4.転置行列

行と列を入れ替えた物が**転置行列**です。
行列をDと置くと、Dの転置行列は

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

という風に書きます。

5.単位行列

単位行列は行列での1を表すものです。

E=$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,E=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

という風に斜めに1を配置します。
この行列は掛けても変化しない行列です。
変化してほしくはないが、掛け算自体はしなければならない場面などで使用します。

5.2×2型逆行列

逆行列とは**変換を元に戻す行列**です。
変換する行列をAとした場合、A^{-1}と表します。
どういうことかを行列Dで考えると

$$\mathrm{D} = A^{-1}\,\mathrm{AD}$$

となる。つまり、DにAの返還をかけた後、元に戻す。 という処理で使います。
具体的に式で表すと以下になります。

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5.3×3型逆行列

ゲームプログラミングにおいて、
逆行列が必要なのは3×3までが一般的です。
なので、3×3までは把握しておきましょう。
3×3型の行列をAとすると、

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$detA = aei + c\,dh + bfg - ceg - afh - b\,di$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - eg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

となります。

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, C=$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, D=$\begin{bmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 12 & 0 & -16 \end{bmatrix}$, H= $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, I =$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,E(単位行列)

1　次の行列計算をせよ。

(1)　A+B　　(4)　(1/2)D

(2)　A−B　　(5)　(−1/4)X ＝ (1/2)B － 3A

(3)　−3C　　(6)　2X ＝ 3C − D

(1)$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix} 6 & -9 & -15 \\ 0 & -3 & 12 \\ -30 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(4)$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix} 34 & 32 \\ -12 & -12 \end{bmatrix}$ (6)$\begin{bmatrix} -6 & 17/2 & 17/2 \\ 0 & -7/2 & -4 \\ 9 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}$

2　次の行列計算をせよ。

(1)　AB　(3)　BH　(5)　AE

(2)　CD　(4)　CI　(6)　ED

(1)$\begin{bmatrix} -10 & 20 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 48 & 46 & -88 \\ -48 & 10 & 60 \\ 48 & -80 & -4 \end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix}$

(4)$\begin{bmatrix} 19 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (6)$\begin{bmatrix} 6 & -8 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 12 & 0 & -16 \end{bmatrix}$

3　次の行列の転置行列を求めよ。

B, C, D

$B^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, c^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} D^T = \cancel{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}}$

4　次の逆行列を求め、逆行列であることを確かめよ。

A

A^{-1} =1/3$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, AA^{-1} = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 1/3$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$H=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix},E(単位行列)$$

1　次の行列を求めよ。

(1)　NH　でHを　xに3, yに7　移動させる行列N

(2)　NI　でIを　xに5, yに7, zに12　移動させる行列N

(3)　NH　でHを、xを1/2, yを1/3　にする行列N

(4)　NI　でIを　xを1/3, yを1/4, zを1/5　にする行列N

(1)$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&7\\0&0&1\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&7\\0&0&1&12\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

(3)$\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}1/3&0&0&0\\0&1/4&0&0\\0&0&1/5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

2　次の行列を求めよ。

(1)　NH　でHを　30度回転させる行列N

(2)　NI　でIを　z軸周り(ロール)で30度回転させる行列N

(3)　NI　でIを　x軸周り(ピッチ)で45度回転させる行列N

(4)　NI　でIを　y軸周り(ヨー)で60度回転させる行列N

(1)$\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2&0\\1/2&\sqrt{3}/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2&0&0\\1/2&\sqrt{3}/2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

(3)$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}1/2&0&\sqrt{3}/2&0\\0&1&&0\\-\sqrt{3}/2&0&1/2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

3　次の問いに答えよ。

・Iを+(1,2,3)移動させたあと、

・y軸周りにを30度回転させ、

・(1/2,1/2,1/2)に縮小したい。

上記の合成行列を求めよ。

また、最終的なIの座標を求めよ。

$$\begin{bmatrix}1/2&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&0&1/2&0\\0&1&0&0\\-1/2&0&\sqrt{3}/2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}/4&0&1/4&(3+\sqrt{3})/4\\0&1/2&0&1\\-1/4&0&\sqrt{3}/4&(3\sqrt{3}-1)/4\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(5\sqrt{3}+5)4\\5/2\\(5\sqrt{3}-5)/4\\1\end{bmatrix}$$

4　次の問いに答えよ。

A(0,0), B(4,0), C(2,3)とする。

三角形ABCに

・ABCの中点を基準として30度回転

・(1/2,1/2)縮小

・xに２移動

・yに4移動

上記の変換をかけるとする。

合成行列を求めよ。

また、最終的な三角形ABCの

中点 / 点A / 点B / 点C　を求めなさい。

まずは合成行列を作る。

中点基準に回転するにはまずは中心が原点まで移動したと考える。そこから中心(2,1)なので、

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2&0\\1/2&\sqrt{3}/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

そこから、縮小と移動を行うので

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2&0\\1/2&\sqrt{3}/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

そこから、元の位置に戻す。

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2&0\\1/2&\sqrt{3}/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ここから、合成行列を作り、

それを全ての点に掛けてそれぞれの点の座標を求める。

（手計算は面倒なので、プログラムで確認して下さい。）