１次方程式・１次関数とグラフ

◆等式

＝（イコール、等号）を用いて数量の関係を表した式を「 等式 」といいます。

「 a と b の和は c となる。」これを等式にすると「 $a+b=c$ 」となります。

このとき = の左側を「 **左辺** 」、右側を「 **右辺** 」両方合わせて「 **両辺** 」と呼びます。

$$\underbrace{\underbrace{a+b}_{\text{左辺}}=\underbrace{c}_{\text{右辺}}}_{\text{両辺}}$$

等式の性質

両辺に同じ数字を足しても等式は成り立つ

$a=b$ なら

両辺から同じ数字を引いても等式は成り立つ。

$a=b$ なら

両辺に同じ数字をかけても等式は成り立つ。

$a=b$ なら

両辺を同じ数字で割っても等式は成り立つ。

$a=b$ なら

◆方程式の解き方

「方程式を解く」とは x の値を出すこと。　つまり $x=5$ のように「 x = 数字」の形にすることです。

【例題 1】

方程式 $x-8=5$ の解き方。

「 $x=$ 数字 」にするため左辺の「 -8 」は必要ありません。　$x-8=5$

この「 -8 」をなくすために両辺に「 $+8$ 」を加える　$x-8+8=5+8$

そして両辺をそれぞれ計算する　$x=13$

このように上記の等式の性質を利用して方程式を解くことができます。

「**両辺に同じ数字をかけても等式は成り立つ**」という性質を利用して x に係数がある方程式を解きます。

【例題 2】

方程式 $-3x=12$ の解き方。

「 $x=$ 数字 」にするため左辺の「 -3 」は必要ありません　$-3x=12$

この「 -3 」は x にかけてあるので「**逆数**」をかける　$\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-3x)=12\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

両辺をそれぞれ約分して計算する　$x=-4$

【例題 3】

方程式 $4x+15=-9$ の解き方。

「 $x=$ 数字 」にするため左辺の「 $+15$ 」は必要ありません	$4x+15=-9$
この「 $+15$ 」をなくすために両辺に「 -15 」を加える	$4x+15-15=-9-15$
そして両辺をそれぞれ計算する	$4x=-24$
「 4 」は x にかけてあるので「**逆数**」をかける	$\left(\frac{1}{4}\right)\times 4x=-24\times\left(\frac{1}{4}\right)$
両辺をそれぞれ約分して計算する	$x=-6$

一方の辺の項を符号を変えて他方に移動することを「　　　　」と呼びます。

【移行の例】

$x-8=7$	$2x=-5x+14$
$x=7+8$	$2x+5x=14$
$x=15$	$x=2$

> **移項を用いた方程式の解き方　手順**
> **① x を含む項を左辺に、数字の項を右辺に移項する。**
> **② $ax=b$ の形にする。**
> **③ 両辺を x の係数 a で割る。**

今まで説明したことが方程式を解く基本です。これ以外に注意することとして、

> **①カッコを含む方程式は分配法則でカッコを外してから解く。**
> **②係数に小数がある場合、そのままでも解けるが両辺に 10 や 100, 1000 などをかけて係数を整数にすると間違いにくくなる。**
> **③係数に分数がある場合も、両辺に数字をかけて分数を整数にすると計算がやりやすくなる。このときかける数字は分母の公倍数。**

【練習問題 1】

1．次の方程式を解きなさい。

(1) $6x=2$

(2) $\frac{x}{4}=3$

(3) $3x-12=0$

(4) $-7(x+3)=4-2x$

⑸ $3(x+2)=2-2(x+3)$

⑹ $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{2}$

⑺ $\dfrac{x}{4}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3x}{2}-\dfrac{5}{6}$

⑻ $\dfrac{3}{4}(3x+2)=-\dfrac{4}{5}(3-2x)$

【文章題の解き方】

１．求める値を x とする。
２．等しくなる 2 つの値を見つける。
３．方程式の解が文章題の答えとして妥当かチェックする。

【例題】

3 年 B 組の男子生徒たちで、義理チョコを同じ数分けることにしました。2 個ずつわけると 9 個あまり、3 個ずつわけると 4 個足りません。3 年 B 組の男子生徒は何人いるでしょうか。

一次方程式の文章題で大切なのは、「どの値をxとするか」です。文章題にはいろいろな数があってわかりにくいけど、「**文章題で求める値をx**」とします。
今回の場合は、「3 年 B 組の男子生徒の数」をもとめるのですから、これをxとします。

次に、等しくなる 2 つの値を見つけます。方程式をつくることは、「天秤を釣り合わせる」のと同じです。ですから、「何と何が等しくなりそうか」考えます。

今回の文章題で、等しくなりそうな 2 つの値は、どれでしょうか。
この文章題では、男子に何個配ろうが、義理チョコの数は変わりません。したがって、「2 個ずつわけると 9 個あまり」と「3 個ずつわけると 4 個足りない」の 2 つに場合においても、義理チョコの数は変わりません。

男子生徒の数を$\boldsymbol{x}$としていますから、2 個ずつあげたときは「$\mathbf{2}\boldsymbol{x}$」個のチョコを男子たちにあげたことになり、義理チョコが 9 個余っているわけですから、このときの義理チョコの数は、「$\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}$」。同じように、3 個ずつあげたときは「$\mathbf{3}\boldsymbol{x}$」個のチョコを男子たちにあげたことになり、4 個足りなくなったのですから、義理チョコの数は、「$\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}$」となります。

2 つの場合の義理チョコの数は等しいので、　$\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}=\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}$
という方程式をたてることができます。あとは、この方程式を解けばいいわけです。

$\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}=\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4} \qquad \boldsymbol{x}=\mathbf{13}$

答えがでましたね。ただ、文章題の場合は、これで終わりではないんです。最後に、方程式の解が文章題の答えとして妥当かチェックします。文章題においては、文章題にちゃんとフィットした答えでなければ正解ではないのです。例えば、今の文章題で、方程式を解いたら、$\boldsymbol{x}=-\mathbf{13}$ という方程式の解が得られたとします。文章題の答えは $-\mathbf{13}$ でしょうか？ 男子生徒の数を$\boldsymbol{x}$ としたわけですから、マイナスにはなりませんね。
ミスに気づいたらどのプロセスで間違えてしまったのかチェックしてみましょう。ふつうの計算問題だったら気づかないミスも、文章題なら気づくことができます。必ず、解が文章題の答えとして妥当かどうか確認しましょう。

【演習問題】

1．次の１次方程式を解きなさい。

(1) $\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}=\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{7}$

(2) $-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{30}=\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{60}$

(3) $\mathbf{1.6}\boldsymbol{x}-\mathbf{1.2}=\mathbf{3.2}\boldsymbol{x}$

(4) $\dfrac{\boldsymbol{x}+\mathbf{4}}{\mathbf{6}}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}+\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

(5) $\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}x=4$

２．方程式を立てて求めなさい。

(1) ある中学校では全校生徒の 45%が女子です。男子の人数は女子の人数より 24 人多い。この学校の全校生徒の人数を求めなさい。

(2) 80 円の鉛筆と 100 円のボールペンを合わせて 15 本買いました。代金の合計は 1340 円でした。それぞれ何本ずつ買ったのですか。

(3) 弟が家を出て毎分 40m で歩きます。その 5 分後に兄が毎分 60m で追いかけます。兄が弟に追いつくのは家から何 m の地点ですか。

(4) ある数 x を 3 倍して 1 引いた数は、x に 4 をたして 2 倍した数と等しくなります。ある数 x を求めなさい。

「　１次方程式・１次関数とグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

◆1 次関数

１．１次関数

関数とは、2 つの変数 x と y があり、y の値が x の値にともなって変化し、x の値を定めると y の値がただ一つに決まる場合、y はx の関数であるといいます。

$y =$　　　　　　　　　$(a, b$は定数$)$

このとき上式のように、右辺が x の 1 次式になっている場合、これを「　　　　」**関数**といいます。

２．１次関数と変化の割合

変化の割合とは、

変化の割合 $=$

1 次関数$y = ax + b$では、「**変化の割合は一定で、a と等しく**」なる。

【例】

1 次関数$y = 2x + 10$では、変化の割合は「　　」となる。

x の増加量が「 3 」のときの y の増加量は、$2 \times 3 = 6$となるので yの増加量は「　　」である。

３．1 次関数の値と座標

【例題１】

$y = 2x + 1$のときの次の表の空欄を求めよ。

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

４．1 次関数のグラフ

数学では、平面上の位置を表すのに「座標平面」を使う。

【基本事項】

(1) 座標軸が垂直に交わる「　　　　　　　　　」**座標**

(2) 基本となる数直線（「　　　　　」）を垂直に交わるように 2 本引く

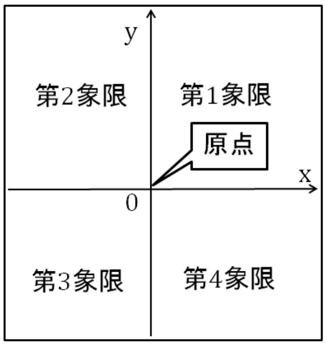
横の数直線を「　　」**軸**　縦の数直線を「　　」**軸**

(3) 座標軸の交わる点を「原点」という。

(4) 座標平面の

$x > 0$　$y > 0$　：　第　象限　　　$x < 0$　$y > 0$　：　第　象限

$x < 0$　$y < 0$　：　第　象限　　　$x > 0$　$y < 0$　：　第　象限



【点の位置の表し方】

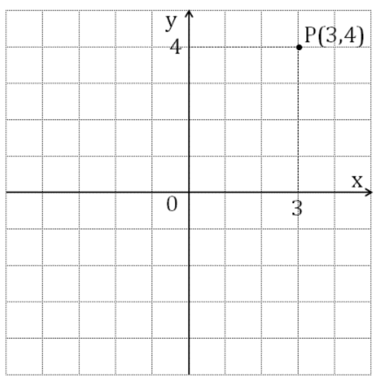
座標軸を使うことで、平面上の点の位置を表す。

右の図の点 P の位置は、

x 軸上の目盛り「3」← 「 x **座標**」

y 軸上の目盛り「4」← 「 y **座標**」

「　　　　　　」と表す。



「　１次方程式・１次関数とグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

※比例とそのグラフ

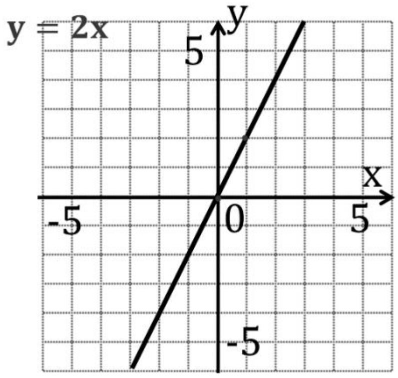
①$\boldsymbol{y = ax}$

が成り立つとき、$\boldsymbol{y}$ **は** $\boldsymbol{x}$ **に**「　　　　　　」という。

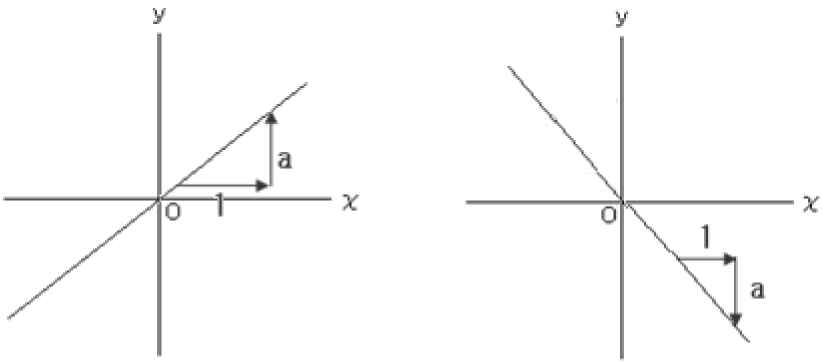
②関数$\boldsymbol{y = ax}$を表すグラフは、「 **原点を通る直線** 」である。

③グラフは、$\mathbf{a} > 0$のとき「 **右上がり** 」

$\mathbf{a} < 0$のとき「 **右下がり** 」

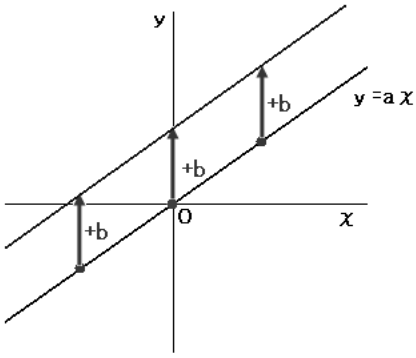


a＞０のとき、　**右上がりの直線**　　a＜０のとき、　**右下がりの直線**



(1)傾きと切片

$\boldsymbol{y = ax + b}$ の変化の割合 $\boldsymbol{a}$ とグラフの傾きは、以下のような関係である。

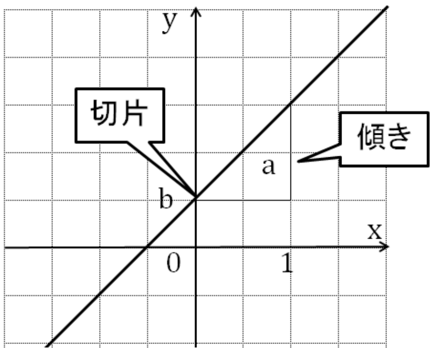


$$\textbf{変換の割合} = \frac{\boldsymbol{y}\textbf{の増加量}}{\boldsymbol{x}\textbf{の増加量}} =$$

これをグラフで考えてみると、

１次関数$\boldsymbol{y = ax + b}$は、$\boldsymbol{y = ax}$より、$\boldsymbol{y}$ の値が $\boldsymbol{b}$ だけ大きくなる。

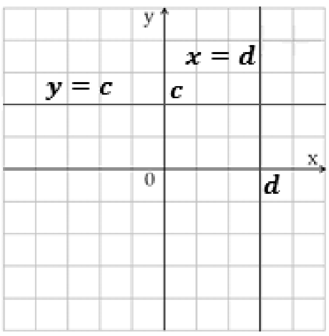
つまり、1次関数 $\boldsymbol{y = ax + b}$ のグラフは、$\boldsymbol{y = ax}$ のグラフを $\boldsymbol{y}$ 軸の方向に「 $\boldsymbol{b}$ **だけ平行移動** 」した直線である。そして、この直線は、必ず $\boldsymbol{y}$ 軸と $\boldsymbol{y}$ 座標が $\boldsymbol{b}$ の部分で交わる。この $\boldsymbol{y}$ 軸との交点を「　　　　　　」という。



★ちなみに、

$\boldsymbol{y = c}$　のグラフは、$\boldsymbol{x}$軸に平行で $\boldsymbol{y}$ の値が $\boldsymbol{c}$ の直線

$\boldsymbol{x = d}$　のグラフは、$\boldsymbol{y}$ 軸に平行で $\boldsymbol{x}$ の値が $\boldsymbol{d}$ の直線



「　１次方程式・１次関数とグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

【練習問題 2】

次の１次関数が表すグラフの傾きと切片を求めよ。

①$y = 4x + 3$

傾き　　　　　切片

②$y = \dfrac{-3x+8}{2}$

傾き　　　　　切片

③$3x + 4y = 9$

傾き　　　　　切片

④$-2x - 5y = 0$

傾き　　　　　切片

⑵ グラフの描き方

傾きと切片を求めて、グラフを描く。

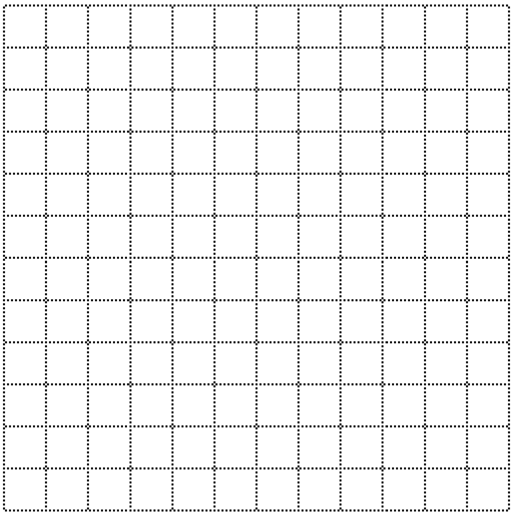
グラフ・座標を描く際の注意事項★

- 座標軸と軸の向き
- 座標軸の名前
- １目盛り（1 マス）の値
- 切片・傾きから求めた点

【練習問題 3】

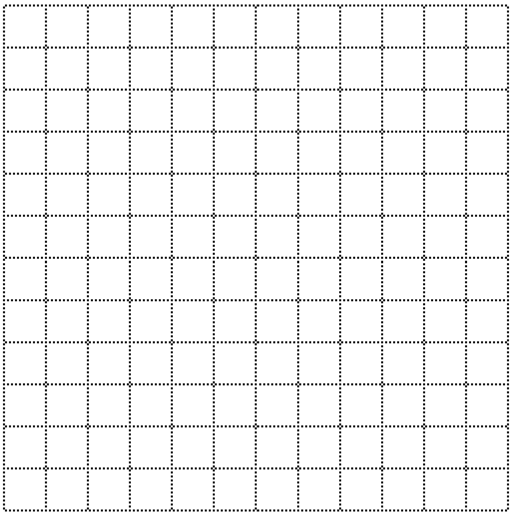
傾きと切片を求めて、グラフを描きなさい。

①$y = -2x + 3$



傾き　　　　　切片

②$y = 2x - 3$



傾き　　　　　切片

◆連立方程式

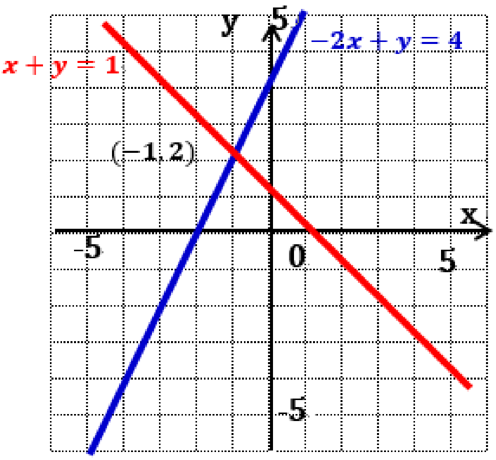
１．連立方程式の解とグラフの関係

「連立方程式の解」は数式的に表されるものだが、これは「2 直線の交点」という図形的な性質と対応している。つまり、連立方程式の解は、方程式を表すグラフの交点の座標である。

【例】

連立方程式 $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x+y=4 \end{cases}$

の各式が表すグラフを描き、別途、解を求めなさい。



$x+y=1$　　$y=-x+1$

傾き　　　　切片

$-2x+y=4$　　$y=2x+4$

傾き　　　　切片

解答

「直線の交点」の考え方を使い、y 軸との交点（y 切片）、x 軸との交点（x 切片）を求める場合に利用できます。

(1) y 軸との交点（y 切片）

y 軸を表す直線の方程式は$x=0$

⇒ y 軸との交点の座標を求めるためには、$x=0$ を代入して y 座標を求める。

【例】

直線 $3x+4y=24$ と y 軸との交点を求めるには、$x=0$ を代入

⇒ $4y=24$　　$y=6$　だから交点の座標は（0，6）

(2) x 軸との交点（x 切片）

x 軸を表す直線の方程式は $y=0$

⇒ x 軸との交点の座標を求めるためには、$y=0$ を代入して x 座標を求める。

【例】

直線 $3x+4y=24$ と x 軸との交点を求めるには、$y=0$ を代入

⇒ $3x=24$　　$x=8$だから交点の座標は（8，0）

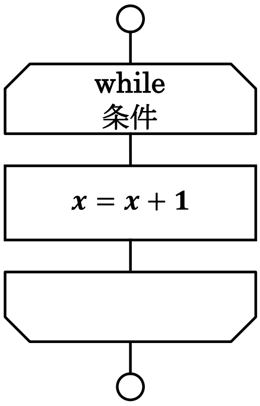
【練習問題 4】

(1) 直線 $2x+y=12$ の y 切片、x 切片を求めよ。

(2) 直線 $-4x-y+8=0$ の y 切片、x 切片を求めよ。

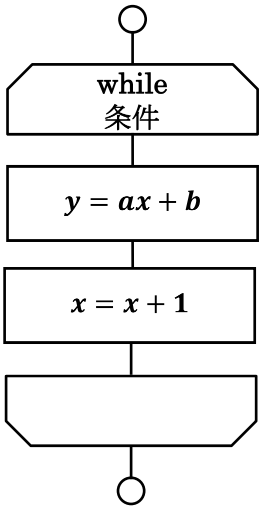
◆グラフのプログラム

$y = ax + b$　において、a　は直線の傾きを示す定数であり、b　は　y　切片（y軸との交点）を示す定数ですね。また、$y = ax + b$ は、一次関数を表す式ですから、y　は　x　が決まれば求めることができることを示します。
そこでここでは、x　を変化させながら　y　の値を求めることを考えます。
すでにプログラミング実習等で学んでいると思いますが、プログラムで値を次々に変化させるために用いるのが繰り返しの処理ですね。流れ図で表わすと、以下のようになります。



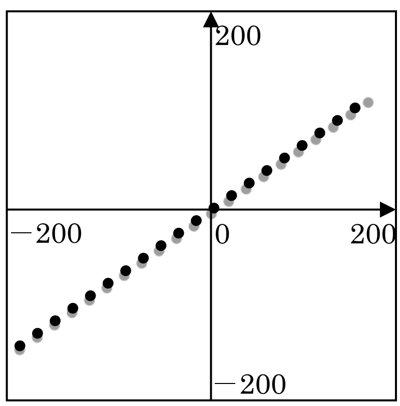
xは初期化しておく必要があります。

これを直線の式の x に利用することができますね。
この処理はプログラムでは非常によく使うアルゴリズムです。理解できてますよね！
そこで、y の値を直線の式そのまま適用してみたものを考えます。



a, b, xは初期化しているものとする。

これで、基本的な計算アルゴリズムは完成です。
次にどのように画面に表示するかを考える必要があります。プログラムの座標は以下のようになっています。この座標内にグラフを描きます。



座標
　定義：Vector2　p0;
　値を入れる:p0=new Vector2(x,y);
座標点を描く
　Dot(p0);　　　Dot(p0,5);

「　１次方程式・１次関数とグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

◆演習問題

１．準備

(1)フォルダのコピー

「G_番号_氏名」のフォルダをデスクトップにコピーする。

コピーしたら、学籍番号・氏名を自分の学籍番号・氏名に変更する。

(2)MathCalc ソリューションを起動し、新しいプロジェクトを追加する。

Windows フォームアプリケーション(.Net Framework)を選択する。

名前：MathGraph00

(3)MathGraph00 をスタートアッププロジェクトに設定する。

(4)参照の追加

①ソリューションエクスプローラの「MathGraph00」－「参照」右クリック－「参照の追加」

②参照をクリックし、参照ボタンクリック

③「G_学籍番号_氏名」フォルダー「DrawUtilityLib」フォルダー「MathUtility.dll」と「DrawUtility.dll」を選択

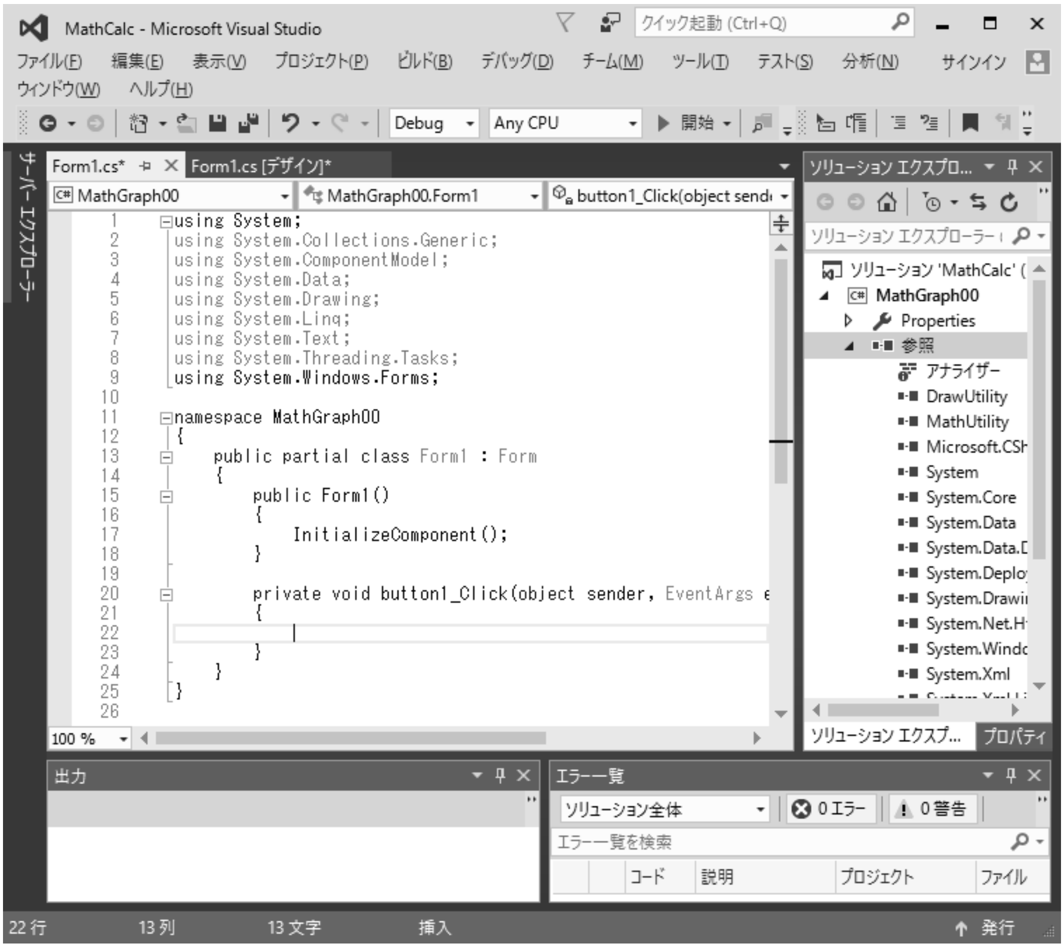
④追加ボタンクリック－OKボタンクリック

(5)[Form1.cs[デザイン]]にボタンを追加

①[表示]－[ツールボックス]－[すべての Windows フォーム]－[Button]をクリックし、[Form1]上でドラッグする。([button1]を作成したら、[ツールボックス]は×で閉じる。)

②作成した[button1]をダブルクリックする。

③[Form1.cs]が以下のように表示される。



(6)[MyDrawClass.cs]を追加する。

①「ソリューションエクスプローラ」の「MathGraph00」にカーソルを合わせて「右クリック」－「追加」－「新しい項目」

②[新しい項目の追加]－[クラス]を選択し、名前に[MyDrawClass]と入力し、追加ボタンをクリックする。

(7) [MyDrawClass.cs]プログラムの入力

```
using DrawUtility;  //追加
using MathUtility.Vector_2;  //追加

namespace MathGraph00
{
    class MyDrawClass:Draws    // 追加
    {
        Vector2 p0;
        float x, y, a, b, step;

        public MyDrawClass() { }

        public void graph()
        {
            x = -200.0f;   //追加  xの初期値
            a = 1.0f;      //追加  直線の傾き
            b = 0.0f;      //追加  切片
            step = 10.0f;  //追加  xの増分

            Clear();

            //グラフの描画

                グラフの描画処理を追加しましょう！

        }
    }
}
```

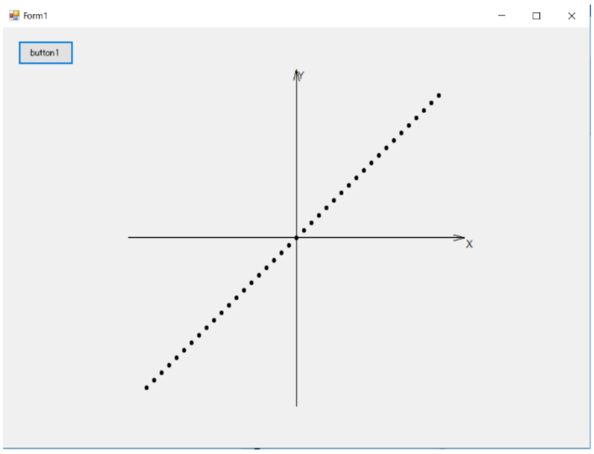
(8) [Form1.cs]プログラムの入力

```
using DrawUtility; //追加

namespace MathGraph00
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        MyDrawClass draw;
        DrawAxis axis;

        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
            Width = 800; Height = 600;   //  ウィンドウサイズ
            DrawWindow.Initialize(this);
            axis = new DrawAxis();
            DrawWindow.Add(axis);
            draw = new MyDrawClass();
        }

        private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            draw.graph();
        }
    }
}
```

(9) グラフの描画処理を追加して、実行してみましょう。

①[デバッグ]－[デバッグの開始]　（もしくは、F5 キー）

②プログラムが起動したら、button1 ボタンをクリック



２． a , b の値を変更して実行してみましょう。

②のグラフが表示されないときは、ｘの初期値を変更してみましょう。

①　$y = 2x + 50$　　②　$y = -2x - 50$　　③　$y = \frac{1}{3}x - 30$

◆発展問題

１．次の１次関数が表すグラフの傾きとx切片・y切片を求め、グラフを描きなさい。

(1)　$\mathbf{2x - y = 4}$

傾き　　　　　　　**x切片**　　　　　　　　　**y切片**

(2) $\mathbf{y + 2x + 3 = 0}$

傾き　　　　　　　**x切片**　　　　　　　　　**y切片**

(1)　$\mathbf{2x - y = 4}$　　　　　　　　　　(2) $\mathbf{y + 2x + 3 = 0}$

２．次の直線の傾き・ y 切片・ x 切片を求めなさい。

⑴直線 $y = -3x + 9$

⑵直線 $2x + y - 1 = 0$

⑶直線$-\frac{1}{2}x + 2y - 4 = 0$

【MyDrawClass.cs】グラフ処理の例

```
//グラフの描画
while(x<200 && y<200)
{
    y = a * x + b;   //直線の式
    p0 = new Vector2(x, y);
    Dot(p0);
    Render();
    x = x + step;    //x の値を step 増加
}
```