行列（マトリックス）②

■行列の掛け算（積）についての性質

◆ 結合法則

（1）実数との結合法則

$A_{r\times m}$、$B_{m\times c}$、実数αのとき、$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

（2）行列どうしの結合法則

$A_{r\times m}$、$B_{m\times n}$、$C_{n\times c}$のとき、$(AB)C = A(BC)$

◆ 行列どうしの分配法則

（1） $A_{r\times m}$、$B_{m\times c}$、$C_{m\times c}$ のとき、$A(B+C) = AB + AC$

（2） $A_{r\times m}$、$B_{r\times m}$、$C_{m\times c}$のとき、$(A+B)C = AC + BC$

◆ 行列の掛け算は非可換です

【 可換 】とは、演算の順番を変えても結果が変わらないことをいいます。
【 非可換 】とはその逆で、演算の順番を変えると結果も変わる可能性があります。

2×3 と 3×2 の結果は2つとも6になりますが、
行列AとBがあったとき、AB と BA の結果は必ずしも同じとは限りません。

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 9\\11 & 3\end{pmatrix}$ の例で実際に確かめてみましょう。

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 9\\11 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14+44 & 18+12\\14+11 & 18+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58 & 30\\25 & 21\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}7 & 9\\11 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14+18 & 28+9\\22+6 & 44+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 37\\28 & 47\end{pmatrix}$$

よって、$\underline{\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}}$

◆ 単位行列との掛け算

単位行列との掛け算は【 可換 】です。

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ の例で実際に確かめてみましょう。

$$\boldsymbol{AE}=\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+4\times0 & 2\times0+4\times1\\2\times1+1\times0 & 2\times0+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{EA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+0\times2 & 1\times4+0\times1\\0\times2+1\times2 & 0\times4+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 1\end{pmatrix}$$

よって $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}$

さらに単位行列との積は、もとの行列そのものになっています。
まとめると、以下の式が成り立ちます。

$$\underline{\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}}$$

※どのサイズの正方行列でも成り立ちます

■行ベクトル／列ベクトル

【 行ベクトル 】とは

$$(1,\ 2,\ 3)$$

のように、成分を横方向に並べて書いたベクトルのことをいいます。

1行3列の行列ともいえます。

【 列ベクトル 】とは

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

のように、成分を縦方向に並べて書いたベクトルのことをいいます。

3行1列の行列ともいえます。

◆ 行列（マトリックス）の別解釈

いま、列ベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}$ があるとき、

この3つのベクトルを成分に持つ行ベクトル $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})$ を考えます。

$\boldsymbol{R}$ を展開すると $\boldsymbol{R}=\left(\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}\right)$ となり、

各成分の () を外すと $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}u_x & v_x & w_x\\u_y & v_y & w_y\\u_z & v_z & w_z\end{pmatrix}$ となり、行列の形となります。

行列はベクトルを成分に持つベクトルと解釈できそうです。

◆行オーダー／列オーダー

Unity（左手系）の行列データ型(Matrix3x3 や Matrix4x4)は、成分を列オーダーでメモリに格納していきます。C 言語の配列的に解釈すると、さきほどの行列$\boldsymbol{R}$はつぎのようになります。DirectX（左手系）は行オーダーで、OpenGL（右手系）は列オーダーです。

float $\boldsymbol{R}[3][3] =$
{
$\{u_x,\ u_y,\ u_z\},$
$\{v_x,\ v_y,\ v_z\},$
$\{w_x,\ w_y,\ w_z\}$
};
	または
	
	float $\boldsymbol{R}[9] = \{\, u_x,\ u_y,\ u_z,\ v_x,\ v_y,\ v_z,\ w_x,\ w_y,\ w_z \,\};$

列オーダーの場合、ゲームエンジンやグラフィックスライブラリ（シェーダ含む）で行列の積を計算する場合は、ベクトルは列ベクトルとして扱います。

ベクトル$\vec{\boldsymbol{p}}$（位置、方向） $= \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$、行列$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$、積の結果を$\vec{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$としたとき、

以下のように、行列は左から掛けます（左から掛けないと計算できない）。

$$\vec{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \cdot \vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x u_x + p_y v_x + p_z w_x \\ p_x u_y + p_y v_y + p_z w_y \\ p_x u_z + p_y v_z + p_z w_z \end{pmatrix}$$

行オーダーの場合は、ベクトルは行ベクトルとして扱います。 ベクトル$\vec{\boldsymbol{p}}' = (p_x \quad p_y \quad p_z)$、

行列$\boldsymbol{R}' = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$ としたとき、行列は右から掛けます（右から掛けないと計算できない）。

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{p}}' \cdot \boldsymbol{R}' &= (p_x \quad p_y \quad p_z) \cdot \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \\ &= (p_x u_x + p_y v_x + p_z w_x \quad p_x u_y + p_y v_y + p_z w_y \quad p_x u_z + p_y v_z + p_z w_z) \\ &= (q_x \quad q_y \quad q_z) \end{aligned}$$

※行／列オーダーが変わっただけで対応する成分の計算結果は変わらない

【参考①】 実数との結合法則の証明

“$\boldsymbol{A}_{r\times m}$、$\boldsymbol{B}_{m\times c}$、実数 α のとき、$(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \alpha(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})$”を証明する。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}、\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mc} \end{pmatrix}$$

とできるので

$$\alpha\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{r1} & \alpha a_{r2} & \cdots & \alpha a_{rm} \end{pmatrix}、\alpha\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1c} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mc} \end{pmatrix}$$

となる。

したがって

$$(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{r1} & \alpha a_{r2} & \cdots & \alpha a_{rm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mc} \end{pmatrix}$$

となり、$(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$の$(i,\ j)$成分$C_{ij}$は行列の積の定義より

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(\alpha a_{ik})b_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\alpha a_{ik}b_{kj} = \alpha\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

となる。また

> 行列 $\boldsymbol{C}$ の各成分は
>
> $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$
>
> によって計算すると定義されています。

$$\alpha(\boldsymbol{AB}) = \alpha\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mc} \end{pmatrix}\right)$$

となり、$\alpha(\boldsymbol{AB})$の$(i,\ j)$成分d_{ij}は行列の積の定義より

$$d_{ij} = \alpha\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

となる。さらに

「 行列（マトリックス）② 」

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1c}\\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2c}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mc}\end{pmatrix}$$

となり、$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})$の$(i,\ j)$成分$e_{ij}$は行列の積の定義より

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(\alpha b_{kj})=\sum_{k=1}^{m}\alpha a_{ik}b_{kj}=\alpha\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

となる。よって $c_{ij}=d_{ij}=e_{ij}$ となり、$(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\alpha(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})$ となった。

証明以上。

“$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{m}}$、$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$、 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{c}}$ のとき、$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$”を証明する。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm}\end{pmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}、\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1c}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2c}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nc}\end{pmatrix}$$

とする。ここで行列の積の定義より，$(\boldsymbol{AB})$の$(i,\ j)$成分d_{ij}、および $(\boldsymbol{BC})$の$(i,\ j)$成分e_{ij}は

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\qquad\cdots(1)$$

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}\qquad\cdots(2)$$

となる。よって$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$の$(i,\ j)$成分$f_{ij}$は

$$f_{ij}=\sum_{l=1}^{n}d_{il}c_{lj}$$

(1)より

$$=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (a_{i1}b_{1l} + a_{i2}b_{2l} + \cdots + a_{im}b_{ml})c_{lj}$$

$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{im}b_{m1})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{im}b_{m2}) + \cdots$$
$$+ (a_{i1}b_{1n} + a_{i2}b_{2n} + \cdots + a_{im}b_{mn})c_{nj}$$

$$= a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i2}b_{21}c_{1j} + \cdots + a_{im}b_{m1}c_{1j} + a_{i1}b_{12}c_{2j} + a_{i2}b_{22}c_{2j} + \cdots + a_{im}b_{m2}c_{2j} + \cdots$$
$$+ a_{i1}b_{1n}c_{nj} + a_{i2}b_{2n}c_{nj} + \cdots + a_{im}b_{mn}c_{nj}$$

$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1n}c_{nj}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2n}c_{nj}) + \cdots$$
$$+ a_{im}(b_{m1}c_{1j} + b_{m2}c_{2j} + \cdots + b_{mn}c_{nj})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + \cdots + b_{kn}c_{nj})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right)$$

(2)より

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}e_{kj}$$

となる。これは $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$の$(i,\ j)$成分と等しいので、$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ である。

証明以上。

【参考②】 行列どうしの分配法則の証明

“$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{m}}$、$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{c}}$、$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{c}}$ のとき、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$”を証明する。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}、\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mc} \end{pmatrix}、\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1c} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mc} \end{pmatrix}$$

とする。ここで $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$の$(i,j)$成分$d_{ij}$は $d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ であるから、

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$の$(i,j)$成分$e_{ij}$は、行列の積の定義より

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} d_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(b_{kj} + c_{kj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj} \quad \cdots (1)$$

となる。行列の積の定義より、$\boldsymbol{AB}$の(i,j)成分f_{ij} および $\boldsymbol{AC}$の(i,j)成分g_{ij}は

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \cdots (2)$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj} \quad \cdots (3)$$

となる。よって $(1),(2),(3)$ より

$$e_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$$

したがって $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$ である。

証明以上。

"$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{m}}$、$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{m}}$、 $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{c}}$ のとき、$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$"を証明する。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}、\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rm} \end{pmatrix}、\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1c} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mc} \end{pmatrix}$$

とする。ここで $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$の$(i,j)$成分$d_{ij}$は $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ であるから、

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$の$(i,j)$成分$e_{ij}$は、行列の積の定義より

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{m} d_{ik}c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}c_{kj} \qquad \cdots (1)$$

となる。行列の積の定義より、$\boldsymbol{AC}$の(i,j)成分f_{ij} および $\boldsymbol{BC}$の(i,j)成分g_{ij}は

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} \quad \cdots (2)$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}c_{kj} \quad \cdots (3)$$

となる。よって $(1), (2), (3)$ より

$$e_{ij} = f_{ij} + g_{ij}$$

したがって $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$ である。

証明以上。

【参考③】 単位行列の導出

単位行列の定義は以下のとおり。

任意の正方行列$\boldsymbol{A}$に対して

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$$

となる行列$\boldsymbol{E}$を単位行列という。

≪ 2×2の単位行列を導出してみる。≫

「 行列（マトリックス）② 」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

任意の行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とする。

単位行列の定義 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる。したがって、以下の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} ae+bg=a \\ af+bh=b \\ ce+dg=c \\ cf+dh=d \end{cases}$$

整理して

$$\begin{cases} a(e-1)+bg=0 & \cdots(1) \\ af+b(h-1)=0 & \cdots(2) \\ c(e-1)+dg=0 & \cdots(3) \\ cf+d(h-1)=0 & \cdots(4) \end{cases}$$

よって

$(1)\times c-(3)\times a=(bc-ad)g=0$

$(bc-ad)$が任意の値となるので $g=0$ でないといけない。

これを(1)に代入すると $a(e-1)=0$ となり、

aが任意の値なので$e=1$ でないといけない。

また

$(2)\times \mathrm{d}-(4)\times b=(ad-bc)f=0$

$(ad-bc)$が任意の値となるので $f=0$ でないといけない。

これを(2)に代入すると $b(h-1)=0$ となり、

bが任意の値なので $h=1$ でないといけない。

以上より $e=1$、$f=0$、$g=0$、$h=1$ となったので

単位行列 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

が導出された。 定義 $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$ についても同様に導出できる。

※3x3 以上の正方行列についても同じ方法で導出できる