ベクトル③ ～外積～

■ベクトルの外積 (cross product、 vector product)

2つのベクトル $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_x, b_y, b_z)$ の外積はつぎのように定義される。

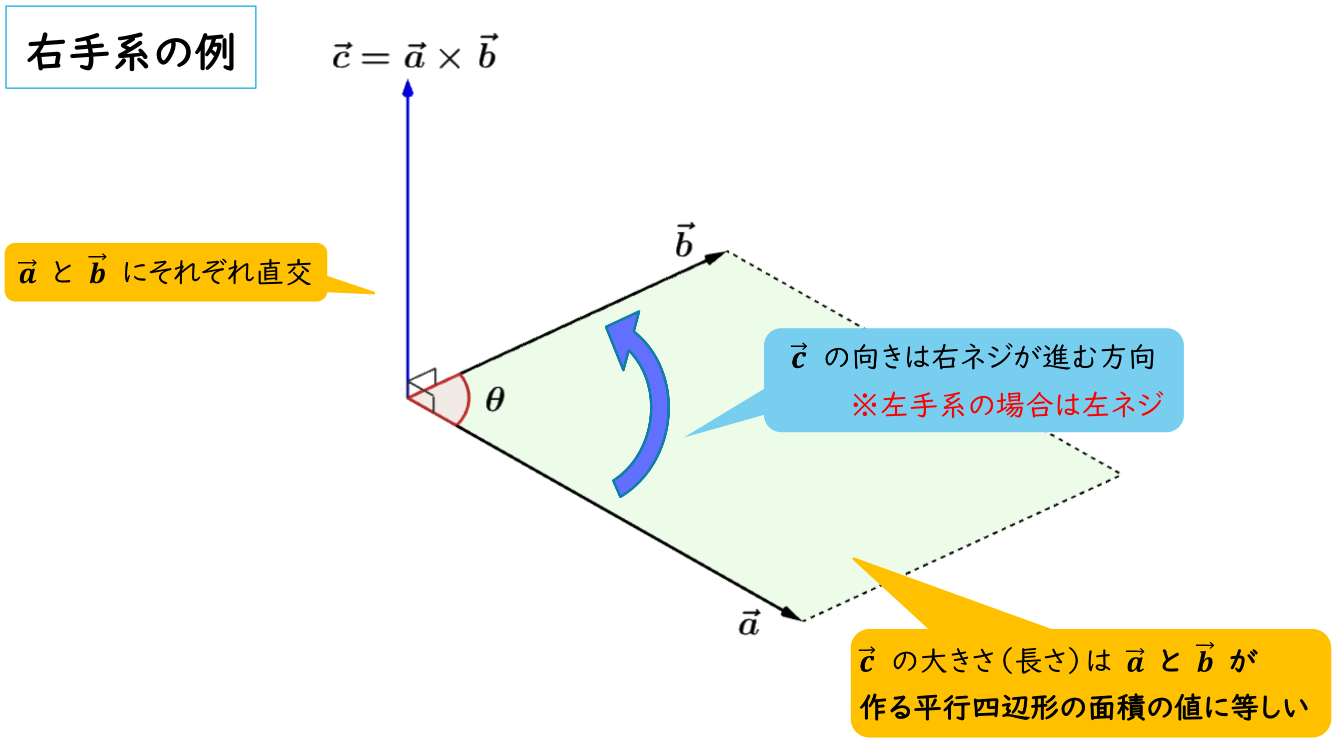
$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \{(a_y b_z - a_z b_y),\ (a_z b_x - a_x b_z),\ (a_x b_y - a_y b_x)\}$$

ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ の外積を $\vec{\boldsymbol{c}} = (c_x, c_y, c_z)$ としたときの成分表示は

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$
$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

となる。また、次のような性質がある。

性質① 外積 $\vec{\boldsymbol{c}}$ は $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ にそれぞれ直交するベクトルである
性質② 外積 $\vec{\boldsymbol{c}}$ の向きは、右手系では右ねじの進む方向、左手系では左ねじの進む方向となる
性質③ 外積 $\vec{\boldsymbol{c}}$ の大きさ(長さ)は、$\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ が作る平行四辺形の面積に等しい



「 ベクトル③ ～外積～」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

ゲームにおける外積の用途

・カメラやキャラクタの姿勢制御
・当たり判定の計算
・2次元の領域判定
・ジオメトリシェーダにおけるポリゴン頂点の法線計算

練習問題

① $\vec{\boldsymbol{a}} = (-3, 1, 4)$ と $\vec{\boldsymbol{b}} = (1, -1, -2)$ の外積 $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ を求めてください。

② $\vec{\boldsymbol{a}} = (1, 0, 0)$ と $\vec{\boldsymbol{b}} = (0, 1, 0)$ の外積 $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ を求めてください。

「 ベクトル③ ～外積～」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

グループワーク： プリント1ページにある外積の性質①を証明せよ

ヒント:直交するベクトル同士の内積は？ … 内積： $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y)$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ と表す。

定義より $\vec{a} \times \vec{b} = \{(a_y b_z - a_z b_y),\ (a_z b_x - a_x b_z),\ (a_x b_y - a_y b_x)\}$

直交するベクトルの内積は （ア） であるから

（イ） $\cdot \vec{a} =$ （ア） かつ （イ） $\cdot \vec{b} =$ （ア） となればよい。

（イ） $\cdot \vec{a} =$ （以下、x, y, z 成分表示で計算）

$=$ （ア）

（イ） $\cdot \vec{b} =$ （以下、x, y, z 成分表示で計算）

$=$ （ア）

証明以上。

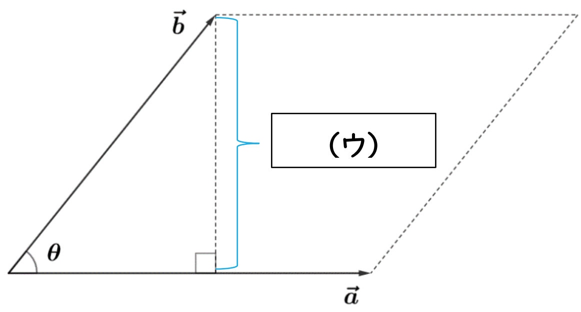
「 ベクトル③ ～外積～」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

グループワーク：プリント1ページにある外積の性質③を証明せよ

ヒント：平行四辺形の面積の公式。三角関数、内積の定義

2つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$、$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ が成す角 θ の平行四辺形を考える。



ベクトル $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ の大きさ（長さ）をそれぞれ $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$ とすると、
その平行四辺形の面積 S は「底辺x高さ」の公式より

$$\mathbf{S} = |\vec{a}| \times \boxed{（ウ）} \qquad \cdots(1)$$

両辺を2乗すると

$$\mathbf{S}^2 = \left(\text{以下、計算}\right)$$

ヒント：sin を cos に変形 $(x^2 + y^2 = 1$ を使う?)

$$=$$
$$=$$
$$=$$

また、内積の定義より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

式(1)に代入すると

$$\mathbf{S}^2 = \boxed{（エ）}^2 \boxed{（オ）}^2 - \boxed{（カ）}^2 \qquad \cdots(2)$$

となる。

「 ベクトル③ ～外積～」

岡山情報ITクリエイター専門学校

式(2)の右辺を x, y, z 成分表示で計算すると

式(2) = （以下、x, y, z成分表示で計算）

$=$

$=$

$=$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2 \qquad \cdots (\mathbf{3})$$

また、外積$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$の定義より

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left\{ \boxed{(キ)}, \boxed{(ク)}, \boxed{(ケ)} \right\}$$

$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$、$\vec{\mathbf{c}} = (c_x, c_y, c_z)$とおけば

$c_x = \boxed{(キ)}$

$c_y = \boxed{(ク)}$

$c_z = \boxed{(ケ)}$

となり、式(3)に代入すると

$$式(3) = \boxed{(コ)}^2 + \boxed{(サ)}^2 + \boxed{(シ)}^2$$
$$= |\boxed{(ス)}|^2$$

となり、すなわち

$$\mathbf{S} = |\boxed{(ス)}|$$

よって、式(1)から $\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right| = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\boldsymbol{sin\theta}$

証明以上。