6.ベクトルの計算

ベクトルの計算は以下のように定義される。
kはスカラーであり、 a(1,2), b(2,3)なら、

$\overrightarrow{ab} = (2-1, 3-2) = (1,1)$

$\overrightarrow{ba} = (2-1, 3-2) = (-1,-1)$

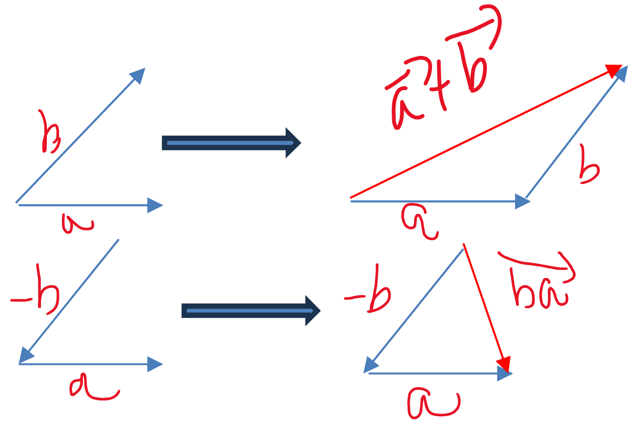
$\vec{a} + \vec{b} = (1+2, 2+3) = (3,5)$

$\vec{a} - \vec{b} = (1-2, 2-3) = (-1,-1)$

$k\vec{a} = (k*1, k*2) = (k, 2k)$

$\vec{a}/k = (1/k, 2/k)$

6. 計算の図示



1

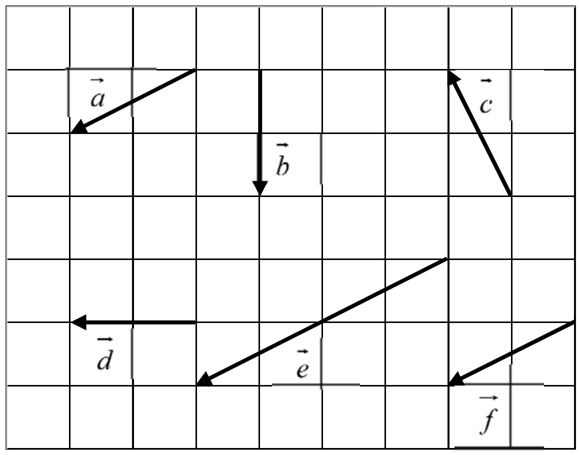
右の図において，次のベクトルを選べ。

(1)　等しいベクトル　$\vec{a}, \vec{f}$

(2)　大きさが等しいベクトル　$\vec{a}, \vec{c}, \vec{f}$ と $\vec{d}, \vec{b}$

(3)　向きが等しいベクト

$\vec{a}, \vec{e}, \vec{f}$



2

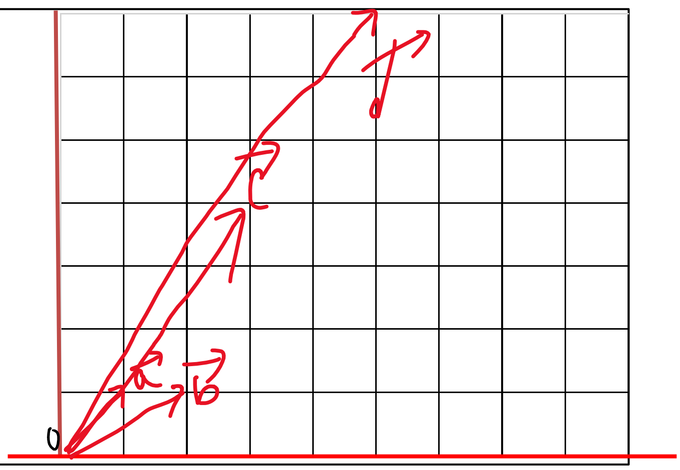
右の図に，次のベクトルを図示し、
それぞれの大きさを求めよ。
原点は0とする。

$\vec{a}$ = (1, 1)

$\vec{b}$ = (2, 1)

$\vec{c}$ = (3, 4)

$\vec{d}$ = (5, 7)



3

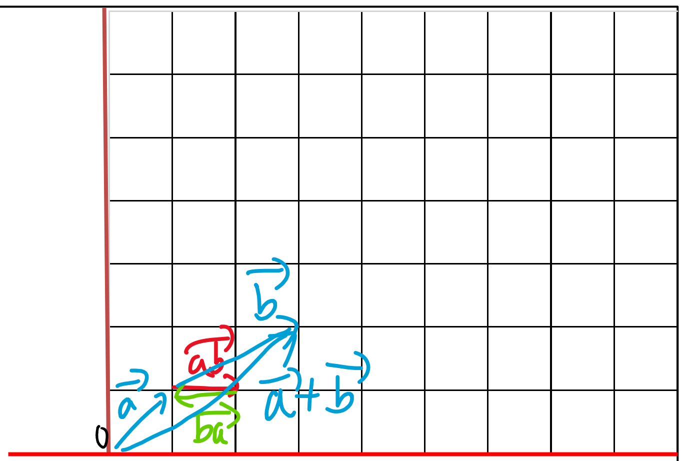
右の図に，次のベクトルを図示せよ。
また、それぞれの成分を出せ。
原点は0とし、a = (1, 1), b = (2, 1) とする。

$\overrightarrow{ab} = (2-1, 1-1) = (1, 0)$

$\overrightarrow{ba} = (1-2, 1-1) = (-1, 0)$

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{ba} = (-1, 0)$

$\vec{a} + \vec{b} = (3, 2)$



1 $-3\vec{a}+2\vec{b}=(-6,12)+(10,-6)=(4,6)$ // 大きさ $=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ //

$\vec{a}=(2,\ -4)$, $\vec{b}=(5,\ -3)$のとき，$-3\vec{a}+2\vec{b}$ を成分で表せ。

また，その大きさを求めよ。

2 $3\vec{a}-2\vec{b}=(3\cdot1-2\cdot3,\ 3\cdot(-2)-2\cdot(-2))=(-3,-2)$ //

$a=(1,\ -2)$, $b=(3,\ -2)$のとき，$3a-2b$ を成分で表せ。

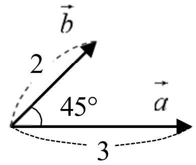
また，その大きさを求めよ。 大きさ $=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ //

3

次の内積を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45°

のときの，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=3\cdot2\cdot\cos45^\circ=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
$=3\sqrt{2}$



(2) $\vec{a}=(2,\ -4)$, $\vec{b}=(5,\ 3)$のときの，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=10-12=-2$

4

次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-15-14$ $=-29$ $\cos\theta=\frac{-29}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{29}}=-\sqrt{\frac{29}{58}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\theta=135^\circ$

(1) 2 つのベクトル$\vec{a}=(3,\ 7)$, $\vec{b}=(-5,\ -2)$のなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ -4)$, $\vec{b}=(5+x,\ 3+x)$が垂直であるとき，x の値を求めよ。 $10+2x-12-4x=0$ より $x=-1$ //

5

物体Aは速度$\vec{v}=(1,2)[/s]$,初期位置p0 = (2,3)であり、その状態でt = 3[/s] 経過した。
t秒後の物体Aの座標p(x座標,y座標)を求めよ。

$p=p0+\vec{v}\cdot t$
$=(2,3)+(1,2)\cdot3$
$=(2,3)+(3,6)$
$=(5,9)$

6

球Aと球Bの中心の座標を
A(Xa,Ya),B(Xb,Yb)とする。
半径をrとする。

AとBの最短距離をdとすると、

d = $\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a+y_b)^2}$

となり、

d < $2r$

のとき、AとBは衝突している。

これをベクトルで考えると、

$\overrightarrow{AB}=(x_b-x_a,\ y_b-y_a)$

であり、この大きさが距離なので、

$|\overrightarrow{AB}|<2r$

のとき、AとBは衝突している。

1

次の座標から、以下の４つのベクトルを作成せよ。

a(1, 2), b(3, 4), c(−1, 5), d(−2, −3)

$\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{cd}, \overrightarrow{da}$

$\overrightarrow{ab} = (2, 2)$　$\overrightarrow{cd} = (-1, -8)$

$\overrightarrow{bc} = (-4, 1)$　$\overrightarrow{da} = (3, 5)$

2

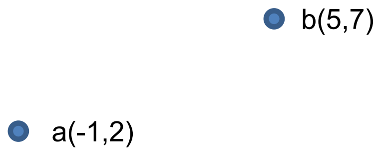
右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

2. bからaに向かうベクトルを求めよ。

$\overrightarrow{ab} = (4, 5)$

$\overrightarrow{ba} = (-6, -5)$

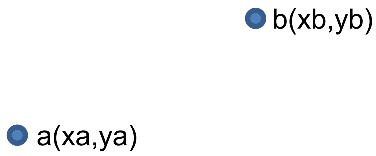


3

右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

1. $\overrightarrow{ab} = (xb - xa, yb - ya)$ //



2. $\overrightarrow{ab}$を正規化したものを$\vec{n}$とする。aがその際に$t[/s]$でbたどり着くための速度ベクトルを求めよ。
　解答には$|\overrightarrow{ab}|$を使用して良い。

$\vec{v} = \vec{n} \cdot \dfrac{|ab|}{t}$ //

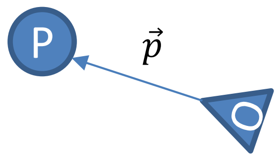
4

あるオブジェクトが、常にプレイヤーを正面にとらえて欲しい。

P(px, py), O(ox, oy)とすると、

右図の$\vec{p}$の式を求めよ。

$\vec{p} = (P_x - O_x, P_y - O_y)$ //



5

次の運動をする物体を考える。

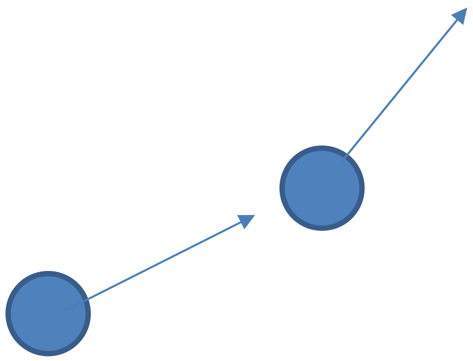
加速度:α,現在地:P, 初速度:$\overrightarrow{v0}$, 初期位置:$\overrightarrow{p0}$　とする。

経過時間はtとする。

1.$t = 0 \sim t = 3$のとき、$\overrightarrow{v0} = (1,2), P0 = (1,1), \vec{\alpha}(1,0)$

2.$t = 3 \sim t = 5$のとき、物体Aは30°回転し、$\vec{\alpha}(1,1)$となる。

1と２、それぞれの状況でのPの式を立てよ。



$t \leqq 3$のとき、

$P = p0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$= (1,1) + (1,2) \cdot t + \frac{1}{2}(1,0) \cdot t^2$

$= \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1, 2t + 1\right)$ //

$t \leqq 5$のとき、

$P_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot 9 + 3 + 1, 6 + 1\right) = \left(\frac{17}{2}, 7\right)$

$V_0 = V_0 + \alpha t = (4, 2)$

ベクトルの回転は原点にそった回転なので:

$V_0 = (4\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ, 4\sin 30^\circ + 2\cos 30^\circ)$

$= (2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})$

よって、

$P = P_0 + V_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\cancel{= \left(\frac{17}{2}, 7\right) + (4, 2)t + \frac{1}{2}(1,1)t^2}$

$= \left(\frac{17}{2}, 7\right) + (2\sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3})t + \frac{1}{2}(1,1) \cdot t^2$

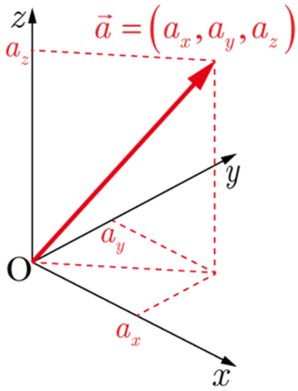
$= \left(\frac{1}{2}t^2 + (2\sqrt{3} - 1)t + \frac{17}{2}, \frac{1}{2}t^2 + (2+\sqrt{3})t + 7\right)$ //

1.空間(３次元)ベクトル

これまでは2次元のベクトルについて考えてきましたが、ベクトルは実際には三次元で使用される事が主になります。
例えば、三次元ベクトル$\vec{a}$を例示すると

$$\vec{a} = (ax, ay, az)$$

となり、
z方向の成分も持つベクトルとなります。



２.３次元ベクトルの計算

$\vec{a} = (ax, ay, az), \vec{b} = (bx, by, bz)$とする。
正規化された単位ベクトルを$\vec{n}$とする。

$$\vec{a} + \vec{b} = (ax + bx, ay + by, az + bz)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (ax - bx, ay - by, az - bz)$$
$$k\,\vec{a} = (k * ax, k * ay, k * az)$$
$$\vec{a}/k = (k * ax, k * ay, k * az)$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathrm{ax} * \mathrm{bx} + \mathrm{ay} * \mathrm{by} + \mathrm{az} * \mathrm{bz}$$

三次元に拡張されただけで、二次元と基本的に同じです。
これ以外でも殆どのベクトルの計算は、
二次元ベクトルの計算にｚ成分を追加しただけになります。

手計算での公式の確認などは基本的に二次元でやりましょう。ここでは、３次元によって新たに出現した概念などを扱っていきます。

3.外積

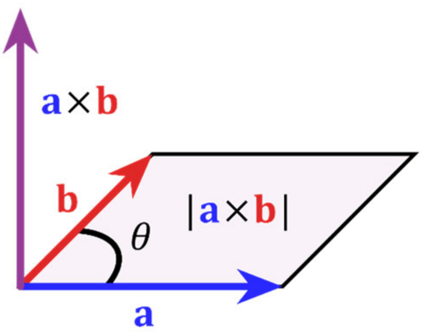
三次元ベクトルには外積という概念が存在します。
$\vec{a} = (ax, ay, az), \vec{b} = (bx, by, bz)$とすると、

外積 = $\vec{a} \times \vec{b}$
　　= **(ay*bz – az*by, az*bx –ax*bz, ax*by – ay*bx)**

これにより何が求まるかというと、

$\vec{a}$と$\vec{b}$の両方に対して垂直なベクトルが求まります。

$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}}$ **かつ** $\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}}$



また、外積の大きさは
上図のような$\vec{a}$と$\vec{b}$で描かれる**平行四辺形の面積と等しい**という性質があります。
なので、次の性質が成り立ちます。

$$\boldsymbol{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin\theta}$$

・基本問題

$\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(3,2,1)$ とする。

$\vec{a} + \vec{b} =$ (4, 4, 4)

$\vec{a} - \vec{b} =$ (-2, 0. 2)

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 3+4+3=10

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+4+9} = \sqrt{14} = \sqrt{14}$

$\vec{a}$の単位ベクトル= $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (2-6, 9-1, 2-6) = (-4, 8, -4)$

$\vec{a}, \vec{b}$のなす角をθとした際の

cosθ = $\frac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

sinθ = $\frac{\sqrt{16+64+16}}{14} = \frac{\sqrt{96}}{14} = \frac{4\sqrt{6}}{14} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\vec{a}, \vec{b}$で描かれる平行四辺形の面積

$|\vec{a} \times \vec{b}| =$ $4\sqrt{6}$

1

球Aと球Bの中心の座標を
A(Xa,Ya,Za),B(Xb,Yb,Zb)とする。
半径をrとする。

ＡとＢの最短距離をdとすると、

d = $\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2+(z_a-z_b)^2}$

となり、

d < $2r$

のとき、AとBは衝突している。

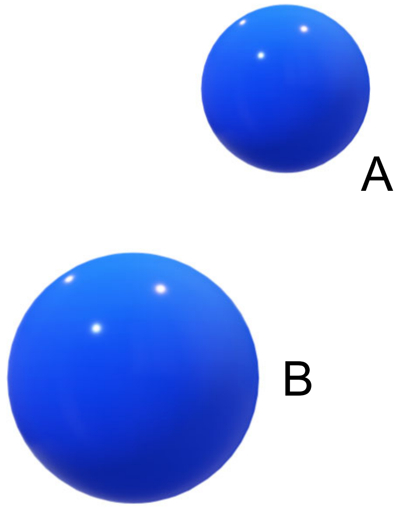
これをベクトルで考えると、

$\overrightarrow{AB}$ = $(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$

であり、この大きさが距離なので、

$|\overrightarrow{AB}|$ < $2r$

のとき、AとBは衝突している。

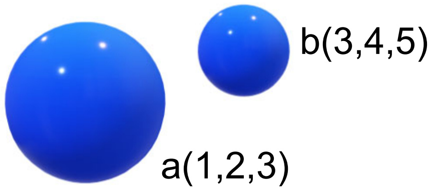


2

$\overrightarrow{ab}=(2,2,2)$

右の点について考える。

1. aからbに向かうベクトルを求めよ。

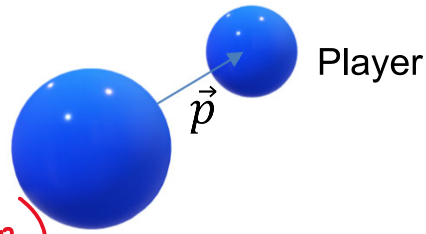


2. $\overrightarrow{ab}$を正規化したものを$\vec{n}$とする。aがその際に$t[/s]$でbたどり着くための速度ベクトルを求めよ。
解答には$|\overrightarrow{ab}|$を使用して良い。

$\vec{v}=\vec{n}\cdot\frac{|\overrightarrow{ab}|}{t}$

3

あるオブジェクトが、常にプレイヤーを正面にとらえて欲しい。
P(px, py, pz), O(ox, oy, oz)とすると、
右図の$\vec{p}$の式を求めよ。

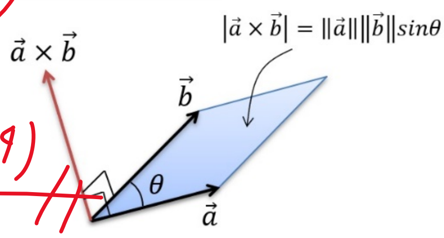


$\vec{p}=(P_x-O_x, P_y-O_y, O_z-P_z)$

4

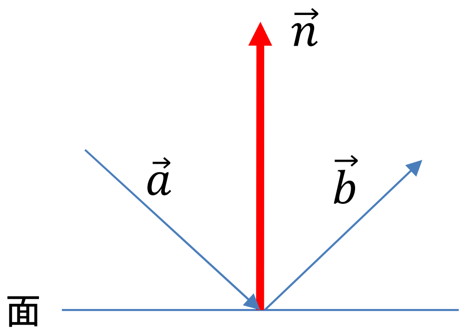
ある面の中に交差するベクトル$\vec{a},\vec{b}$がある。
$\vec{a}$=(1, 2, 3), $\vec{b}$=(3, 2, 1)
とすると、その面に垂直なベクトルを一つ求めよ。

$\vec{a}\times\vec{b}=(2-6, 9-1, 2-6)=(-4, 8, -4)$



5

ある面に垂直なベクトルを求めることで、
その面で反射した際の反射ベクトルを求める事が出来る。
垂直なベクトルを$\vec{n}$=(0, 1, 0)とする。
入射ベクトルを$\vec{a}=(1,1,1)$とする。
反射ベクトル$\vec{b}$を求めよ。



面に沿って
真横から見た図

$\vec{b}=(1,-1,1)$

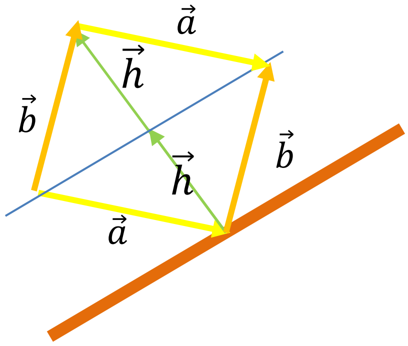
1.面法線と内積による反射の導出

ある面に対しての入射ベクトルを$\vec{a}$
反射ベクトルを$\vec{b}$,面法線を$\vec{n}$とする。
$\vec{a}$から$\vec{n}$への射影ベクトル$\vec{h}$は

$$\vec{h} = \vec{n}\,|\vec{a}|cos\theta$$

反射は右図のようなベクトル経路を取る。
よって、

$$\vec{b} = 2\,\vec{h} + \vec{a}$$



上記のような形で、
面法線と内積で反射ベクトルを求められる。

1

次の外積によって求められる法線ベクトルを答えよ(正規化しなくてよい)。
また、$\vec{a},\vec{b}$において$\vec{b}$方向の射影ベクトル$\vec{h}$を求めよ。
なお、$\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (-1,2,-3), \vec{c} = (2,4,6)$とする。

$$\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$$

$\vec{a}\times\vec{b} = (-12,6,4)$
$\vec{b}\times\vec{c} = (24,0,-8)$
$\vec{c}\times\vec{a} = (0,0,0)$

$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)$

$\vec{h} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,-3)(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$= \frac{1}{\sqrt{14}}(6,-12,18)$

2

次の衝突状態の反射について考える。

入射ベクトル$\vec{a} = (1,2,3)$, 反射面上のベクトル $\vec{b} = (2,3,4), \vec{c} = (4,3,2)$とする。

面の法線ベクトル:$\vec{n}$,　$\vec{a}$から$\vec{b}$への射影ベクトル:$\vec{h}$,　反射ベクトル:$\vec{l}$　を求めよ。

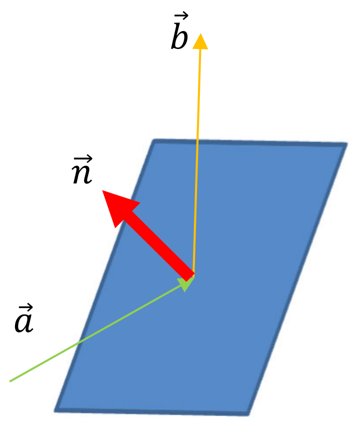
$\vec{b}\times\vec{c} = (-6,12,-6)$

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{54}}(-3,6,-3)$

$\vec{h} = \vec{n}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 20$

$\vec{h} = 20\cdot\frac{1}{\sqrt{54}}(-3,6,-3)$



$\vec{b} = 2\vec{h} + \vec{a} = \frac{40}{\sqrt{54}}(-3,6,-3) + (1,2,3)$ //

1.2次元ベクトル回転

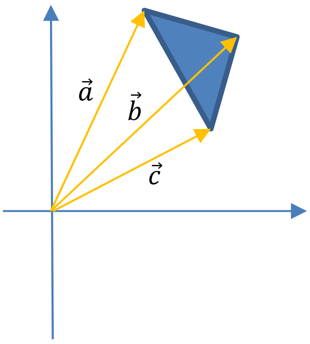
ベクトル成分は常に原点からの成分として考えられる。
そのため、2次元ベクトルの回転は原点基準での座標回転と同じである。

> したがって，点P(a, b) を原点のまわりに θ だけ回転させた点Qの座標は
>
> $\mathrm{Q}(a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)$
>
> となる。

であったので、2次元ベクトル回転は

$$\vec{p} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

2.2次元ベクトルでの図形回転(原点基準)



図形を描く頂点それぞれに原点からのベクトルが伸びていると考える。

それらのベクトルを回転させれば、その成分が回転した図形の座標になる。

$$\vec{a} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$
$$\vec{b} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$
$$\vec{c} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

3.3次元ベクトル回転

3次元ベクトルの回転を考える。
全ての回転は、

- x軸上の回転
- y軸上の回転
- z軸上の回転

の組み合わせで表せる。
各軸上の回転は2次元ベクトルの回転と同じであるので、

x軸上の回転：
$$\vec{p} = (x,\ y\cos\theta - z\sin\theta,\ y\sin\theta + z\cos\theta)$$
y軸上の回転：
$$\vec{p} = (x\cos\theta + z\sin\theta,\ y, -x\sin\theta + z\cos\theta)$$
Z軸上の回転：
$$\vec{p} = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)$$

導出は省くが、
それぞれの軸に対して考えれば上記が出る。

x軸上にθ=~ , y軸上にθ=~ , z軸上にθ=~
とそれぞれやって、求める。

4.3次元ベクトルでの図形回転(原点基準)

図示するのが難しいので図示は省略するが、2次元ベクトルと同じで、全ての頂点に向かうベクトルを作成して回転させる。

2次元ベクトルとの比較としては、
作成するベクトルの数が多くなるのと、
計算過程が３倍になることである。

・基本問題

1.次の2次元ベクトルをΘ=30°回転させよ。

$$\vec{a} = (3,4)$$

$\vec{a} = (3\cdot\cos\theta - 4\sin\theta,$
$3\sin\theta + 4\cos\theta)$

$\vec{a} = \left(\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2}, \dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$

2.次の3次元ベクトルを
x軸上でθ=60°回転させよ。

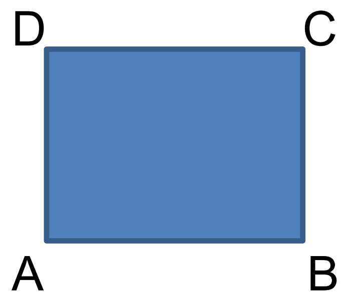
$$\vec{b} = (3,4,5)$$

$\vec{b} = (3, 4\cos\theta - 5\sin\theta, 4\sin\theta + 5\sin\theta)$

$= \left(3, \dfrac{10-5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{4\sqrt{3}+5}{2}\right)$

1.

次の2次元図形を回転させる。A(2,2),B(4,2),C(4,4),D(2,4)とすると、
原点基準で30°　回転させた際の、それぞれの座標を求めよ。



$A = (\sqrt{3}-1,\ 1+\sqrt{3})$

$B = (2\sqrt{3}-1,\ 2+\sqrt{3})$

$C = (2\sqrt{3}-2,\ 2+2\sqrt{3})$

$D = (\sqrt{3}-2,\ 1+2\sqrt{3})$

2.

次の3次元図形の直線を回転させる。A(2,2,2),B(4,4,4)とすると、
原点基準でz軸上で30°　x軸上で60°　回転させた際の、それぞれの座標を求めよ。

$z:\ \theta = 30^\circ$

$A' = (2\cos\theta - 2\sin\theta,\ 2\sin\theta + 2\cos\theta,\ 2)$

$= (\sqrt{3}-1,\ 1+\sqrt{3},\ 2)$

$x:\ \theta = 60^\circ$

$A'' = \left(\sqrt{3}-1,\ (1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ (1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\right)$

$= \left(\sqrt{3}-1,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$

$B'' = (2\sqrt{3}-1,\ 1-\sqrt{3},\ 5+\sqrt{3})$