座標変換行列と逆行列

◆2 次元座標変換行列

ゲーム制作をする上で特に必要となる知識で、大変重要なものです。しっかり理解しましょう。
図形処理の最も基本的な処理として座標変換がありますが、別名：アフィン変換とも言います。

> **行列を使用したアフィン変換**とは
> 　座標を示すベクトル（位置ベクトル）と変換行列との掛け算をし、
> 　座標を変換することである。
>
> **ベクトル×行列 → 変換後のベクトル**　$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x' \quad y')$

１．座標（ベクトル）と行列の計算

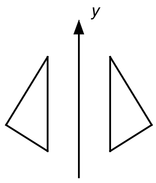
ベクトルと行列の計算は１行２列の行列と２行２列の行列の掛け算です。

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + cy \quad bx + dy)$$

２．図形の反転

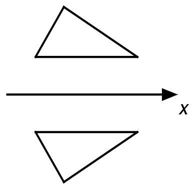
ここで、ある座標を y 軸に対して対称に反転した図形を考えてみましょう。

> 移動後の座標値が $(-x, y)$ となるためには
> どのような行列をかければ良いか。
>
> **【左右反転】**
>
> $$(x \quad y)\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = (-x \quad y)$$



つぎに、ある座標を x 軸に対して対称に反転した図形を考えてみる。

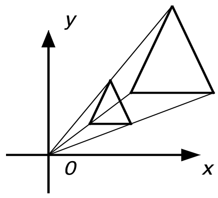
> 移動後の座標値が $(x, -y)$ となるためには
> どのような行列をかければ良いか。
>
> **【上下反転】**
>
> $$(x \quad y)\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = (x \quad -y)$$



３．図形の拡大・縮小

ある座標について x 成分を k 倍、 y 成分を l 倍した図形を考える。

> 移動後の座標値が (kx, ly) となるためには
> どのような行列をかければ良いか。
>
> **【拡大縮小】**
>
> $$(x \quad y)\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = (kx \quad ly)$$
>
> **k l に「0」と「1」の間の値を代入すれば物体は小さくなり、**
> **「1」より大きな値を代入すれば、物体は大きくなる**



「　座標変換行列と逆行列　」

東京情報クリエイター

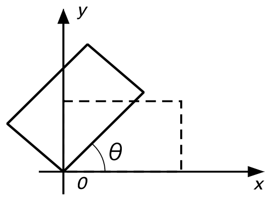
４．図形の回転

今度は図形の回転を考えるが、回転後の座標値はどうなるでしょうか。

【回転】

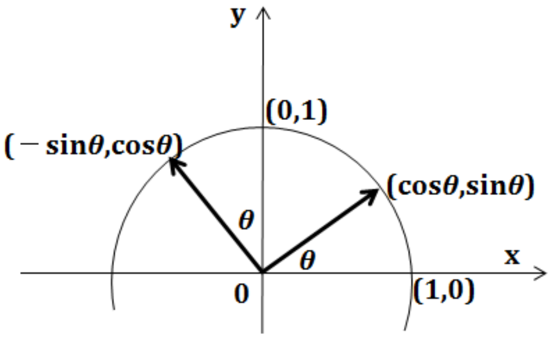
$$(x \quad y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= (x\cos\theta - y\sin\theta \quad x\sin\theta + y\cos\theta)$$



【考え方】

ベクトルを θ だけ回転させるような回転の行列は、x 方向の基本ベクトル $(1,0)$ を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ に変換し、y 方向の基本ベクトル $(0,1)$ を $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ に変換します。



回転の行列を

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置くと、

$(1\ 0)$ を $(\cos\theta\ \sin\theta)$ に変換するから

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\cos\theta\ \sin\theta)$$

$$a = \cos\theta \quad b = \sin\theta$$

一方 $(0\ 1)$ を $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ に変換するから

$$(0\ 1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

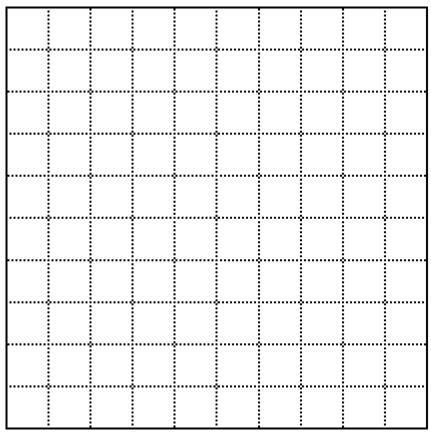
$$c = -\sin\theta \quad d = \cos\theta$$

以上が行列変換の基本パターンです。平行移動については、後述します。（２行２列の行列では座標変換ができないので。）

【練習問題１】

⑴ **点 $(2,2)(-3,1)(3,-2)$ からなる三角形を左右反転し、作図しなさい(元の三角形も記述)。**

① $(2,2)$



② $(-3,1)$

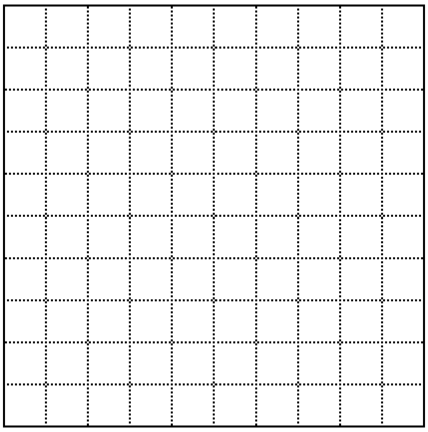
③ $(3,-2)$

「　座標変換行列と逆行列　」

東京情報クリエイター

⑵点 $(0,2)(-2,-1)(2,-1)$ からなる三角形を２倍に拡大し、作図しなさい(元の三角形も記述)。

① $(\mathbf{0},\mathbf{2})$



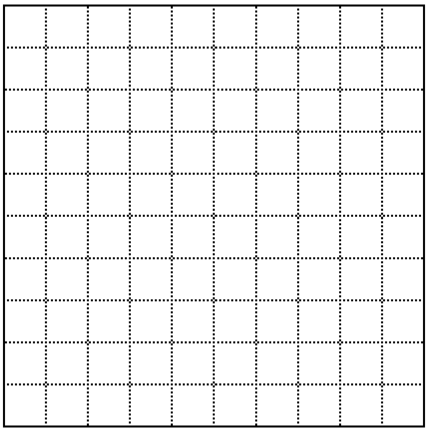
② $(-\mathbf{2},-\mathbf{1})$

③ $(\mathbf{2},-\mathbf{1})$

⑶点 $(-1,3)(-1,-2)(3,-2)$ からなる三角形を 30°回転し、作図しなさい(元の三角形も記述)。

（但し、$sin30° = 0.5$　，$cos30° = 0.9$　として計算しなさい。）

① $(-\mathbf{1},\mathbf{3})$



② $(-\mathbf{1},-\mathbf{2})$

③ $(\mathbf{3},-\mathbf{2})$

【演習問題 2】

ベクトルと行列の乗算をするメソッド（2 項演算子　＊）を[Matrix3.cs]に追加しなさい。
追加後、コンソールアプリ[Ex05]を追加し、以下の計算で確認すること。
[MyLibrary]を参照に追加するのを忘れずに。

ベクトル $\boldsymbol{a}(2,1)$ **と 行列** $\boldsymbol{b}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **→ ベクトル** $(-4,4)$

【　メ　　モ　】

【演習問題２　Matrix3.cs　プログラム例】

```
//ベクトル×行列
public static Vector2 Multiply(Vector2 a, Matrix3 b)
{
    float[][] v = new float[][]
    {   new float[] {0,0,0},  };
    float[][] A = new float[][]
    {   new float[] {a.X,a.Y,1},  };
    v = MathCalc.Multiply(A, b.m, v);
    return new Vector2(v[0][0], v[0][1]);
}

//ベクトル×行列２項演算子　＊
public static Vector2 operator *(Vector2 a, Matrix3 b)
{
    return Multiply(a, b);
}
```

【演習問題２　Ex05 Program.cs　プログラム例】

```
using MyLibrary;

namespace Ex05
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Vector2 a = new Vector2(2, 1);
            Matrix3 b = new Matrix3(-1, 0, 0, 0, 1, 0, -2, 3, 1);
            Vector2 ans = a * b;
            Console.WriteLine("a*b=" + ans);
        }
    }
}
```

「　座標変換行列と逆行列　」

東京情報クリエイター

◆逆行列

対角線上がすべて「 1 」で、それ以外が「 0 」である正方行列を「 **単位行列** 」といいますという話をしましたが、「 **単位行列** 」がどのような意味を持つのかの話をしていませんでした。
実は、「 **単位行列** 」は、**任意のｎ次正方行列 A に対して右から掛けても左から掛けても A** となります。

例えば、2 次元の単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となります。
そして、与えられたｎ次正方行列 A に対して右から掛けても左から掛けても単位行列 E となるような行列を A の「　**逆行列**　」といい、「 A^{-1} 」で表します。

【単位行列と逆行列】

「　**E が単位行列**　」⇔「　$AE = A \quad EA = A$　」

「　**A^{-1} が A 逆行列**　」⇔「　$AA^{-1} = E \quad A^{-1}A = E$　」

「　**逆行列の性質**　」　　　「　$(A^{-1})^{-1} = A$　」

【逆行列の公式】

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **のとき**

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (ad - bc \neq 0)$$

【例】

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\times3-1\times5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

確認してみましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3+1\times(-5) & 2\times(-1)+1\times2 \\ 5\times3+3\times(-5) & 5\times(-1)+3\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times2+(-1)\times5 & 3\times1-1\times3 \\ -5\times2+2\times5 & -5\times1+2\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【練習問題 2】

次の行列の逆行列を求めなさい。

⑴ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

⑵ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

「　座標変換行列と逆行列　」

【逆行列の公式】

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$ のとき

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}\qquad detA=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$ のとき、

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix}a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\\ a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}\\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$$

$$detA=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

（ただし、$detA\neq 0$ のとき）

では逆行列はどんな時に使用するのでしょうか？

$A\times B=C$ とすると、　$A=C\times B^{-1}$ 　となるはずですね。

座標値を前述の方法を使い、変換行列で変換した座標を、元の座標値に

戻す時などに使用することができます。

$$(2\quad 1)\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}=(5\ \ 8)\ \rightarrow\ (5\ \ 8)\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}^{-1}=(2\quad 1)$$

ゲームではスクリーン座標系の座標値からワールド座標系の座標値を求める時などに用います。

【練習問題 3】

次のような座標変換行列がある。変換後の座標値が $(12,18)$ であるとき、変換前の座標値を求めなさい。

変換行列 $\begin{pmatrix}6 & 3\\ -4 & 2\end{pmatrix}$