ベクトル・行列応用③ ～ローカル座標に変換～

■ローカル変換行列

「ベクトル・行列応用②」では、任意のローカル座標系のベクトルをワールド座標系や親座標系のベクトルに変換することを知りました。今回はその逆のしくみを調べていくことにします。具体的には、ワールド座標系や任意の親座標系のベクトルを、任意の子座標系のベクトルに変換する方法です。このしくみを使うことで、2 つのオブジェクトどうしの関係を一方のオブジェクト中心の座標系で考えることができるようになり、挙動のしくみをシンプルに考えることができたり計算負荷を軽減できたりします。

さて、以下の関係式を思い出してください。

$$ {}^{UV}\boldsymbol{p} = {}^{UV}\boldsymbol{T}_{UV} \cdot {}^{UV}\boldsymbol{R}_{RS} \cdot {}^{RS}\boldsymbol{p} $$

RS 座標系のベクトルを UV 座標系に変換する関係式でした。モデル行列の表現を使って、つぎのように表現できます。

$$ {}^{UV}\boldsymbol{p} = {}^{UV}\boldsymbol{M}_{RS} \cdot {}^{RS}\boldsymbol{p} \qquad \cdots(1) $$

ここで、UV 座標系から RS 座標系に変換する行列 ${}^{RS}\boldsymbol{M}_{UV}$ があるならば、式(1)の両辺の左からかけると

$$ \begin{aligned} {}^{RS}\boldsymbol{M}_{UV} \cdot {}^{UV}\boldsymbol{p} &= {}^{RS}\boldsymbol{M}_{UV} \cdot {}^{UV}\boldsymbol{M}_{RS} \cdot {}^{RS}\boldsymbol{p} \\ &= {}^{RS}\boldsymbol{M}_{UV} \cdot {}^{UV}\boldsymbol{p} \\ &= {}^{RS}\boldsymbol{p} \qquad \cdots(2) \end{aligned} $$

が成り立ちます。また、座標系の入れ子が複数ある場合にも、任意のローカル座標系からワールド座標系までの個数を N として、各ローカル座標系に番号を付けることで、つぎのように表現できます。

$$ {}^{N}\boldsymbol{p} = \underbrace{{}^{N}\boldsymbol{M}_{N-1} \cdot {}^{N-1}\boldsymbol{M}_{N-2} \cdot \ \cdots \ \cdot {}^{3}\boldsymbol{M}_{2} \cdot {}^{2}\boldsymbol{M}_{1}}_{(\mathbf{N-1})\text{個のモデル行列の積の結果を}{}^{N}\boldsymbol{M}_1\text{とすると…}} \cdot {}^{1}\boldsymbol{p} $$

$$ = {}^{N}\boldsymbol{M}_{1} \cdot {}^{1}\boldsymbol{p} \qquad \cdots(3) $$

${}^{N}\boldsymbol{M}_{1}$ ：ワールド座標系までのモデル行列の積の結果 ⇒ ワールド変換行列

ここで、ワールド座標系から任意の子座標系に変換する行列 ${}^{1}\boldsymbol{M}_{N}$ があるならば、式(3)の両辺の左からかけると

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\boldsymbol{M}_{N} \cdot {}^{N}\boldsymbol{p} &= {}^{1}\boldsymbol{M}_{N} \cdot {}^{N}\boldsymbol{M}_{1} \cdot {}^{1}\boldsymbol{p} \\
&= {}^{1}\boldsymbol{M}_{N} \cdot {}^{N}\boldsymbol{p} \\
&= {}^{1}\boldsymbol{p} \qquad \cdots (4)
\end{aligned}
$$

が成り立ち、${}^{1}\boldsymbol{M}_{N}$ が求める行列（ワールド座標系から任意の子座標系への変換行列）となります。では、どのように ${}^{1}\boldsymbol{M}_{N}$ を作ったら（計算したら）よいのでしょうか。

結論からいうと、**「逆行列」**というものを利用します。

■逆行列の導入

まず理解しやすくするために、実数の世界において、つぎのことを考えます。
0 ではない任意の実数 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}$ があるとき

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$$

を満たす実数 $\boldsymbol{b}$ はどんな値になるでしょうか。両辺を $\boldsymbol{p}$ で割ってみます。

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p} \div \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \div \boldsymbol{p}$$

よって $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{1}$ となり

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{-1} \qquad \cdots \frac{1}{\boldsymbol{a}} \text{ のこと}$$

となりました。この $\boldsymbol{a}^{-1}$ を $\boldsymbol{a}$ の逆元とよびます。

この考え方をもとに、ある正方行列 $\boldsymbol{M}$ の逆元 $\boldsymbol{M}^{-1}$ をつぎのように定義します。

正方行列 $\boldsymbol{M}$ に対して

$$\boldsymbol{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

ただし、$\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{M}$ と同じサイズの単位行列

を満たす $\boldsymbol{M}^{-1}$ があるとき、$\boldsymbol{M}^{-1}$ を $\boldsymbol{M}$ の【逆行列】とよび、逆行列が存在する正方行列のことを【正則行列】とよんだり、行列 $\boldsymbol{M}$ は【正則】である、といったりします。

※ゲームプログラミングで扱う行列データにおいては「逆行列」は（ほぼ）存在します。
存在判定や証明はかなり難しいので取り上げません。

■逆行列の計算

それでは実際に逆行列の計算方法をみてみましょう。ある正則行列 $\boldsymbol{M}$ の逆行列 $\boldsymbol{M}^{-1}$ は次式で与えられます。

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{M}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{M}}$$

$\det \boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{M}$ の【行列式】

$\det \boldsymbol{M}$ は $|\boldsymbol{M}|$ とも書いたりします

det は determinant（行列式）の略です

$\widetilde{\boldsymbol{M}}$ は $\boldsymbol{M}$ の【余因子行列】

【行列式】と【余因子行列】というものが出てきました。数学的に正確な定義は無理ゲー（めっちゃムズカシイ）なので、ここではざっくりと紹介したいともいます。

◆ まずは部分行列（小行列）の考え方から

ある行列 $\boldsymbol{M}$ に対して、任意の行や列を消去して作られた行列のことを $\boldsymbol{M}$ の**【部分行列】**、あるいは**【小行列】**とよびます。たとえば、行列 $\boldsymbol{M}$ の i 行 j 列を消去した部分行列を $\boldsymbol{M}_{\{i\}\{j\}}$ と記述します。消去する行や列は複数になっても問題ありません（複数選択を加味して $\{\}$ で括る形にしていますが、1 つずつ選択する場合、$\{\}$ は省略してもかまいません）。具体的例として、以下の行列 $\boldsymbol{M}$ から 2 行と 3 列目を消去した $\boldsymbol{M}_{\{2\}\{3\}}$ をみてみましょう。

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{M}_{\{2\}\{3\}} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【練習問題①】

（1） $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 2 \\ 6 & -7 & -4 \\ -9 & -5 & 0 \\ -7 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ の部分行列 $\boldsymbol{A}_{\{3\}\{2\}}$ を求めよ。

$$\boldsymbol{A}_{\{3\}\{2\}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

（2） $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ の部分行列 $\boldsymbol{A}_{\{3\}\{1\}}$ を求めよ。

$$\boldsymbol{A}_{\{3\}\{1\}} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ 5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

◆ つぎに行列式をみてみましょう

行列式にも定義があるのですが

「正方行列に対して、あるルールに従って計算した結果の値（実数）」

とだけ言っておきます。厳密にやろうとすると無理ゲーなのでやめておきましょう。

（澤田先生も冒頭だけ読んでそっと本を閉じました）

ここでは具体的な 1 ～ 4 次の正方行列に対しての行列式の計算方法をみていきます。

★ 1 次正方行列の行列式

1 次正方行列 $\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}\times\mathbf{1}} = (a_{11})$ の行列式 $det\,\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}\times\mathbf{1}}$ は

$$det\,\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}\times\mathbf{1}} = a_{11}$$

となります。一次元なので、その大きさ（長さ）そのものと考えられます。

★ 2 次以上の正方行列の行列式

2 次以上の正方行列の行列式は、「余因子展開」という方法で計算できることが知られています。

まず【余因子】について説明します。

N 次正方行列 $\boldsymbol{M}$ から i 行 j 列を消去した部分行列を $\boldsymbol{M}_{\{i\}\{j\}}$ とする。

このとき、正方行列 $\boldsymbol{M}$ の i 行 j 列成分 a_{ij} に対して、余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を次式で定義する。

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot \det \boldsymbol{M}_{\{i\}\{j\}}$$

※ N は 2 以上

※ 部分行列 $\boldsymbol{M}_{\{i\}\{j\}}$ は $(\mathrm{N}-1)$次正方行列

※ 余因子を求めるためには、行列式の計算が必要!!

たとえば 2×2 行列で a_{21} に対する余因子 $\tilde{a}_{21}$ は･･･

$$\boldsymbol{M}_{\mathbf{2}\times\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{M}_{\{2\}\{1\}} = (a_{12})$$

$$\therefore \quad \tilde{a}_{21} = (-1)^{(2+1)} \cdot \det(a_{12}) \\ = -a_{12}$$

「 ベクトル･行列応用③ ～ローカル座標系に変換～ 」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

つぎに、行列式の計算方法のひとつである【余因子展開】について説明します。

N 次正方行列 $\boldsymbol{M}$ の任意の行または列に対して、つぎの式が成り立ち、その方法を余因子展開とよぶ。

【 i 行目で余因子展開】

$$\det \boldsymbol{M} = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{i\mathrm{N}}\tilde{a}_{i\mathrm{N}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_{ik}\,\tilde{a}_{ik}$$

【 j 列目で余因子展開】

$$\det \boldsymbol{M} = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{\mathrm{N}j}\tilde{a}_{\mathrm{N}j}$$
$$= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_{kj}\,\tilde{a}_{kj}$$

たとえば 2 次正方行列 $\boldsymbol{M}_{\mathbf{2\times2}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ があるとき、1 列目で余因子展開すると

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathbf{2\times2}} = \sum_{k=1}^{2} a_{k1}\,\tilde{a}_{k1}$$
$$= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21}$$
$$= a_{11}(-1)^{(1+1)} \det \boldsymbol{M}_{\{1\}\{1\}} + a_{21}(-1)^{(2+1)} \det \boldsymbol{M}_{\{2\}\{1\}}$$
$$= a_{11}(-1)^2 \det(a_{22}) + a_{21}(-1)^3 \det(a_{12})$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

【コラム】

2 次正方行列 $\boldsymbol{M}_{\mathbf{2\times2}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式ですが、

じつは 2 次元ベクトル (a_{11}, a_{21}) と (a_{12}, a_{22}) が作る平行四辺形の面積になっています。

3次元ベクトル $(a_{11}, a_{21}, 0)$ と $(a_{12}, a_{22}, 0)$ を考え、それらの外積を計算してみます。

$$(a_{11}, a_{21}, 0) \times (a_{12}, a_{22}, 0) = (a_{21}\cdot 0 - 0\cdot a_{22}, 0\cdot a_{12} - a_{11}\cdot 0, a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$
$$= (0, 0, a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

このベクトルの大きさは $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ となるので、

X-Y 平面上の平行四辺形の面積と等しいことがわかります（外積の性質）。

つぎに 3 次正方行列 $\boldsymbol{M}_{\mathbf{3\times3}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を 1 列目で余因子展開すると

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathbf{3\times3}}=\sum_{k=1}^{3} a_{k1}\,\tilde{a}_{k1}$$

$$=a_{11}\tilde{a}_{11}+a_{21}\tilde{a}_{21}+a_{31}\tilde{a}_{31}$$

$$=a_{11}(-1)^{(1+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{1\}\{1\}}+a_{21}(-1)^{(2+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{2\}\{1\}}+a_{31}(-1)^{(3+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{3\}\{1\}}$$

$$=a_{11}(-1)^2\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{21}(-1)^3\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{31}(-1)^4\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}\cdot(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{31}\cdot(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

3 次正方行列の行列式の計算には、2 次と 1 次の行列式の計算が必要になることがわかります。
また、3 次元ベクトル $(a_{11},a_{21},a_{31}),(a_{12},a_{22},a_{32}),(a_{13},a_{23},a_{33})$ が作る平行六面体の体積になっています。

つぎに 4 次正方行列 $\boldsymbol{M}_{\mathbf{4\times4}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ を 1 列目で余因子展開すると

$$\det \boldsymbol{M}_{\mathbf{4\times4}}=\sum_{k=1}^{4} a_{k1}\,\tilde{a}_{k1}$$

$$=a_{11}\tilde{a}_{11}+a_{21}\tilde{a}_{21}+a_{31}\tilde{a}_{31}+a_{41}\tilde{a}_{41}$$

$$=a_{11}(-1)^{(1+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{1\}\{1\}}+a_{21}(-1)^{(2+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{2\}\{1\}}$$
$$+a_{31}(-1)^{(3+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{3\}\{1\}}+a_{41}(-1)^{(4+1)}\det \boldsymbol{M}_{\{4\}\{1\}}$$

$$=a_{11}(-1)^2\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}+a_{21}(-1)^3\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$
$$+a_{31}(-1)^4\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}+a_{41}(-1)^5\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot\{a_{22}\cdot(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})-a_{32}\cdot(a_{23}a_{44}-a_{43}a_{24})+a_{42}\cdot(a_{23}a_{34}-a_{33}a_{24})\}$$
$$-a_{21}\cdot\{a_{12}\cdot(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})-a_{32}\cdot(a_{13}a_{44}-a_{43}a_{14})+a_{42}\cdot(a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14})\}$$
$$+a_{31}\cdot\{a_{12}\cdot(a_{23}a_{44}-a_{43}a_{24})-a_{22}\cdot(a_{13}a_{44}-a_{43}a_{14})+a_{42}\cdot(a_{13}a_{24}-a_{23}a_{14})\}$$
$$-a_{41}\cdot\{a_{12}\cdot(a_{23}a_{34}-a_{33}a_{24})-a_{22}\cdot(a_{13}a_{34}-a_{33}a_{14})+a_{32}\cdot(a_{13}a_{24}-a_{23}a_{14})\}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} \\
&\quad + a_{21}a_{12}a_{43}a_{34} + a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} + a_{21}a_{42}a_{33}a_{14} \\
&\quad + a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} + a_{31}a_{22}a_{43}a_{14} + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} \\
&\quad + a_{41}a_{12}a_{33}a_{24} + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} + a_{41}a_{32}a_{23}a_{14} \\
&\quad - a_{11}a_{22}a_{43}a_{34} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24} \\
&\quad - a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} - a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} \\
&\quad - a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} - a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} - a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} \\
&\quad - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} - a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}
\end{aligned}
$$

4 次正方行列の行列式の計算には、3 次、2 次、1 次の行列式の計算が必要になることがわかります。また、1 次正方行列の行列式は長さ、2 次の行列式は面積、3 次の行列式は体積を表現していましたので、4 次の行列式も「何か」の測量値となります。ただし、我々は 4 次元の測量方法を持っていませんので、具体的な「何か」は謎のモノになります。

このように、N 次正方行列の行列式は、N-1 次の行列式 → N-2 次の行列式 → … → 1 次の行列式、というように徐々に次元数を落として再帰的に計算していけばよいことがわかります。

【練習問題②】

（1） $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ。

$\det \boldsymbol{A} = 8$

（2） $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det \boldsymbol{B}$ を求めよ。

$\det \boldsymbol{B} = -2$

（3） $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det \boldsymbol{C}$ を求めよ。

$\det \boldsymbol{C} = 10$

◆ 最後に余因子行列をみてみましょう

ちょっとその前に「転置行列（transposed matrix）」というものをみていきます。

行列 $\boldsymbol{M}$ について行と列を入れ替えて作られ行列を「転置行列」とよび、${}^t\boldsymbol{M}$ と表現する。

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{の転置行列は} \quad {}^t\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

※ サイズが $m \times n$ の行列の転置行列のサイズは $n \times m$ になる

【練習問題③】

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列 ${}^t\boldsymbol{A}$ を求めよ。

$${}^t\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 3 & -9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

（2） $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 9 & -4 \end{pmatrix}$ の転置行列 ${}^t\boldsymbol{B}$ を求めよ。

$${}^t\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 6 & 1 & 9 \\ -7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

さて、いよいよ本題の余因子行列についてみていきます。

N 次正方行列 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{N}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{N}1} & a_{\mathrm{N}2} & \cdots & a_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix}$ があるとき、余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ は以下のように定義される。

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}={}^{t}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1\mathrm{N}} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2\mathrm{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{\mathrm{N}1} & \tilde{a}_{\mathrm{N}2} & \cdots & \tilde{a}_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{\mathrm{N}1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{\mathrm{N}2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{\mathrm{N}1} & \tilde{a}_{\mathrm{N}2} & \cdots & \tilde{a}_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix}$$

【練習問題④】

（1） 練習問題②（1）の行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ を求めよ。

$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

（2） 練習問題②（2）の行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ を求めよ。

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}={}^{t}\begin{pmatrix} -5 & -7 & -1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -7 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -3 & -7 \\ -7 & -5 & -11 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

「 ベクトル・行列応用③ ～ローカル座標系に変換～ 」

岡山情報 IT クリエイター専門学校

いよいよ逆行列を計算するための道具がそろいましたので、実際に逆行列を計算してみましょう!

※ 正則行列 $\boldsymbol{M}$ の逆行列 $\boldsymbol{M}^{-1}$ は $\boldsymbol{M}^{-1}=\dfrac{1}{\det\boldsymbol{M}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{M}}$ で与えられました

【練習問題⑤】

(1) 練習問題②(1)の行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求め、$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ を確かめよ。

求める逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}\quad\cdots(\mathbf{1})$$

ここで、練習問題②(1)、練習問題④(1)から $\det\boldsymbol{A}=8$、$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ である。

これらを式(1) に代入して

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\quad\text{あるいは}\quad\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.25\\ 0.25 & 0.375\end{pmatrix}$$

(2) 行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求めよ。

求めることができない。

$\det\boldsymbol{B}=0$ であるから、行列 $\mathbf{B}$ は正則行列ではない。

∴ 行列 $\mathbf{B}$ の逆行列は存在しない

(3) 練習問題②(2)の行列 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ を求め、$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}$ を確かめよ。

求める逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{B}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{B}}\quad\cdots(\mathbf{1})$$

ここで、練習問題②(1)、練習問題④(1)から $\det\boldsymbol{B}=-2$、$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix}-5 & -3 & -7\\ -7 & -5 & -11\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ である。

これらを式(1) に代入して

$$\boldsymbol{B}^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -3 & -7\\ -7 & -5 & -11\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{11}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\text{あるいは}\quad\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}2.5 & 1.5 & 3.5\\ 3.5 & 2.5 & 5.5\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$