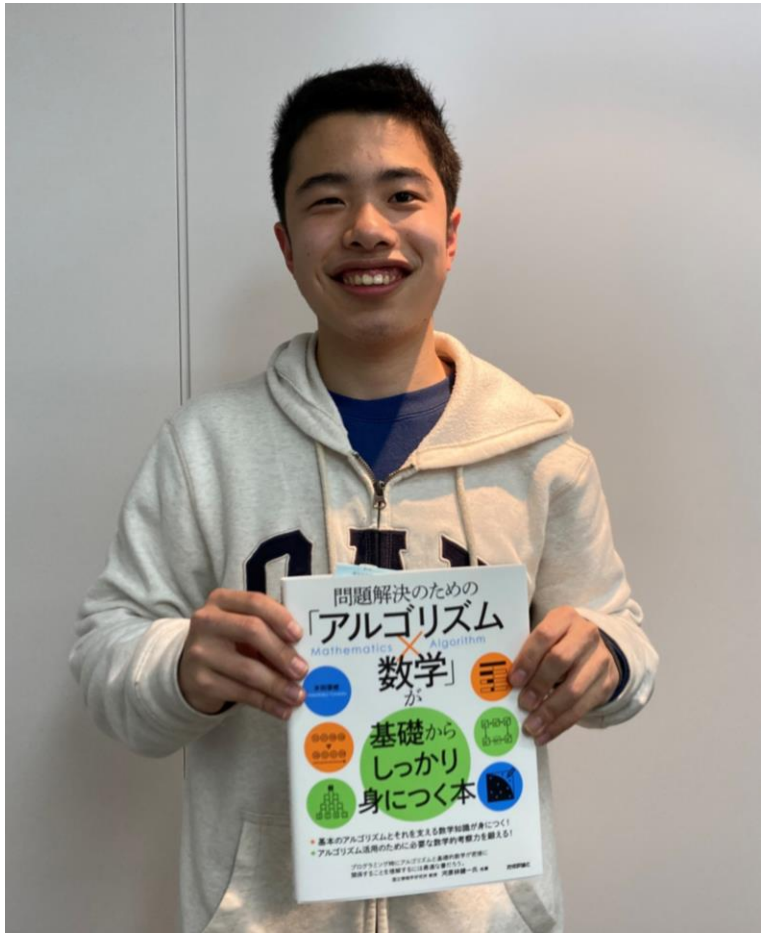
150 分で学ぶ

高校数学の基礎

2022 年 9 月 6 日

米田 優峻 [@E869120]

序　自己紹介



米田優峻（よねだ まさたか）

- 2002 年生まれ
- 2021 年東京大学入学

主な実績

- 国際情報オリンピック（IOI）金メダル
- 著書『「アルゴリズム×数学」が基礎からしっかり身につく本』2 万部突破

スライドの概要／諸注意

- 本スライドでは、**高校数学の基礎的事項**について概観します。中学数学の一部を理解していない方も、第 1 章で前提知識を説明するのでご安心ください。
- 全部で 10 個の章からなります。1 章当たり 15 分で読む場合、150 分で読破することができます（ただし、章によってページ数は異なります）。

注意：

本スライドでは基礎的事項のみを扱っており、高校数学のすべてを網羅しているわけではありません。そのため、大学受験対策には向かないことに注意してください。逆に、数学にはどんな内容があるのか概観したり、学び直したりする目的では活用できます。

目次

CHAPTER 1

数学の基礎知識

本章のゴール

太郎君はタクシーに乗車し、1400 円を支払いました。

このタクシーの初乗運賃が 500 円であり、以降 1km ごとに 100 円が加算されるとき、彼は何 km 乗車しましたか。

※たとえば 12km 乗車したときの運賃は 500+100×12=1700 円となります

1 この章について

第 1 章では、主に以下の 3 つの内容を扱います。

- 基本的な数と計算（累乗・ルートなど）
- 文字式とは
- 方程式とは

すべて中学数学の範囲であり、高校数学を学ぶための前提知識となるため、数学に自信のない方はぜひお読みください。

A 基本的な数と計算

B 文字式とは

C 方程式とは

正負の数 1

累乗 2

ルート 3

0 を超える数を「正の数」、0 未満の数を「負の数」という

例 17, 23, 3.75 は正の数

-2, -6, -11.87 は負の数

正負の数 1

累乗 2

ルート 3

a を b 回掛けた数を a^b と書き、「a の b 乗」という

例 $2^5 = 32 \ (= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

正負の数 1

累乗 2

ルート 3

2 回掛けて x になる数を $\sqrt{x}$ と書き、「ルート x」という

例 $\sqrt{9}=3$（$3\times3=9$ だから）

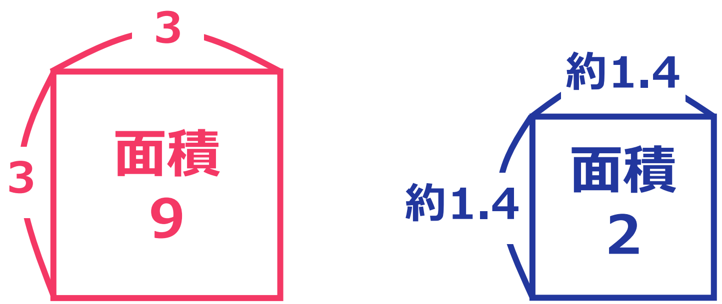
$\sqrt{2}=1.414\ldots$

※少し難しいが、値 x が負の場合でも、2 回掛けて x となる値は「複素数」を使えば計算できる（興味のある方はぜひ検索しましょう）

正負の数 1

累乗 2

ルート 3



面積 x の正方形の
一辺の長さと考えても良い

2 回掛けて x になる数を $\sqrt{x}$ と書き、「ルート x」という

例 $\sqrt{9} = 3$（$3 \times 3 = 9$ だから）

$\sqrt{2} = 1.414\ldots$

※少し難しいが、値 x が負の場合でも、2 回掛けて x となる値は「複素数」を使えば計算できる（興味のある方はぜひ検索しましょう）

A 基本的な数と計算

B 文字式とは

C 方程式とは

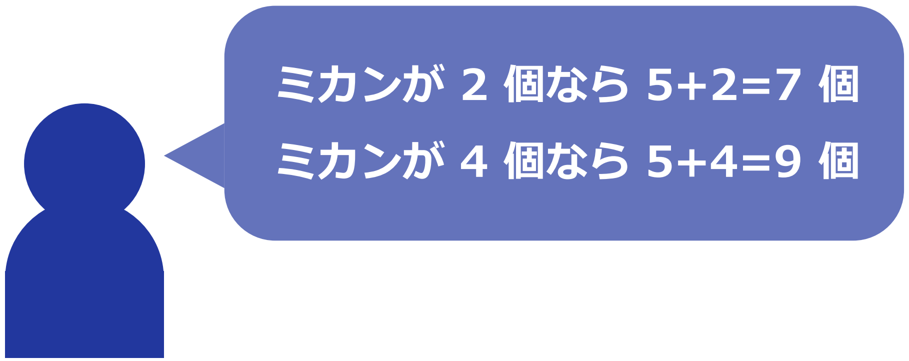
1 文字式の前に

たとえば、以下のような問題を考える

> 太郎君は、5 個のリンゴといくつかのミカンを持っている。
> “ミカンの個数” と “リンゴとミカンの合計個数” の関係は？

たとえば、以下のような問題を考える

太郎君は、5 個のリンゴといくつかのミカンを持っている。
“ミカンの個数” と “リンゴとミカンの合計個数” の関係は？



たとえば、以下のような問題を考える

太郎君は、5 個のリンゴといくつかのミカンを持っている。
“ミカンの個数” と “リンゴとミカンの合計個数” の関係は？

ミカンが 2 個なら 5+2=7 個
ミカンが 4 個なら 5+4=9 個

ただ、ミカンの個数を
知らなければ関係を表せない…

たとえば、以下のような問題を考える

> 太郎君は、5 個のリンゴといくつかのミカンを持っている。
> “ミカンの個数” と “リンゴとミカンの合計個数” の関係は？

➡ ミカンの個数を x **個**とおけば

合計個数は $x+5$ **個**※

※もちろん、ミカンの個数を〇で表して「〇+5個」にしても良いが、中学以降では x, y のような文字を使うのが一般的

1 文字式とは

$x+5$ のように、文字を使った式を

「文字式」という

他の文字式の例： $100+y$、$a+b$、$2a+3b$ など

1 文字式のルール

文字式を書くときは、以下のようなルールがある

	具体例
掛け算記号「×」は省略	「a かける b」を表すときは ab（$a \times b$ ではない）
数と文字の掛け算は、数を先に書く	「a かける 2」を表すときは $2a$（$a2$ ではない）
“1×文字” の 1 は省略する	「a かける 1」を表すときは a（$1a$ ではない）
“-1×文字” の場合、マイナスだけ残す	「a かける -1」を表すときは $-a$（$-1a$ ではない）

文字式の例

文字式に慣れるために

例を 3 つ挙げます

文字式の例

例 1

ボールが 3 個あり
それぞれ A_1, A_2, A_3 グラム
重さの合計は？

▼

$A_1 + A_2 + A_3$ グラム

例 2

500 円玉が x 枚あり
100 円玉が y 枚ある
合計金額は？

▼

$500x + 100y$ 円

例 3

縦の長さが x
横の長さが $x + 1$ の
長方形の面積は？

▼

面積 $x(x + 1)$

※$x \times (x + 1)$ のように書いても良いが、慣例的には「×」を省略して書く。

A 基本的な数と計算

B 文字式とは

C 方程式とは

方程式とは

方程式 ＝ まだ分かっていない

値（文字）を含む等式

1 方程式とは

方程式の例

- $\underline{x} + 5 = 7$
- $6 - 2\underline{x} = 3$
- $\underline{x}^2 = 9$

など

x がまだ分かっていない値

➡ ここで、x の値を求めることを方程式を「解く」という

実際に方程式を解いてみよう！

1 パズル：方程式を解く

問題 1

$5 + x = 7$

▼

$x =$ ☐

問題 2

$6 - 2x = 3$

▼

$x =$ ☐

問題 3

$x^2 = 9$

▼

$x =$ ☐、☐

問題 4

$(x - 1)(x - 2) = 0$

▼

$x =$ ☐、☐

どこまで解けるかな？（難易度順です）

※問題 4 の $(x - 1)(x - 2)$ は $(x - 1) \times (x - 2)$ という意味。

パズル：方程式を解く

問題 1

$5 + x = 7$

▼

$x =$ 2

問題 2

$6 - 2x = 3$

▼

$x =$ 1.5

問題 3

$x^2 = 9$

▼

$x =$ -3、3

問題 4

$(x - 1)(x - 2) = 0$

▼

$x =$ 1、2

答えはこちら！

※問題 4 は「$(x - 1)$ と $(x - 2)$ のうちどちらか一方がゼロでなければならない」と考えると解きやすい

※問題 4 の $(x - 1)(x - 2)$ は $(x - 1) \times (x - 2)$ という意味。

1 “本章のゴール” を解こう

太郎君はタクシーに乗車し、1400 円を支払いました。

このタクシーの初乗運賃が 500 円であり、以降 1km ごとに 100 円が加算されるとき、彼は何 km 乗車しましたか。

“本章のゴール” を解こう

まず、タクシーの移動距離を x (km) とすると…

かかる値段は $\underbrace{100x}_{\text{加算運賃}} + \underbrace{500}_{\text{初乗運賃}}$ 円

まず、タクシーの移動距離を x (km) とすると…

かかる値段は $\underbrace{100x}_{\text{加算運賃}} + \underbrace{500}_{\text{初乗運賃}}$ 円

合計値段が 1400 円なので、乗車距離 x は以下の方程式を満たさなければならない：

$$100x + 500 = 1400$$

“本章のゴール” を解こう

まず、タクシーの移動距離を x (km) とすると…

かかる値段は $\underbrace{100x}_{\text{加算運賃}} + \underbrace{500}_{\text{初乗運賃}}$ 円

合計値段が 1400 円なので、乗車距離 x は以下の方程式を満たさなければならない：

これを解くと…

$$100x + 500 = 1400$$

合計が 1400 円なら加算運賃は
900 円でなければならない！

$$100x = 900$$

900÷100=9

$$x = 9$$

答えは 9km

CHAPTER 2
場合の数

本章のゴール

あるアイスクリーム店では、以下の中から選んで買うことができます。

- 大きさ：小・中・大
- ソース：バニラ・イチゴ
- コーン：有り・無し

アイスクリームを 1 個買う方法は、全部で何通りありますか。

まずは場合の数の公式を

4つ理解しよう

公式 1：積の法則

場合の数の公式 (1/4)

事柄 1 の起こり方が n 通り、事柄 2 の起こり方が m 通り

→ 事柄 1・2 の起こり方の組み合わせは全部で nm 通り

積の法則 1

並べ替え 2

nPr 3

nCr 4

例 朝食をおにぎり・パン・サンドイッチの中から選び個数を 1～4 個の中から選ぶとき･･･

3×4=12 通り

場合の数の公式 (1/4)

積の法則 1

並べ替え 2

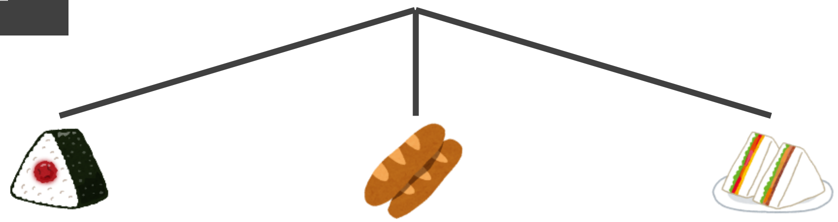
nPr 3

nCr 4

例 朝食をおにぎり・パン・サンドイッチの中から選び個数を 1～4 個の中から選ぶとき･･･

3×4=12 通り

なぜ？



種類の選び方 → 3 通り

場合の数の公式 (1/4)

積の法則 1

並べ替え 2

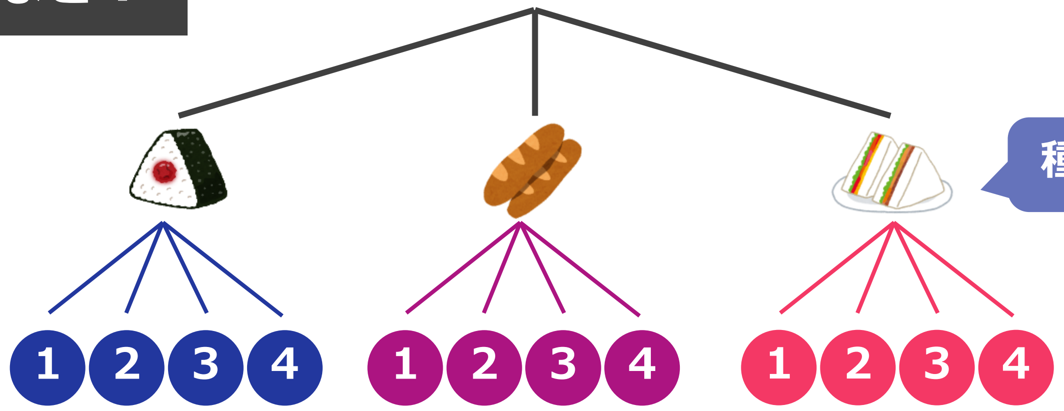
nPr 3

nCr 4

例 朝食をおにぎり・パン・サンドイッチの中から選び
個数を 1〜4 個の中から選ぶとき･･･

3×4=12 通り

なぜ？



種類の選び方 → 3 通り

個数の選び方 → 4 通り

公式２：並べ替え

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ とするとき

n 個のモノを並べ替える方法の数は $n!$ 通り

場合の数の公式 (2/4)

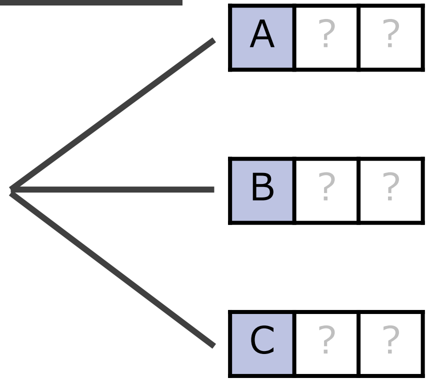
例 A・B・C を並べ替える方法の数は…

3×2×1=6 通り

例 A・B・C を並べ替える方法の数は…

3×2×1=6 通り

なぜ？



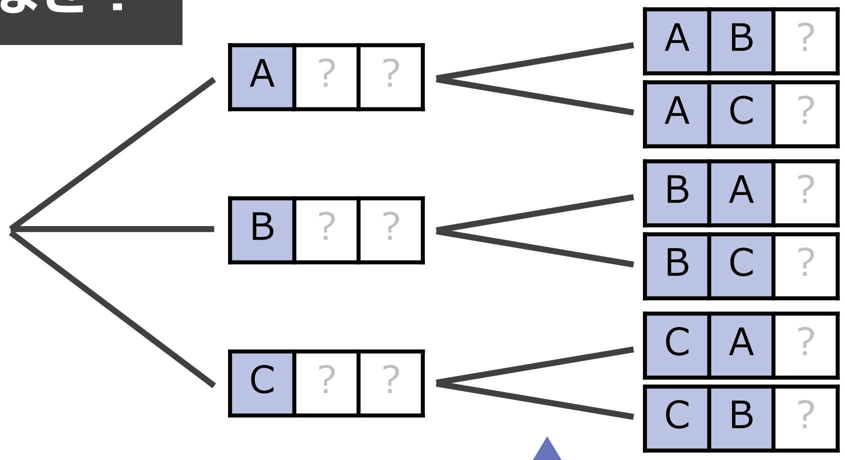
1 文字目の選び方 → 3 通り

場合の数の公式 (2/4)

例 A・B・C を並べ替える方法の数は…

3×2×1=6 通り

なぜ？



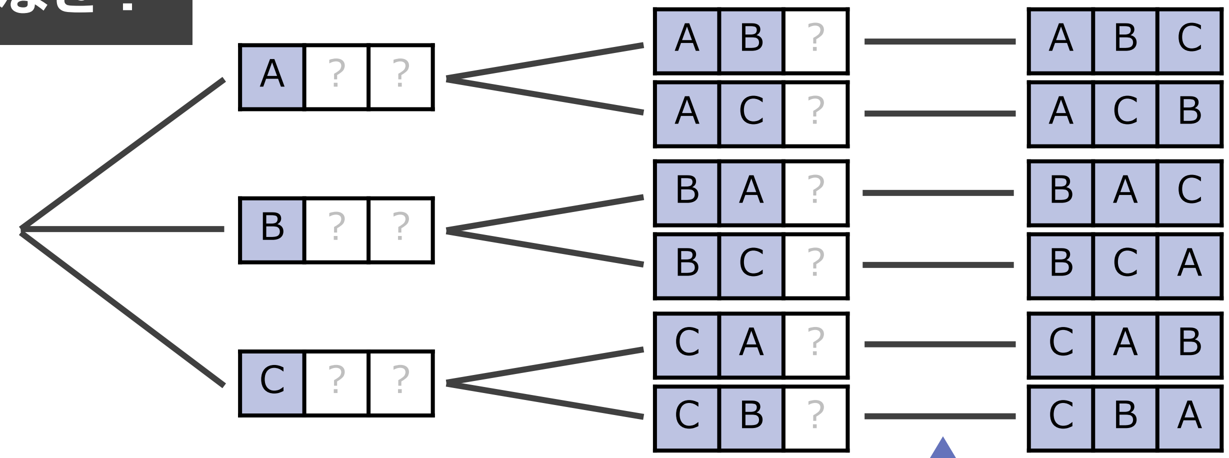
2 文字目の選び方 → 2 通り

場合の数の公式 (2/4)

例 A・B・C を並べ替える方法の数は…

3×2×1=6 通り

なぜ？



3 文字目の選び方 → 1 通り

公式 3：nPr (選択 + 並べ替え)

n 個のモノから r 個を選び、それらを並べ替える方法の数は

${}_n\mathrm{P}_r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$ 通り

場合の数の公式 (3/4)

例 4 人の生徒 A・B・C・D から代表と副代表を選ぶ方法は…

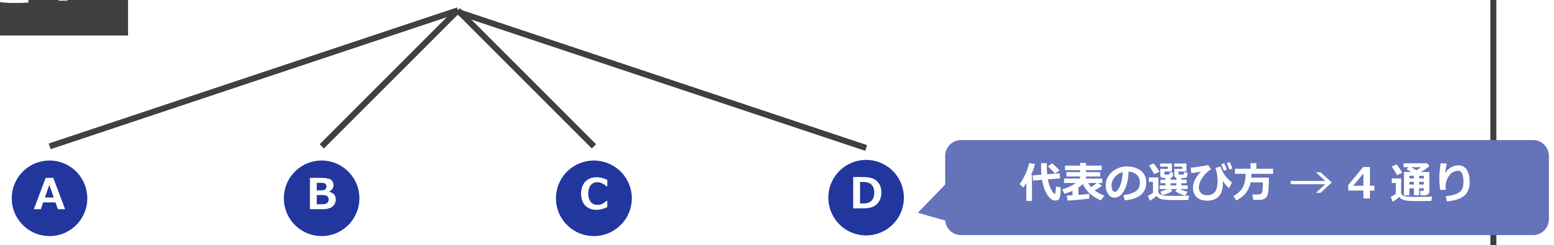
$_4P_2=4\times3=12$ 通り

場合の数の公式 (3/4)

例 4 人の生徒 A・B・C・D から代表と副代表を選ぶ方法は…

${}_4P_2=4\times3=12$ 通り

なぜ？

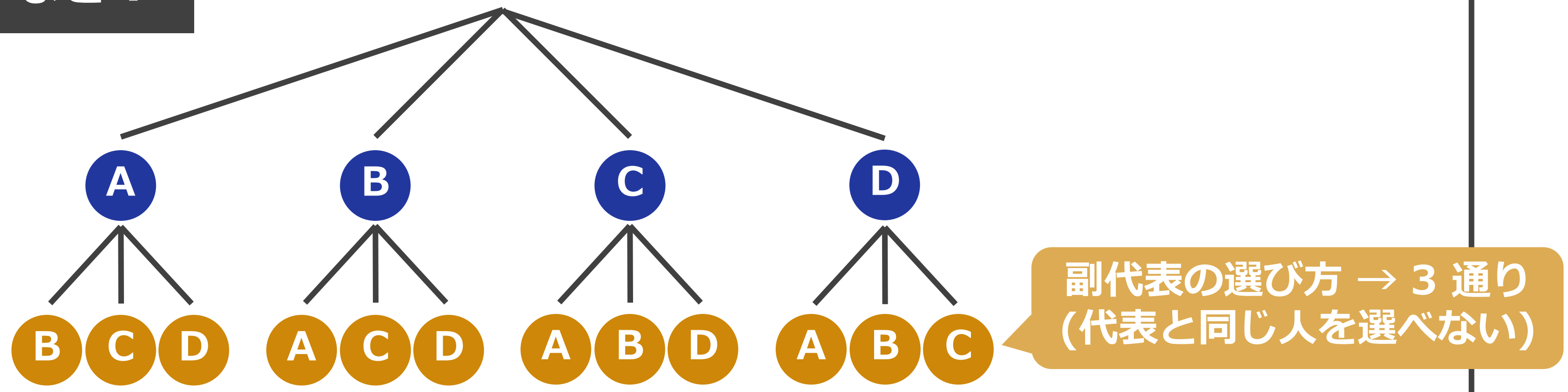


場合の数の公式 (3/4)

例 4 人の生徒 A・B・C・D から代表と副代表を選ぶ方法は…

$_4P_2=4\times3=12$ 通り

なぜ？



公式 4：nCr (選択)

場合の数の公式 (4/4)

積の法則 1
並べ替え 2
nPr 3
nCr 4

n 個のモノから r 個を選ぶ方法の数は

${}_{n}\mathrm{C}_{r} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) \div r!$ 通り

並べ替えのある nPr の方が

$r!$ 倍だけ大きい！

場合の数の公式（4/4）

積の法則 1

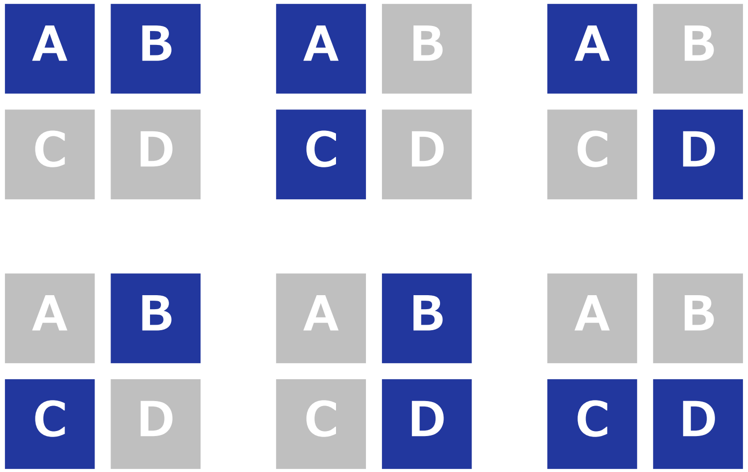
並べ替え 2

nPr 3

nCr 4

例 4 人の生徒 A・B・C・D から 2 人の代表を選ぶ方法は…

${}_4C_2=4\times3\div2!=6$ 通り



2 場合の数の公式 (4/4)

積の法則 1

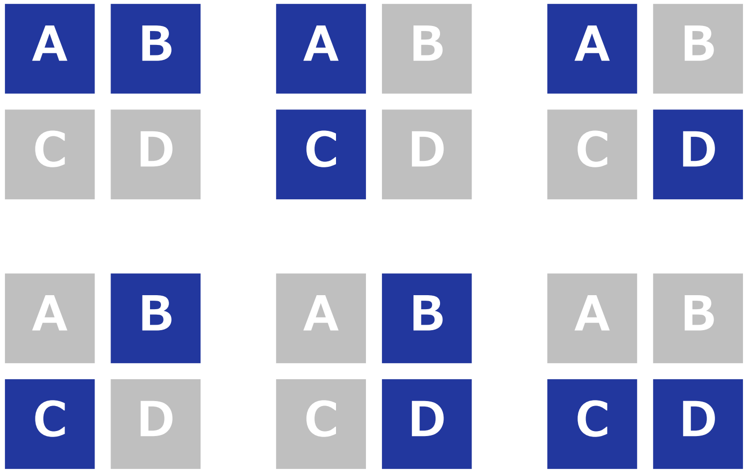
並べ替え 2

nPr 3

nCr 4

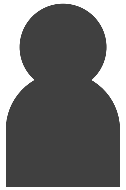
例 4 人の生徒 A・B・C・D から 2 人の代表を選ぶ方法は…

$_4C_2=4\times3\div2!=6$ 通り



ちなみに並べ替えを許した場合は

4×3=12 通り (ちょうど 2 倍)



“本章のゴール” を解こう

あるアイスクリーム店では、以下の中から選んで買うことができます。
アイスクリームを 1 個買う方法は、全部で何通りありますか。

大きさ	小／中／大
ソース	バニラ／イチゴ
コーン	有り／無し

“本章のゴール” を解こう

大きさ	小／中／大	➡ 3 通り
ソース	バニラ／イチゴ	➡ 2 通り
コーン	有り／無し	➡ 2 通り

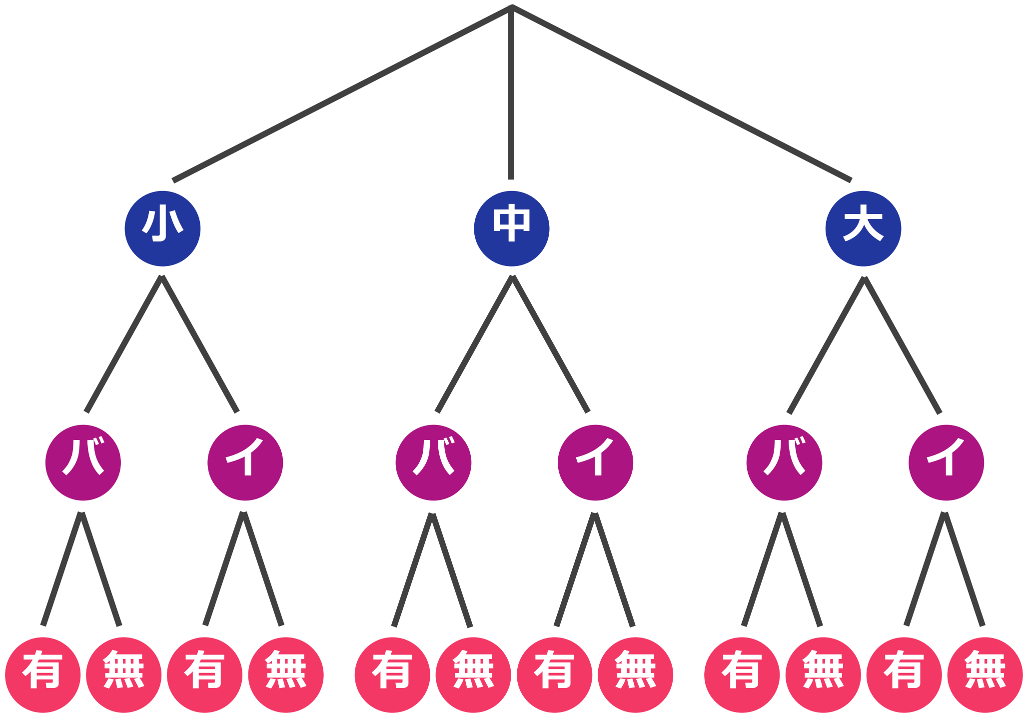
※積の法則は、事柄が 2 つのときだけでなく、3 つ以上の場合でも適用できる。

大きさ	小／中／大
ソース	バニラ／イチゴ
コーン	有り／無し

→ 3 通り
→ 2 通り
→ 2 通り

積の法則（1 個目の公式）より※

$$3\times2\times2=\underline{12通り}$$



※積の法則は、事柄が 2 つのときだけでなく、3 つ以上の場合でも適用できる。

CHAPTER 3

確率と期待値

本章のゴール

この章には、「本章のゴール」に
相当する問題はありません。

3 確率とは

確率 ＝ ある事柄が起こる確からしさ

例：降水確率 70%

→ 同じ予報が 100 回出たら、約 70 回は雨が降る

例：合格可能性 20%

→ 100 回受けたら 20 回くらいは志望校に合格する

確率の計算方法

N 通りのパターンが<u>同じ可能性</u>で起こり得るとして、このうち M 通りについて事柄 A が起こるとき･･･

→

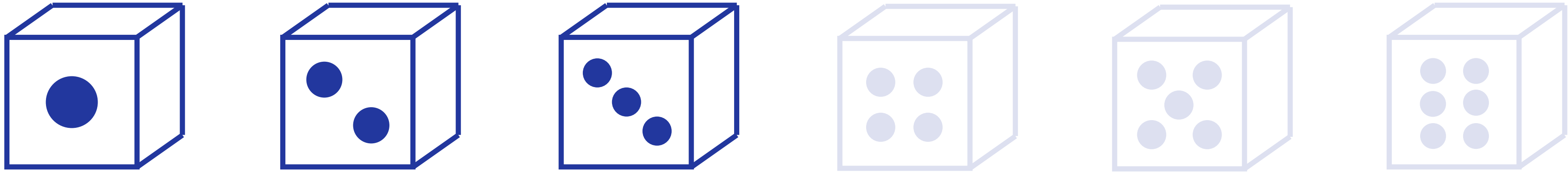
事柄 A が起こる確率は $\dfrac{M}{N}$

確率の例（1）

サイコロを 1 個投げて、出た目が 3 以下になる確率は？

確率の例（1）

サイコロを 1 個投げて、出た目が 3 以下になる確率は？



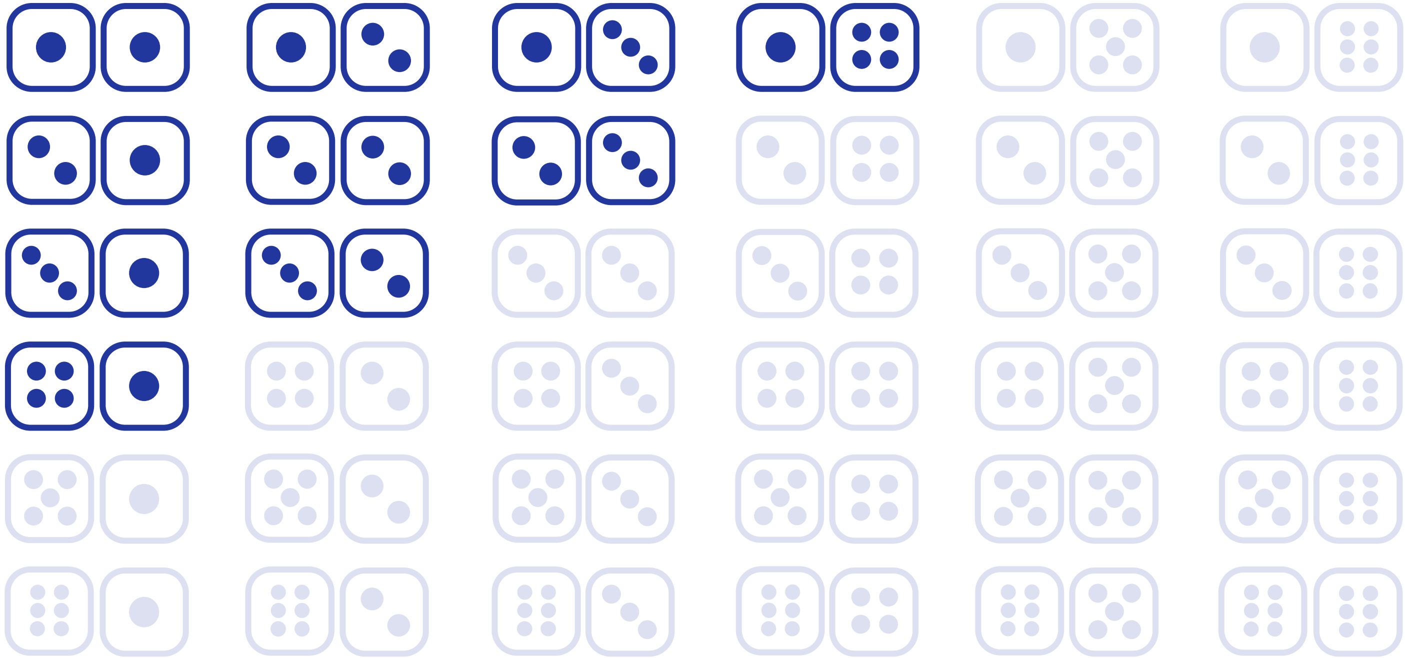
6 通り中 3 通りなので… 3÷6=1/2

確率の例（2）

サイコロを 2 個投げて、出た目の和が 5 以下になる確率は？

確率の例（2）

サイコロを 2 個投げて、出た目の和が 5 以下になる確率は？



36 通り中

10 通りなので…

10÷36=5/18

期待値とは

期待値 ＝ 得られる “平均的な値”

たとえば、50% の確率で 1000 円、50% の確率で 2000 円もらえる賭けでは

もらえる金額の期待値は 1500 円

期待値の計算方法

期待値は（確率）×（値）の総和

で計算できる

3 期待値の例

以下の賭けで得られる金額の期待値は？

等級	賞金	確率
1等	5,000 円	10%
2等	2,000 円	30%
3等	1,000 円	60%

期待値の例

以下の賭けで得られる金額の期待値は？

等級	賞金	確率
1等	5,000 円	10%
2等	2,000 円	30%
3等	1,000 円	60%

$0.1 \times 5000 = 500$ 円

$0.3 \times 2000 = 600$ 円

$0.6 \times 1000 = 600$ 円

合計

1700 円

これが期待値！

CHAPTER 4

統計的な解析

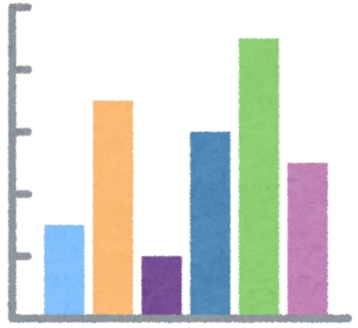
本章のゴール

ある塾では、10 人が数学のテストを受験しました。成績は A 君から順に、96, 70, 59, 54, 49, 41, 38, 36, 33, 24 点でした。A 君の偏差値はいくつですか。

4 統計の目的

テストの点数

身長と体重



本の売上

世の中は、様々な “データ” であふれている

本章では、データを分析するのに便利な “数学的ツール” を

4 つ紹介します

ツール１：ヒストグラム

統計で使うツール（1/4）

ヒストグラムとは：

“区間ごとの個数” を数えてグラフにしたもの

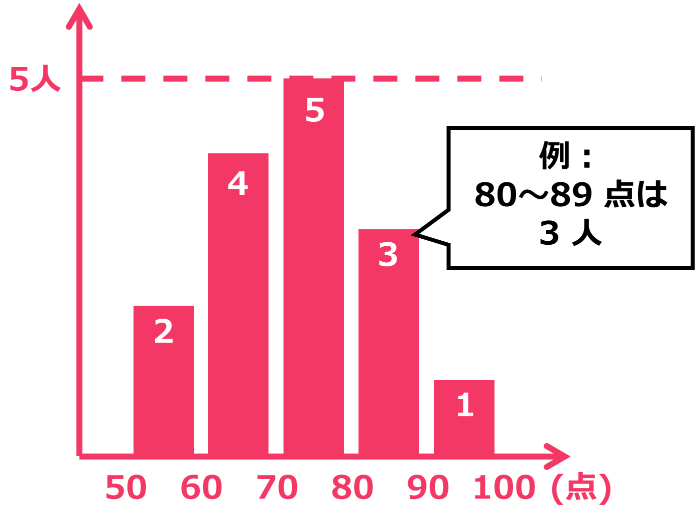
統計で使うツール (1/4)

ヒストグラムとは：

“区間ごとの個数” を数えてグラフにしたもの

例：1 年生のテストの点数

50	56	62	65	67
69	71	71	73	76
79	81	84	88	95

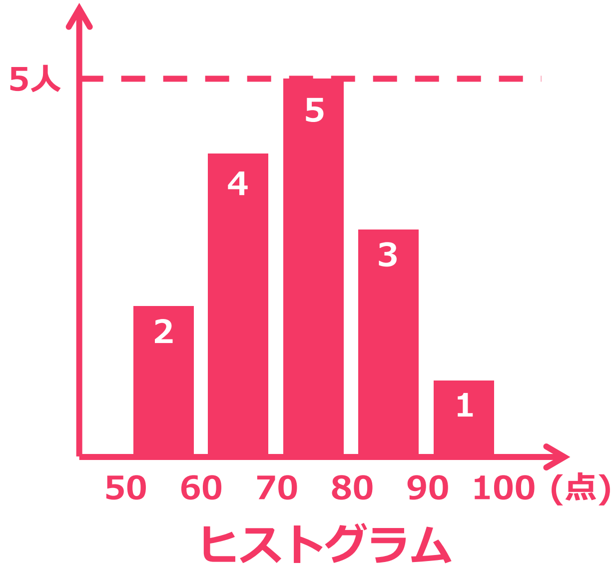


ヒストグラム

統計で使うツール (1/4)

ヒストグラムとは：
“区間ごとの個数” を数えてグラフにしたもの

ヒストグラムを使うメリット：
点数の分布が分かりやすい！



ツール２：平均

統計で使うツール (2/4)

平均値 μ は、データの平均的な値

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}{N}$$

※データの個数を N、データの値を $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$ とする

ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

平均値 μ は、データの平均的な値

$$\mu = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}{N}$$

※データの個数を N、データの値を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ とする

例：5 人のテストの点数

40 60 70 80 100

平均点は

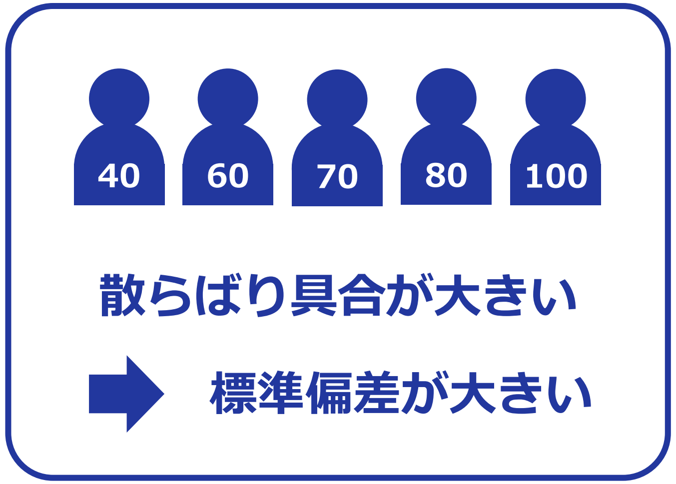
$$\frac{40 + 60 + 70 + 80 + 100}{5} = 70$$

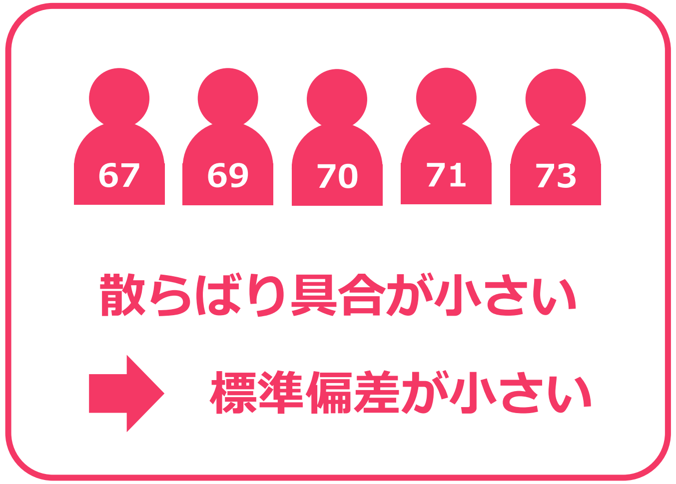
ツール３：標準偏差

標準偏差 σ は、データの散らばり具合

統計で使うツール (3/4)

標準偏差 σ は、データの散らばり具合





問い 標準偏差 σ はどうやって計算する？

問い 標準偏差 σ はどうやって計算する？

1. 各データに対して “平均との差” の 2 乗を計算し、それを合計する
2. 1. で求めた値をデータの数 N で割る
3. √(2. で求めた値) を計算する。これが標準偏差

問い 標準偏差 σ はどうやって計算する？

1. 各データに対して “平均との差” の 2 乗を計算し、それを合計する
2. 1. で求めた値をデータの数 N で割る
3. √(2. で求めた値) を計算する。これが標準偏差

例：5 人のテストの点数（平均 70 点）

40	60	70	80	100
差30	差10	差0	差10	差30

標準偏差は

$$\sqrt{\frac{\overbrace{30^2+10^2+0^2+10^2+30^2}^{\text{差の 2 乗の合計：2000}}}{5}}=20$$

ツール４：相関係数

統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

問い 数学の点数と国語の点数は
どれくらい “関係” がある？

	数学	国語
生徒 A	40 点	50 点
生徒 B	60 点	60 点
生徒 C	70 点	30 点
生徒 D	80 点	70 点
生徒 E	100 点	90 点

統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1

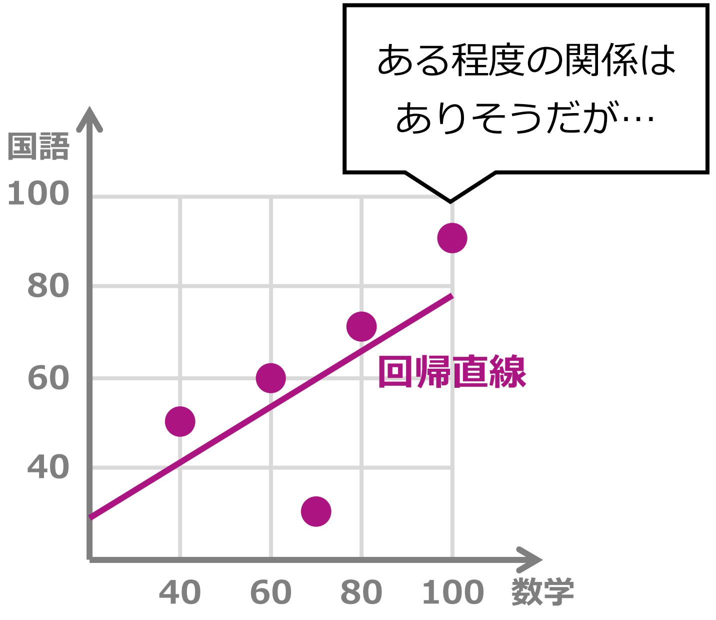
平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

問い 数学の点数と国語の点数は
どれくらい “関係” がある？

	数学	国語
生徒 A	40 点	50 点
生徒 B	60 点	60 点
生徒 C	70 点	30 点
生徒 D	80 点	70 点
生徒 E	100 点	90 点



統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

もちろん散布図（グラフ）を描けば大まかな関係はわかるが

関係の度合いを数値化するには…？

➡ **“相関係数” を使う！**

ヒストグラム 1
平均 2
標準偏差 3
相関係数 4

相関係数は、データの関係の度合いを表す数値

計算方法

1. 数学の平均 μ_X、国語の平均 μ_Y を計算
2. 数学の標準偏差 σ_X、国語の標準偏差 σ_Y を計算
3. 各データに対して (点数-μ_X)×(点数-μ_Y) を計算し、それを平均した値を求める
   この計算結果は共分散と呼ばれ、σ_{XY} と書く
4. $\sigma_{XY} \div (\sigma_X \times \sigma_Y)$ が相関係数

統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1
平均 2
標準偏差 3
相関係数 4

例："数学の成績" と "国語の成績" の相関係数は？

	数学	国語
生徒 A	40 点	50 点
生徒 B	60 点	60 点
生徒 C	70 点	30 点
生徒 D	80 点	70 点
生徒 E	100 点	90 点

統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

例：”数学の成績” と “国語の成績” の相関係数は？

	数学	国語
生徒 A	40 点	50 点
生徒 B	60 点	60 点
生徒 C	70 点	30 点
生徒 D	80 点	70 点
生徒 E	100 点	90 点
平均	70 点	60 点
標準偏差	20 点	20 点

統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

例："数学の成績" と "国語の成績" の相関係数は？

	数学	国語
生徒 A	40 点	50 点
生徒 B	60 点	60 点
生徒 C	70 点	30 点
生徒 D	80 点	70 点
生徒 E	100 点	90 点
平均	70 点	60 点
標準偏差	20 点	20 点

(点数-μ_X)×(点数-μ_Y)

→ (-30)×(-10)=300

→ (-10)×(0)= 0

→ (0)×(-30)= 0

→ (10)×(10)=100

→ (30)×(30)=900

平均して

$\sigma_{XY} = 260$

統計で使うツール (4/4)

ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

例："数学の成績" と "国語の成績" の相関係数は？

	数学	国語
生徒 A	40 点	50 点
生徒 B	60 点	60 点
生徒 C	70 点	30 点
生徒 D	80 点	70 点
生徒 E	100 点	90 点
平均	70 点	60 点
標準偏差	20 点	20 点

(点数-μ_X)×(点数-μ_Y)

(-30)×(-10)=300

(-10)×(0)= 0

(0)×(-30)= 0

(10)×(10)=100

(30)×(30)=900

平均して

$\sigma_{XY} = 260$

相関係数は 260÷(20×20)=0.65

- ヒストグラム 1
- 平均 2
- 標準偏差 3
- **相関係数 4**

問い 相関係数 0.65 は高いのか？

ヒストグラム 1
平均 2
標準偏差 3
相関係数 4

問い 相関係数 0.65 は高いのか？

相関係数 r は -1 以上 1 以下の値になるが
目安としては…※2

$\lvert r\rvert < 0.4$	相関はほぼない
$0.4 \le \lvert r\rvert < 0.6$	弱い相関がある
$0.6 \le \lvert r\rvert < 0.8$	相関がある
$0.8 \le \lvert r\rvert \le 1.0$	強い相関がある

→ 一定の相関があると考えて良い！※

※厳密には、相関係数だけで相関を判断するのは少し危ない。たとえば今回のデータ数は 5 と非常に少ないため、根拠としてはやや弱い。
※2　文献によって異なる。たとえば $\lvert r\rvert \ge 0.2$ で弱い相関を認めるケースもある。

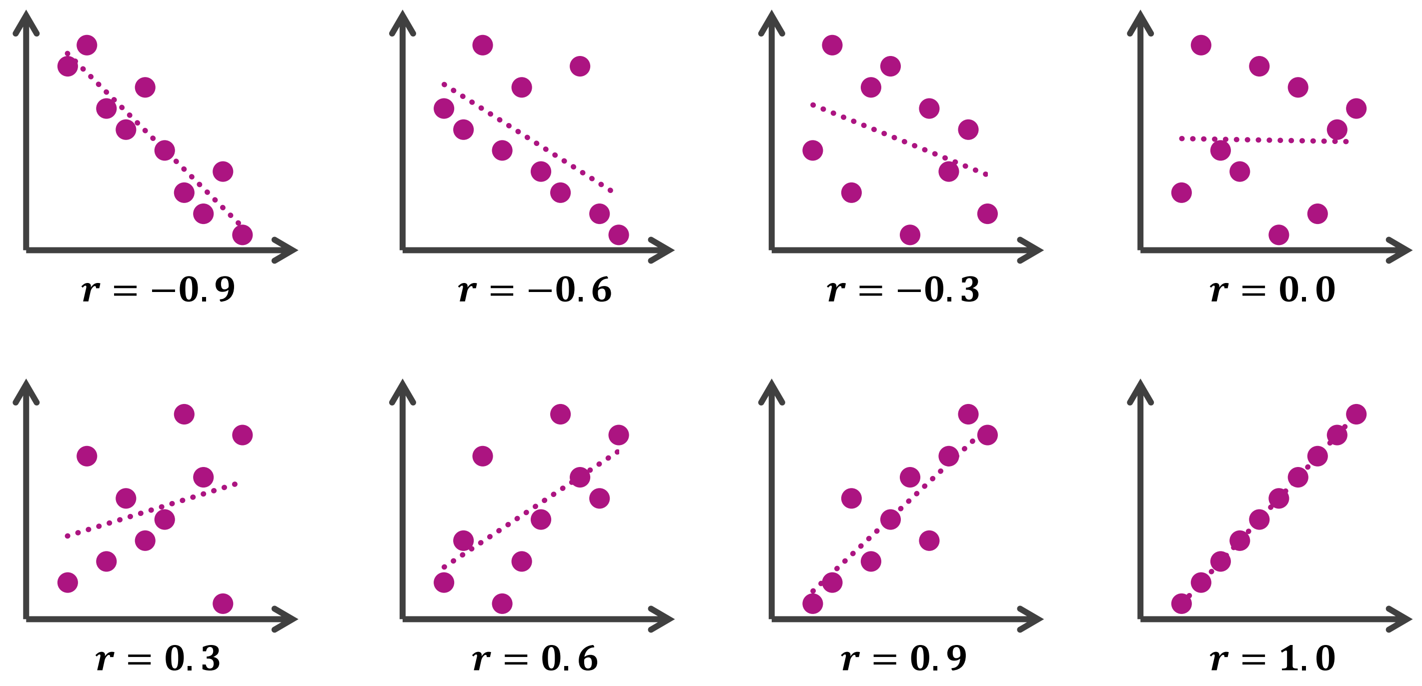
ヒストグラム 1

平均 2

標準偏差 3

相関係数 4

参考：相関係数 r と散布図（グラフ）の目安は以下の通り



“本章のゴール” を解こう

ある塾では、10 人が数学のテストを受験しました。成績は以下の通りでした。

A 君の偏差値はいくつですか。※

A君	B君	C君	D君	E君	F君	G君	H君	I君	J君
96点	70点	59点	54点	49点	41点	38点	36点	33点	24点

※偏差値の定義は次ページ参照

“本章のゴール” を解こう

偏差値の定義：(自分の点数 − 平均) ÷ (標準偏差) × 10 + 50

↑まずは偏差値の定義を知っておこう

“本章のゴール” を解こう

偏差値の定義：(自分の点数 − 平均) ÷ (標準偏差) × 10 + 50

1 まずは平均点を計算すると…　$(96+70+\cdots+33+24)\div 10=50$

	A君	B君	C君	D君	E君	F君	G君	H君	I君	J君
得点	96点	70点	59点	54点	49点	41点	38点	36点	33点	24点
点差										
点差^2										

"本章のゴール" を解こう

偏差値の定義：(自分の点数 − 平均) ÷ (標準偏差) × 10 + 50

1. まずは平均点を計算すると…　$(96+70+\cdots+33+24)\div 10 = 50$
2. 次に標準偏差を計算すると…　$\sqrt{(2116+400+\cdots+676)\div 10} = 20$

	A君	B君	C君	D君	E君	F君	G君	H君	I君	J君
得点	96点	70点	59点	54点	49点	41点	38点	36点	33点	24点
点差	+46	+20	+9	+4	-1	-9	-12	-14	-17	-26
点差^2	2116	400	81	16	4	81	144	196	289	676

“本章のゴール” を解こう

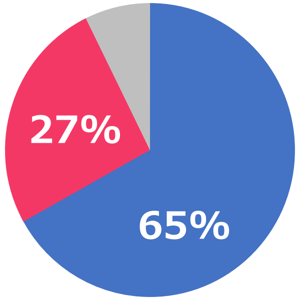
偏差値の定義：(自分の点数 − 平均) ÷ (標準偏差) × 10 + 50

1. まずは平均点を計算すると…　$(96 + 70 + \cdots + 33 + 24) \div 10 = 50$
2. 次に標準偏差を計算すると…　$\sqrt{(2116 + 400 + \cdots + 676) \div 10} = 20$
3. A 君の偏差値は…　$(96 - 50) \div 20 \times 10 + 50 = 73$

	A君	B君	C君	D君	E君	F君	G君	H君	I君	J君
得点	96点	70点	59点	54点	49点	41点	38点	36点	33点	24点
点差	+46	+20	+9	+4	-1	-9	-12	-14	-17	-26
点差^2	2116	400	81	16	4	81	144	196	289	676

統計のさらなる活用

今回のテストの
難易度は適正だったか？



世論調査には
どれくらいの誤差がある？

薬の効果は
本当にあるのか？

統計を使うと、他にも様々な問題が解ける

※今回は相関係数までしか説明しなかったが、他にも「正規分布」や「仮説検定」などを学ぶと、より多くの問題（一番右の例など）が解ける

CHAPTER 5

いろいろな関数

本章のゴール

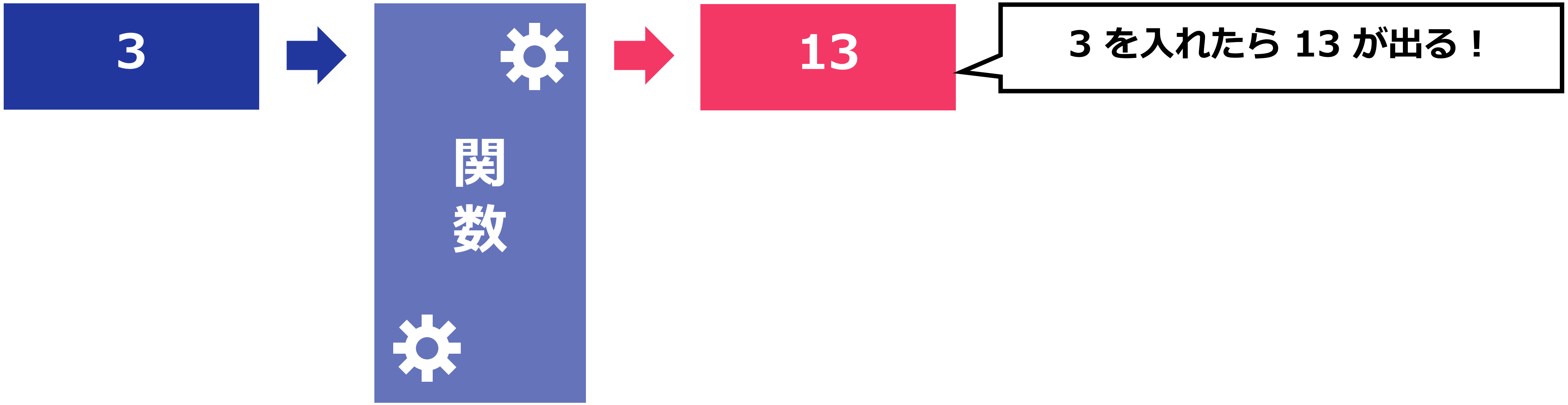
ある週の東京都の新型コロナウイルス感染者数は 10 人でした。一週間で 2 倍になるとき、感染者数が 10 万人を超えるのは何週間後でしょうか。

関数とは

関数 ＝ “何か” を入力したら

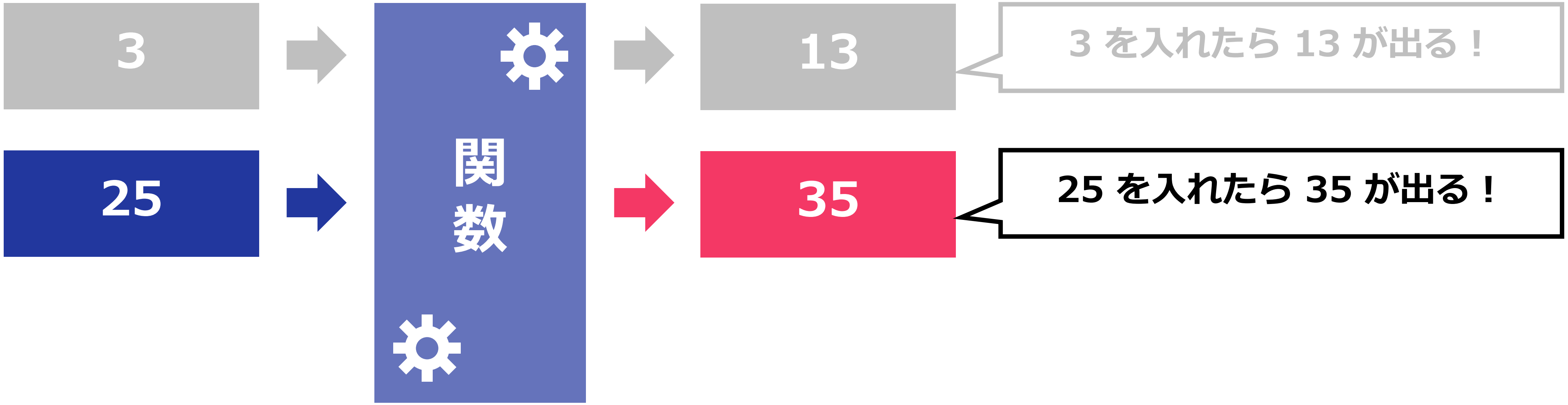
“何か” が出てくる機械のようなもの

関数とは



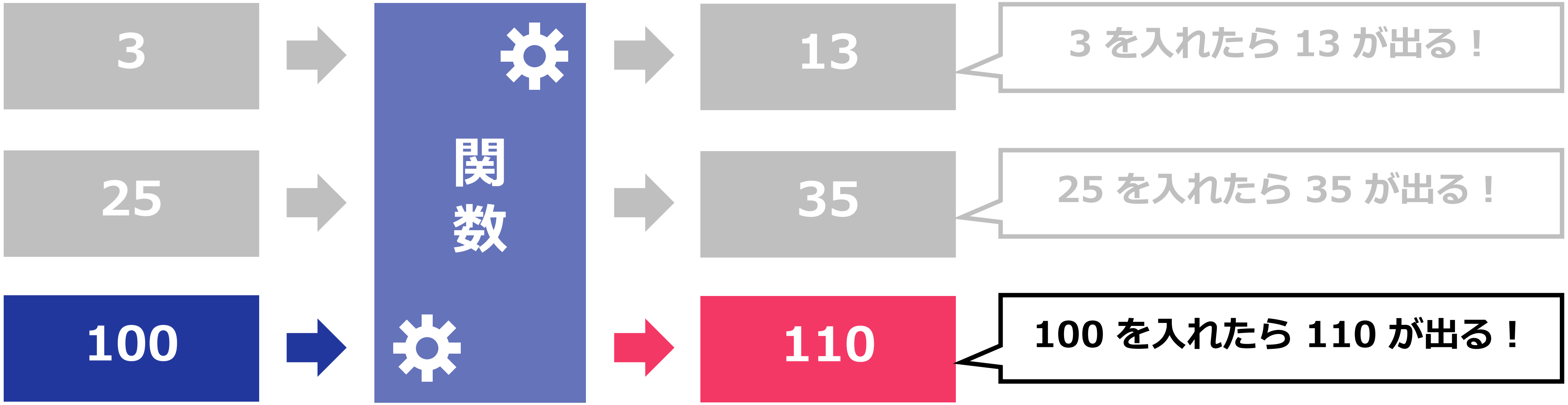
例：整数 x を入れたら整数 $x+10$ が出てくる関数の場合…

関数とは



例：整数 x を入れたら整数 $x+10$ が出てくる関数の場合…

5 関数とは



例：整数 x を入れたら整数 $x+10$ が出てくる関数の場合…

関数の書き方

Q. 関数はどうやって数学的に書くか？

※状況によっては $f(x) = x + 10$ のように書くこともある

Q. 関数はどうやって数学的に書くか？

➡ 基本的には「$y = x + 10$」のような形で書く

※状況によっては $f(x) = x + 10$ のように書くこともある

チャレンジ

フィート [ft] 単位の高度を入力し、メートル [m] 単位の高度を出力する関数を考えてください。

ただし、1 フィートは 0.3048 メートルです。（例 : 30000ft = 9144m）

チャレンジ

フィート [ft] 単位の高度を入力し、メートル [m] 単位の高度を出力する関数を考えてください。
ただし、**1 フィートは 0.3048 メートル**です。（例：30000ft = 9144m）

答え

$$y = 0.3048x$$

(または　$f(x) = 0.3048x$)

関数には様々な種類があります

基本的なものとして、4つ理解しましょう

1個目：一次関数

いろいろな関数 (1/4)

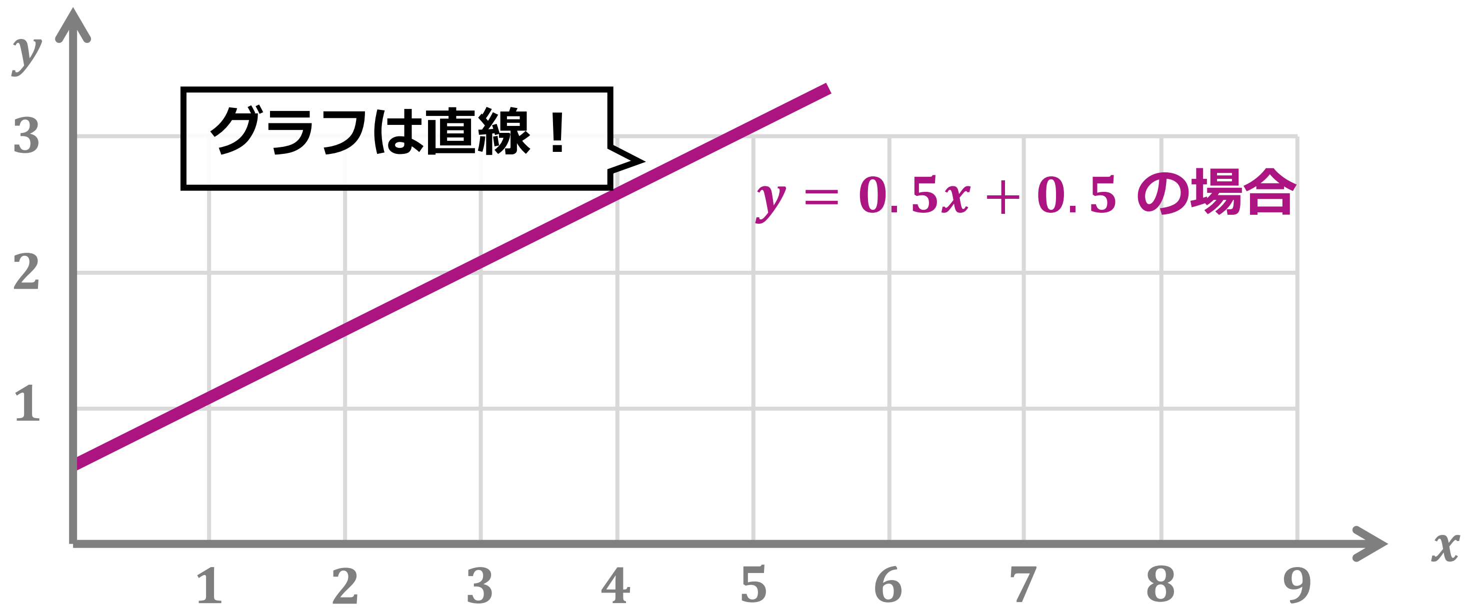
$y = ax + b$ の形で表される関数

例：$y = x$、$y = 3x$、$y = 0.5x + 0.5$、$y = 2x - 1$、・・・

いろいろな関数 (1/4)

$y = ax + b$ の形で表される関数

例：$y = x$、$y = 3x$、$y = 0.5x + 0.5$、$y = 2x - 1$、・・・



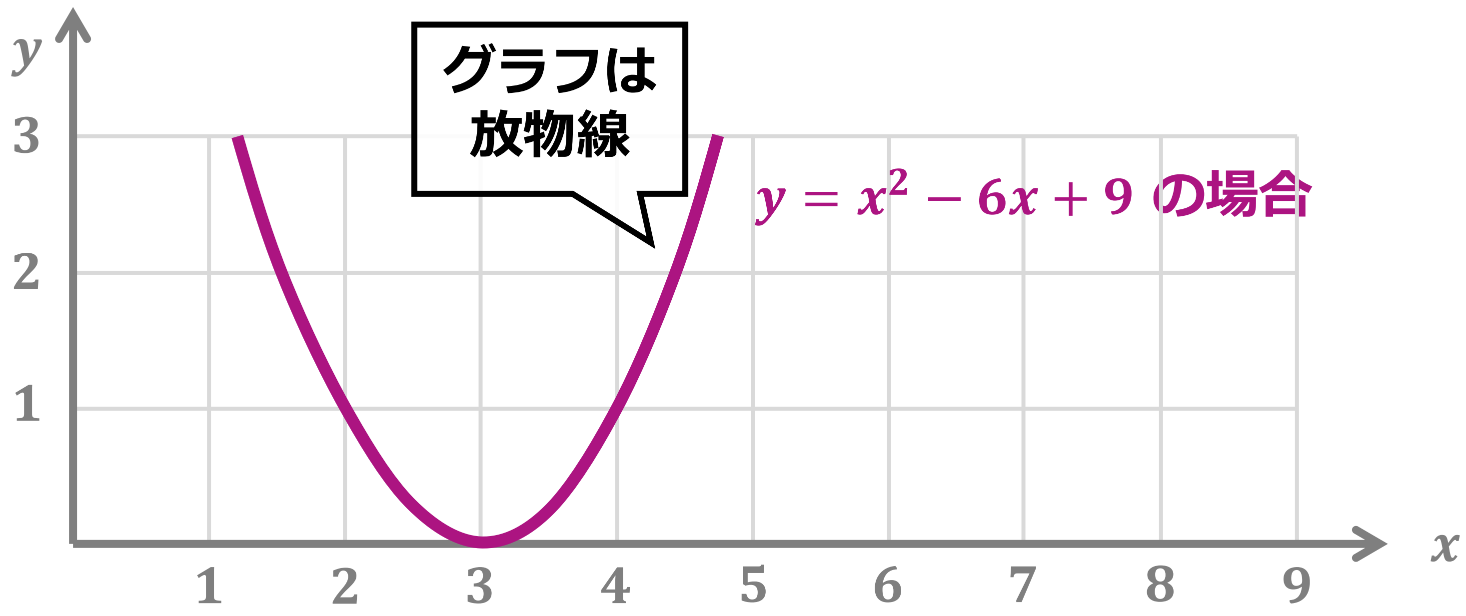
2 個目：二次関数

$y = ax^2 + bx + c$ の形で表される関数

例：$y = x^2$、$y = 2x^2 + 1$、$y = x^2 - 6x + 9$、・・・

$y = ax^2 + bx + c$ の形で表される関数

例：$y = x^2$、$y = 2x^2 + 1$、$y = x^2 - 6x + 9$、…



３個目：指数関数

指数関数の前に (1)

累乗 a^b は b が負の数でも計算できる

計算方法 b を 1 減らすときには $\div a$ する

指数関数の前に (1)

累乗 a^b は b が負の数でも計算できる

計算方法 b を 1 減らすときには $\div a$ する

10^{-2}	÷10 ←	10^{-1}	÷10 ←	10^0	→ ×10	10^1	→ ×10	10^2
0.01		0.1		1		10		100

指数関数の前に (2)

累乗 a^b は b が整数でなくても計算できる

計算方法 b が一定だけ増えると、答えも一定だけ掛けられるように上手くやる※

※少し難しいが、実際は $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$ という式にしたがって計算できる。たとえば $9^{1.5} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$

指数関数の前に (2)

累乗 a^b は b が整数でなくても計算できる

計算方法 b が一定だけ増えると、答えも一定だけ掛けられるように上手くやる※

b が 0.5 増えると 3 倍に！

$9^{0.0} \xrightarrow{\times 3} 9^{0.5} \xrightarrow{\times 3} 9^{1.0} \xrightarrow{\times 3} 9^{1.5} \xrightarrow{\times 3} 9^{2.0}$

$9^{0.0}$	$9^{0.5}$	$9^{1.0}$	$9^{1.5}$	$9^{2.0}$
1	3	9	27	81

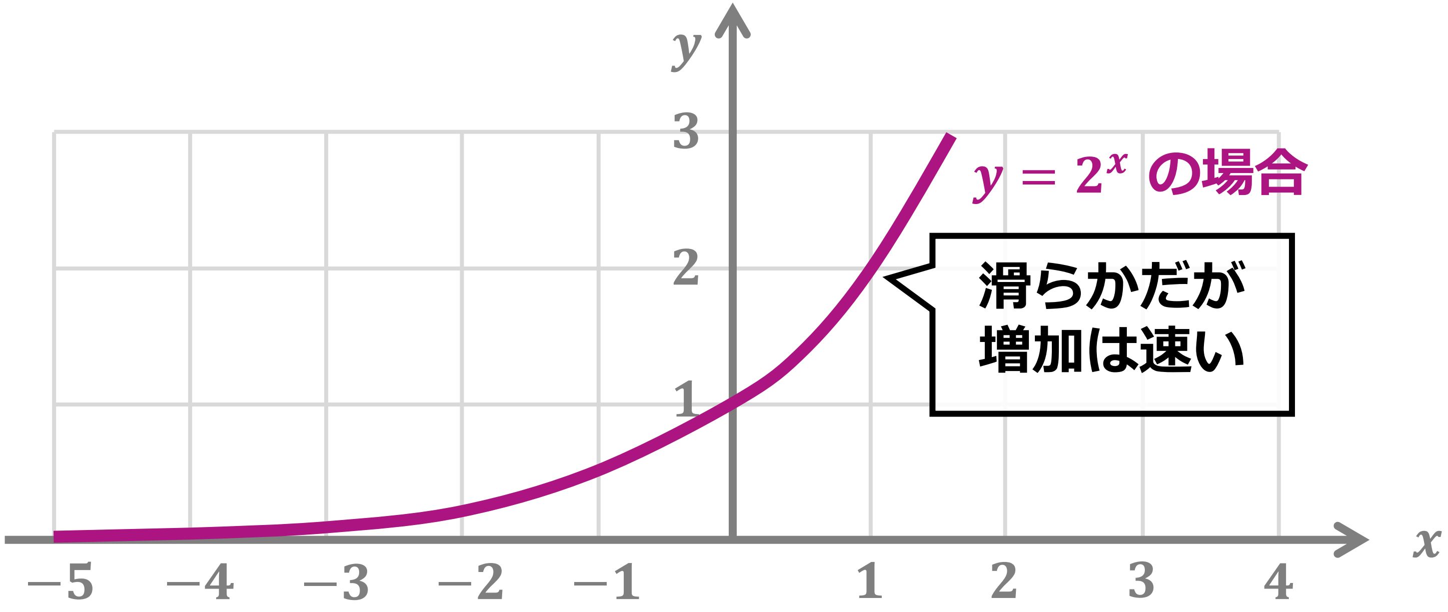
※少し難しいが、実際は $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$ という式にしたがって計算できる。たとえば $9^{1.5} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$

指数関数とは、$y = a^x$ の形で表される関数

例：$y = 2^x$ など

指数関数とは、$y = a^x$ の形で表される関数

例：$y = 2^x$ など



4 個目：対数関数

対数関数の前に

対数 $\log_a b$ は「a を何乗したら b になるか」

具体例	理由
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$\log_2 32 = 5$	$2^5 = 32$
$\log_2 64 = 6$	$2^6 = 64$

一次関数 1
二次関数 2
指数関数 3
対数関数 4

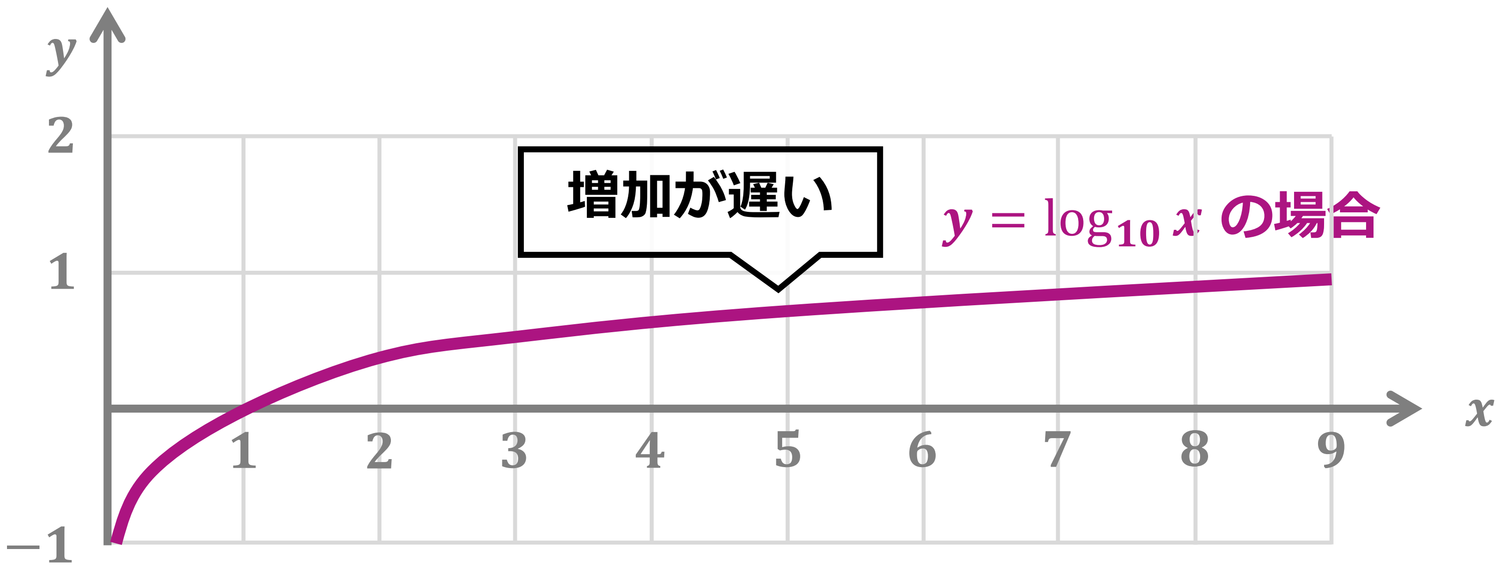
対数関数とは、$y = \log_a x$ の形で表される関数

例：$y = \log_{10} x$ など

いろいろな関数 (4/4)

対数関数とは、$y = \log_a x$ の形で表される関数

例：$y = \log_{10} x$ など

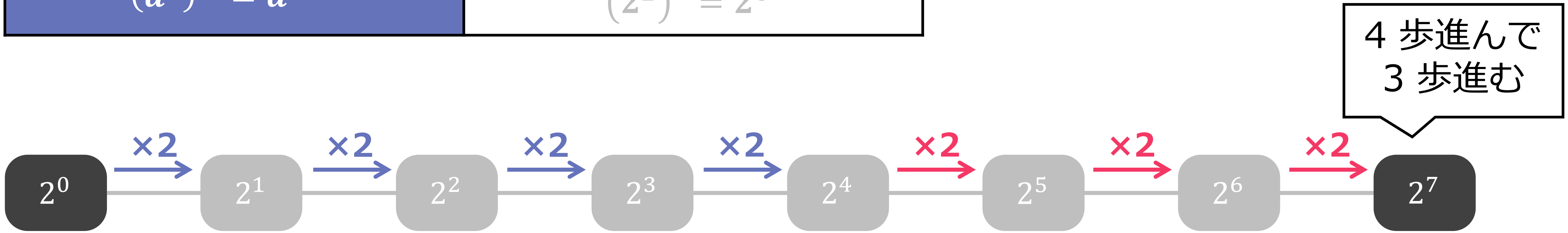


補足：指数関数／対数関数の公式

（難しいので読み飛ばしても構いません）

補足：指数関数の公式

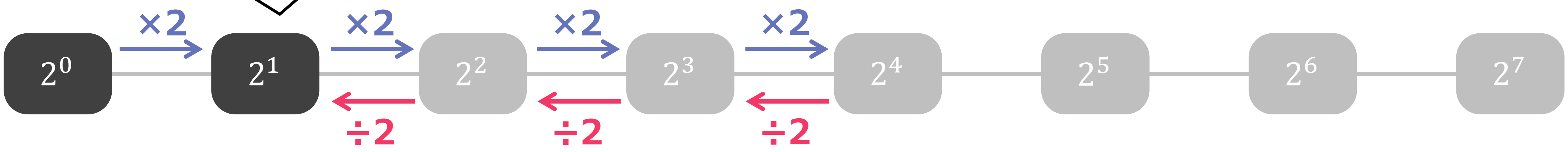
公式	具体例
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^4 \times 2^3 = 2^7$
$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$2^4 \div 2^3 = 2^1$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$(2^2)^3 = 2^6$



5 補足：指数関数の公式

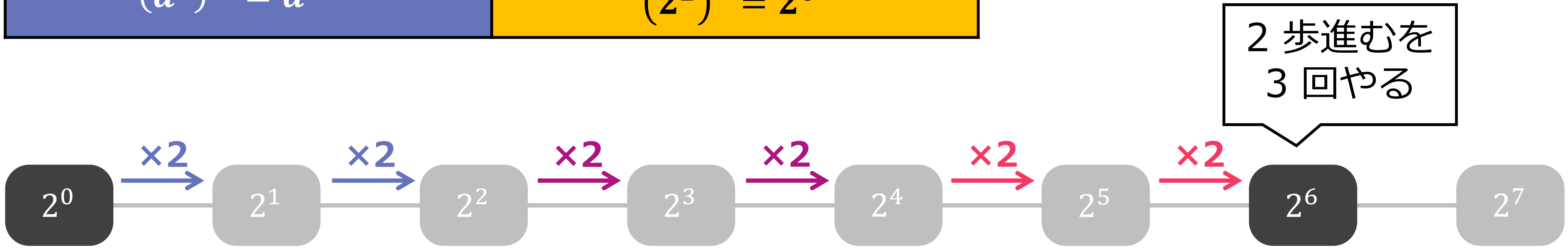
公式	具体例
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^4 \times 2^3 = 2^7$
$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$2^4 \div 2^3 = 2^1$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$\left(2^2\right)^3 = 2^6$

4 歩進んで
3 歩戻る



補足：指数関数の公式

公式	具体例
$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$2^4 \times 2^3 = 2^7$
$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$2^4 \div 2^3 = 2^1$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$(2^2)^3 = 2^6$



補足：対数関数の公式

公式	具体例
$\log_a N + \log_a M = \log_a NM$	$\log_2 16 + \log_2 8 = \log_2 128$
$\log_a N - \log_a M = \log_a \frac{N}{M}$	$\log_2 16 - \log_2 8 = \log_2 2$
$r \times \log_a N = \log_a (N^r)$	$3 \times \log_2 4 = \log_2 64$

$\log_2 x$ は「2 を何乗したら x になるか」であることを思い出そう！

4 歩進んで
3 歩進む

$\log_2 1 = 0 \xrightarrow{+1} \log_2 2 = 1 \xrightarrow{+1} \log_2 4 = 2 \xrightarrow{+1} \log_2 8 = 3 \xrightarrow{+1} \log_2 16 = 4 \xrightarrow{+1} \log_2 32 = 5 \xrightarrow{+1} \log_2 64 = 6 \xrightarrow{+1} \log_2 128 = 7$

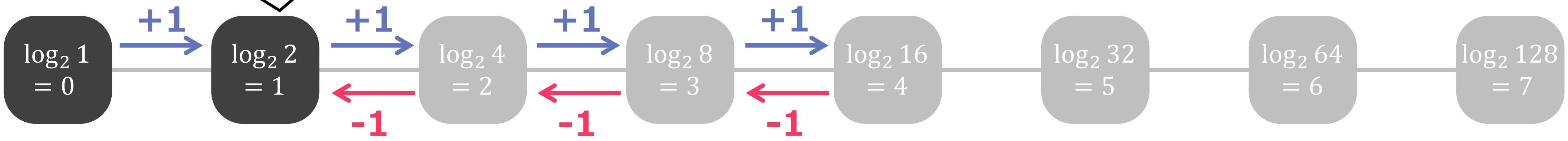
※少し難しいが、対数関数には「底の変換公式」$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ も知られている

補足：対数関数の公式

公式	具体例
$\log_a N + \log_a M = \log_a NM$	$\log_2 16 + \log_2 8 = \log_2 128$
$\log_a N - \log_a M = \log_a \dfrac{N}{M}$	$\log_2 16 - \log_2 8 = \log_2 2$
$r \times \log_a N = \log_a (N^r)$	$3 \times \log_2 4 = \log_2 64$

$\log_2 x$ は「2 を何乗したら x になるか」であることを思い出そう！

4 歩進んで
3 歩戻る



※少し難しいが、対数関数には「底の変換公式」$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ も知られている

補足：対数関数の公式

公式	具体例
$\log_a \boldsymbol{N} + \log_a \boldsymbol{M} = \log_a \boldsymbol{NM}$	$\log_2 \mathbf{16} + \log_2 \mathbf{8} = \log_2 \mathbf{128}$
$\log_a \boldsymbol{N} - \log_a \boldsymbol{M} = \log_a \dfrac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{M}}$	$\log_2 \mathbf{16} - \log_2 \mathbf{8} = \log_2 \mathbf{2}$
$\boldsymbol{r} \times \log_a \boldsymbol{N} = \log_a(\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{r}})$	$\mathbf{3} \times \log_2 \mathbf{4} = \log_2 \mathbf{64}$

$\log_2 x$ は「2 を何乗したら x になるか」であることを思い出そう！

2 歩進むを
3 回やる

$\log_2 1 = 0$ $\xrightarrow{+1}$ $\log_2 2 = 1$ $\xrightarrow{+1}$ $\log_2 4 = 2$ $\xrightarrow{+1}$ $\log_2 8 = 3$ $\xrightarrow{+1}$ $\log_2 16 = 4$ $\xrightarrow{+1}$ $\log_2 32 = 5$ $\xrightarrow{+1}$ $\log_2 64 = 6$ — $\log_2 128 = 7$

※少し難しいが、対数関数には「底の変換公式」$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ も知られている

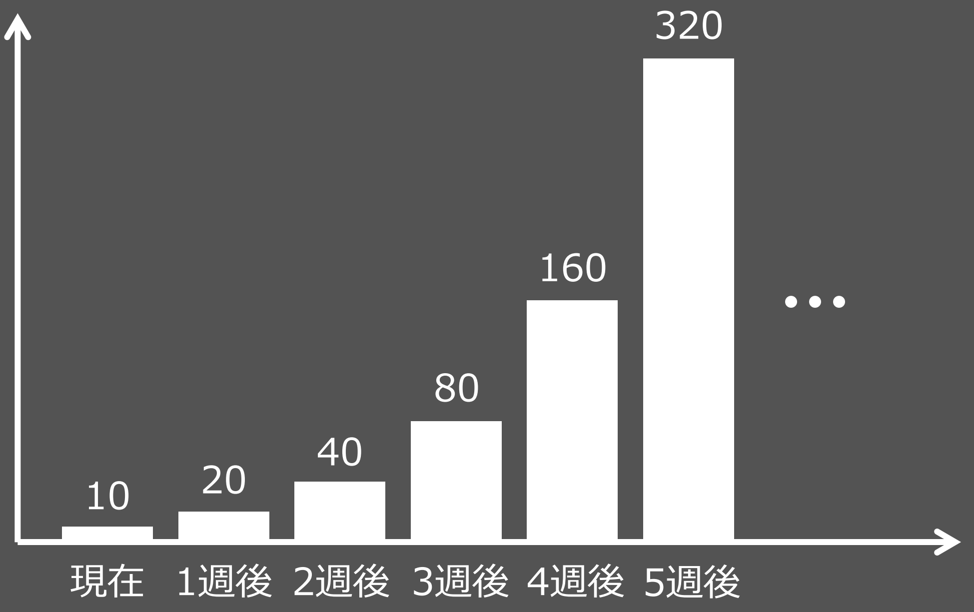
“本章のゴール” を解こう（難）

ある週の東京都の新型コロナウイルス感染者数は 10 人でした。

一週間で 2 倍になるとき、感染者数が 10 万人を超えるのは何週間後でしょうか。

ただし、$\log_{10} 2 = 0.301$ とします※。

（難しいので飛ばしてもかまいません）



※ $\log_{10} x$ の値は「常用対数表」で検索すると出てきます

“本章のゴール” を解こう（難）

もちろん直接計算しても良いが、とても面倒！

	感染者数
0 週後	10 人
1 週後	20 人
2 週後	40 人
3 週後	80 人
4 週後	160 人

	感染者数
5 週後	320 人
6 週後	640 人
7 週後	1280 人
8 週後	2560 人
9 週後	5120 人

	感染者数
10 週後	10240 人
11 週後	20480 人
12 週後	40960 人
13 週後	81920 人
14 週後	163840 人

そこで、計算方法を少し工夫してみよう

まず、x 週間後の感染者数は最初の 2^x 倍になっているが、「感染者数 10 人」が 10 万人になるためには **10000 倍**になる必要があるので、

$$2^x = 10000$$

を満たす x が（大まかな）答えである。

“本章のゴール” を解こう（難）

さて、$2^x = 10000$ を満たす x はどうやって求められるのか？

$2^x = 10000$ を満たすということは、$\log_{10}(2^x) = \log_{10} 10000$ すなわち

$$\log_{10}(2^x) = 4$$

を満たすということである。そこで対数関数の公式（p.136）より、$\log_{10}(2^x)$ の値は $(\log_{10} 2) \times x$ すなわち $0.301x$ と等しいため、

$$0.301x = 4$$

と式変形できる。したがって答えは $4 \div 0.301 = 13.28 \ldots$（つまり 14 週後）

CHAPTER 6
三角比と三角関数

本章のゴール

太郎君は、ある夏の日の夕方に、木の影の長さを測りました。測定結果は 80 メートルでした。太陽の仰角が 14° であったとき、木の高さは何メートルですか。

代表的な三角比として

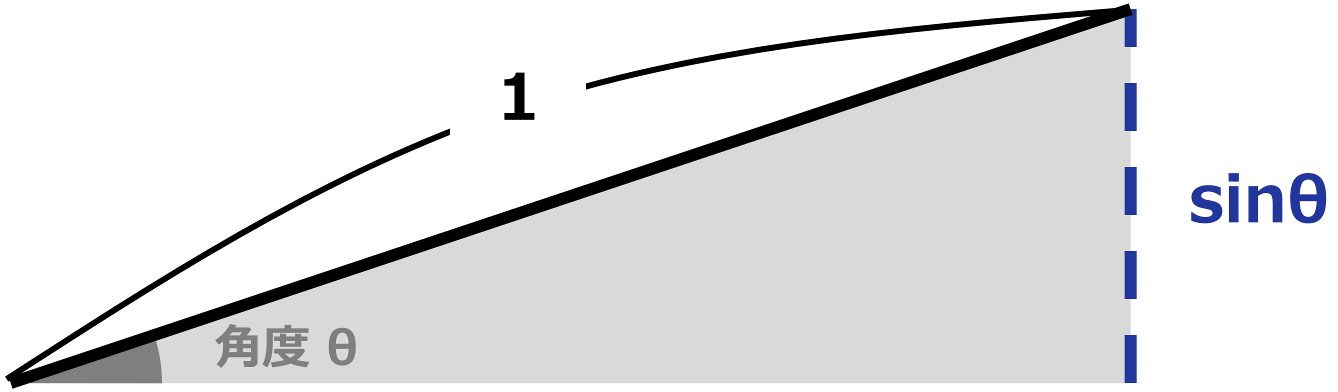
sin, cos, tan の 3 種類がある

6 三角比とは

sin θ 1

cos θ 2

tan θ 3



sinθ は斜辺 1・角度 θ の

直角三角形の高さ

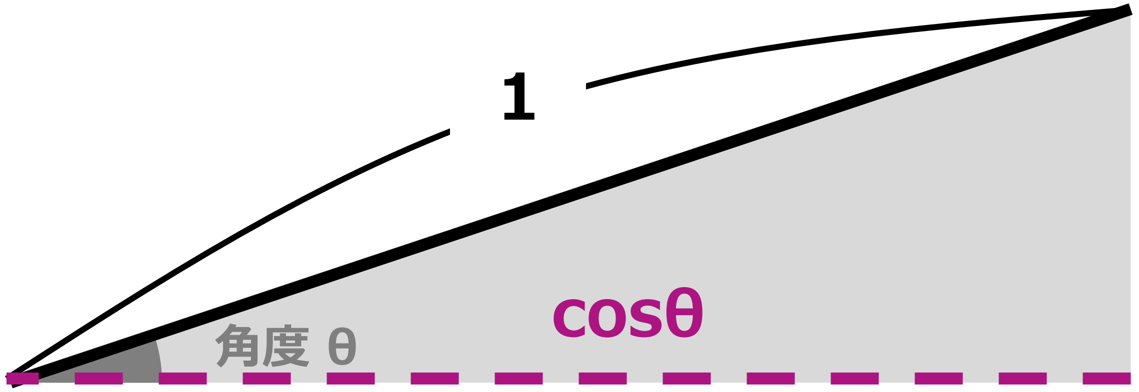
※θが小さいときは短い

三角比とは

sin θ 1

cos θ 2

tan θ 3

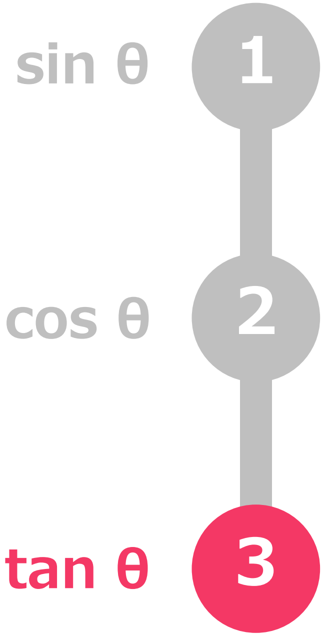


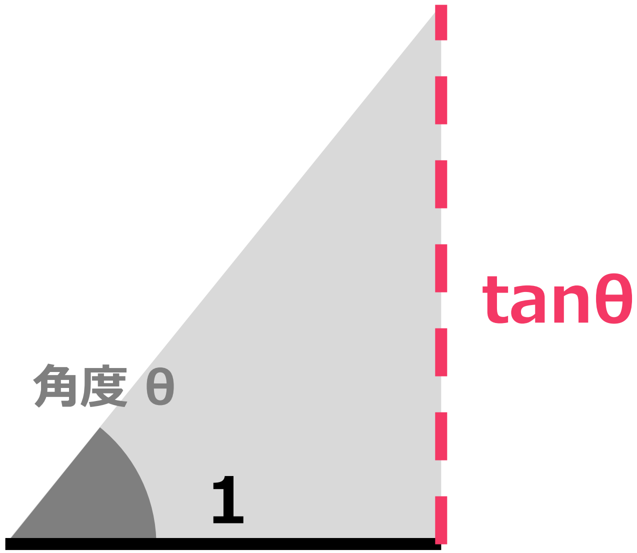
cosθ は斜辺 1・角度 θ の

直角三角形の底辺

※θが小さいときは長い

6 三角比とは





tanθ は底辺 1・角度 θ の

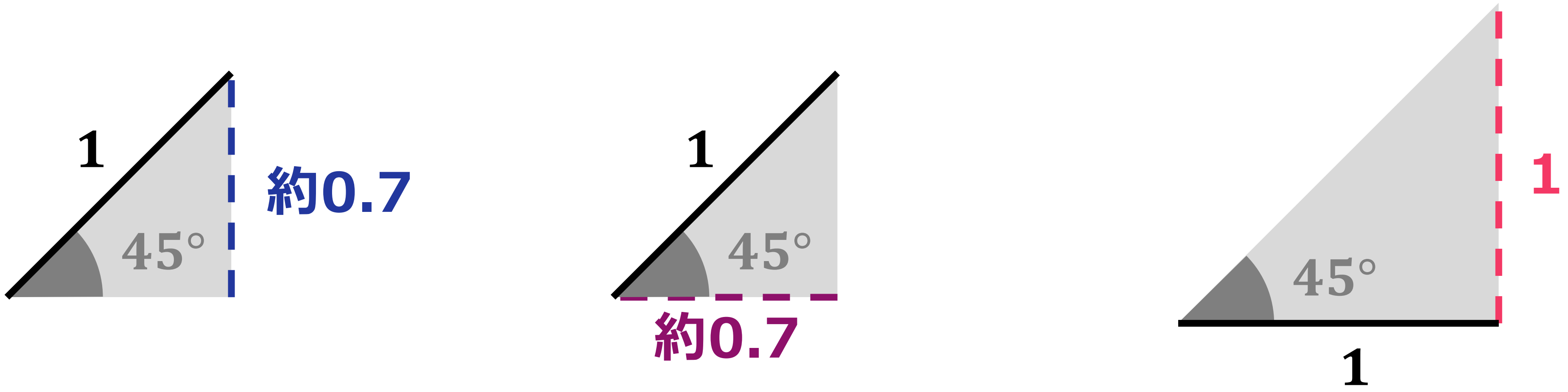
直角三角形の高さ

※1 を超えることもある

三角比は具体的に

どういう値になるのか？

三角比の具体例



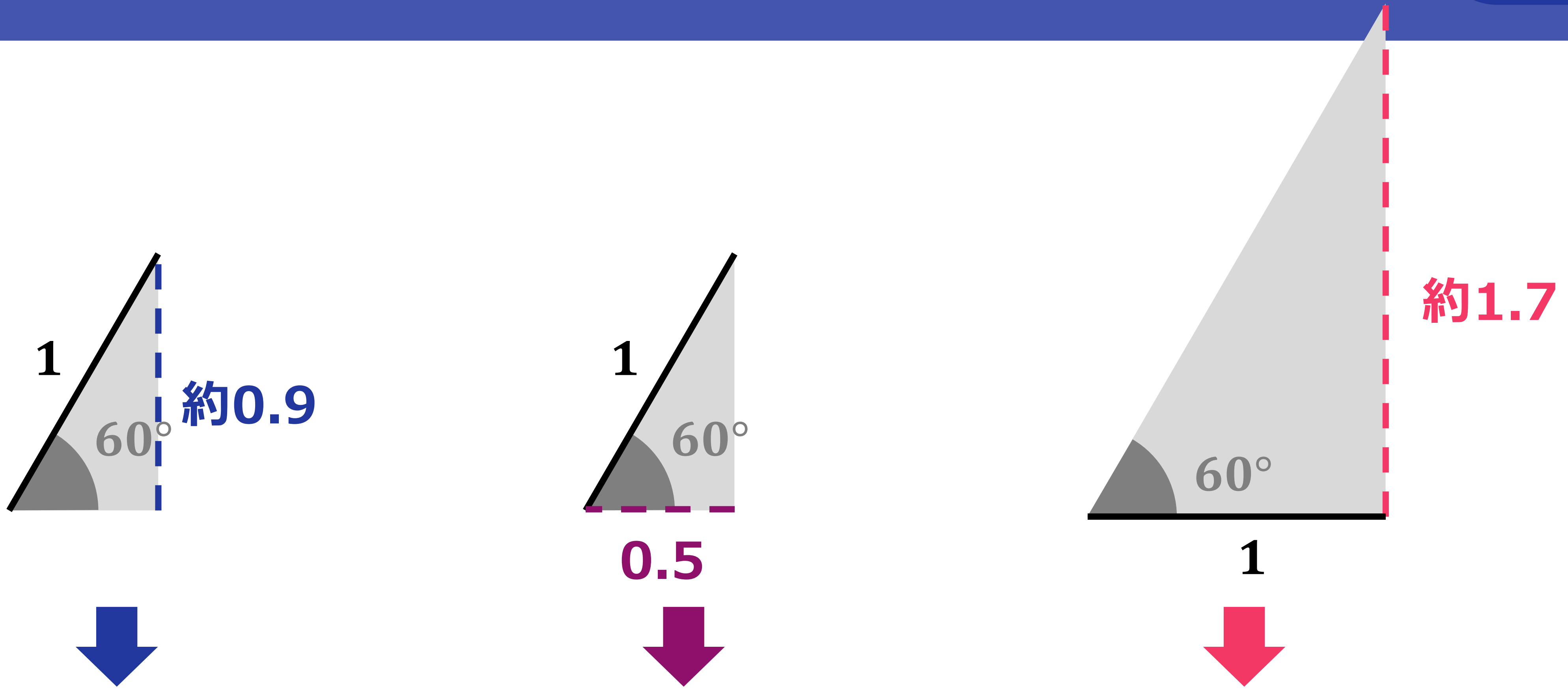
$\sin 45^\circ \fallingdotseq 0.7$

$\cos 45^\circ \fallingdotseq 0.7$

$\tan 45^\circ = 1$

※厳密には、$\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$、$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ である。直角三角形の斜辺の長さが、他の辺の長さの $\sqrt{2}$ 倍であることから導出できる。

三角比の具体例



$\sin 60° \fallingdotseq 0.9$

$\cos 60° = 0.5$

$\tan 60° \fallingdotseq 1.7$

※厳密には、$\sin 60° = \sqrt{3}/2$、 $\tan 60° = \sqrt{3}$ である。cos の値に関しては、正三角形を半分に割った形を考えると導出できる。

6 三角比の具体例

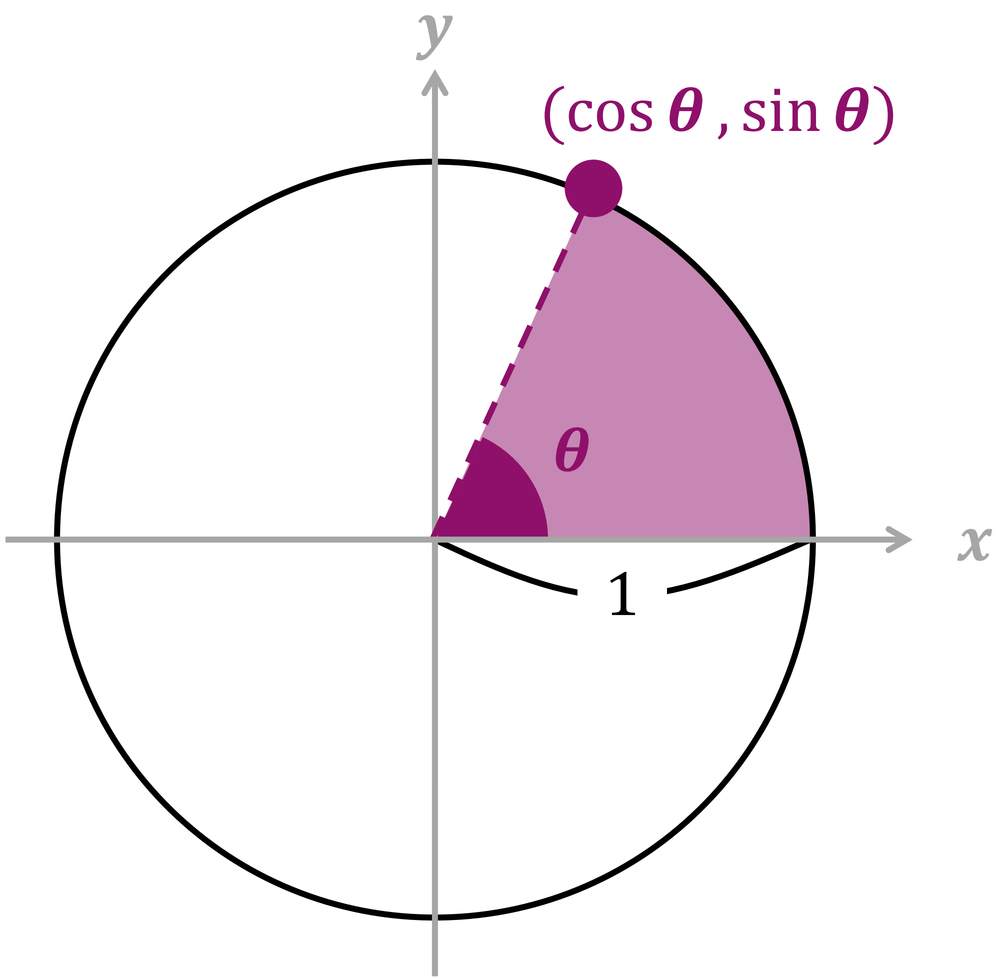
角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	– – –

上の三角関数表を使うと、他の角度 θ の場合でも三角比が計算できる

三角比は $\theta > 90^\circ$ の場合でも

計算できるのか？

三角比の拡張



三角比は以下のようにに定義することもできる：

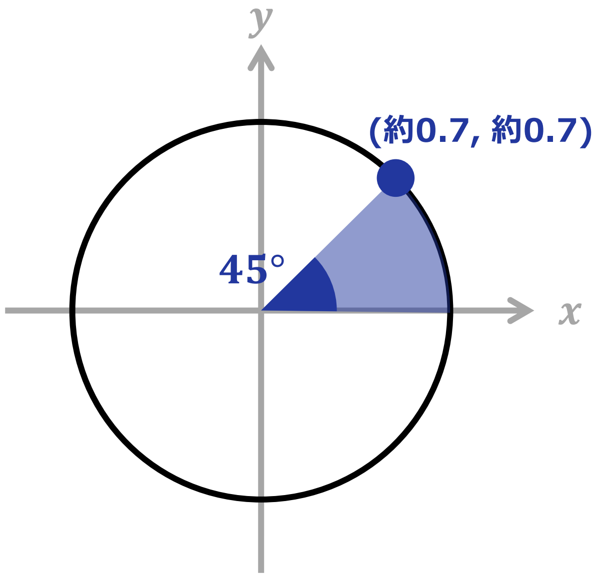
次の 2 つの図形の交点の座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$ である。

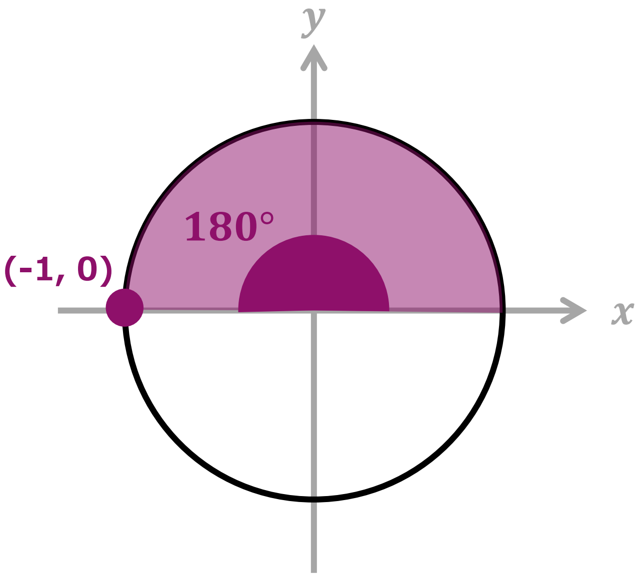
- x 軸の正の部分を時計回りに θ だけ回転させた線
- 半径 1 の円

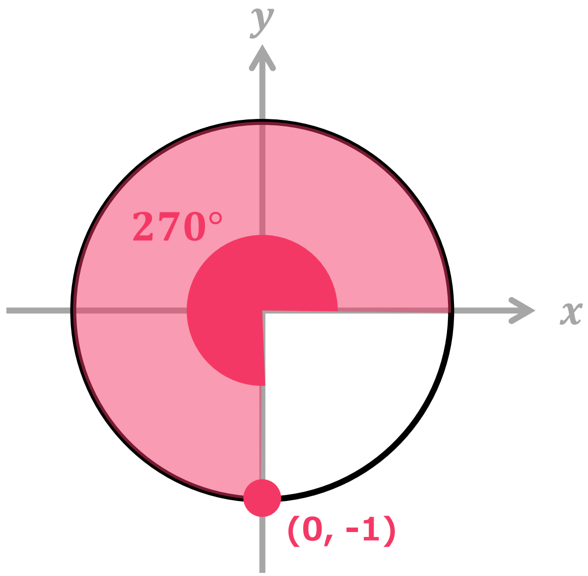
$\theta > 90^\circ$ でも計算できる

※ $\tan\theta$ は $\sin\theta$ を $\cos\theta$ で割った値

三角比の拡張：例







$\cos 45^\circ \fallingdotseq 0.7$
$\sin 45^\circ \fallingdotseq 0.7$

$\cos 180^\circ = -1$
$\sin 180^\circ = 0$

$\cos 270^\circ = 0$
$\sin 270^\circ = -1$

それでは “三角比” の次に

“三角関数” はどういうものか？

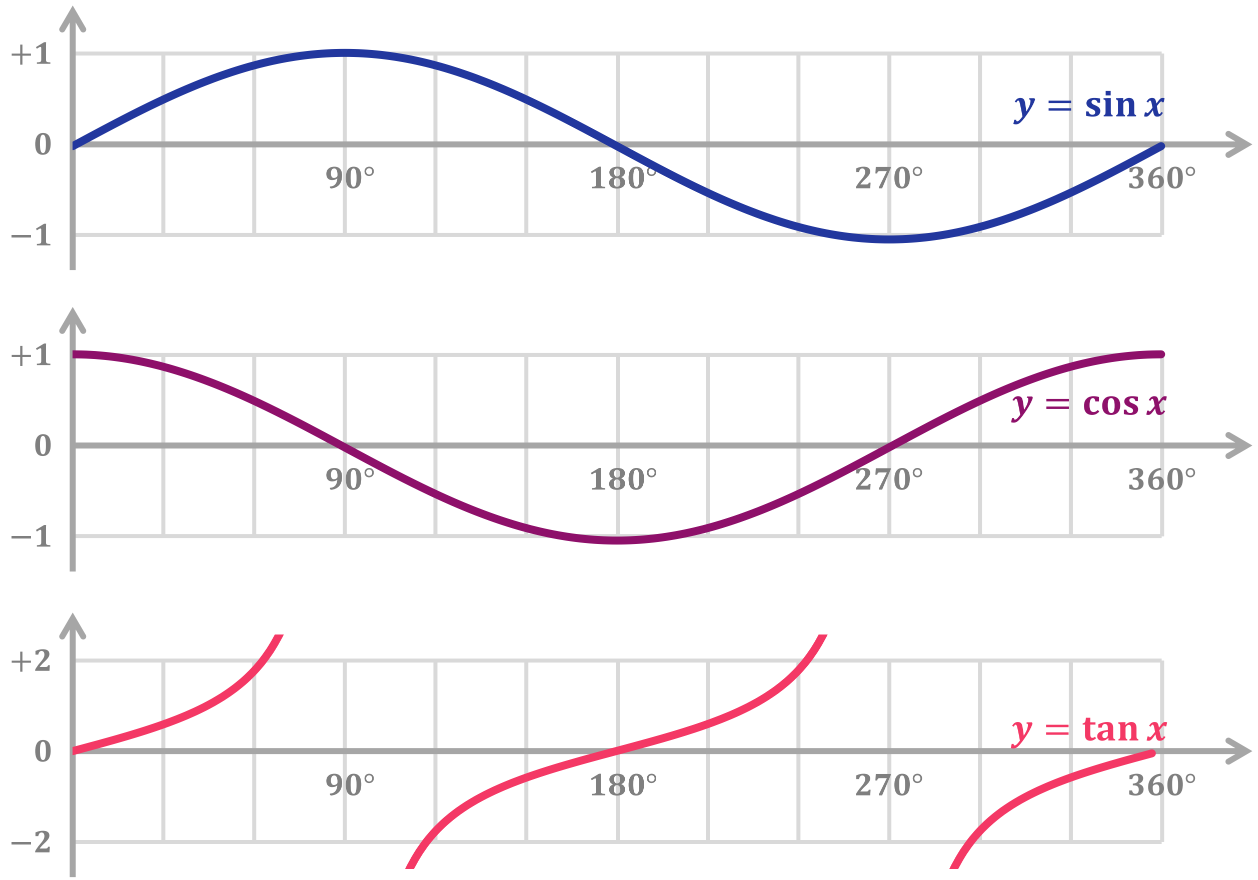
三角関数とは

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ などを

三角関数という

関数のグラフは右図のとおり

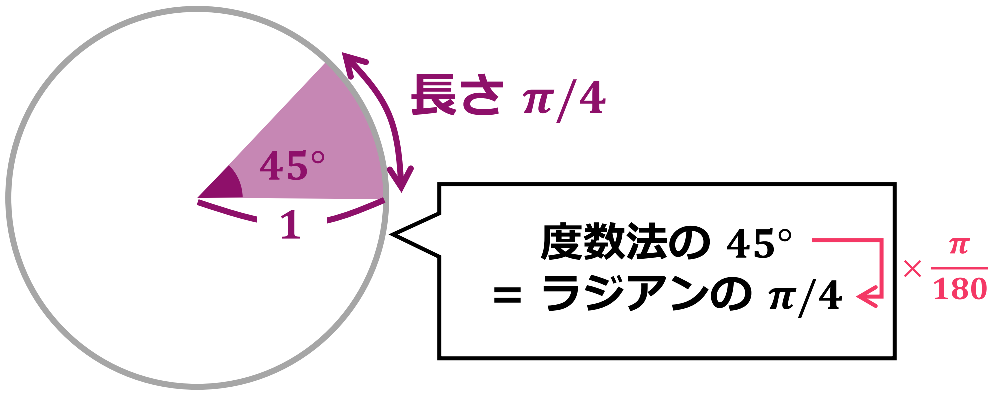
波のようになっている

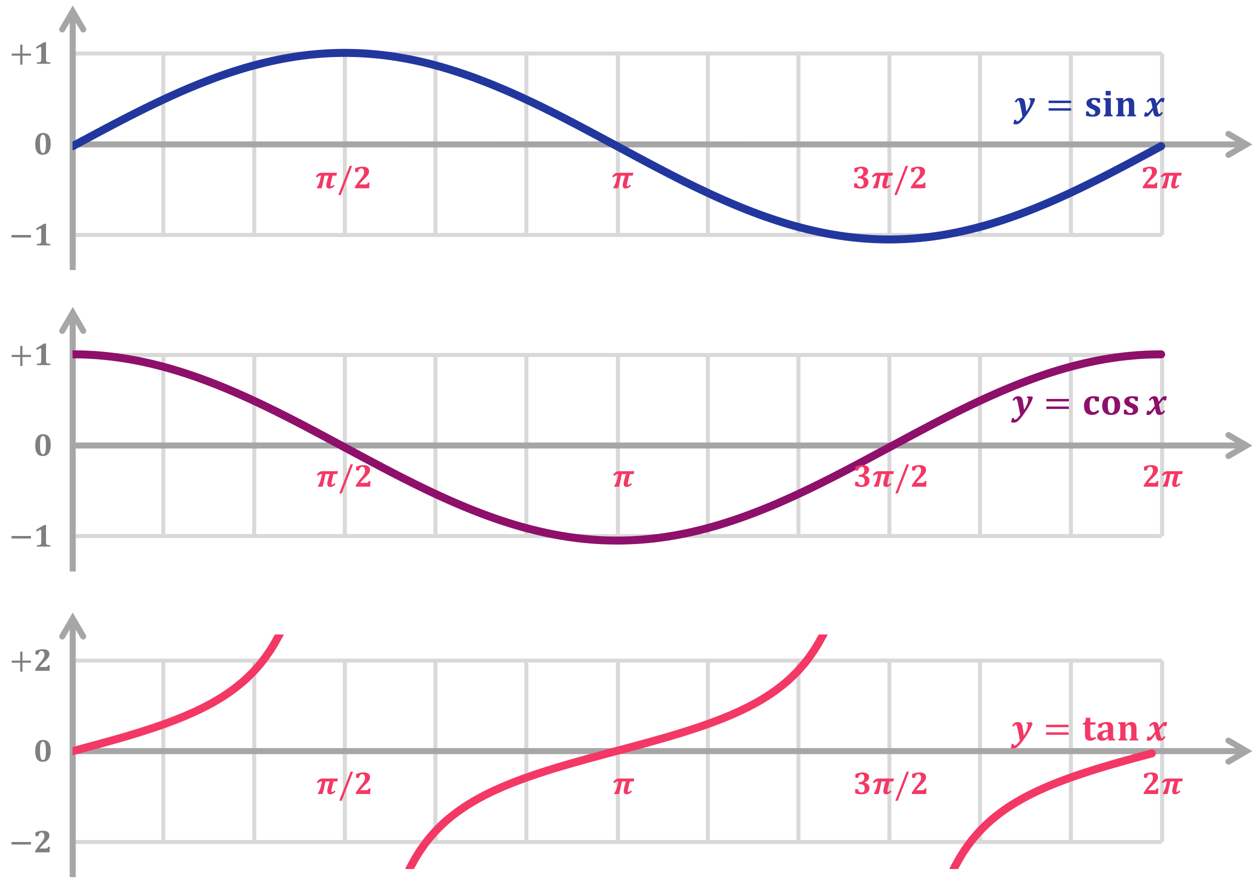


補足：ラジアンについて

なお、三角関数では、角度 x をラジアンという単位で表すことがある（半径 1 の円の弧の長さで角度を表す）

角度 $\theta°$ をラジアンに変換するには θ を $\pi/180$ 倍すれば良い





※ラジアンで表すと、三角関数の微分（本スライドの範囲外）を計算しやすいなどのメリットがある。

発展：加法定理

三角関数では、以下のような加法定理が成り立つ

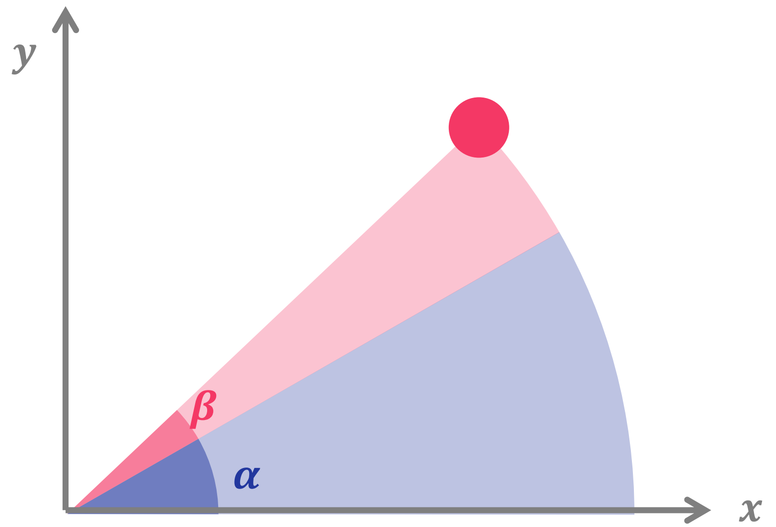
$\sin 30°$ と $\sin 45°$ の値がわかっていて、 $\sin 75°$ を求めるような場面で役立つ

※難易度が高いので読み飛ばしてかまいません

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \times \cos\beta + \cos\alpha \times \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \times \cos\beta - \sin\alpha \times \sin\beta$$

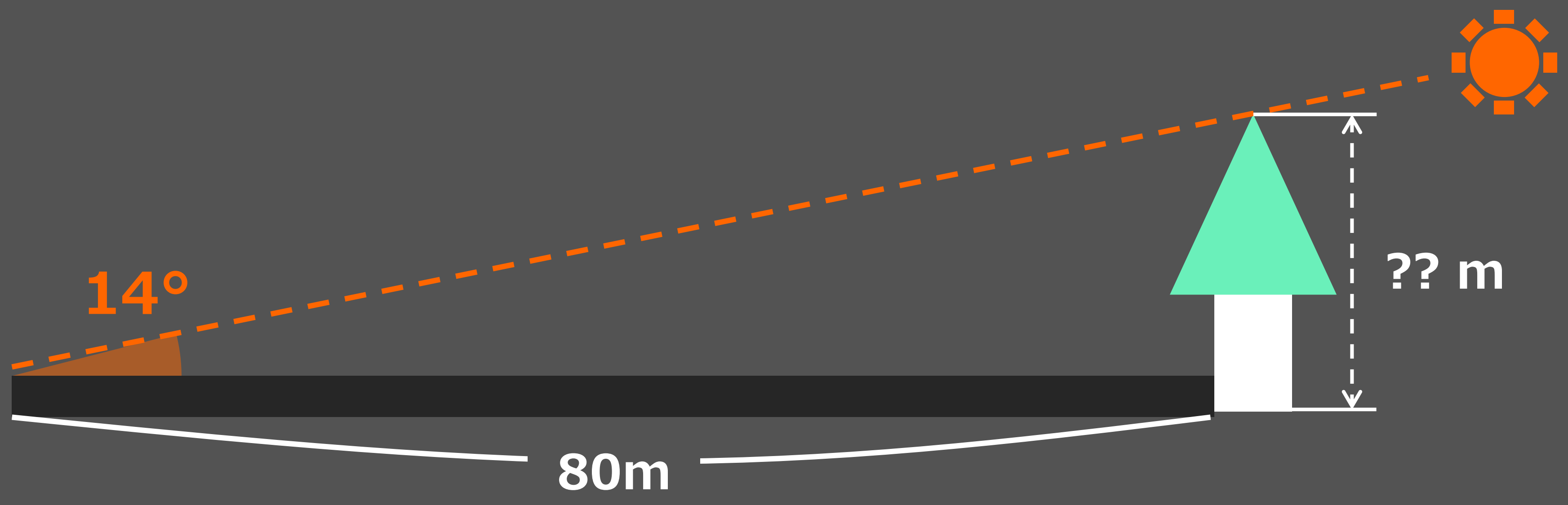
特に、$\sin 2\theta = 2\sin\theta \times \cos\theta$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$



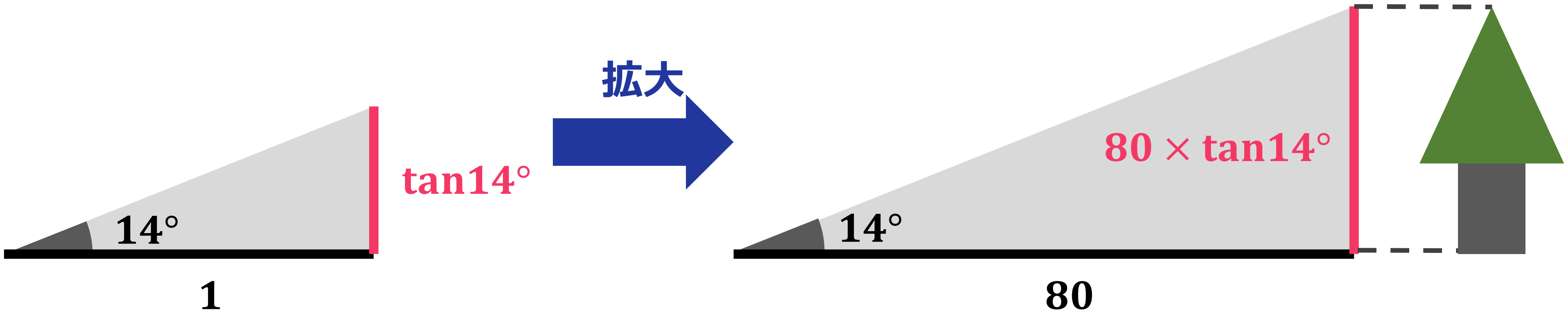
“本章のゴール” を解こう

ある夏の日の夕方に木の影を測ったところ、長さが 80 メートルでした。
太陽の仰角が 14° であったとき、木の高さは何メートルですか。



まず、木の高さは $80 \times \tan 14°$ メートルである

※ 6 章前半の「三角比」を思い出してみましょう



そこで、$80 \times \tan 14^\circ$ の値はいくつか？

三角関数表より $\tan 14^\circ \fallingdotseq 0.25$ なので、答えは $80 \times 0.25 = 20$ メートル

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643

CHAPTER 7

証明のやり方

本章のゴール

A〜E の 5 人の生徒がおり、それらのうち 2 人が嘘つきです。あなたは以下のような証言を得ました。

- 生徒 A「生徒 B は嘘つきである」
- 生徒 B「生徒 C は正直者である」
- 生徒 C「生徒 D は正直者である」

正直者は必ず正しいことを言い、嘘つきは必ず間違ったことを言います。このとき、生徒 A は正直者でしょうか。

7 証明とは

数学では “証明” というキーワードをよく聞くが

どういうことか？

証明とは

証明 ＝　ある事柄が成り立つことを明らかにすること

つまり、「なぜ？」を解決すること

※数学では、証明すべき事柄のことを「命題」と呼ぶことがある。

証明の例

例

n を偶数とするとき、$n \times n \times n$ が 8 の倍数になることを証明してください。

証明の例

例 n を偶数とするとき、$n \times n \times n$ が 8 の倍数になることを証明してください。

$n=2$ だと 2×2×2=8 (8 の倍数)
$n=6$ だと 6×6×6=216 (8 の倍数)
ヨシ、証明できた！

他の n では 8 の倍数でないかもしれないよ。

証明の例

この問題では、どんな場合でも成り立つことを

証明しなければならない

ではどうやって証明するか？

7 証明の例

例

n を偶数とするとき、$n \times n \times n$ が 8 の倍数になることを証明してください。

証明

$m \times 2 = n$ とするとき（ここで m は整数）、

$$
\begin{aligned}
n \times n \times n &= (m \times 2) \times (m \times 2) \times (m \times 2) \\
&= (m \times m \times m) \times (2 \times 2 \times 2) \\
&= (m \times m \times m) \times 8
\end{aligned}
$$

$m \times m \times m$ は整数なので、$n \times n \times n$ は 8 の倍数。

代表的な証明方法

証明のテクニックは様々ですが、本章では

代表的な 2 つを紹介します

方法１：背理法

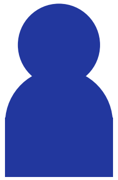
代表的な証明方法（1/2）

背理法	“証明すべき事柄” が間違っていることを仮定すると 矛盾が起こることを導く。

代表的な証明方法 (1/2)

背理法	“証明すべき事柄” が間違っていることを仮定すると 矛盾が起こることを導く。

例として、三角形の内角のうち
少なくとも 1 つが 60° 以上
であることを証明しよう！

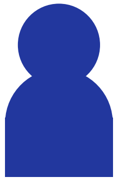


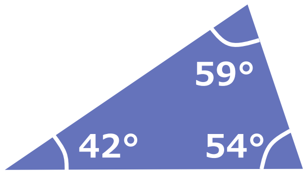
7 代表的な証明方法 (1/2)

背理法

"証明すべき事柄" が間違っていることを仮定すると
矛盾が起こることを導く。

例として、三角形の内角のうち
少なくとも 1 つが 60° 以上
であることを証明しよう！



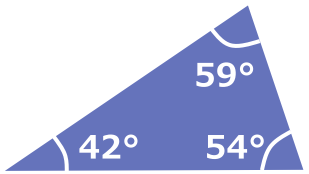


全部の内角が
60°未満と仮定
→内角の和は 180°未満

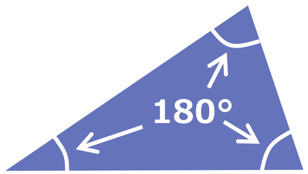
代表的な証明方法（1/2）

背理法	“証明すべき事柄” が間違っていることを仮定すると 矛盾が起こることを導く。

例として、三角形の内角のうち
少なくとも 1 つが 60° 以上
であることを証明しよう！



全部の内角が
60°未満と仮定
→内角の和は 180°未満

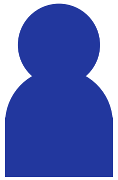


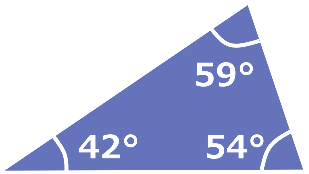
しかし「三角形の内角の和は 180°」に矛盾

背理法

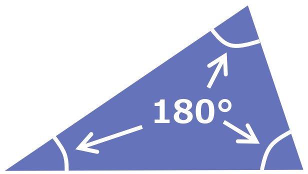
“証明すべき事柄” が間違っていることを仮定すると
矛盾が起こることを導く。

例として、三角形の内角のうち
少なくとも 1 つが 60° 以上
であることを証明しよう！

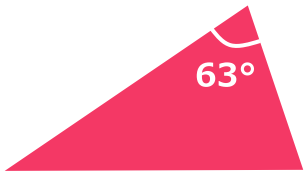




全部の内角が
60°未満と仮定
→内角の和は 180°未満



しかし「三角形の内角の
和は 180°」に矛盾



どれか 1 つは
60° 以上であると
証明できた！

方法 ２：数学的帰納法

代表的な証明方法（2/2）

数学的帰納法

「どんな正の整数 n でも成り立つこと※」を証明するために、以下の 2 つを示す：

1. $n = 1$ で成り立つこと
2. もし $n = k$ で成り立つならば、$n = k + 1$ でも成り立つこと

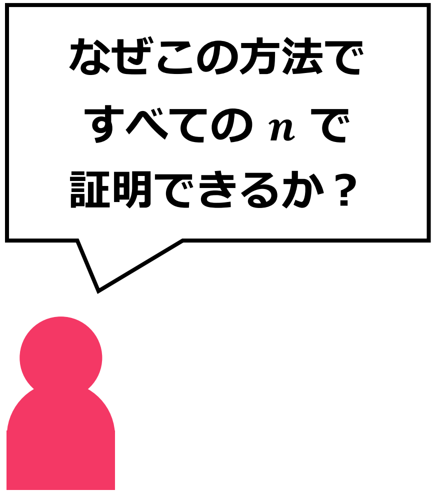
※証明すべき事柄としては、「どんな正の整数 nでも、6^n の一の位が 6 になるのはなぜか？」などが考えられる。

代表的な証明方法 (2/2)

数学的帰納法

「どんな正の整数 n でも成り立つこと※」を証明するために、以下の 2 つを示す：

1. $n = 1$ で成り立つこと
2. もし $n = k$ で成り立つならば、$n = k + 1$ でも成り立つこと



※証明すべき事柄としては、「どんな正の整数 n でも、6^n の一の位が 6 になるのはなぜか？」などが考えられる。

代表的な証明方法 (2/2)

数学的帰納法

「どんな正の整数 n でも成り立つこと※」を証明するために、以下の 2 つを示す：

1. $n = 1$ で成り立つこと
2. もし $n = k$ で成り立つならば、$n = k + 1$ でも成り立つこと

なぜこの方法ですべての n で証明できるか？

1. 1. を適用して、$n = 1$ の場合を証明する
2. 2. を $k = 1$ で適用して、$n = 2$ の場合を証明する
3. 2. を $k = 2$ で適用して、$n = 3$ の場合を証明する
4. 2. を $k = 3$ で適用して、$n = 4$ の場合を証明する
5. 以降も、ドミノ倒し的に 2. を適用していけば良い

※証明すべき事柄としては、「どんな正の整数 nでも、6^n の一の位が 6 になるのはなぜか？」などが考えられる。

具体例として、以下の事柄を証明しよう

どのような正の整数 n でも、6^n の一の位は 6

代表的な証明方法 (2/2)

数学的帰納法

「どんな正の整数 n でも成り立つこと※」を証明するために、以下の 2 つを示す：

1. $n = 1$ で成り立つこと
2. もし $n = k$ で成り立つならば、$n = k + 1$ でも成り立つこと

証明すべき事柄

どのような n でも

6^n の一の位は 6

1 $n = 1$ のとき、$6^1 = 6$ なので明らかに成り立つ

6^1	6	1

7 代表的な証明方法 (2/2)

数学的帰納法

「どんな正の整数 n でも成り立つこと※」を証明するために、以下の 2 つを示す：

1. $n=1$ で成り立つこと
2. もし $n=k$ で成り立つならば、$n=k+1$ でも成り立つこと

証明すべき事柄

どのような n でも 6^n の一の位は 6

① $n=1$ のとき、$6^1=6$ なので明らかに成り立つ

② 6^k の一の位が 6 であったと仮定する。「一の位が 6 である整数」に 6 を掛けても、一の位は 6 のまま※ なので、6^{k+1} の一の位も 6 である

6^1	6 ①
:	:
6^k	???6
6^{k+1}	???6

×6 ②

※たとえば 16×6=96、186×6=1146 である。厳密には、$(10m+6)\times 6=60m+36=10(6m+3)+6$ より証明できる（m は整数）。

これで証明できた！

数学的帰納法

「どんな正の整数 n でも成り立つこと※」を証明するために、以下の 2 つを示す：

1. $n = 1$ で成り立つこと
2. もし $n = k$ で成り立つならば、$n = k + 1$ でも成り立つこと

証明すべき事柄

どのような n でも 6^n の一の位は 6

① $n = 1$ のとき $6^1 = 6$ なので明らかに成り立つ

② 6^k の一の位が 6 であったと仮定する。「一の位が 6 である整数」に 6 を掛けても、一の位は 6 のまま※ なので、6^{k+1} の一の位も 6 である

6^1	6	①
6^k	???6	×6
6^{k+1}	???6	②

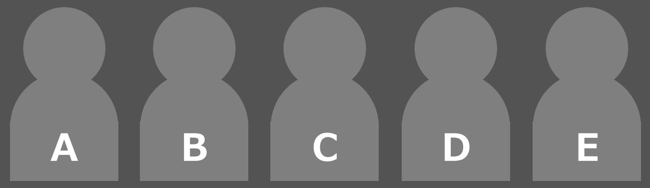
※たとえば 16×6=96、186×6=1146 である。厳密には、$(10m + 6) \times 6 = 60m + 36 = 10(6m + 3) + 6$ より証明できる（m は整数）。

7 “本章のゴール” を解こう

A～E の 5 人の生徒がおり、それらのうち 2 人が嘘つきです。あなたは以下のような証言を得ました。

- 生徒 A「生徒 B は嘘つきである」
- 生徒 B「生徒 C は正直者である」
- 生徒 C「生徒 D は正直者である」

正直者は必ず正しいことを言い、嘘つきは必ず間違ったことを言うとき、生徒 A が嘘つきであることを証明してください。



“本章のゴール” を解こう

1 背理法を使って考える。

生徒 A が正直者であると仮定する。

証言

- 生徒 A「生徒 B は嘘つき」
- 生徒 B「生徒 C は正直者」
- 生徒 C「生徒 D は正直者」

“本章のゴール” を解こう

1 背理法を使って考える。

生徒 A が正直者であると仮定する。

2 生徒 B は嘘つきである。

証言

- 生徒 A「生徒 B は嘘つき」
- 生徒 B「生徒 C は正直者」
- 生徒 C「生徒 D は正直者」

“本章のゴール” を解こう

1 背理法を使って考える。
生徒 A が正直者であると仮定する。

2 生徒 B は嘘つきである。

3 生徒 C は嘘つきである。

証言

- 生徒 A「生徒 B は嘘つき」
- 生徒 B「生徒 C は正直者」
- 生徒 C「生徒 D は正直者」

“本章のゴール” を解こう

1 背理法を使って考える。
生徒 A が正直者であると仮定する。

2 生徒 B は嘘つきである。

3 生徒 C は嘘つきである。

4 生徒 D は嘘つきである。

証言

- 生徒 A「生徒 B は嘘つき」
- 生徒 B「生徒 C は正直者」
- 生徒 C「生徒 D は正直者」

この時点で嘘つきが 3 人になってしまった！
（”嘘つきが 2 人” に矛盾）
よって、生徒 A は正直者ではない！

CHAPTER 8
ベクトル

本章のゴール

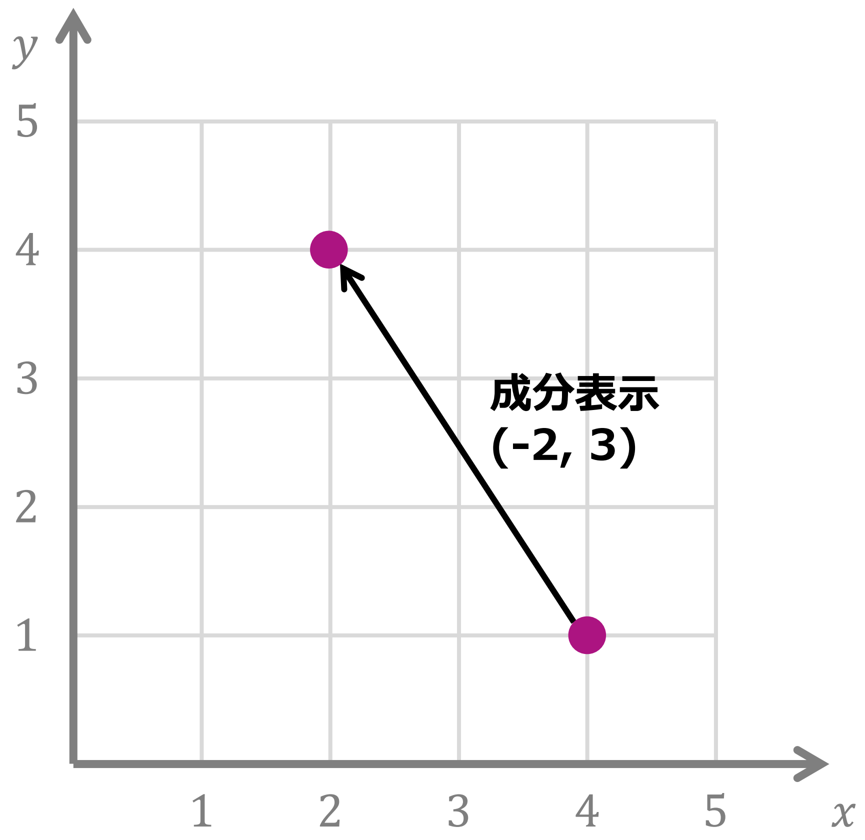
この章には、「本章のゴール」に
相当する問題はありません。

ベクトルとは

ベクトルは**大きさと向きを持つ量**である※

- x 座標の差が a
- y 座標の差が b

であるようなベクトルは、(a, b) と表現することができる（このような表現方法を**成分表示**という）



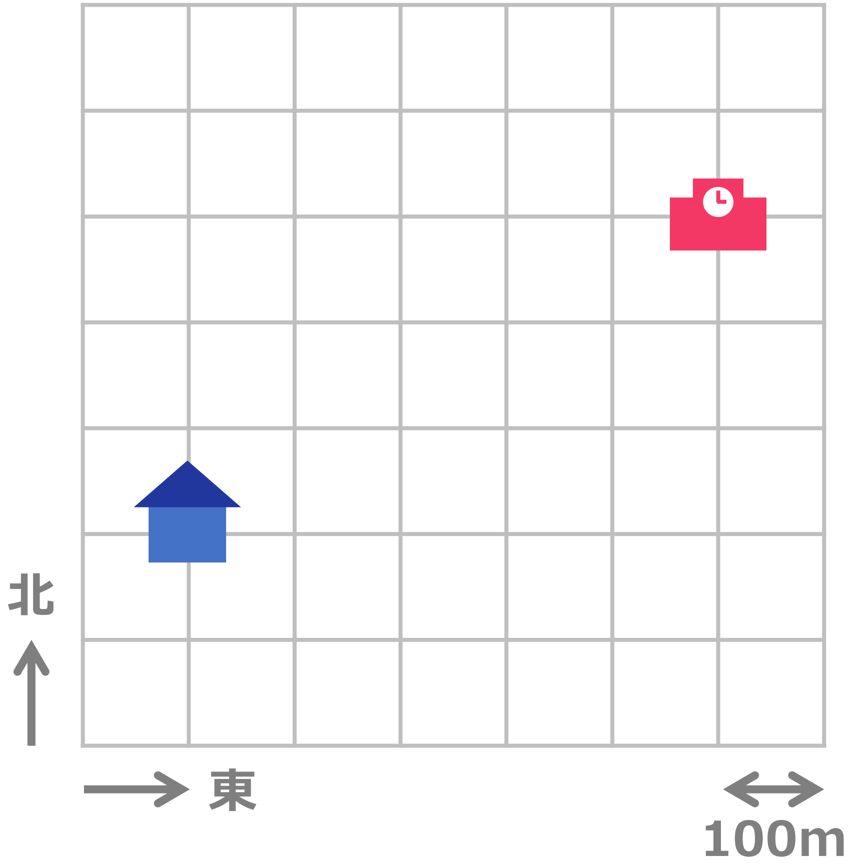
※図の矢印のようなものを想像するとイメージしやすい。

8 ベクトルとは

ベクトルは抽象的で分かりづらいので

具体例をいくつか説明します

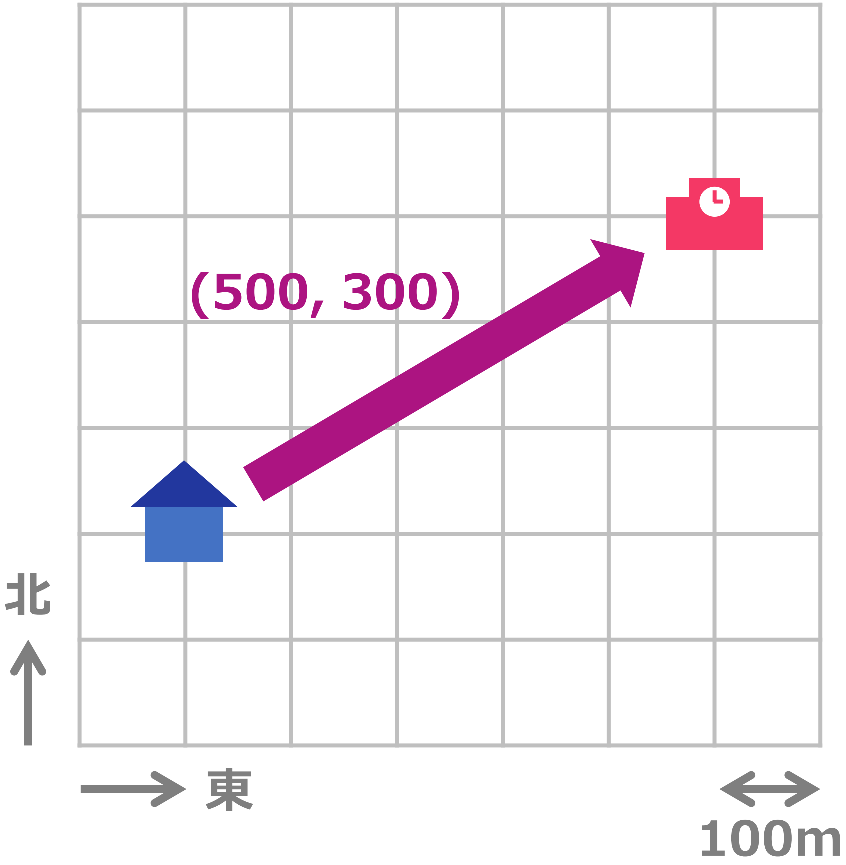
身近なベクトルの例（1）



家から学校までは

東方向に 500m、北方向に 300m

身近なベクトルの例（1）

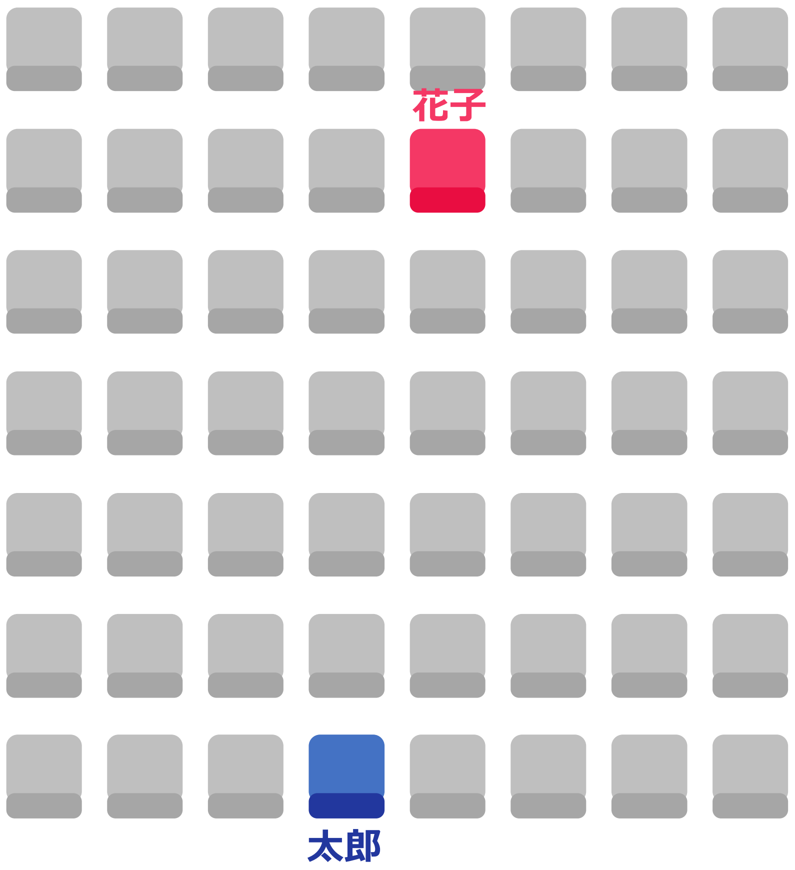


家から学校までは

東方向に 500m、北方向に 300m

位置関係はベクトル (500, 300) で表せる！

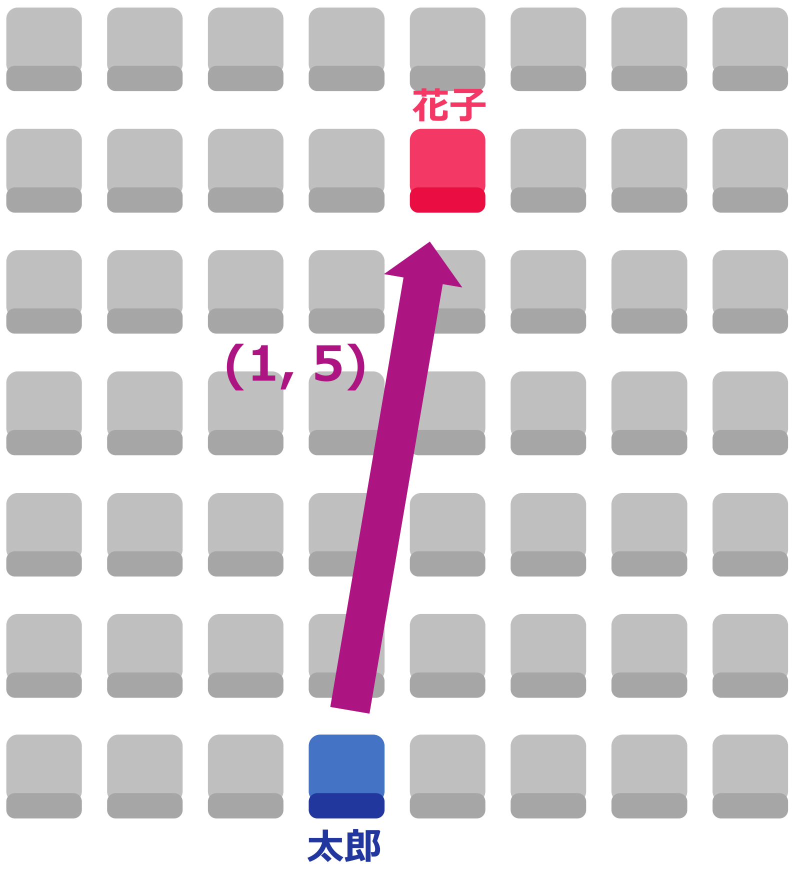
身近なベクトルの例（2）



花子さんの座席は太郎君の

1 個右、5 個前

8 身近なベクトルの例 (2)



花子さんの座席は太郎君の

1 個右、5 個前

位置関係はベクトル (1, 5) で表せる！

8 身近なベクトルの例

ベクトルという概念は

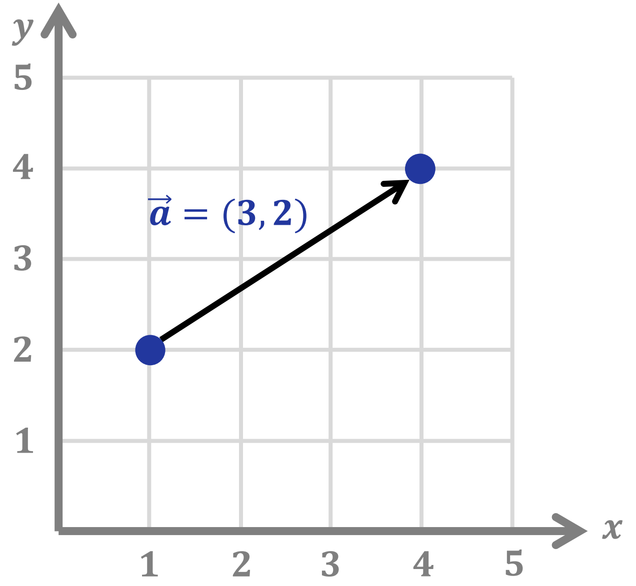
理解できましたか？

8 ベクトルに関する注意点 (1/2)

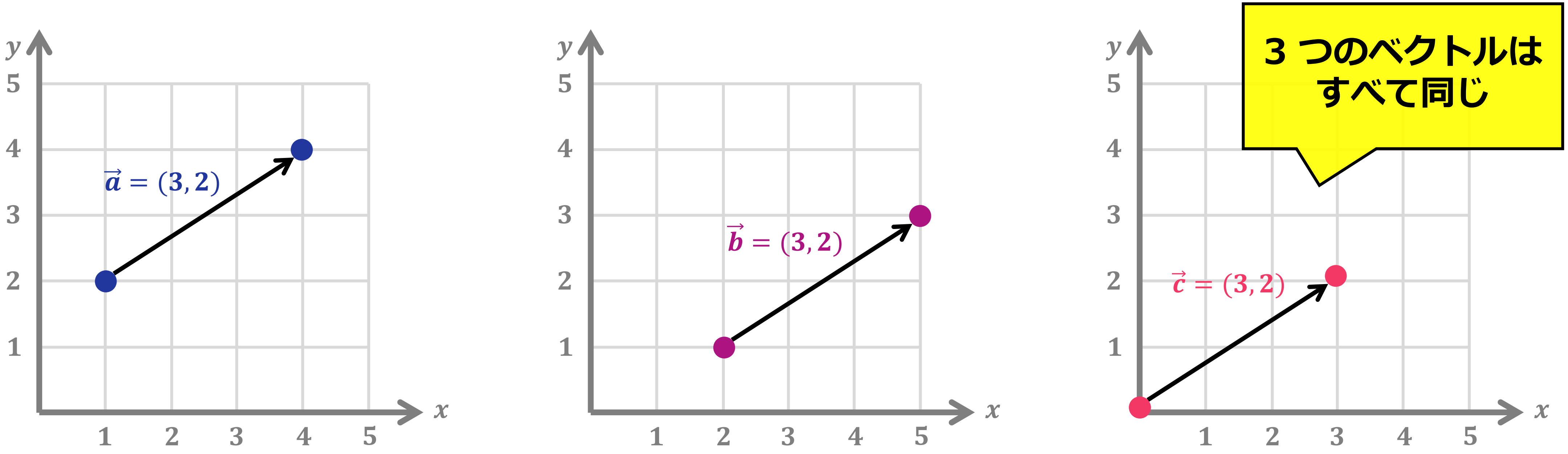
普通の文字式は a, b などを使って書くが

ベクトルは $\vec{a}, \vec{b}$ のように「上に矢印を載せた形式」で書くことが多い

たとえば $\vec{a} = (3, 2)$ のような書き方をする



ベクトルに関する注意点 (2/2)



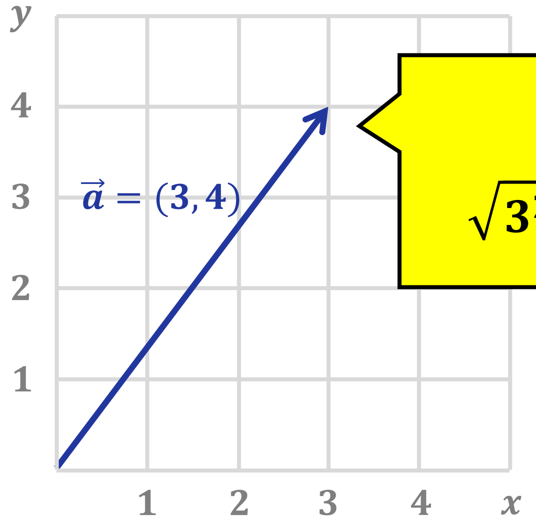
先程の例のように、ベクトルは "相対的な位置関係" を表すときにも使えるが

大きさと向きが一致していれば同じベクトルであることに注意！

補足：ベクトルの大きさ

ベクトルの大きさは**矢印の長さ**であり

成分表示が (a_x, a_y) であるとき、大きさは $\sqrt{(a_x)^2 + \left(a_y\right)^2}$



$\vec{a}$ の大きさは

$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

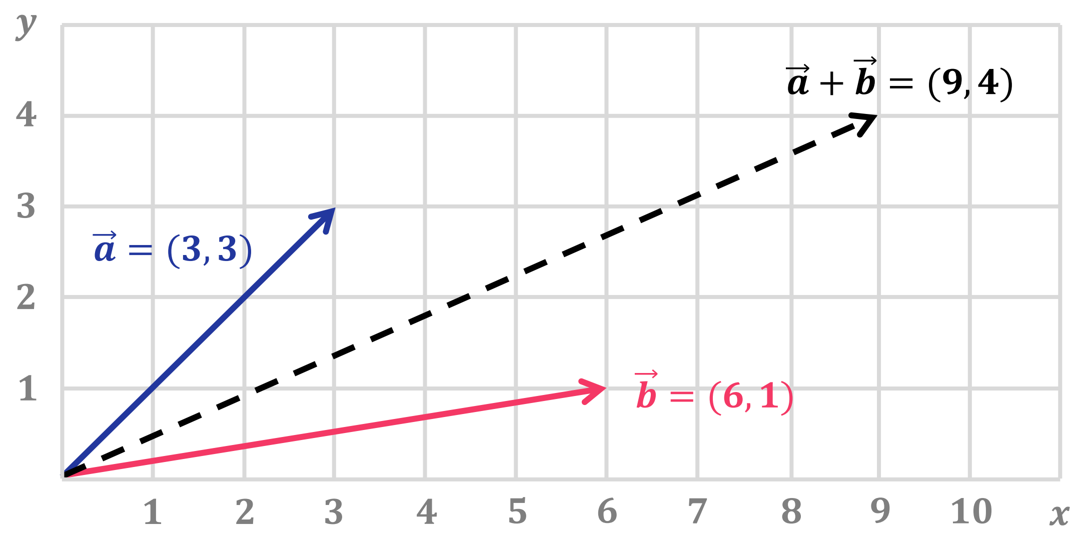
ベクトルの演算

ベクトルは実数と同じように

足し算・引き算などの演算ができる

ベクトル同士の足し算は x 成分・y 成分をそのまま足す

例：(3, 3) + (6, 1) = (9, 4)



足し算 1

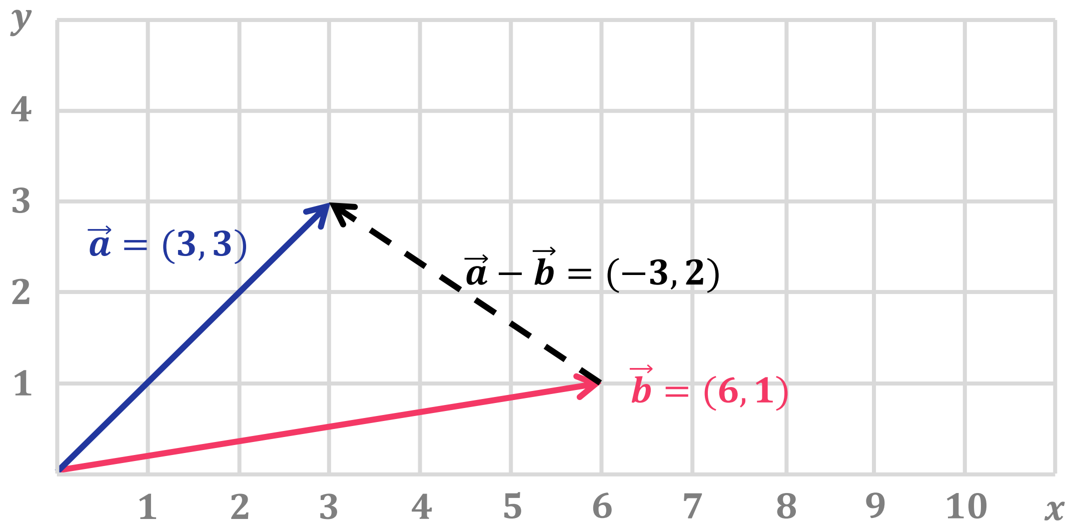
引き算 2

掛け算 3

内積 4

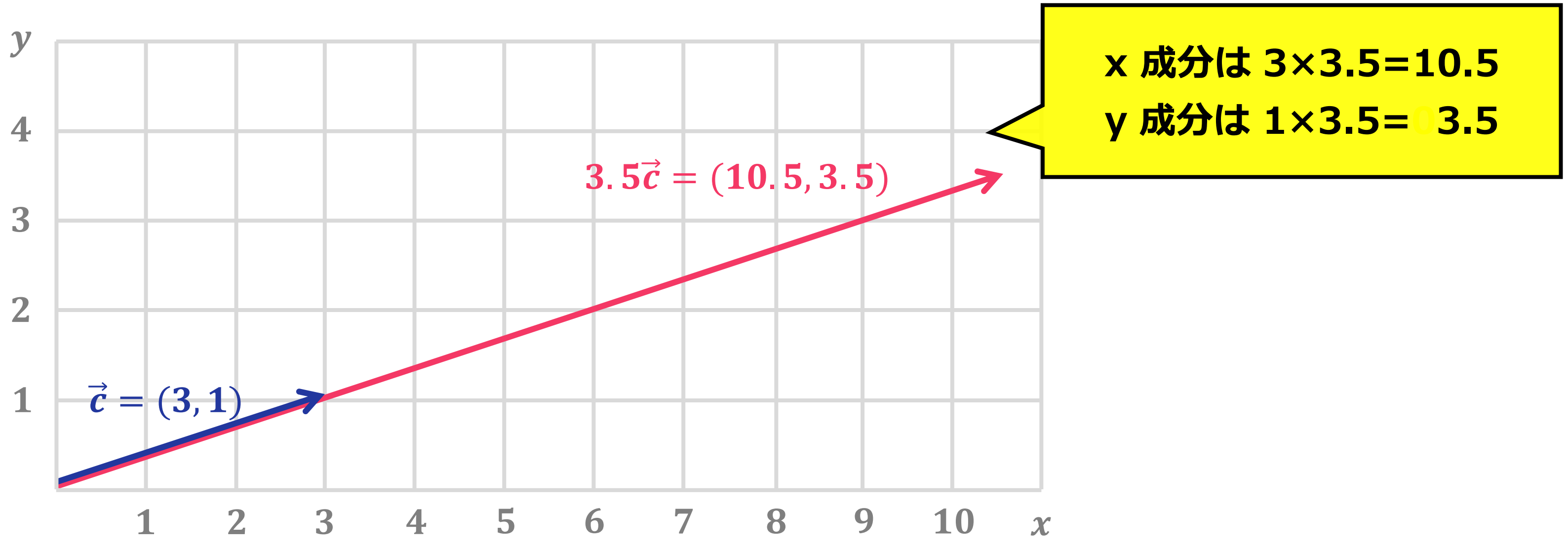
ベクトル同士の引き算も x 成分・y 成分をそのまま引く

例：(3, 3) - (6, 1) = (-3, 2)



ベクトル $\vec{a}$ は実数 k と掛け算することができる

掛け算は x 成分・y 成分それぞれを k 倍にする

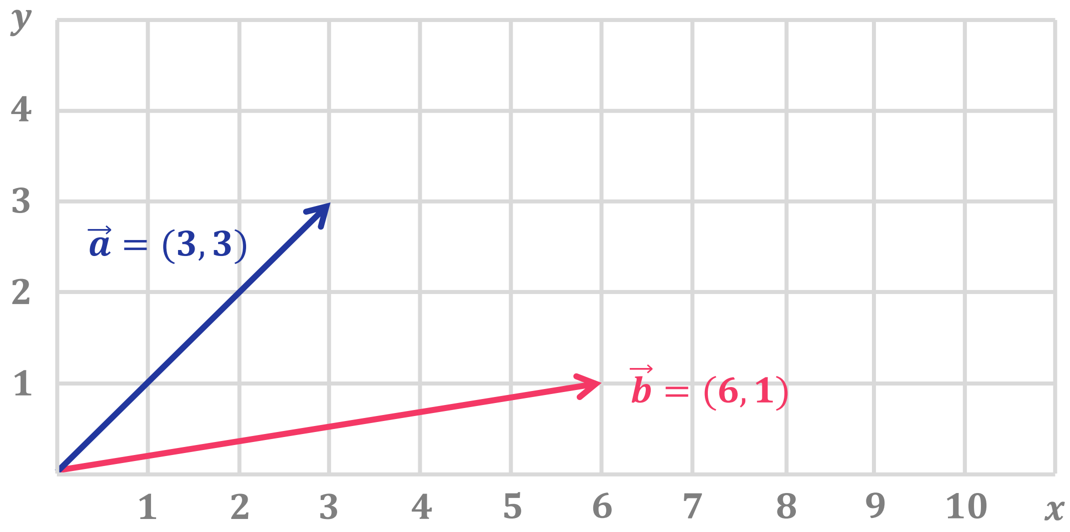


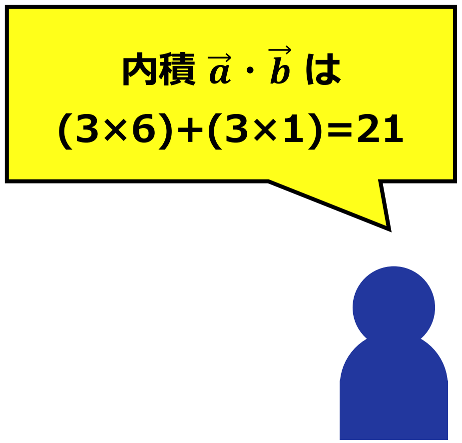
ベクトルの演算

- 足し算 1
- 引き算 2
- 掛け算 3
- **内積 4**

ベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y)$ と $\vec{b} = (b_x, b_y)$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は

$a_x b_x + a_y b_y$ [つまり成分ごとに掛け算した値の合計]





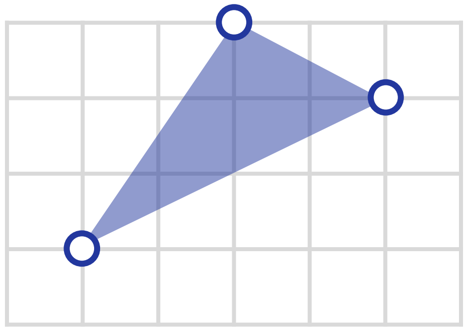
※「なんで突然内積？」と思ったかもしれないが、ベクトル同士の掛け算は基本的にできないので、その代わりになるものだと思って良い。

※ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos\theta$ と一致するという性質がある。ただし $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ をベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさとする。

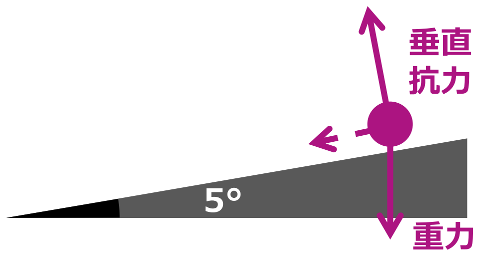
ベクトルはどういう場面で

応用できるのか？

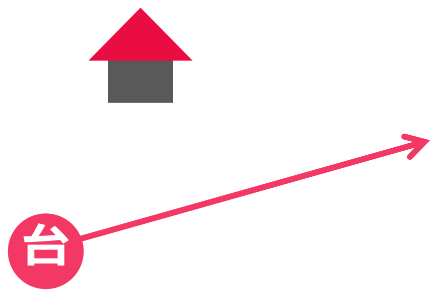
ベクトルの応用



三角形の面積は
どれくらいか？



ボールはどれくらいの
ペースで加速する？



台風は何時間後に
最接近する？

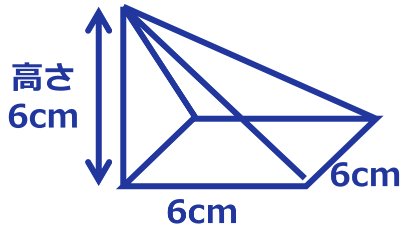
ベクトルは図形問題や物理など、様々な場面で活用できる！

※いずれも計算が少し大変なので、本スライドでは扱いません

CHAPTER 9
微分法と積分法

本章のゴール

以下の容器の体積は何 cm^3 ですか？

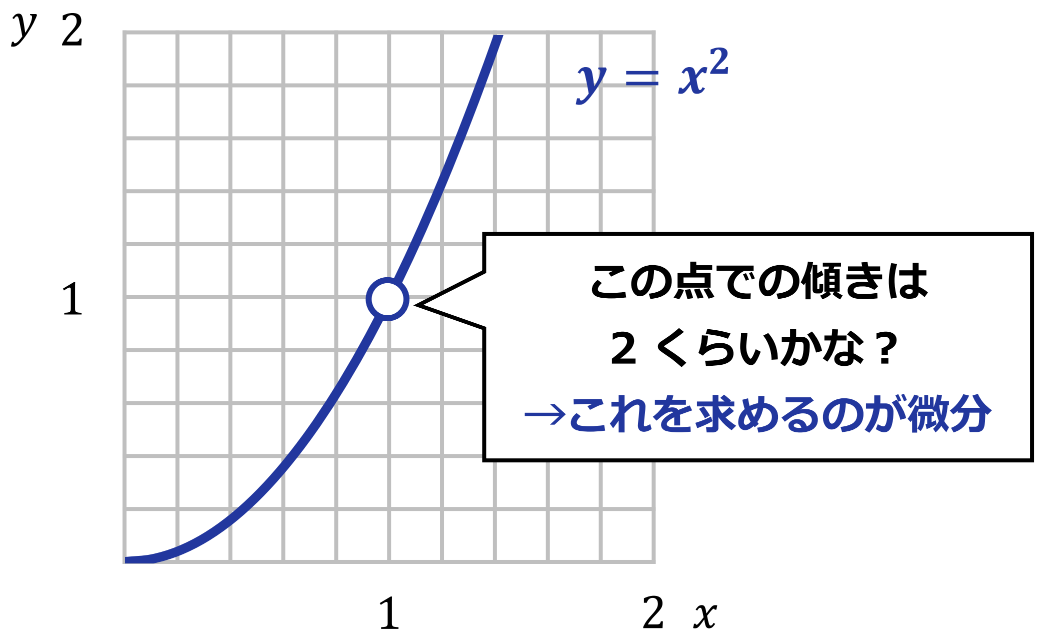


微分とは

まず、”微分” とはどういうことか？

9 微分とは

微分は、関数の**ある点での傾き**を求める操作

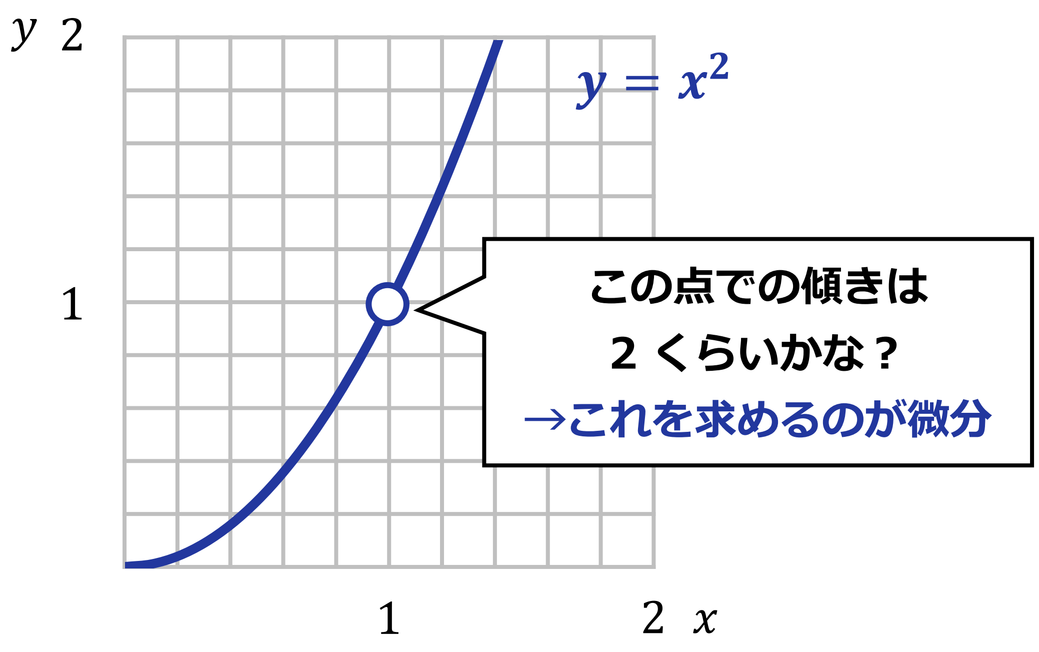


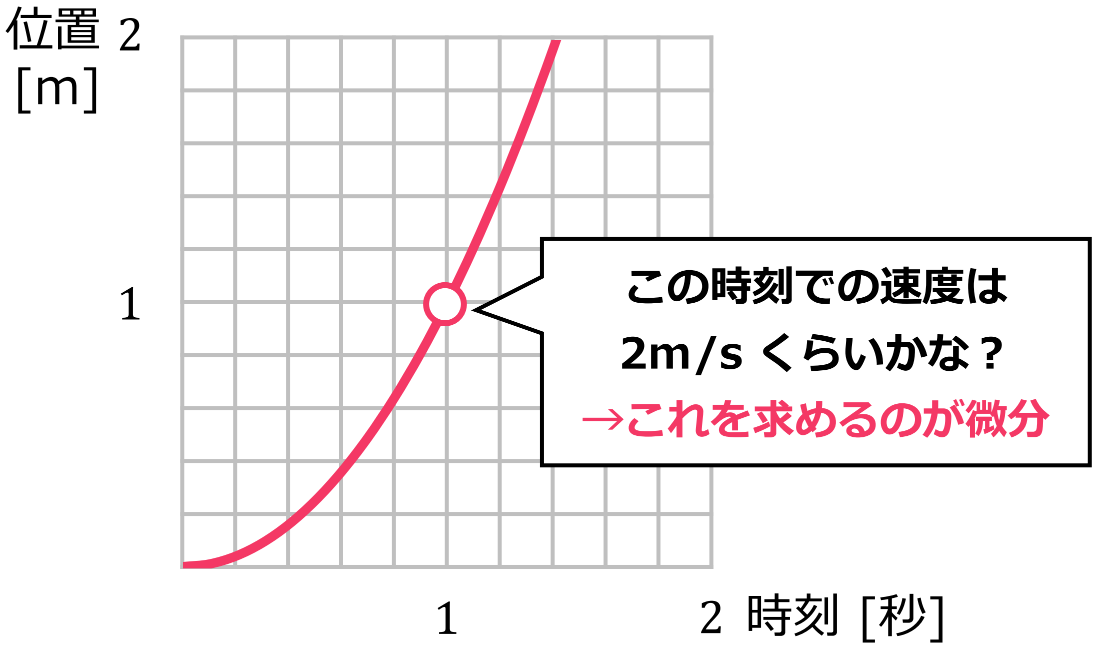
※傾きとは、x の変化に対して y が変化する割合。たとえば x が 0.1 増加すると y が 0.1 増加するとき、傾きは 1。また、一次関数 $y = 7x$ の傾きは 7。

微分とは

微分は、関数のある点での傾きを求める操作

「位置の情報が与えられたとき、ある時刻での速度を求める」と思うとイメージしやすい



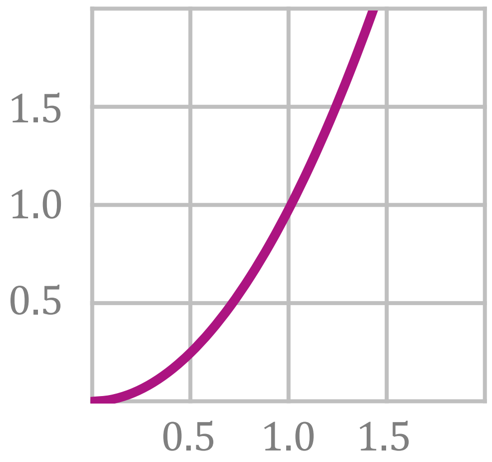


※傾きとは、x の変化に対して y が変化する割合。たとえば x が 0.1 増加すると y が 0.1 増加するとき、傾きは 1。また、一次関数 $y = 7x$ の傾きは 7。

具体的な関数を微分してみよう！

微分の例

たとえば関数 $y = x^2$ のグラフにおける $x = 1$ の傾きは…？

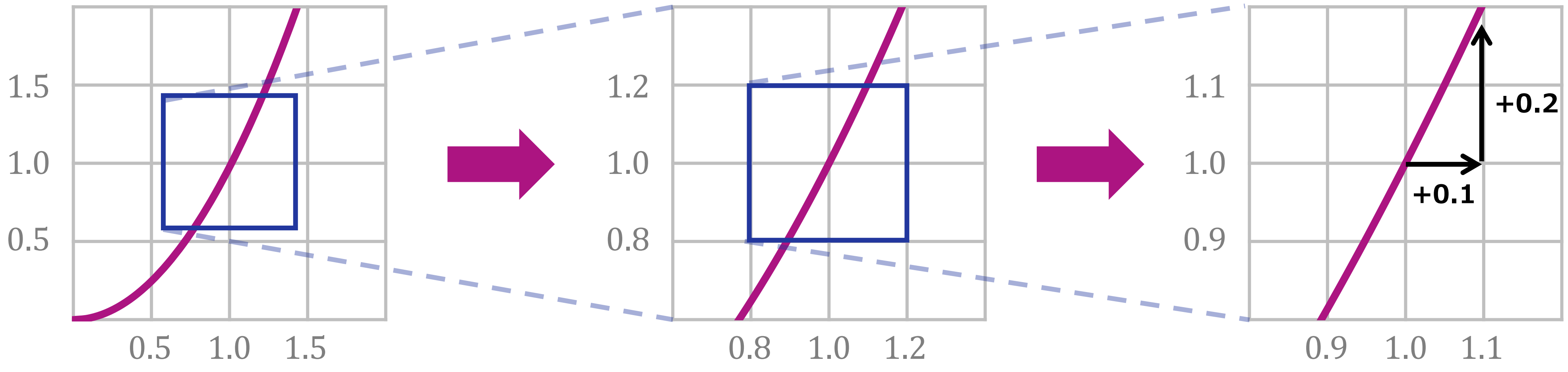


微分の例

たとえば関数 $y = x^2$ のグラフにおける $x = 1$ の傾きは…？

→グラフを拡大すると、x が 0.1 増えるごとに y が 0.2 増加することがわかる

→傾きは (y の増加分)÷(x の増加分)=2



関数 $y = f(x)$ について、$x = a$ 付近の傾きを「$x = a$ での**微分係数**」といい、$f'(a)$ と書く

たとえば $f(x) = x^2$ の場合、$f'(1) = 2$

※前ページで求めたように、$x = 1$ 付近の傾きは 2 であったため。

これまではグラフを拡大して微分係数を求めたが…

$f(x)$ が多項式である場合は

もっと簡単に微分係数がわかる！

※多項式とは、一つの文字だけを使って表せる式。つまり、$x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ のみを使って表せる式。たとえば $6x^2+7x+5$ など。

微分の方法

手順1 すべての項の係数に
次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に
$x = a$ を代入すると求められる

微分の方法

手順1 すべての項の係数に次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

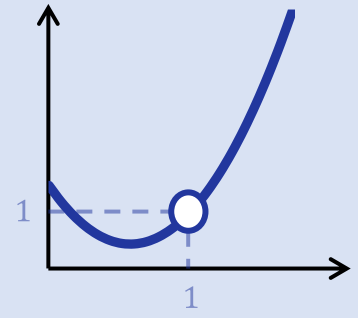
手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に $x = a$ を代入すると求められる

$$\boxed{3x^2} - \boxed{4x} + \boxed{2}$$

$$\downarrow \times 2 \qquad \downarrow \times 1 \qquad \downarrow \times 0$$

$$\boxed{6x^2} - \boxed{4x} + \boxed{0}$$



$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ で

$f'(1)$ を求めたい場合

微分の方法

手順1 すべての項の係数に
次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に
$x = a$ を代入すると求められる

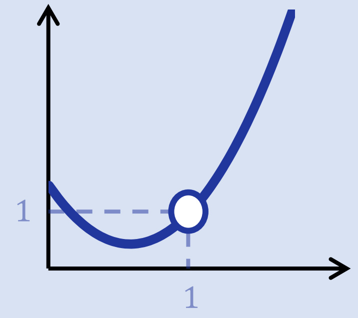
$$\boxed{3x^2} - \boxed{4x} + \boxed{2}$$

$\downarrow \times 2 \quad \downarrow \times 1 \quad \downarrow \times 0$

$$\boxed{6x^2} - \boxed{4x} + \boxed{0}$$

$\downarrow \quad \downarrow$

$$\boxed{6x} - \boxed{4}$$



$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ で
$f'(1)$ を求めたい場合

微分の方法

手順1 すべての項の係数に次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に $x = a$ を代入すると求められる

$\boxed{3x^2} - \boxed{4x} + \boxed{2}$

$\downarrow \times 2 \quad \downarrow \times 1 \quad \downarrow \times 0$

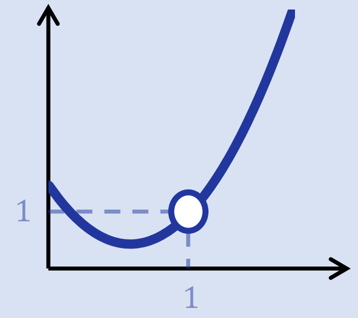
$\boxed{6x^2} - \boxed{4x} + \boxed{0}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\boxed{6x} - \boxed{4}$

$6 \times 1 - 4 = 2$ なので

$f'(1) = 2$



$f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ で

$f'(1)$ を求めたい場合

念のため、もう一つ

例を試してみよう

微分の方法

手順1 すべての項の係数に次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

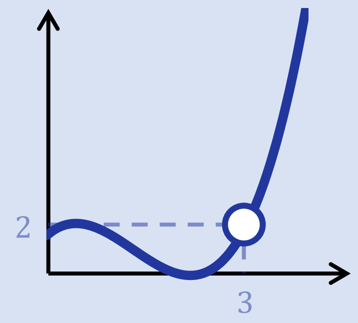
手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に $x = a$ を代入すると求められる

$$\boxed{x^3} - \boxed{4x^2} + \boxed{3x} + \boxed{2}$$

$$\downarrow \times 3 \quad \downarrow \times 2 \quad \downarrow \times 1 \quad \downarrow \times 0$$

$$\boxed{3x^3} - \boxed{8x^2} + \boxed{3x} + \boxed{0}$$



$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ で $f'(3)$ を求めたい場合

9 微分の方法

手順1 すべての項の係数に次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に $x = a$ を代入すると求められる

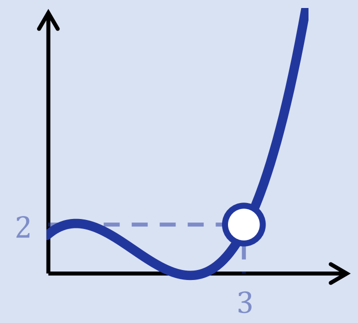
$$\boxed{x^3} - \boxed{4x^2} + \boxed{3x} + \boxed{2}$$

$$\downarrow \times 3 \quad \downarrow \times 2 \quad \downarrow \times 1 \quad \downarrow \times 0$$

$$\boxed{3x^3} - \boxed{8x^2} + \boxed{3x} + \boxed{0}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\boxed{3x^2} - \boxed{8x} + \boxed{3}$$



$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ で $f'(3)$ を求めたい場合

微分の方法

手順1 すべての項の係数に次数（x^2 ならば 2 の部分）を掛ける

手順2 すべての項の次数を 1 だけ減らす

手順3 $f'(a)$ の値は、手順 2 で得られた式に $x = a$ を代入すると求められる

$$\boxed{x^3} - \boxed{4x^2} + \boxed{3x} + \boxed{2}$$

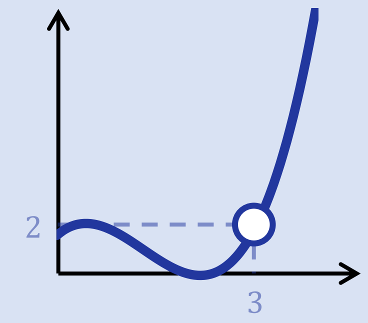
×3 ×2 ×1 ×0

$$\boxed{3x^3} - \boxed{8x^2} + \boxed{3x} + \boxed{0}$$

$$\boxed{3x^2} - \boxed{8x} + \boxed{3}$$

$3 \times 3^2 - 8 \times 3 + 3 = 6$ なので

$f'(3) = 6$

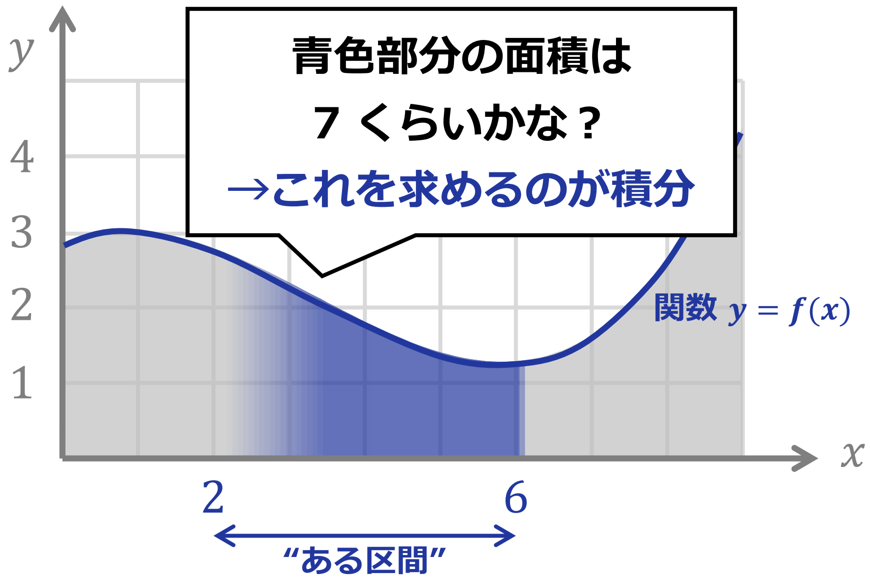


$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ で $f'(3)$ を求めたい場合

次に、“積分” とはどういうことか？

積分とは

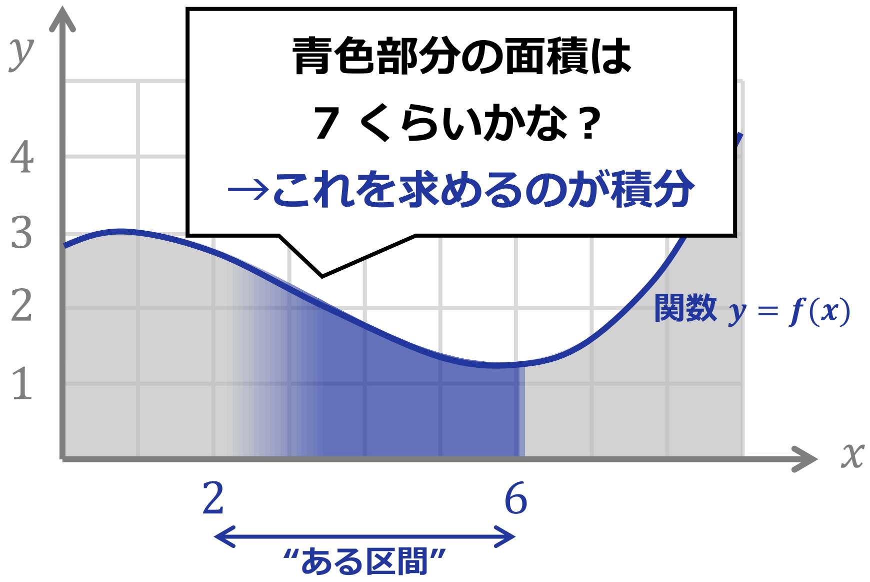
関数の “ある区間” から得られる領域の面積を求める操作を**積分**という

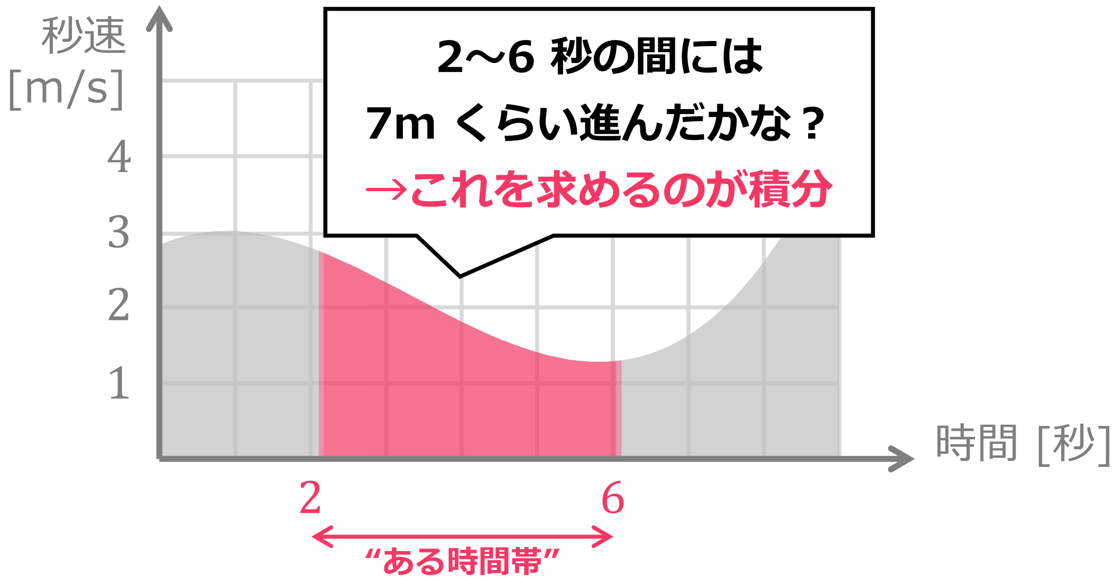


9 積分とは

関数の “ある区間” から得られる領域の面積を求める操作を**積分**という

「速度の情報が与えられたとき、**ある時間帯に何メートル進んだかを求める**」と思うとイメージしやすい

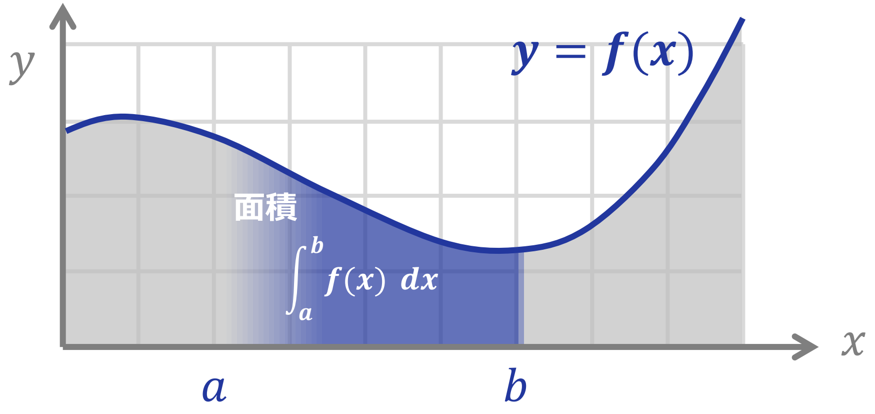




積分（定積分※）を扱う際は、以下のような数式が使われることがある：

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

これは関数「$y = f(x)$、直線 $x = a, x = b$ で囲まれた部分の（符号付き）面積」を意味する。



※積分には「定積分」と「不定積分」の 2 種類があるが、本スライドでは枚数の都合上、不定積分については扱わない。

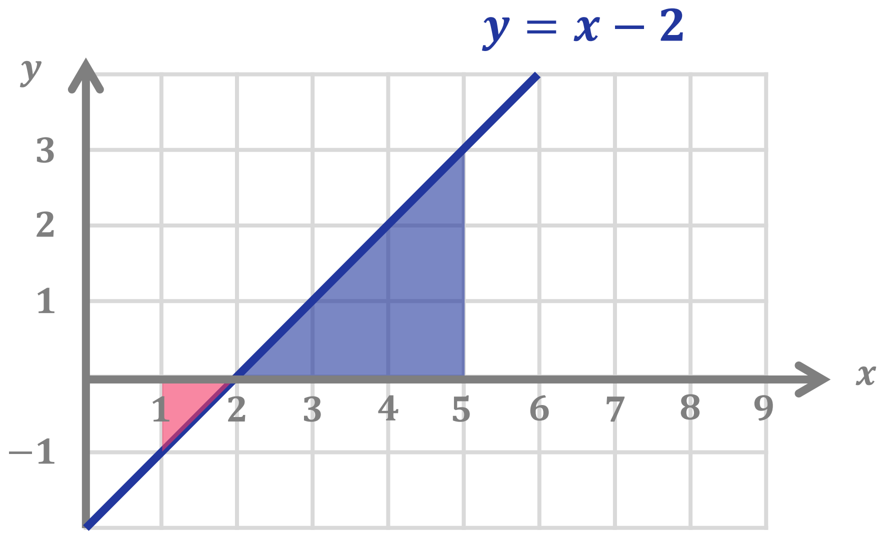
具体的な関数を積分してみよう！

積分の例

$$\int_1^5 (x-2)\,dx$$ の値を計算してください。

求めるべき面積は $y=x-2, x=1, x=5$ で囲まれた部分

→右図で色が付けられた部分



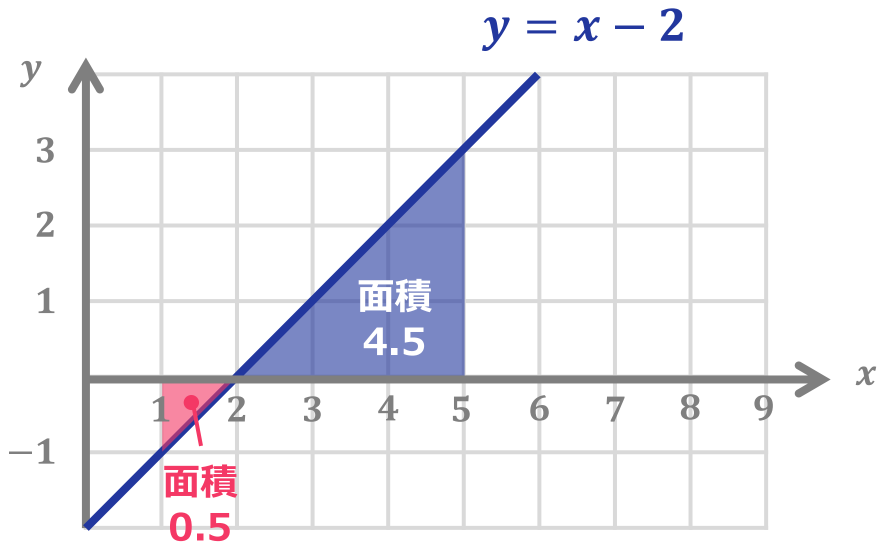
積分の例

$\int_1^5 (x-2)\,dx$ の値を計算してください。

求めるべき面積は $y = x - 2, x = 1, x = 5$ で囲まれた部分
→右図で色が付けられた部分

⬇

青色部分の面積は 3×3÷2=4.5
赤色部分の面積は 1×1÷2=0.5



積分の例

$\int_1^5 (x-2)\,dx$ の値を計算してください。

求めるべき面積は $y = x - 2, x = 1, x = 5$ で囲まれた部分

→右図で色が付けられた部分

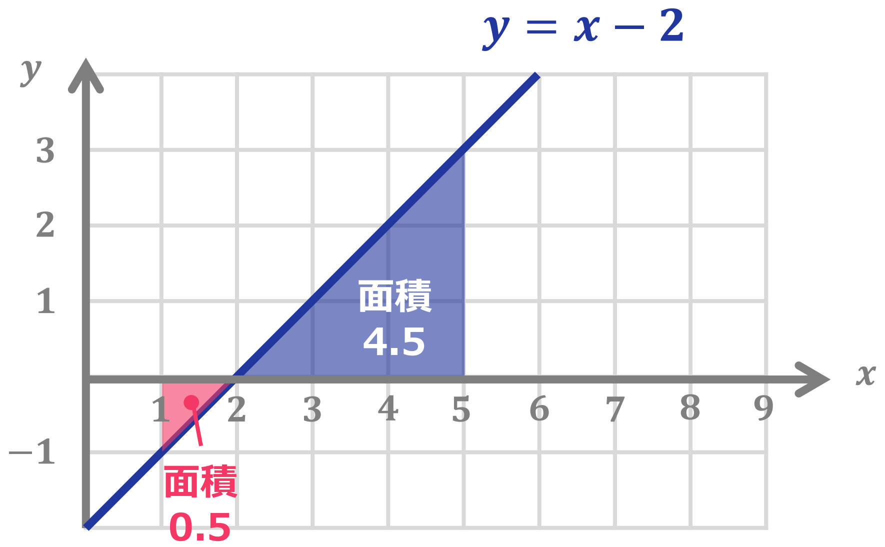
⬇

青色部分の面積は 3×3÷2=4.5

赤色部分の面積は 1×1÷2=0.5

合計 5.0 が答えだと思うかもしれないが…

求めるのは符号付き面積なので 4.5-0.5=4.0



※符号付き面積では、マイナス方向に突き出た部分は引き算しなければならない。

ここまでは直接面積を計算したが…

$f(x)$ が多項式である場合は

もっと簡単に積分計算ができる！

※多項式とは、一つの文字だけを使って表せる式。つまり、$x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ のみを使って表せる式。たとえば $6x^2+7x+5$ など。

積分計算の方法

手順1

すべての項の次数（x^2 ならば 2 の部分）を 1 だけ増やす

手順2

すべての項の係数を、次数で割る
ここまでで得られた関数を $F(x)$ とする

手順3

$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ である

積分計算の方法

手順1 すべての項の次数（x^2 ならば 2 の部分）を 1 だけ増やす

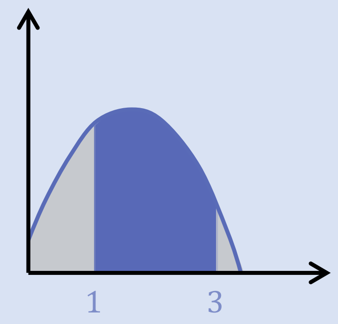
手順2 すべての項の係数を、次数で割る
ここまでで得られた関数を $F(x)$ とする

手順3 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$　である

$$-\boxed{3x^2}+\boxed{10x}+\boxed{2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$-\boxed{3x^3}+\boxed{10x^2}+\boxed{2x}$$



$$\int_1^3 (-3x^2+10x+2)\,dx$$

を求めたい場合

手順1	すべての項の次数（x^2 ならば 2 の部分）を 1 だけ増やす
手順2	**すべての項の係数を、次数で割る ここまでで得られた関数を $F(x)$ とする**
手順3	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ である

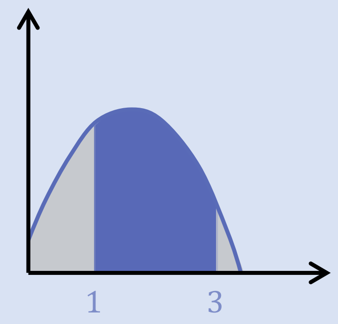
$$-\boxed{3x^2}+\boxed{10x}+\boxed{2}$$

$$\downarrow$$

$$-\boxed{3x^3}+\boxed{10x^2}+\boxed{2x}$$

$$\downarrow \div 3 \qquad \downarrow \div 2 \qquad \downarrow \div 1$$

$$-\boxed{x^3}+\boxed{5x^2}+\boxed{2x}$$



$$\int_1^3 (-3x^2 + 10x + 2)\,dx$$

を求めたい場合

9 積分計算の方法

手順1 すべての項の次数（x^2 ならば 2 の部分）を 1 だけ増やす

手順2 すべての項の係数を、次数で割る
ここまでで得られた関数を $F(x)$ とする

手順3 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ である

$$-\boxed{3x^2}+\boxed{10x}+\boxed{2}$$

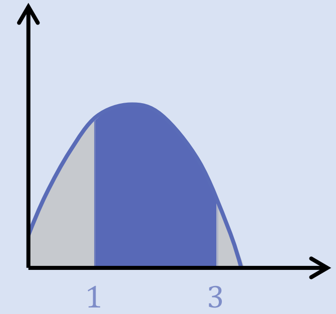
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$-\boxed{3x^3}+\boxed{10x^2}+\boxed{2x}$$

$$\downarrow \div 3 \qquad \downarrow \div 2 \qquad \downarrow \div 1$$

$$-x^3+5x^2+2x$$

$F(3) = -27 + 45 + 6 = 24$
$F(1) = -\ \ 1 +\ \ 5 + 2 =\ \ 6$
よって答えは $24 - 6 = 18$



$$\int_1^3 (-3x^2 + 10x + 2)\,dx$$

を求めたい場合

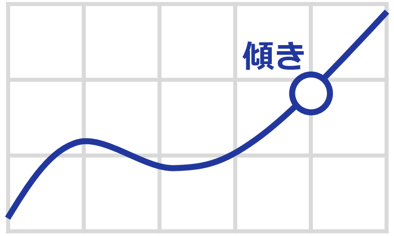
微分と積分の関係

実は積分は微分の

逆の操作になっている！

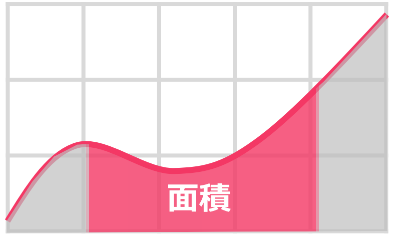
微分と積分の関係

微分



位置から速度を得る

積分

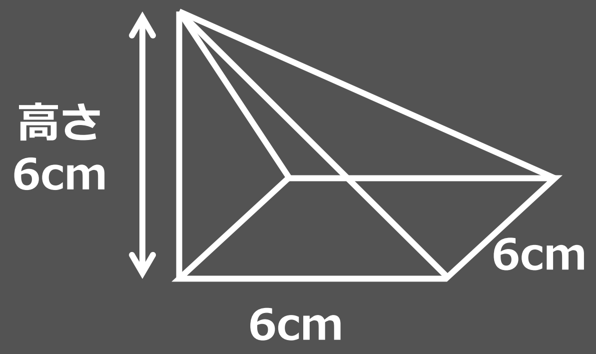


速度から位置を得る

	積分 → / ← 微分	
$2x$	⇄	x^2
$3x^2$	⇄	x^3
$-3x^2+10x+2$	⇄	$-x^3+5x^2+2x$

9 “本章のゴール” を解こう（難）

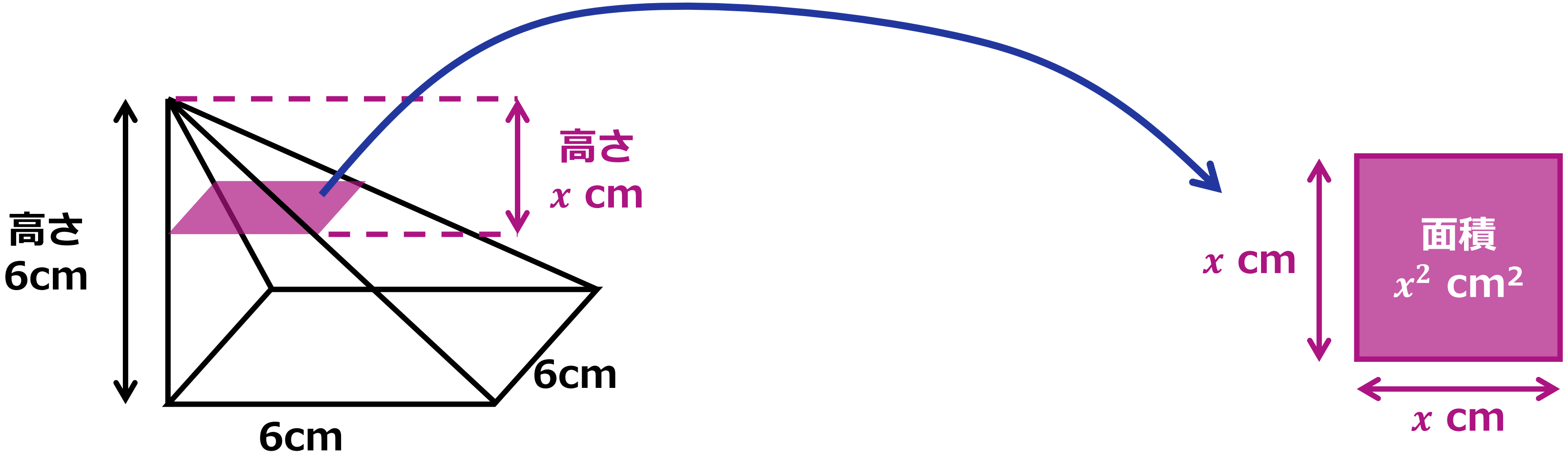
以下の容器の体積は何 cm^3 ですか。



※小学校算数で「四角錐の体積」を習った方は、「なぜそうなるのか？」ということを考えてみましょう。

まず、上から x (cm) で切ったときの断面積は x^2 (cm²)

※断面が「一辺が x (cm) の正方形」になるため



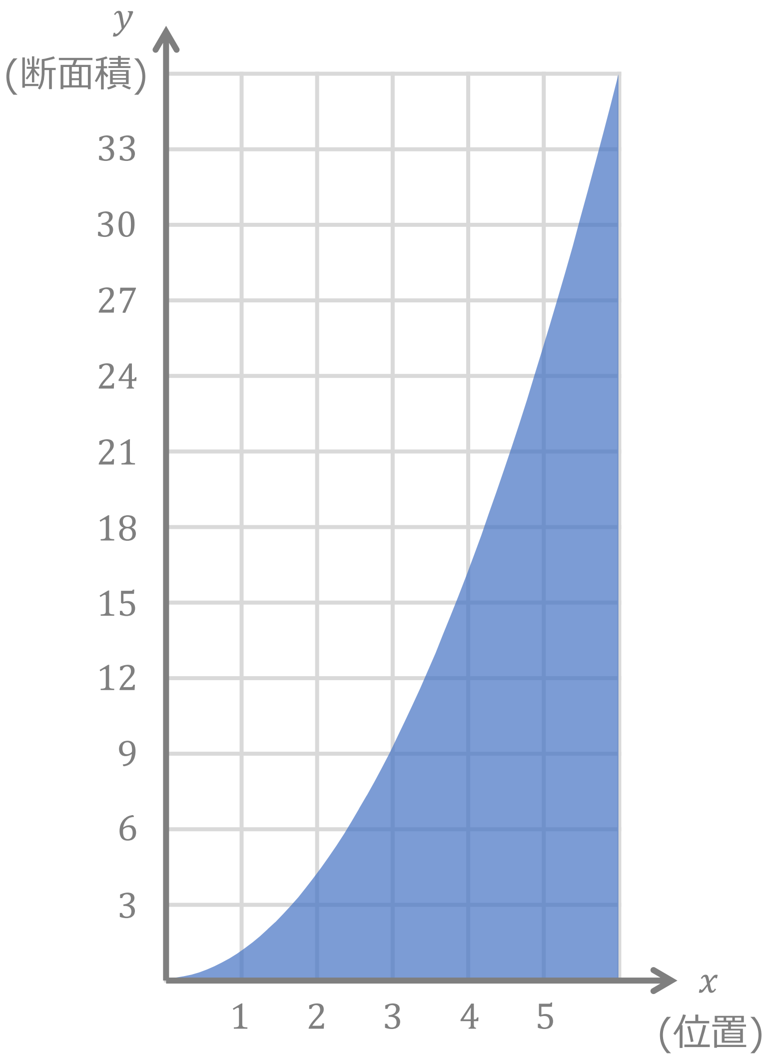
“本章のゴール” を解こう（難）

したがって、求める体積は以下の式で表される：

$$\int_0^6 x^2\,dx$$

$f(x) = x^2$ に対して積分した $F(x)$ は $x^3/3$ となるため求める答えは以下の通り：

$$F(6) - F(0) = \frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \underline{72}\ /\!/$$



CHAPTER 10

その他のトピック

本章のゴール

この章には、「本章のゴール」に
相当する問題はありません。

トピック A：数列

10 数列 (1/3)

- 数列：一定の規則で並べられた数の列
- 数列としては以下の 2 つが有名
  - 等差数列：前の値に、一定の値 d を足したもの（例：1, 4, 7, 10, 13, …）
  - 等比数列：前の値に、一定の値 r を掛けたもの（例：25, 50, 100, 200, 400, …）

等差数列の例

1 $\xrightarrow{+3}$	4 $\xrightarrow{+3}$	7 $\xrightarrow{+3}$	10 $\xrightarrow{+3}$	13 $\xrightarrow{+3}$	16 $\xrightarrow{+3}$	19 $\xrightarrow{+3}$	22 $\xrightarrow{+3}$	…

等比数列の例

25 $\xrightarrow{\times 2}$	50 $\xrightarrow{\times 2}$	100 $\xrightarrow{\times 2}$	200 $\xrightarrow{\times 2}$	400 $\xrightarrow{\times 2}$	800 $\xrightarrow{\times 2}$	1600 $\xrightarrow{\times 2}$	3200 $\xrightarrow{\times 2}$	…

10 数列 (2/3)

一般的には、数列は以下のようにして表す：

- n 番目の項を a_n と表す
- 特に、最初の項は a_1

たとえば、[5, 10, 20, 40, 80, 160, …] という数列の場合…

- $a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 20, a_6 = 160$ など

数列 (3/3)

数列の値を「前の値」から定める規則を**漸化式**という

たとえば等差数列 1, 4, 7, 10, ⋯ の場合、前の値に 3 を足すので、漸化式は以下の通り

- $a_1 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + 3 \ (n \geq 2)$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	⋯
1	4	7	10	13	16	19	22	⋯

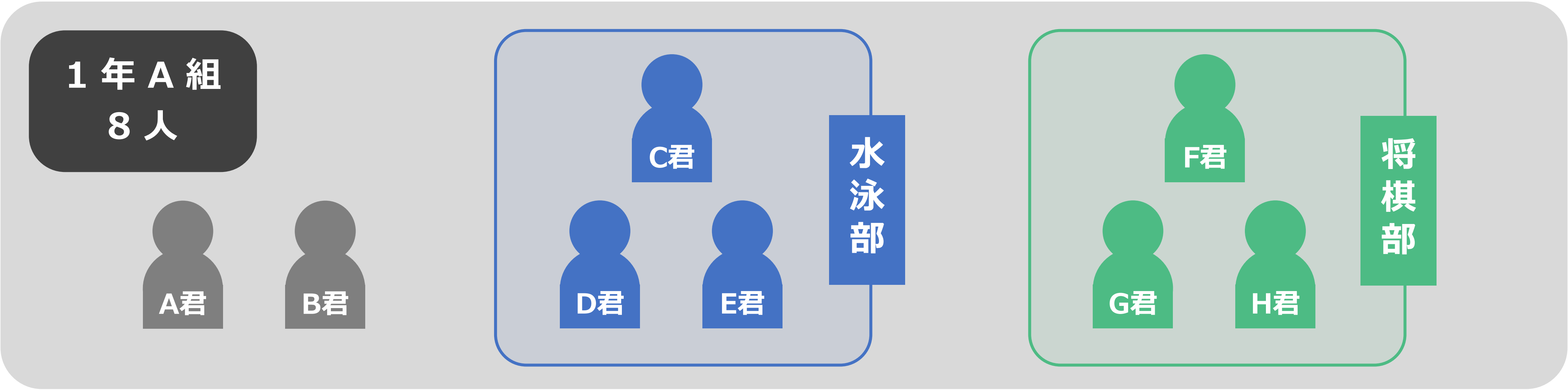
+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

$n \geq 2$ の場合は
数列の n 番目の値が
($n-1$ 番目の値) + 3 である
という意味！

トピック B：集合

10 集合 (1/3)

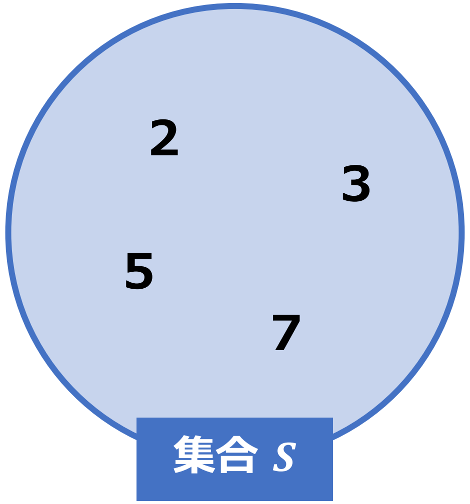
- 数学では、モノの集まりを**集合**という。たとえば「将棋部のメンバー」は集合である
- 集合を構成するモノを**要素**という。たとえば、将棋部のメンバーを表す集合を A とするとき、A の要素は F 君・G 君・H 君の 3 つ



集合 (2/3)

集合は通常、要素を中カッコに入れる形で書く

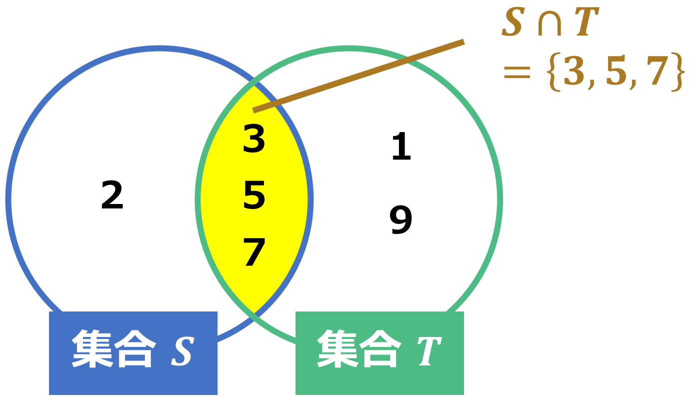
- 例：1 以上 10 以下の素数の集合 S は $S = \{2, 3, 5, 7\}$
- 例：1 以上 10 以下の奇数の集合 T は $T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

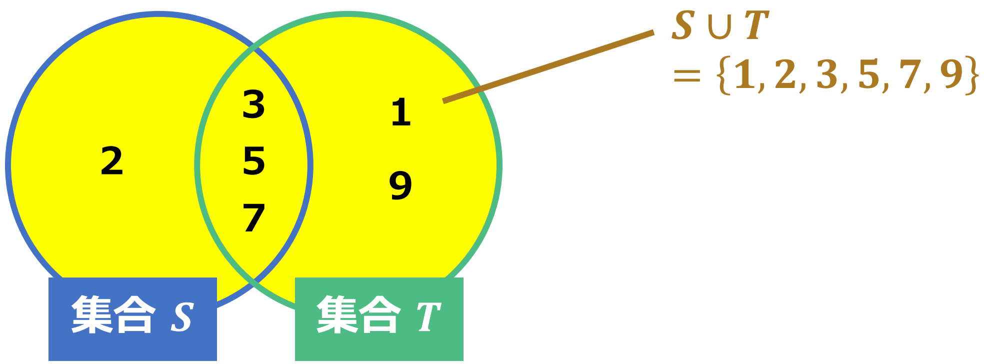


集合 (3/3)

集合の重要な記号を以下にまとめておく：

表記	名前	意味	下図に対応した例
$S \cap T$	積集合	S, T 両方に含まれる部分の集合	$S \cap T = \{3, 5, 7\}$
$S \cup T$	和集合	S, T の少なくとも一方に含まれる部分の集合	$S \cup T = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$





トピック C：整数の性質

「ユークリッドの互除法」と「2 進法」

整数の性質 (1/4)

整数 a と整数 b の最大公約数を求める方法として、**ユークリッドの互除法**がある

ユークリッドの互除法

- 大きい方の整数を「大きい方を小さい方で割った余り」に書き換え続ける。
- どちらか一方の数が 0 になれば操作終了。もう一方の数が答え。

$a=44$, $b=52$ → (52÷44 =1余り8) → $a=44$, $b=8$ → (44÷8 =5余り4) → $a=4$, $b=8$ → (8÷4 =2余り0) → $a=4$, $b=0$

44 と 52 の最大公約数は 4

※ a, b の最大公約数は、a と b 両方を割り切るような最大の整数。たとえば 100 と 150 の最大公約数は 50。

まず、10 進法は 0~9 で表され、「9」から足そうとすると繰り上がる

一方、2 進法は 0~1 で表され、「1」から足そうとすると繰り上がる

- 例：「1001」から 1 を足すと「1010」
- 例：「1011」から 1 を足すと「1100」

10 進法	0	1	2	3	4	5	6	7
2 進法	0	1	10	11	100	101	110	111

10 進法	8	9	10	11	12	13	14	15
2 進法	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

10 整数の性質 (3/4)

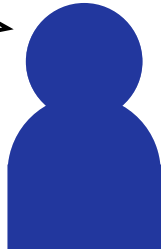
2 進法を 10 進法に変換するには？

- 2 進法は、下から順に「1→2→4→8 の位→･･･」と位を付けることができる
- このとき、「数字×位」の総和が 2 進法を 10 進法に変換した値

8 の位	1	8
4 の位	1	4
2 の位	0	0
1 の位	1	1

全部足して
13

1101 を 10 進法に変換すると
13 になる！



※この方法で変換できる理由は、少し難しいのでここでは説明しません。

整数の性質 (4/4)

10 進法を 2 進法に変換するには？

- 数が 0 になるまで、2 で割る操作を繰り返す
- 余りを逆から読んだ整数が「2 進法に変換した値」

13÷2 = 6余り1
6÷2 = 3余り0
3÷2 = 1余り1
1÷2 = 0余り1

逆から読んで
1101

13 を 2 進法に変換すると
1101 になる！

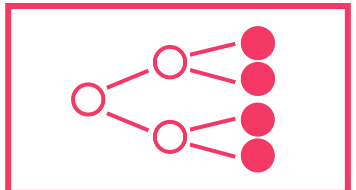
CHAPTER FINAL

スライドのまとめ

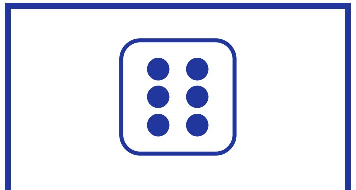
終 スライドのまとめ

$4x + 7 = 19$

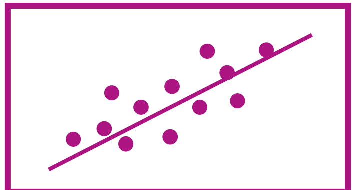
1 文字式と方程式



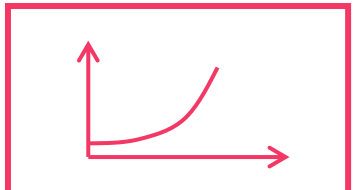
2 場合の数



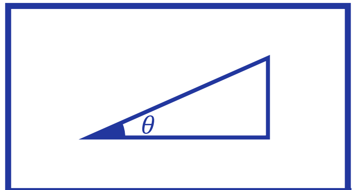
3 確率と期待値



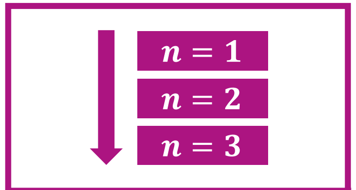
4 統計的な分析



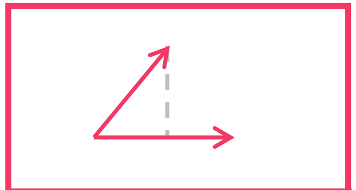
5 いろいろな関数



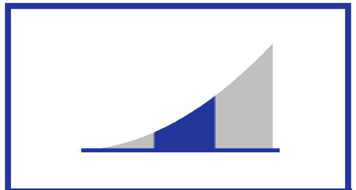
6 三角比と三角関数



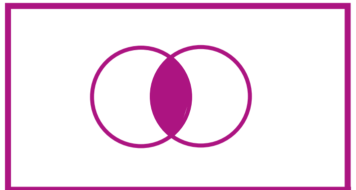
7 証明のやり方



8 ベクトルの基本



9 微分法と積分法

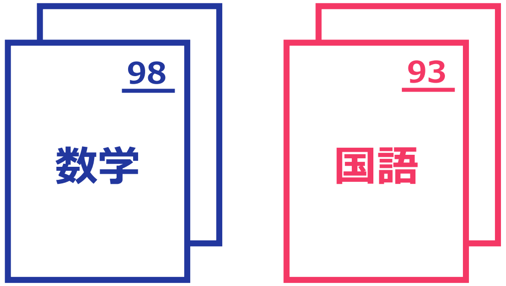


10 その他のトピック

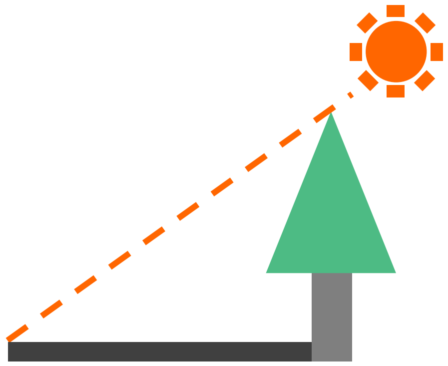
本スライドでは、数学に関する様々なトピックを扱いました

終 スライドのまとめ

タクシーで 1400 円払った
何 km 走行したか？



数学と国語の成績は
どれくらい関係がある？



木の高さは
一体どれくらい？

これらの内容を使うと、いろいろな問題を解くことができます

さらなる学びへ

しかし、本スライドでは**基礎的な内容**しか説明していません
さらに学びたい方は、教科書などを読んで学習しましょう！

※プログラミングをやっている人は、数学と関連が深いアルゴリズムとかを学んでみるのも良いかもしれません。

参考文献

1. 米田優峻、『問題解決のための「アルゴリズム×数学」が基礎からしっかり身につく本』、技術評論社
2. 『数学Ⅰ 改訂版』、数研出版
3. 『数学A 改訂版』、数研出版
4. 『数学Ⅱ 改訂版』、数研出版
5. 『数学B 改訂版』、数研出版
6. 高校数学の美しい物語 https://manabitimes.jp/math
7. 統計WEB～統計学の時間～ https://bellcurve.jp/statistics/course/
8. Knowledge Makers https://knowledge-makers.com/correlation-analysis/
9. いらすとやの画像を利用

（最終閲覧日は 2022/9/6）

スライドをお読みいただき
ありがとうございました