

6. ベクトルの計算

ベクトルの計算は以下のように定義される。
 k はスカラーであり、 $\underline{a}(1,2)$, $\underline{b}(2,3)$ なら、

$$\overrightarrow{ab} = (2-1, 3-2) = (1, 1)$$

$$\overrightarrow{ba} = (2-1, 3-2) = (-1, -1)$$

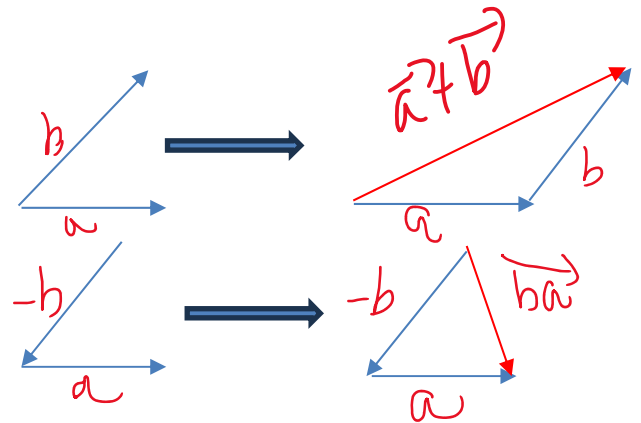
$$\vec{a} + \vec{b} = (1+2, 2+3) = (3, 5)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1-2, 2-3) = (-1, -1)$$

$$k\vec{a} = (k \cdot 1, k \cdot 2) = (k, 2k)$$

$$\vec{a}/k = (1/k, 2/k)$$

6. 計算の図示



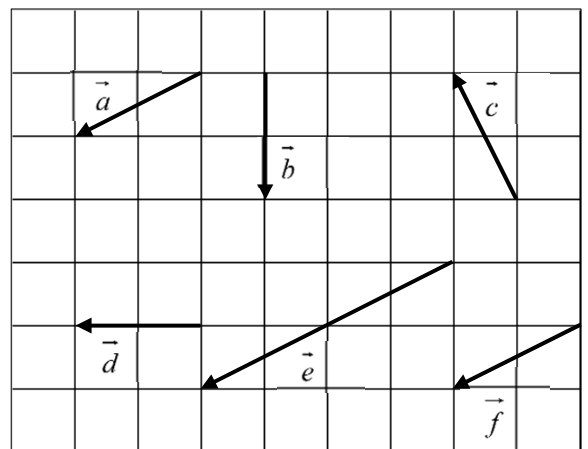
1

右の図において、次のベクトルを選べ。

(1) 等しいベクトル

(2) 大きさが等しいベクトル

(3) 向きが等しいベクトル



2

右の図に、次のベクトルを図示し、

それぞれの大きさを求めよ。

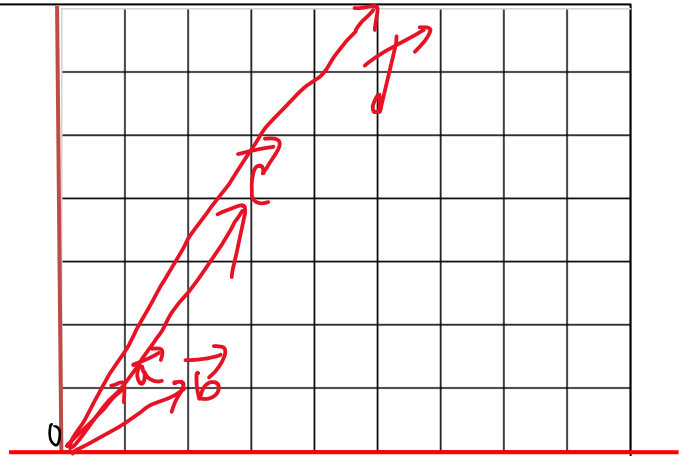
原点は0とする。

$$\vec{a} = (1, 1)$$

$$\vec{b} = (2, 1)$$

$$\vec{c} = (3, 4)$$

$$\vec{d} = (5, 7)$$



3

右の図に、次のベクトルを図示せよ。

また、それぞれの成分を出せ。

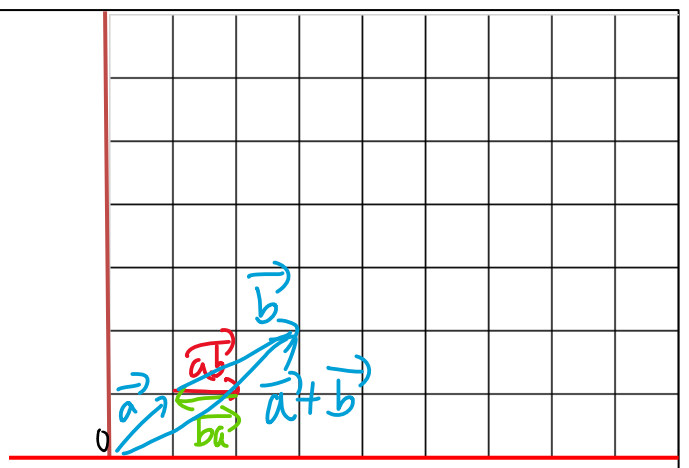
原点は0とし、 $\underline{a} = (1, 1)$, $\underline{b} = (2, 1)$ とする。

$$\overrightarrow{ab} = (2-1, 1-1) = (1, 0)$$

$$\overrightarrow{ba} = (1-2, 1-1) = (-1, 0)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{ba} = (-1, 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 2)$$



1

$$-3\vec{a} + 2\vec{b} = (-6, 12) + (10, -6) = (4, 6) \quad \text{大きさ} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5, -3)$ のとき, $-3\vec{a} + 2\vec{b}$ を成分で表せ。

また, その大きさを求めよ。

2

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)) = (-3, -2)$$

$a = (1, -2)$, $b = (3, -2)$ のとき, $3a - 2b$ を成分で表せ。

また, その大きさを求めよ。

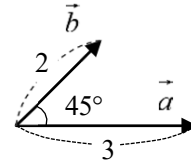
$$\text{大きさ} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

3

次の内積を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, \vec{a} と \vec{b} のなす角が 45°

$$\text{のときの, 内積 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$



(2) $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5, 3)$ のときの, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 - 12 = -2$

4

次の問いに答えよ。

(1) 2 つのベクトル $\vec{a} = (3, 7)$, $\vec{b} = (-5, -2)$ のなす角 θ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -15 - 14 = -29 \quad \cos \theta = \frac{-29}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{29}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = 135^\circ$$

(2) $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5+x, 3+x)$ が垂直であるとき, x の値を求めよ。

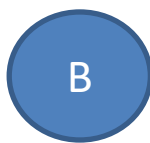
$$10 + 2x - 12 - 4x = 0 \quad x = -1$$

5

物体Aは速度 $\vec{v} = (1, 2)$ [m/s], 初期位置 $p_0 = (2, 3)$ であり, その状態で $t = 3$ [s] 経過した。
t秒後の物体Aの座標p(x座標, y座標)を求めよ。

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \vec{v} \cdot t \\ &= (2, 3) + (1, 2) \cdot 3 \\ &= (2, 3) + (3, 6) \\ &= (5, 9) \end{aligned}$$

6



球Aと球Bの中心の座標を
 $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ とする。
半径を r とする。

A と B の最短距離を d とすると、

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

となり、

$$d < 2r$$

のとき, A と B は衝突している。

これをベクトルで考えると、

$$\vec{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

であり, この大きさが距離なので、

$$|\vec{AB}| < 2r$$

のとき, A と B は衝突している。

1

次の座標から、以下の4つのベクトルを作成せよ。

a(1, 2), b(3, 4), c(-1, 5), d(-2, -3)

 $\vec{ab}, \vec{bc}, \vec{cd}, \vec{da}$

$$\vec{ab} = (2, 2) \quad \vec{cd} = (-1, -8)$$

$$\vec{bc} = (-4, 1)$$

$$\vec{da} = (3, 5)$$

2

右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

2. bからaに向かうベクトルを求めよ。

$$\vec{ab} = (4, 5)$$

$$\vec{ba} = (-4, -5)$$

● b(5, 7)

● a(-1, 2)

3

右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

2. \vec{ab} を正規化したものを \vec{n} とする。aがその際にt[s]でbたどり着くための速度ベクトルを求めよ。解答には $|\vec{ab}|$ を使用して良い。

$$1. \vec{ab} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

● b(x_b, y_b)● a(x_a, y_a)

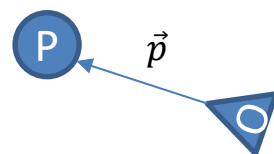
$$\vec{v} = \vec{n} \cdot \frac{|\vec{ab}|}{t}$$

4

あるオブジェクトが、常にプレイヤーを正面にとらえて欲しい。

P(p_x, p_y), O(o_x, o_y) とすると、右図の \vec{p} の式を求めよ。

$$\vec{p} = (p_x - o_x, p_y - o_y)$$



5

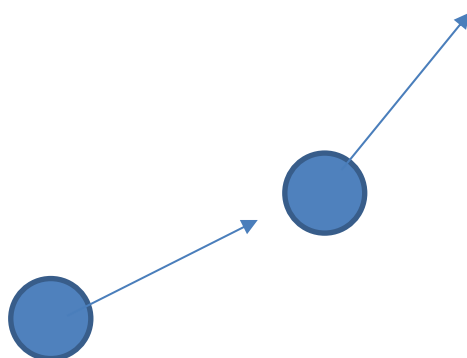
次の運動をする物体を考える。

加速度: \vec{a} , 現在地: P, 初速度: \vec{v}_0 , 初期位置: \vec{p}_0 とする。

経過時間はtとする。

1. $t = 0 \sim t = 3$ のとき、 $\vec{v}_0 = (1, 2)$, $P_0 = (1, 1)$, $\vec{a}(1, 0)$ 2. $t = 3 \sim t = 5$ のとき、物体Aは30° 回転し、 $\vec{a}(1, 1)$ となる。

1と2、それぞれの状況でのPの式を立てよ。



t ≤ 3 のとき、

$$P = P_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$= (1, 1) + (1, 2) \cdot t + \frac{1}{2} (1, 0) \cdot t^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^2 + t + 1, 2t + 1 \right)$$

t ≤ 5 のとき、

$$P_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot 9 + 3 + 1, 6 + 1 \right) = \left(\frac{19}{2}, 7 \right)$$

$$V_0 = V_0 + a t = (4, 2)$$

ベクトルの回転は原点での回転と同じ

$$V_0 = (4 \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ, 4 \sin 30^\circ + 2 \cos 30^\circ)$$

$$= (2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})$$

よって、

$$P = P_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$= \left(\frac{19}{2}, 7 \right) + (4, 2) t + \frac{1}{2} (1, 1) t^2$$

$$= \left(\frac{19}{2}, 7 \right) + (2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3}) t + \frac{1}{2} (1, 1) t^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^2 + (2\sqrt{3} - 1) t + \frac{19}{2}, \frac{1}{2} t^2 + (2 + \sqrt{3}) t + 7 \right)$$

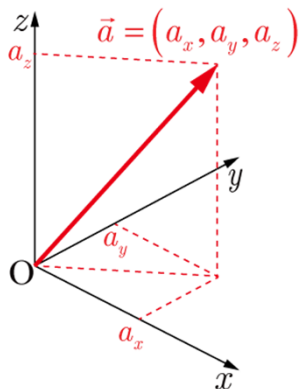
1.空間(3次元)ベクトル

これまでは2次元のベクトルについて考えてきましたが、ベクトルは実際には3次元で使用される事が主になります。

例えば、3次元ベクトル \vec{a} を例示すると

$$\vec{a} = (ax, ay, az)$$

となり、
z方向の成分も持つベクトルとなります。



3.外積

3次元ベクトルには外積という概念が存在します。

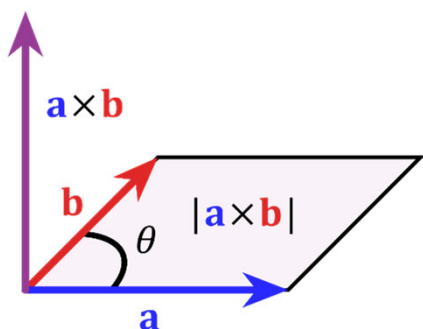
$\vec{a} = (ax, ay, az), \vec{b} = (bx, by, bz)$ とすると、

$$\begin{aligned} \text{外積} &= \vec{a} \times \vec{b} \\ &= \underline{\underline{(ay*bz - az*by, az*bx - ax*bz, ax*by - ay*bx)}} \end{aligned}$$

これにより何が求まるかというと、

\vec{a} と \vec{b} の両方に対して垂直なベクトルが求まります。

$$\underline{\underline{\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ かつ } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}}}$$



また、外積の大きさは

上図のような \vec{a} と \vec{b} で描かれる平行四辺形の面積と等しいという性質があります。

なので、次の性質が成り立ちます。

$$\underline{\underline{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta}}$$

2.3次元ベクトルの計算

$\vec{a} = (ax, ay, az), \vec{b} = (bx, by, bz)$ とする。
正規化された単位ベクトルを \vec{n} とする。

$$\vec{a} + \vec{b} = (ax + bx, ay + by, az + bz)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (ax - bx, ay - by, az - bz)$$

$$k \vec{a} = (k * ax, k * ay, k * az)$$

$$\vec{a}/k = (k * ax, k * ay, k * az)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ax * bx + ay * by + az * bz$$

3次元に拡張されただけで、2次元と基本的に同じです。
これ以外でも殆どのベクトルの計算は、
2次元ベクトルの計算にz成分を追加しただけになります。

手計算での公式の確認などは基本的に2次元でやりましょう。
ここでは、3次元によって新たに出現した概念などを扱っていきます。

・基本問題

$\vec{a}(1,2,3), \vec{b}(3,2,1)$ とする。

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, 4, 4)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-2, 0, 2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 4 + 3 = 10$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4 + 9} = \sqrt{14} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \text{ の単位ベクトル} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 - 6, 9 - 1, 2 - 6) = (-4, 8, -4)$$

\vec{a}, \vec{b} のなす角を θ とした際の

$$\cos \theta = \frac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{16 + 64 + 16}}{14} = \frac{\sqrt{96}}{14} = \frac{4\sqrt{6}}{14} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

\vec{a}, \vec{b} で描かれる平行四辺形の面積

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 4\sqrt{6}$$

1

球Aと球Bの中心の座標を
 $A(X_a, Y_a, Z_a), B(X_b, Y_b, Z_b)$ とする。
 半径を r とする。

これをベクトルで考えると、

$$\vec{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

AとBの最短距離を d とすると、

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$$

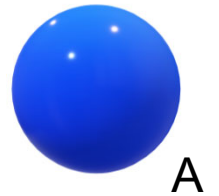
であり、この大きさが距離なので、

$$|\vec{AB}| < 2r$$

となり、

$$d < 2r$$

のとき、AとBは衝突している。



2

右の点について考える。

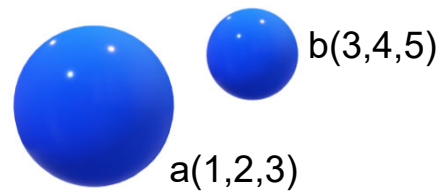
1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

2. \vec{ab} を正規化したものを \vec{n} とする。aがその際に $t[s]$ でbたどり着くための速度ベクトルを求めよ。

解答には $|\vec{ab}|$ を使用して良い。

$$\vec{v} = \vec{n} \cdot \frac{|\vec{ab}|}{t}$$

$$\vec{ab} = (2, 2, 2)$$



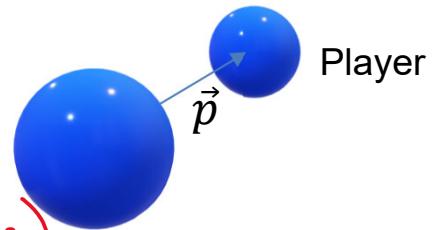
3

あるオブジェクトが、常にプレイヤーを正面にとらえて欲しい。

$P(p_x, p_y, p_z), O(o_x, o_y, o_z)$ とすると、

右図の \vec{p} の式を求めよ。

$$\vec{p} = (p_x - o_x, p_y - o_y, p_z - o_z)$$



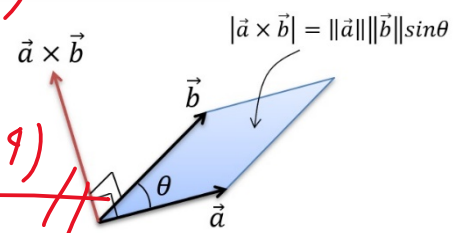
4

ある面の中に交差するベクトル \vec{a}, \vec{b} がある。

$\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (3, 2, 1)$

とすると、その面に垂直なベクトルを一つ求めよ。

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2-6, 3-1, 2-9) = (-4, 2, -7)$$



5

ある面に垂直なベクトルを求めることで、

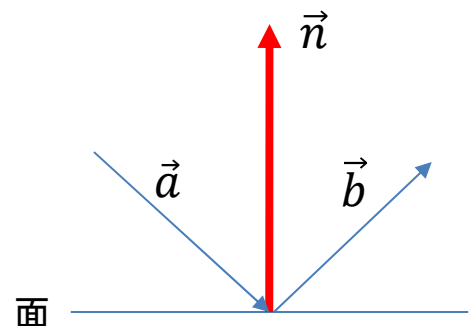
その面で反射した際の反射ベクトルを求める事が出来る。

垂直なベクトルを $\vec{n} = (0, 1, 0)$ とする。

入射ベクトルを $\vec{a} = (1, 1, 1)$ とする。

反射ベクトル \vec{b} を求めよ。

$$\vec{b} = (1, -1, 1)$$



面に沿って
真横から見た図

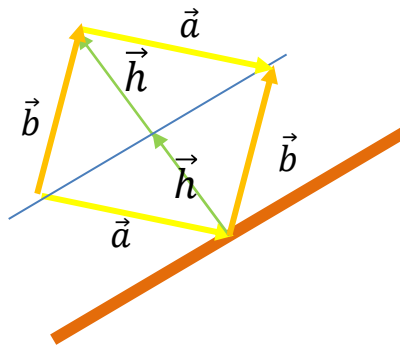
1.面法線と内積による反射の導出

ある面に対しての入射ベクトルを \vec{a}
 反射ベクトルを \vec{b} ,面法線を \vec{n} とする。
 \vec{a} から \vec{n} への射影ベクトル \vec{h} は

$$\vec{h} = \vec{n} |\vec{a}| \cos \theta$$

反射は右図のようなベクトル経路を取る。
 よって、

$$\vec{b} = 2 \vec{h} + \vec{a}$$



上記のような形で、
 面法線と内積で反射ベクトルを求められる。

1

次の外積によって求められる法線ベクトルを答えよ(正規化しなくてよい)。

また、 \vec{a}, \vec{b} において \vec{b} 方向の射影ベクトル \vec{h} を求めよ。

なお、 $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-1, 2, -3), \vec{c} = (2, 4, 6)$ とする。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (-12, 4, 4) \\ \vec{b} \times \vec{c} &= (24, 0, -8) \\ \vec{c} \times \vec{a} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}} (-1, 2, -3)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{14}} (-1, 2, -3) (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} (6, -12, 18) \end{aligned}$$

2

次の衝突状態の反射について考える。

入射ベクトル $\vec{a} = (1, 2, 3)$, 反射面上のベクトル $\vec{b} = (2, 3, 4), \vec{c} = (4, 3, 2)$ とする。

面の法線ベクトル: \vec{n} , \vec{a} から \vec{b} への射影ベクトル: \vec{h} , 反射ベクトル: \vec{l} を求めよ。

$$\vec{b} \times \vec{c} = (-6, 12, -6)$$

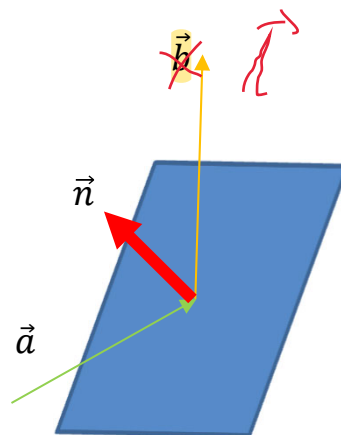
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{54}} (-3, 6, -3)$$

$$\vec{h} = \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$$

$$\vec{h} = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{54}} (-3, 6, -3)$$

$$\vec{l} = 2\vec{h} + \vec{a} = \frac{40}{\sqrt{54}} (-3, 6, -3) + (1, 2, 3)$$



1.2次元ベクトル回転

ベクトル成分は常に原点からの成分として考えられる。
そのため、2次元ベクトルの回転は原点基準での座標回転と同じである。

したがって、点P(a, b)を原点のまわりに θ だけ回転させた点Qの座標は

$$Q(a \cos \theta - b \sin \theta, a \sin \theta + b \cos \theta)$$

となる。

であったので、2次元ベクトル回転は

$$\vec{p} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

3.3次元ベクトル回転

3次元ベクトルの回転を考える。

全ての回転は、

- ・ x軸上の回転
- ・ y軸上の回転
- ・ z軸上の回転

の組み合わせで表せる。

各軸上の回転は2次元ベクトルの回転と同じであるので、

4.3次元ベクトルでの図形回転(原点基準)

図示するのが難しいので図示は省略するが、
2次元ベクトルと同じで、全ての頂点に向かうベクトルを作成して回転させる。

・ 基本問題

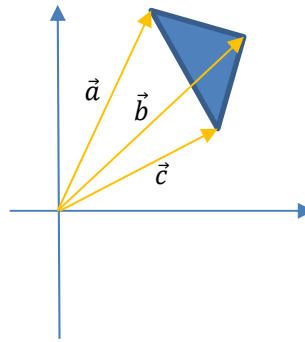
1. 次の2次元ベクトルを $\theta=30^\circ$ 回転させよ。

$$\vec{a} = (3, 4)$$

$$\vec{a} = (3 \cdot \cos \theta - 4 \sin \theta, 3 \sin \theta + 4 \cos \theta)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \right)$$

2.2次元ベクトルでの図形回転(原点基準)



図形を描く頂点それぞれに
原点からのベクトルが伸びて
いると考える。

それらのベクトルを回転させ
れば、その成分が回転した
図形の座標になる。

$$\vec{a} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$\vec{b} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$\vec{c} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

x軸上の回転：

$$\vec{p} = (x, y \cos \theta - z \sin \theta, y \sin \theta + z \cos \theta)$$

y軸上の回転：

$$\vec{p} = (x \cos \theta + z \sin \theta, y, -x \sin \theta + z \cos \theta)$$

z軸上の回転：

$$\vec{p} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

導出は省くが、

それぞれの軸に対して考えれば上記が出る。

x軸上に $\theta=\sim$, y軸上に $\theta=\sim$, z軸上に $\theta=\sim$
とそれぞれやって、求める。

2次元ベクトルとの比較としては、
作成するベクトルの数が増えるのと、
計算過程が3倍になることである。

2. 次の3次元ベクトルを

x軸上で $\theta=60^\circ$ 回転させよ。

$$\vec{b} = (3, 4, 5)$$

$$\vec{b} = (3, 4 \cos \theta - 5 \sin \theta, 4 \sin \theta + 5 \cos \theta)$$

$$= \left(3, \frac{10-5\sqrt{3}}{2}, \frac{4\sqrt{3}+5}{2} \right)$$

1.

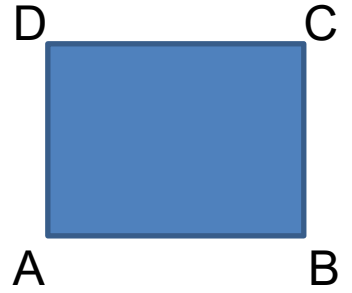
次の2次元図形を回転させる。A(2,2), B(4,2), C(4,4), D(2,4)とすると、原点基準で 30° 回転させた際の、それぞれの座標を求めよ。

$$A = (\sqrt{3}-1, 1+\sqrt{3})$$

$$B = (2\sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3})$$

$$C = (2\sqrt{3}-2, 2+2\sqrt{3})$$

$$D = (\sqrt{3}-2, 1+2\sqrt{3})$$



2.

次の3次元図形の直線を回転させる。A(2,2,2), B(4,4,4)とすると、原点基準でz軸上で 30° x軸上で 60° 回転させた際の、それぞれの座標を求めよ。

$$Z: \theta = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} A' &= (2 \cos \theta - 2 \sin \theta, 2 \sin \theta + 2 \cos \theta, 2) \\ &= (\sqrt{3}-1, 1+\sqrt{3}, 2) \end{aligned}$$



$$X: \theta = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} A'' &= (\sqrt{3}-1, (1+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, (1+\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}) \\ &= (\sqrt{3}-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}) \end{aligned}$$

$$B'' = (2\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{3}, 5+\sqrt{3})$$
