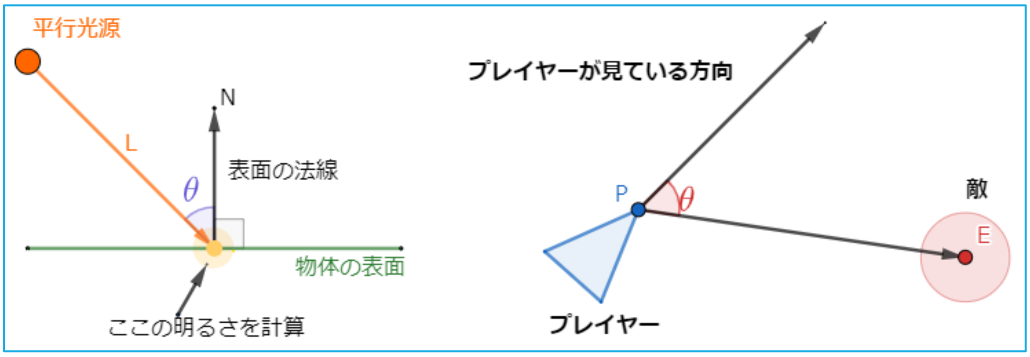
ベクトル② ～内積～

■ベクトルの内積

ゲームでは、光がオブジェクトを照らしたときの明るさ（グーローシェーディングなど）、索敵（プレイヤーの向いている先の範囲内に敵がいるのか）、当たり判定など、様々なシチュエーションを計算するために使用されますので、きちんと理解して使えるようになりましょう。



※平行光源…Unity でいうところの「directional light」

◆ ベクトルの内積ってなに？ ◆

ゼロベクトルではない2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は、つぎのように「定義」されています（※定義…決まり、ルール ※定理…定義からわかったこと）。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す記号です。

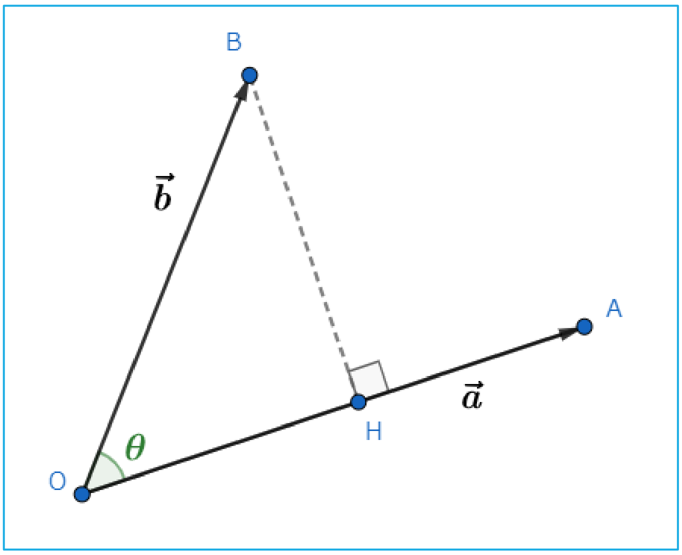
$|\vec{a}|, |\vec{b}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさを表す記号です。

θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角です。

※右辺の $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ はベクトルではなくて、実数であることに注意!!

◆ 図形的なイメージ ◆

まずは2次元で見てみましょう。



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$

→ $(\vec{a}$ の大きさ$) \times (\vec{b}$ の大きさ$) \times cos(\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角$)$

↑ここに注目！

$(\vec{b}$ の大きさ$) \times cos(\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角$)$ は、上の図の$|\overrightarrow{OH}|$に相当します。

※直角三角形の三角比の関係

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$ を言葉で表すと、

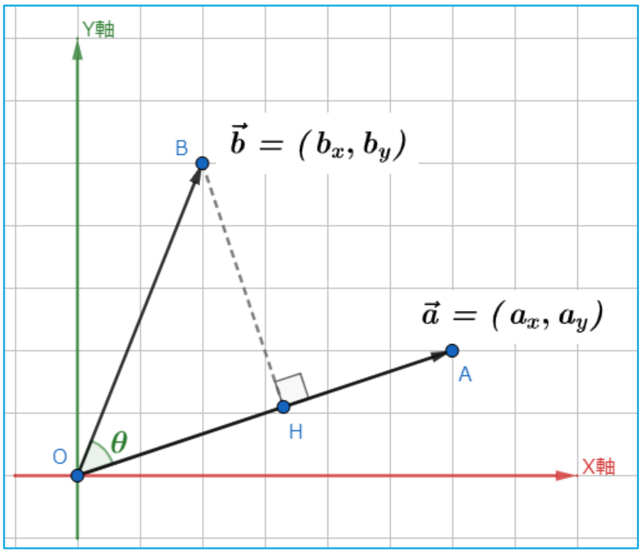
ベクトル $\vec{b}$ のベクトル $\vec{a}$ 方向の成分の大きさ（実数）と

ベクトル $\vec{a}$ の大きさ（実数）の掛算、ということになります。

※上の図でいうと、$|\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OH}|$を求めていることになります。

■成分表示による内積の計算

内積はベクトルを位置ベクトルに見立てたときの
成分表示を使って簡単に計算することができます。

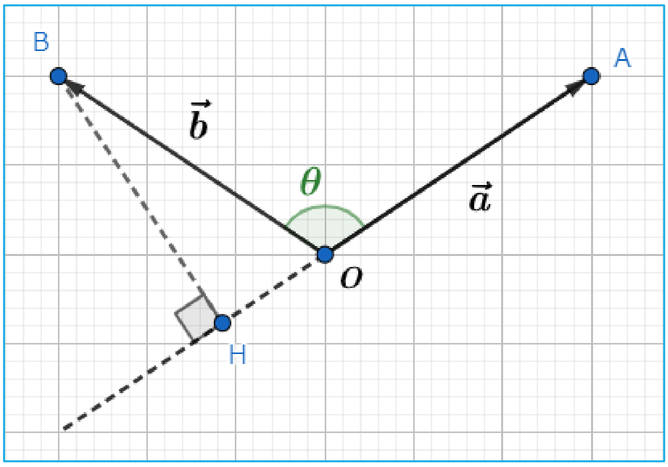


$\vec{a} = (a_x, a_y)$、$\vec{b} = (b_x, b_y)$ としたときの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

※内積はマイナスの値になることもあり、マイナスの場合は逆方向という意味になります。

内積がマイナスの場合のイメージ



「 ベクトル② 」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

◆ 本日のポイント ◆

成分表示で計算できると、角 θ がわからない状態でも

内積を計算できる！

◆ 覚えておこう!! ◆

角 θ を知りたい場合は、cos の逆関数 $acos$（アークコサイン）

を使って θ を求められる！

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|cos\theta = a_x b_x + a_y b_y$$ より

$$cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

よって

$$\theta = acos\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}\right)$$

このように、【もとの関数の出力】$\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}\right)$を入力として、

【もとの関数の入力】（θ）が出力となる関数を【もとの関数の逆関数】と呼びます。

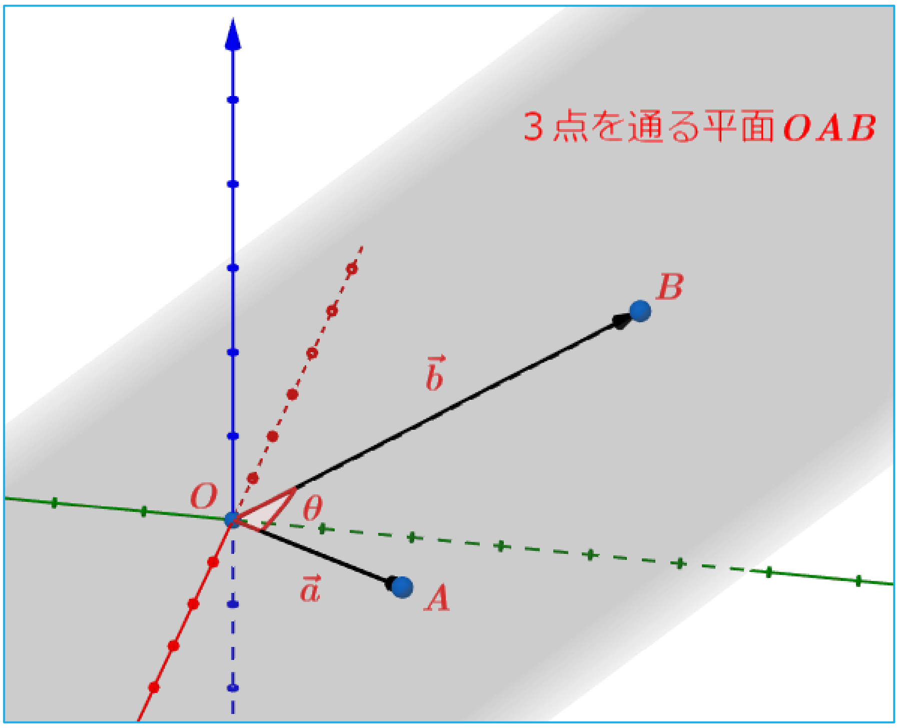
※三角関数（*sin,cos,tan*）は角 θ が入力でした。その三角関数の出力を入力として、

角 θ を出力する関数を逆三角関数（*asin*、*acos*、*atan*、*atan2* など）と呼びます。

asin ： アークサイン、***acos*** ： アークコサイン、***atan*** ： アークタンジェント

■3次元空間におけるイメージ

つぎに3次元の内積を見ていきます。



3次元空間上に、3点で作られる平面 OAB を考えます。
この平面を XY、YZ、ZX 平面のいずれかに一致させれば、
さきほどの2次元の内積で計算できるイメージです。

そもそも直観的に、平面 OAB 上で

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

であると予想されます。実際この式が3次元でも成り立ちます（証明は省きます）。

成分表示についても、2次元のときと同じように

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

となります。

【練習問題】

つぎのベクトルどうしの内積を計算してください。

(1)　$|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 6,$ $\vec{a}$ と$\vec{b}$ が成す角$\theta = 60°$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos60° = 5 \times 6 \times \frac{1}{2} = 15$$

(2)　$|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 5,$ $\vec{a}$ と$\vec{b}$ が成す角$\theta = 45°$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos45° = 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

(3)　$\vec{a} = (4,\ 2),\ \vec{b} = (3,\ 4)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 4 \times 3 + 2 \times 4 = 12 + 8 = 20$$

(4)　$\vec{a} = (-1,\ 2),\ \vec{b} = (2,\ 5)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -1 \times 2 + 2 \times 5 = -2 + 10 = 8$$

(5)　$\vec{a} = (2, -5),\ \vec{b} = (3,\ 2)$ また、おおまかでいいので作図もしてください。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 2 \times 3 + (-5) \times 2 = 6 + (-10) = -4$$

(6)　$\vec{a} = \left(2,\ -1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \vec{b} = (-3,\ -4,\ 2\sqrt{2})$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$= 2 \times (-3) + (-1) \times (-4) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2}$$
$$= (-6) + 4 + 2 = 0$$

■ベクトルの正規化（normalization）

正規化とは、データを扱いやすいように整える（スケーリング：拡大・縮小）ことです。

ベクトルの正規化は、ベクトルの大きさを 1 にすることです（単位ベクトル化、単位化とも言います）。ただし、方向は変わりません。つぎの式で求めることができます。

ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_x, a_y, a_z)$ の正規化を $\boldsymbol{normalize}(\vec{\boldsymbol{a}})$ とすると

$$\boldsymbol{normalize}(\vec{\boldsymbol{a}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|}$$

$$= \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{a}}|}\boldsymbol{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\left(a_x,\ \ a_y,\ \ a_z\right)$$

$$= \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \ \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \ \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right)$$

正規化したベクトルどうしの内積についての性質

先ほどの $\cos\theta = \frac{\mathrm{a_x} b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$ を思い出してみてください。

これを変形してみます。

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{a_x} b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{a_x} b_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} + \frac{a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$$= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \frac{b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \frac{b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

$$= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \frac{b_x}{|\vec{b}|} + \frac{a_y}{|\vec{a}|} \frac{b_y}{|\vec{b}|}$$

$$= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

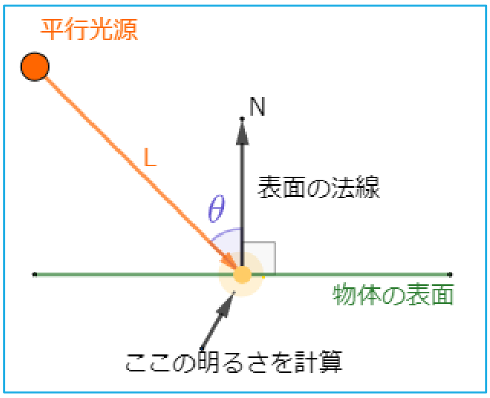
したがって

★ $\boldsymbol{\cos\theta = normalize(\vec{a}) \cdot normalize(\vec{b})}$

★ $\boldsymbol{\theta = acos\left(normalize(\vec{a}) \cdot normalize(\vec{b})\right)}$

◆ 正規化／単位化するメリット ◆

光源の方向を$\vec{L}$、物体の表面方向を$\vec{N}$、光量をD（実数）とします。真上から照らしたときに最大の明るさ、垂直あるいは裏から照らしたときには明るさがゼロとなるような状況を考えます。ここで、$0 \leq (-\vec{L} \cdot \vec{N}) \leq 1$ の範囲に収まるように工夫すれば、$D \times (-\vec{L} \cdot \vec{N})$ で明るさを計算することができます（$-\vec{L}$というのは、明るさを計算したいところから見た光源方向です）。



ここで正規化が役立ちます！

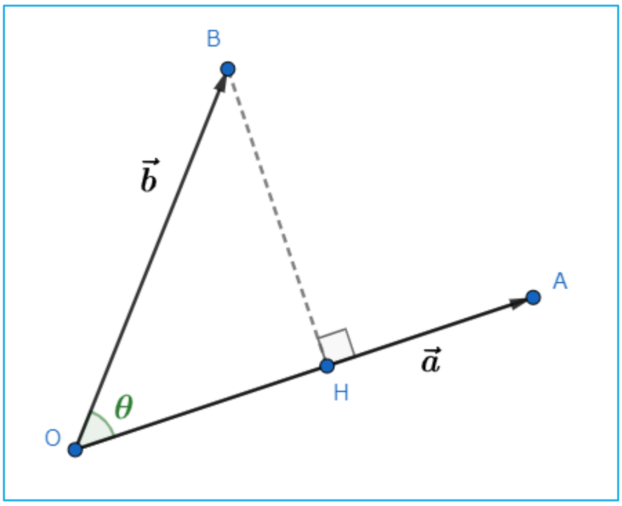
$\vec{L}$ と $\vec{N}$ をそれぞれ正規化すれば、$-1 \leq (-\vec{L} \cdot \vec{N}) \leq 1$ となり、マイナスの値をゼロにすれば、前述したように$D \times (-\vec{L} \cdot \vec{N})$ を使って計算できるようになります。

【参考】グーローシェーディング、ランバート反射モデル

また、下図のように、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が斜面だとすると、キャラクタが地点 O で $\vec{b}$ 方向にジャンプしたとき、$\vec{a}$ を正規化(単位化)すれば、地点 O から $\vec{a}$ 方向の移動量$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$(あるいは移動ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$)を計算することができます(真上から光を当てたときの影の位置や、乗物から飛んだあとの乗物の位置:飛んだあとに乗物に着地など)。

<u>地点 O から $\vec{a}$ 方向の移動量、移動ベクトル</u>

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$= \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}||\vec{\mathbf{b}}|cos\theta$$
$$= |\vec{\mathbf{b}}|cos\theta$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$



また、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$= \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$normalize(\vec{a}) = \vec{v}$ とおいて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{v}\cdot\vec{b})\vec{v}$$

【練習問題】

つぎのベクトルを正規化してください。

(1) $\vec{a} = (-3,\ 4)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$normalize(\vec{a}) = \left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

■本日のまとめ

① 2つのベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ の内積は、$\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ がなす角 $\boldsymbol{\theta}$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\boldsymbol{\theta}$$

② 2次元ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_x, a_y)$、$\vec{\boldsymbol{b}} = (b_x, b_y)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = a_x b_x + a_y b_y$$

③ 3次元ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_x, a_y, a_z)$、$\vec{\boldsymbol{b}} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

④ ベクトル$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_x, a_y, a_z)$ の正規化

$$\boldsymbol{normalize}(\vec{\boldsymbol{a}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|} = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right)$$

【参考①】 $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = a_x b_x + a_y b_y$ の証明

定義より

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

$$= |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|cos\theta \quad \cdots (1)$$

また、余弦定理より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|cos\theta \quad \cdots (2)$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示は

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(b_x - a_x,\ b_y - a_y\right)$$

よって、三平方の定理より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \cdots(3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} \quad \cdots(4)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + \left(b_y - a_y\right)^2} \quad \cdots(5)$$

(3)、(4)、(5)を(2)に代入すると

$$\left\{(b_x - a_x)^2 + \left(b_y - a_y\right)^2\right\} = \left(a_x^2 + a_y^2\right) + (b_x^2 + b_y^2) - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|cos\theta$$

整理して

$$\begin{aligned}2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{OB}|cos\theta &= \left(a_x^2 + a_y^2\right) + \left(b_x^2 + b_y^2\right) - (b_x - a_x)^2 - \left(b_y - a_y\right)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2) + \left(b_x^2 + b_y^2\right) - (b_x^2 - 2a_xb_x + a_x^2) - (b_y^2 - 2a_yb_y + a_y^2) \\ &= \left(a_x^2 + a_y^2\right) + \left(b_x^2 + b_y^2\right) - (b_x^2 + a_x^2) - \left(b_y^2 + a_y^2\right) + 2\left(a_xb_x + a_yb_y\right) \\ &= 2(a_xb_x + a_yb_y)\end{aligned}$$

したがって

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{OB}|cos\theta = a_xb_x + a_yb_y$$

これを定義(1)式に代入して

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{OB}|cos\theta \\ &= a_xb_x + a_yb_y\end{aligned}$$

証明以上。

【参考②】 $normalize(\vec{a}) = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の証明

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ とすると、$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ となり

$$1 = \frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a_x^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_y^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right)^2 + \left(\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right)^2 + \left(\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\right)^2} \quad \cdots (1)$$

ここで

$$a'_x = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cdots (2)$$

$$a'_y = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cdots (3)$$

$$a'_z = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad \cdots (4)$$

とおくと、(1)式は $\sqrt{{a'_x}^2 + {a'_y}^2 + {a'_z}^2}$ となり、ベクトル $\vec{a'} = (a'_x,\ a'_y,\ a'_z)$ の大きさである。

よって $\vec{a'} = \left(a'_x,\ a'_y,\ a'_z\right)$

$$= \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$$

$$= \frac{1}{|\vec{a}|} \times \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

$$= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

証明以上。