円

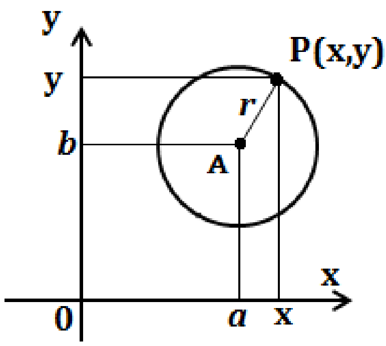
◆円の方程式

ゲームプログラミングにおいてキャラクタを円に例えて考えることが多いことから、円の方程式はとても重要です。また、画面上に円を書きたいと思ったとき、円の方程式を知らなければ描くことはできません。なぜなら，画面上に円を描くということは、その方程式のグラフを書くことに他ならないからです。

あるいは円軌道に沿って動く物体の運動方程式を求めたり、衝突判定で「　**境界円**　」を使ったりする場合にも、円の方程式が必要となります。

平面において、円とは任意の定点（これを「　　　　　」という）から任意の距離（これを「　　　　　」という）にあるすべての点の集まりことをいいます。したがって、これら 2 つの要素、すなわち「　**中心**　」と「　**半径**　」さえわかれば円の方程式を作ることができます。

点$A(a,b)$ を中心とする半径 r の円を考えます。
この円周上の点を $P(x,y)$ とすると、点 P の位置にかかわらず
$AP=r$ が成立しますね。
これを 2 点間の距離の公式で計算してみましょう。



$$AP=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$AP=r \leftrightarrow AP^2=r^2 \leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

これが、円の方程式の一般形です。

円の方程式

点 (a,b) を中心とする半径 $\mathbf{r}$ の円の方程式は、

「　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　」

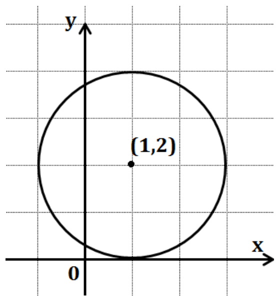
原点 $(0,0)$ を中心とする半径 $\mathbf{r}$ の円は、

「　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　」

【例】

右の図のような点 $(1,2)$ を中心とする半径 2 の円の方程式は、

$$(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$



【練習問題 1】

次の式で表わされる円の中心と半径を求め、グラフを描きなさい。

(1)　$x^2 + y^2 = 16$　　　　　　(2)　$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

(1) 半径

中心

(2) 半径

中心

◆円のグラフを描いてみよう

[C_学籍番号_氏名] フォルダー [MathCalc] フォルダー [MathCalc] ソリューションを起動し、**[MathGraph00]**の**[MyDrawClass.cs]**を変更し、円（ $x^2 + y^2 = 100^2$ ）を描くプログラムを作成しましょう。

【準備】

円の式を考えましょう。円の方程式は、

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ですね。プログラムで使用するために、$y =$ の式にしましょう。

$$y =$$

この式はプログラムの中では、以下のように記述します。

$$float\ D = r * r\ -\ (x-a) * (x-a)$$
$$y = (float)Math.Sqrt(D)\ +\ b$$

(1) 半径と中心の座標の初期値をプログラムに加えましょう。また、x の増分等も変更します。
このとき、√の中が負にならないようにします。

$x = -200.0f;$　　　//x の初期値　　修正
$r = 100.0f;$　　　//半径　追加する
$a = 0.0f;$　　　//中心の x 座標　修正
$b = 0.0f;$　　　//中心の y 座標　修正
$step = 5.0f;$　　　//x の増分　　修正
$scaleX = 1.0f;$　　　//x の倍率　　修正
$scaleY = 1.0f;$　　　//y の倍率　　修正

(2) 半円を円にしましょう。

(3) 以下の円もグラフにしてみましょう。

$$(x-30)^2 + (y+40)^2 = 80^2$$

【MyDrawClass.cs　プログラム例】

```
namespace MathGraph00
{
    class MyDrawClass:Draws
    {
        Vector2 p0;  //座標
        float x, y, a, b, step;
        float r; //追加
        //float c;  //修正
        float scaleX, scaleY; //倍率

        public MyDrawClass() { }

        public void graph()
        {
            x = -200.0f;  //x の初期値
            r = 100.0f;   //追加　半径
            a = 0.0f;     //中心の x 座標
            b = 0.0f;     //中心の y 座標
            //c = 0.0f;   //修正
            step = 5.0f; //x の増分
            scaleX = 1.0f;   //x の倍率
            scaleY = 1.0f;  //y の倍率

            Clear();

            //グラフの描画
            while (x * scaleX < 200 && y * scaleY < 200)
            {
                float D = r * r - (x - a) * (x - a);

                if (D > 0)
                {
                    y = (float)Math.Sqrt(D) + b;  //円の式
                    p0 = new Vector2(x * scaleX, y * scaleY);
                    Dot(p0);
                    Render();

                    y = -(float)Math.Sqrt(D) + b;  //円の式
                    p0 = new Vector2(x * scaleX, y * scaleY);
                    Dot(p0);
                    Render();
                }

                x = x + step;  //x の値を step 増加
            }
        }
    }
}
```

※点が等間隔ではないですね。三角関数を使用すると、等間隔な点の円が描けるようになります。三角関数を学んだところで、もう一度、円のグラフを描いてみましょう。

◆円の方程式を求める

$x^2+2x+y^2+4y=0$ のように、中心座標がわからない形で記述されている場合、平方完成の方法で円の方程式を求めることができます。

【例】

$x^2+2x+y^2+4y=0$

① x^2 の係数で x^2 とx をカッコでくくり、y^2 の係数で y^2 とy をカッコでくくる

$$(x^2+2x)+(y^2+4y)=0$$

② x の係数を 2 で割って 2 乗したものを足してすぐ引き、y の係数を 2 で割って 2 乗したものを足してすぐ引く

$$(x^2+2x+1^2-1^2)+(y^2+4y+2^2-2^2)=0$$

③ 因数分解する

$$\{(x+1)^2-1\}+\{(y+2)^2-4\}=0$$

④ 式を整理する

$$(x+1)^2+(y+2)^2-5=0$$
$$(x+1)^2+(y+2)^2=5$$

円の中心　$(-1,-2)$　　**半径**　$\sqrt{5}$

【練習問題 2】

１．次の方程式で表される円の中心の座標と半径を求めなさい。

(1) $x^2+y^2=2$

(2) $x^2+(y-5)^2=100$

(3) $x^2+y^2-4x+4y-1=0$

(4) $x^2+y^2+6x-10y+30=0$

２．次の円の方程式を求めなさい。

(1) $x^2+y^2=9$ を x 軸方向に 2、y 軸方向に -3 平行移動した円

(2) $(x-5)^2+(y+7)^2=16$ を x 軸について対象移動させた円

⑶ $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ を y 軸について対象移動させた円

⑷ $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ を中心は動かさずに半径を 2 倍した円

◆連立方程式とグラフ

2 直線の共有点 (x,y) を求めるには、2 つの直線の式を連立させたときの解 (x,y) を求めればよかったですね。このことは、直線だけでなく、一般のグラフの共有点を求める場合にも当てはまります。

【例題１】

円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求めなさい。

【解】

$y=x+1$ を $x^2+y^2=1$ に代入

展開して整理すると

共有点の座標は、

円と直線の関係

円と直線の位置関係は、2 つの方程式から y を消去した x の 2 次方程式の判別式 D を計算して、

$D>0$ ↔ 円と直線は異なる 2 点で交わる

$D=0$ ↔ 円と直線は 1 点で接する

$D<0$ ↔ 円と直線は交点を持たない

【例題２】

点 P は直線 $y=2x$ 上にあり、かつ、点 $A(2,1)$ からの距離が 3 である。

点 P の座標を求めなさい。

【解】

点 P の座標を (x,y) とする。

$AP=3$ より、

この式に $y=2x$ を代入すると、

因数分解して

解は、

従って、 点 P の座標は、

【例題３】

点 $A(5,0)$ を通る直線 L が円 $x^2+y^2=4$ と共有点を持つような L の傾き k の範囲を求めなさい。

【解】

共有点を持つ条件は、直線と円の方程式を連立させたときに、実数解が存在することである。

L の　傾きを k とすると、L の式は

これを $x^2+y^2=4$ に代入すると

展開して整理すると、

判別式は

$D=$

実数解が存在する条件は、

従って、

【練習問題 3】

１．円 $x^2+y^2=4$ と次の直線の共有点の座標を求めなさい。

(1) $y=x-1$

(2) $y=x-2\sqrt{2}$

２．点 P は直線 $y=3x$ 上にあり、かつ、点 $A(1,2)$ からの距離が次の値である。点 P の座標を求めなさい。

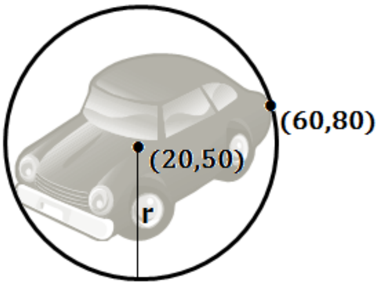
(1)　１

(2)　３

３．直線 L は傾き 1 、 y 切片 k の直線である。L が 円　$x^2+y^2=1$ と共有点を持つような k の値の範囲を求めなさい。

◆演習問題

１．あなたはゲームの中で、車が斜面を登っている途中で衝突が起こるかどうかを境界円を使って調べてみることにしました。図で示すように、車の中心位置は $(\mathbf{20},\mathbf{50})$ で、最も遠い位置にある頂点の座標は $(\mathbf{60},\mathbf{80})$ です。この境界円を表す方程式を求めなさい。



２．２点 $\mathbf{A}(-\mathbf{1},\mathbf{3})$ $\mathbf{B}(\mathbf{5},\mathbf{5})$ がある。線分 $\mathbf{AB}$ を直径とする円の方程式を求めなさい。

３．円 $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2+\boldsymbol{y}^2=\mathbf{4}$ と直線 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ の交点の座標を求めなさい。

４．３点 $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ $(\mathbf{3},\mathbf{1})$ を通る円の方程式を求めなさい。