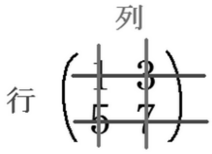
# 行列

## ◆行列とは？




行列はベクトルと同様ゲームプログラミングにおいては必須のもので、キャラクタの移動や回転・変形など様々な計算に用います。ここでは、計算手法を理解することを目的とし、またライブラリを作成することでプログラミングの理解を深めることにします。

「　　　　」とは、数値を「　　　」と「　　　」で並べた数値のことです。「　**行**　」とは、行列の「　**ヨコ**　」の並び、「　**列**　」は行列の「　**タテ**　」の並びです。覚えにくい人は、行列を漢字で書いて覚えましょう。


（行，列）

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{第1列} & \textbf{第2列} \\ \textbf{第1行} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$}} \\ \textbf{第2行} & & \end{array}$$

そして、行列を構成している各々の数を「　　　　」といいます。一般に成分は右図のように（行，列）のように記述し、第ｉ行と第ｊ列の交点にある成分を（ｉ，ｊ）成分といいます。

行の数が「 $\boldsymbol{m}$ 」列の数が「 $\boldsymbol{n}$ 」である行列を「 $\boldsymbol{m\times n}$ **行列**」または、「 $\boldsymbol{m}$ **行** $\boldsymbol{n}$ **列の行列**」といい、とくに、「 $\boldsymbol{m=n}$ 」つまり行と列の数が同じ行列を「 **正方** 」**行列**といいます。
また、**対角線上がすべて**「 1 」で、それ以外が「 0 」である正方行列を「　　　」**行列**といい「 $\boldsymbol{E}$ 」で表し、**すべての成分が**「 0 」である行列を「　　」**行列**といい、「 $\boldsymbol{O}$ 」で表します。

**【単位行列の例】**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

**【零行列の例】**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ゲーム開発をするうえで、ひとつ気をつけなければならないのは、$\boldsymbol{DirectX}$ や $\boldsymbol{OpenGL}$ といったグラフィックスライブラリのほとんどでは、グラフィックスをプログラミングするときに使われる独自の行列型がすでに用意されているということです。とはいえ、行列の数学を理解しなくてもよいわけではないので、くれぐれも注意してください。この講義では、数学に焦点をあてていますから、簡単な行列について話をすすめていきます。プログラムを作成したら、この講義を参考にして、そのプロセスをもっと速くできるような別の方法はないか考えてみてください。

## ◆行列の演算1

### １．等しい行列

> **等しい行列**
> **２つの行列は、**
> **①型（行と列の数）が同じ**
> **②対応する成分がすべて同じ**
> **ときのみ等しいといいます。**

「　行列　」

東京情報クリエイター工学院

## ２．行列の加法と減法とスカラー倍

**行列の和　：　成分同士を加える**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{pmatrix}$$

**行列の差　：　成分同士を引く**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a' & b-b' & c-c' \\ d-d' & e-e' & f-f' \\ g-g' & h-h' & i-i' \end{pmatrix}$$

**行列のスカラー倍　：　各々の成分に掛ける**

$$k \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$k \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{pmatrix}$$

**【例題１】**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、次の計算をしなさい。

① $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+1 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

② $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-2 \\ 3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

③ $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 & 2\times 2 \\ 3\times 2 & 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

**【練習問題１】**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ のとき、次の計算をしなさい。

① $A + B =$

② $B + C =$

③ $\boldsymbol{C - B} =$

④ $\boldsymbol{2A} =$

| |
|---|
| **行列の加法・減法・スカラー倍の計算法則**<br>**同じ型の行列 $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{C}$ および実数 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ について**<br>**交換法則** $\boldsymbol{A + B = B + A}$<br>**結合法則** $\boldsymbol{(A + B) + C = A + (B + C)}$<br>**分配法則** $\boldsymbol{k(A + B) = kA + kB}$ 　$\boldsymbol{(k + l)A = kA + lA}$ 　$\boldsymbol{k(lA) = (kl)A}$ |

**◆行列のプログラム**

**１．コピーした[M_学籍番号_氏名]フォルダの[MathCalc01]ソリューションを起動する。[MyLibrary]の中の[Matrix3.cs]を開いて、確認しましょう。**

**なお、行列は次のように考え、配列に格納し、配列は「0」から始まっているので、注意しましょう。**

$$\boldsymbol{m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}}$$

**２．[Matrix3]クラスを使用して、練習問題１の計算を確認しましょう。**
**コンソールアプリケーション[Ex01]を追加し、[MyLibrary]を参照します。**

**【メ　　モ】**

「　行列　」

東京情報クリエイター工学院

[Ex01 Program.cs]

```
using MyLibrary;
namespace Ex01
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Matrix3 a = new Matrix3(2, 1, 3, 1, 3, 5, 2, 4, 1);
            Matrix3 b = new Matrix3(7, 1, 2, 4, 8, 5, 1, 3, 6);
            Matrix3 c = new Matrix3(10, 8, 1, 7, 6, 2, 4, 5, 9);
            Matrix3 ans1 = a + b;
            Matrix3 ans2 = b + c;
            Matrix3 ans3 = c - b;
            Matrix3 ans4 = 2 * a;
            Console.WriteLine("a+b");
            Console.WriteLine(ans1);
            Console.WriteLine("b+c");
            Console.WriteLine(ans2);
            Console.WriteLine("c-b");
            Console.WriteLine(ans3);
            Console.WriteLine("2*a");
            Console.WriteLine(ans4);
        }
    }
}
```

## ◆行列の演算2

行列の積は、和・差に比べて複雑です。しかし行列の積は、図形処理において重要な計算で、主に座標の変換を行うときに使用されます。行列の積には、法則性があります。法則性を理解しながら覚えましょう。

**【行列の積】**

行と列の数が同じでなくとも計算できるが、規則はある。

<u>**「□行○列」と「○行△列」ならば、計算でき、その結果は「□行△列」になる**</u>

⑴2 行 2 列×2 行 2 列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

⑵3 行 3 列×3 行 3 列

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'+bd'+cg' & ab'+be'+ch' & ac'+bf'+ci' \\ da'+ed'+fg' & db'+ee'+fh' & dc'+ef'+fi' \\ ga'+hd'+ig' & gb'+he'+ih' & gc'+hf'+ii' \end{pmatrix}$$

⑶1 行 3 列×3 行 3 列

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yd+zg & xb+ye+zh & xc+yf+zi \end{pmatrix}$$

行列の法則性について考えましょう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$$ とするとき、その積は、

$$A \times B = \begin{pmatrix} aa'+bd'+cg' & ab'+be'+ch' & ac'+bf'+ci' \\ da'+ed'+fg' & db'+ee'+fh' & dc'+ef'+fi' \\ ga'+hd'+ig' & gb'+he'+ih' & gc'+hf'+ii' \end{pmatrix}$$

どうですか？

**行列 $A$ と行列 $B$ の積である $A \times B$ の $(i,\ j)$ 成分は、$A$ の $i$ 行目と $B$ の $j$ 列目**

「　行列　」

東京情報クリエイター工学院

$\boldsymbol{A}$ の 1 行目と $\boldsymbol{B}$ の 1 列目 ⇒ (1, 1) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 1 行目と $\boldsymbol{B}$ の 2 列目 ⇒ (1, 2) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 1 行目と $\boldsymbol{B}$ の 3 列目 ⇒ (1, 3) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 2 行目と $\boldsymbol{B}$ の 1 列目 ⇒ (2, 1) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 2 行目と $\boldsymbol{B}$ の 2 列目 ⇒ (2, 2) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 2 行目と $\boldsymbol{B}$ の 3 列目 ⇒ (2, 3) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 3 行目と $\boldsymbol{B}$ の 1 列目 ⇒ (3, 1) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 3 行目と $\boldsymbol{B}$ の 2 列目 ⇒ (3, 2) 成分
$\boldsymbol{A}$ の 3 行目と $\boldsymbol{B}$ の 3 列目 ⇒ (3, 3) 成分

$$\begin{array}{cc} & j\text{ 列目} \\ i\text{ 行目} & \\ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} (i, j)\text{ 成分} \\ ad+be+cf \end{array}$$

**行列の積の計算は、以下のように行います。**

**①積が可能か？**

**□行<u>○列</u>×<u>○行</u>△列**
**一致している**
**＝□行△列**
**計算結果**

**②求める成分の場所**

$$\begin{array}{cc} 2\text{ 行 }3\text{ 列} & 3\text{ 行 }4\text{ 列} \\ \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ a & b & c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & \circ & d & \circ \\ \circ & \circ & e & \circ \\ \circ & \circ & f & \circ \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

**2 行 4 列**

**2 行 3 列めの成分を求める**

**③計算**

$$\begin{array}{cc} & 3\text{ 列目} \\ 2\text{ 行目} & \\ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} (2, 3)\text{ 成分} \\ ad+be+cf \end{array}$$

**【例題２】**

行列 A, B, C, D を以下のように定義するとき、次の計算をしなさい。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$①\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times7+4\times11 & 2\times9+4\times5 \\ 3\times7+3\times11 & 3\times9+3\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 38 \\ 54 & 42 \end{pmatrix}$$

$$②\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times2+9\times3 & 7\times4+9\times3 \\ 11\times2+5\times3 & 11\times4+5\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 55 \\ 37 & 59 \end{pmatrix}$$

$$③\boldsymbol{CD} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times2+2\times1+3\times2 & 1\times1+2\times2+3\times2 & 1\times3+2\times4+3\times3 \\ 2\times2+1\times1+2\times2 & 2\times1+1\times2+2\times2 & 2\times3+1\times4+2\times3 \\ 3\times2+1\times1+4\times2 & 3\times1+1\times2+4\times2 & 3\times3+1\times4+4\times3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 11 & 20 \\ 9 & 8 & 16 \\ 15 & 13 & 25 \end{pmatrix}$$

$$④\boldsymbol{DC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times1+1\times2+3\times3 & 2\times2+1\times1+3\times1 & 2\times3+1\times2+3\times4 \\ 1\times1+2\times2+4\times3 & 1\times2+2\times1+4\times1 & 1\times3+2\times2+4\times4 \\ 2\times1+2\times2+3\times3 & 2\times2+2\times1+3\times1 & 2\times3+2\times2+3\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 20 \\ 17 & 8 & 23 \\ 15 & 9 & 22 \end{pmatrix}$$

「　行列　」

東京情報クリエイター工学院

**【練習問題２】**

行列 A,B,C を以下のように定義するとき、次の計算をしなさい。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{9}\\\mathbf{11}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{5}\end{pmatrix}$$

①　$\boldsymbol{AB}=$

②$\boldsymbol{BC}=$

③$\boldsymbol{CB}=$

**【練習問題３】**

行列 A,B を以下のように定義するとき、次の計算をしなさい。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{5}\\\mathbf{2}&\mathbf{4}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{4}&\mathbf{8}&\mathbf{5}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{6}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

①$\boldsymbol{AB}=$

②$\boldsymbol{BC} =$

③$\boldsymbol{CB} =$

「　行列　」

東京情報クリエイター工学院

## ◆数列の総和を求める

行列の掛け算のプログラムを考える前に数列の総和を求めることを考えます。

1～10 までの総和を考えた時、記号Σで記述すると

$$\sum_{x=1}^{10} x = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

となります。これは、$x$ の初期値を $1$ として終了値 $10$ までを順に加えていくことを示します。

また、$a$ の要素を用意し、それぞれの数値を全て加えることを考えると次のように添え字を使用して記述することができます。このとき、$a=\{2,4,1,5,6\}$ とすると、$a_i$ の添え字は要素の位置を表し、例えば、$a_2=4$ となります。従って、

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 2+4+1+5+6$$

となります。

これをプログラムにすると下記のようになり、Σ記号はプログラムの for 文に相当することがわかります。

```
float[ ] a = new float[ ] { 2, 4, 1, 5, 6 };
float ans = 0;
for (int i = 0; i < 5; i++)
{
    ans += a[i];
}
```

**【練習問題 4】**

**(1) 次の数列のとき総和を求める式（Σ）と結果を書きなさい。**

① $a=\{2,5,3,4\}$ の総和を求める。

② $b=\{2,5,3\}$ ，$c=\{1,2,4\}$ のとき、それぞれ順番に掛けたものの $(b_i \times c_i)$ 総和を求める。

**(2) (1)のプログラムを作成しなさい。**

**ソリューション[MathCalc01]**

**プロジェクト名[Ex02]のコンソールアプリとする。**

「　行列　」

東京情報クリエイター工学院

## ◆行列の掛け算のアルゴリズム

行列の掛け算のアルゴリズムを考えましょう。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}}\\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}}\\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}}\\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}}\\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}} & \boldsymbol{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}}\\ \boldsymbol{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}} & \boldsymbol{a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}}\end{pmatrix}$$

上記は、2 行 2 列の行列の積です。各行・列の結果を取り出すと

**１行１列目＝**$\boldsymbol{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}}$
**１行２列目＝**$\boldsymbol{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}}$
**２行１列目＝**$\boldsymbol{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}}$
**２行２列目＝**$\boldsymbol{a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}}$

となります。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の添え字に注目します。$\boldsymbol{a}$ の列番号と $\boldsymbol{b}$ の行番号を縦に見ると全て同じですね。
この番号を $\boldsymbol{k}$ として総和を求めるΣを使用して示すと以下のようになります。

**１行１列目＝**$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\boldsymbol{a_{1k}b_{k1}}=\boldsymbol{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}}$

**１行２列目＝**$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\boldsymbol{a_{1k}b_{k2}}=\boldsymbol{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}}$

**２行１列目＝**$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\boldsymbol{a_{2k}b_{k1}}=\boldsymbol{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}}$

**２行２列目＝**$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\boldsymbol{a_{2k}b_{k2}}=\boldsymbol{a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}}$

上記をもう 1 度よく見ると、行数と $\boldsymbol{a}$ の行番号と、列数と $\boldsymbol{b}$ の列番号とが一致していることに気がつきます。それぞれを $\boldsymbol{i}$ ［行］と $\boldsymbol{j}$ ［列］として式に表すと、

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2}a_{ik}b_{kj}\right)\right)\quad \textit{または}\quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}a_{ik}b_{kj}$$

この式を一般的に表すと

$\boldsymbol{n}$ 行 $\boldsymbol{l}$ 列($\boldsymbol{a}$)と $\boldsymbol{l}$ 行 $\boldsymbol{m}$ 列($\boldsymbol{b}$)の掛け算

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{a_{ik}b_{kj}}\right)\right)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{a_{ik}b_{kj}}$$

この式が、$\boldsymbol{n}$ 行 $\boldsymbol{l}$ 列と $\boldsymbol{l}$ 行 $\boldsymbol{m}$ 列($\boldsymbol{b}$)の掛け算を計算するアルゴリズムとなります。

**【練習問題 5】**

**以下の行列の乗算をするプログラムを作成しなさい。**
**ソリューション[MathCalc01]**
**プロジェクト名[Ex03]のコンソールアプリとする。　　（３重ループとなりますね）**
**以下の計算を確認しましょう。**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$①\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 58 & 30 \\ 25 & 21 \end{pmatrix} \quad ② \; \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 26 \\ 11 \end{pmatrix}$$

**【演習問題１】**

**練習問題 5 で作成したプログラムを参考にして、[MyLibrary]内のクラス[MathCalc.cs]に、任意の行列に対して、行列の乗算をするメソッド[Multiply]を作成しなさい。追加後、プロジェクト名[Ex04]のコンソールアプリを追加し、以下の計算を確認しましょう。**
**[MyLibrary]内に乗算　行列×行列　＊を追加し、[MyLibrary]を参照追加すること。**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 21 & 19 & 27 \\ 24 & 40 & 47 \\ 31 & 37 & 30 \end{pmatrix}$$

**【練習問題 4(2)　Ex02.cs　プログラム例】**

```
static void Main(string[] args)
{
    float ans1 = 0;
    float[] a = new float[] { 2, 5, 3, 4 };
    for (int i = 0; i < 4; i++)
    {
        ans1 += a[i];
    }
    Console.WriteLine("a の総和＝" + ans1);

    float ans2 = 0;
    float[] b = new float[] { 2, 5, 3 };
    float[] c = new float[] { 1, 2, 4 };
    for (int i = 0; i < 3; i++)
    {
        ans2 += b[i] * c[i];
    }
    Console.WriteLine("b×c の総和＝" + ans2);
}
```

**【練習問題５　Ex03.cs　プログラム例】**

```
static void Main(string[] args)
{
    float[][] a = new float[][]{
                  new float[] {2,4},
                  new float[] {2,1},
    };
    float[][] b = new float[][]{
                  new float[] {7,9},
                  new float[] {11,3},
    };
    float[][] ans1 = new float[][] {
                 new float[] {0,0},
                 new float[] {0,0},
    };

    for(int i = 0; i < 2; i++)
    {
        Console.Write("[ ");
        for(int j = 0; j < 2; j++)
        {
            for(int k = 0; k< 2; k++)
            {
                ans1[i][j] += a[i][k] * b[k][j];

            }
            Console.Write(ans1[i][j] + " ");
        }
        Console.WriteLine("]");
    }

    float[][] c = new float[][]{
                  new float[] {3},
                  new float[] {5},
    };
    float[][] ans2 = new float[][]{
                      new float[] {0},
                      new float[] {0},
    };

    for (int i = 0; i < 2; i++)
    {
        Console.Write("[ ");
        for (int j = 0; j < 1; j++)
        {
            for (int k = 0; k < 2; k++)
            {
                ans2[i][j] += a[i][k] * c[k][j];
            }
            Console.Write(ans2[i][j] + " ");
        }
        Console.WriteLine("]");
    }
}
```

**【MyLibrary　MathCalc.cs】**

```
public class MathCalc
    {
        //行列同士の掛け算(n 行 l 列×l 行 m 列=n 行 m 列)
        public static float[][] Multiply
            (float[][] a, float[][] b, float[][] result)
        {
            int n = a.Length;       //行列 a の行数
            int l = b.Length;       //行列 b の行数
            int m = b[0].Length;    //行列 b の列数

            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                for (int j = 0; j < m; j++)
                {
                    for (int k = 0; k < l; k++)
                    {
                        result[i][j] += a[i][k] * b[k][j];
                    }
                }
            }
            return result;
        }
    }
```

**【MyLibrary　Matrix3.cs】追加**

```
//乗算　行列×行列
public static Matrix3 operator *(Matrix3 a,Matrix3 b)
{
    Matrix3 result = Zero;
    MathCalc.Multiply(a.m, b.m, result.m);
    return result;
}
```

**【演習問題１ Ex04　Program.cs】**

```
using MyLibrary;

namespace Ex04
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            Matrix3 a = new Matrix3(2, 1, 3, 1, 3, 5, 2, 4, 1);
            Matrix3 b = new Matrix3(7, 1, 2, 4, 8, 5, 1, 3, 6);
            Matrix3 ans;

            ans = a * b;
            Console.WriteLine("a*b");
            Console.WriteLine(ans);
        }
    }
}
```