sin 30^\circ = \frac{y}{10}$$

$$y = 10 \times \sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

6. 次の直角三角形において、 x の長さを求めなさい。ただし、 $\sqrt{3} = 1.7$ とします。

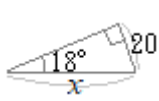


$$\tan 60^\circ = \frac{x}{30}$$

$$x = 30 \times \tan 60^\circ = 30 \times \sqrt{3} = 51$$

7. 次の直角三角形において、 x の長さを求めなさい。

ただし、 $\sin 18^\circ = 0.31$ $\cos 18^\circ = 0.95$ $\tan 18^\circ = 0.32$ とします。

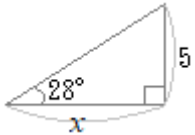


$$\sin 18^\circ = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{20}{\sin 18^\circ} = \frac{20}{0.31} \approx 64.52$$

8. 次の直角三角形において、 x の長さを求めなさい。

ただし、 $\sin 28^\circ = 0.47$ $\cos 28^\circ = 0.88$ $\tan 28^\circ = 0.53$ とします。



$$\tan 28^\circ = \frac{5}{x}$$

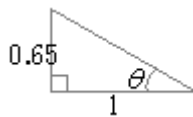
$$x = \frac{5}{\tan 28^\circ} = \frac{5}{0.53} \approx 9.33$$

9. 次の直角三角形において、角 θ の大きさを求めなさい。角度は表を参照して、一番近いものを選びなさい。

「三角比の表」

$\theta(^{\circ})$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325

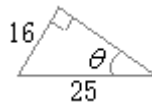
(1)



$$\tan \theta = 0.65$$

$$\theta \approx 33^\circ$$

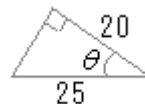
(2)



$$\sin \theta = \frac{16}{25} = 0.64$$

$$\theta \approx 40^\circ$$

(3)



$$\cos \theta = \frac{20}{25} = 0.8$$

$$\theta \approx 37^\circ$$

10. 9の表を参照して、次の三角関数の値を求めなさい。

(1) $\sin 126^\circ$

$$\sin 126^\circ = \sin(90^\circ + 36^\circ) = \cos 36^\circ = 0.8090$$

(2) $\cos 132^\circ$

$$\cos 132^\circ = \cos(90^\circ + 42^\circ) = -\sin 42^\circ = -0.6691$$

(3) $\sin 147^\circ$

$$\sin 147^\circ = \sin(180^\circ - 33^\circ) = \sin 33^\circ = 0.5446$$

(4) $\cos 144^\circ$

$$\cos 144^\circ = \cos(180^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ = -0.8090$$

11. 次の角について、度はラジアンに、ラジアンは度に変換しなさい。

(1) 75°

$$75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$$

(2) 15°

$$15^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$$

$$(3) \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$
$$\frac{3\pi}{2} \times \frac{180}{\pi} = 270^\circ$$

$$(4) \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$
$$\frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 150^\circ$$