約数・倍数と分数の計算

◆約数

１．約数

ある整数Ａを割り切ることのできる整数を、Ａの「　　　　」といいます。約数の見つけ方は、**整数を２つの整数の掛け算で表す**と見つけやすいでしょう。また、「　１　」は全ての整数の約数です。

【練習】

⑴１２の約数を求めてみよう。

考え方）１２を　１×１２　２×６　３×４　と２つの整数の掛け算で表すとよい。

⑵１００の約数を求めてみよう。

考え方）１００＝１×１００＝２×５０＝４×２５＝５×２０＝１０×１０

２．素因数分解

約数が１と自分自身の２個だけの整数のことを「　　　　」といいます。なお、「　　　」は素数ではありませんので、注意しましょう。

素数は小さい順に　２，３，５，７，１１，１３，１７，　　　　・・・・と続きます。

例えば４２は２×３×７、　５４なら２×３×３×３　のように整数を素数だけの掛け算で表すことがあります。これを[　　　　　　　]といいます。

【素因数分解のやり方】

① 分解したい数の左下にＬ字のような記号を書く
② 分解したい数を素数で割り算する
③ Ｌ字の左に「割った数」、下に「割り算の答え」を書く
④ 「割り算の答え」が素数になるまで分解しつづける
⑤ 素数になったら「Ｌ字の左側のすべての数」と「一番下の素数」のかけ算を書く

素因数分解

$$
\begin{array}{r|l}
2 & \underline{54} \\
3 & \underline{27} \\
3 & \underline{\ 9} \\
 & \ 3
\end{array}
$$

２×３×３×３

★最後に、答えをべき乗の形にまとめましょう。

【練習】次の数を素因数分解しましょう。

⑴１８０

⑵３３０

⑶２２５

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

★約数の個数

約数の個数は、素因数分解をすることで求めることができます。

約数を求めようとする数が $A^m \times B^n \times \cdots$ と素因数分解されたとき、約数の個数は $(m+1) \times (n+1) \times \cdots$ で求めることができる。

例えば、24 で考えてみましょう。

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$$

すべての組み合わせは、

$2^0 \times 3^0 = 1$　$2^1 \times 3^0 = 2$　$2^2 \times 3^0 = 4$　$2^3 \times 3^0 = 8$

$2^0 \times 3^1 = 3$　$2^1 \times 3^1 = 6$　$2^2 \times 3^1 = 12$　$2^3 \times 3^1 = 24$

の８通りあるのがわかる。

これを書き出さずに求めるには、指数に注目する。

「指数に１を加えた数」を掛け合わせることで、求めることができる。

$$(3+1) \times (1+1) = 8$$

３．公約数

いくつかの整数に共通な約数を「　　　　　」といいます。

そして、公約数のうち一番大きい数を「　　　　　　　　　　」といいます。

※GCD(greatest common divisor)　GCM(Greatest Common Measure)

【最大公約数の求め方】

方法１　①小さな素数から順に割り算していく。

②１のほかに公約数がなくなるまで、割り算をする。

③最後に、割った数を全部かけ合わせると最大公約数になる。

方法２

素因数分解を利用して共通な指数を探す。

【例１】　２４と６０の最大公約数

```
2) 24  60
2) 12  30
3)  6  15
    2   5
```

２×２×３＝１２

$24 = 2^3 \times 3^1$

$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$2^2 \times 3^1 = 12$

【例２】１２と２４と６０の最大公約数を求めましょう。

```
2) 12  24  60
2)  6  12  30
3)  3   6  15
    1   2   5
```

$2^2 \times 3^1 = 12$

$12 = 2^2 \times 3^1$

$24 = 2^3 \times 3^1$

$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$2^2 \times 3^1 = 12$

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

★ヒント！　割り切れる数の見分け方
1．一の位が 2 の倍数(0,2,4,6,8)のいずれかになっている数は「2 で割り切れる」
2．各位の数の和が 3 の倍数になっている数は「3 で割り切れる」
3．一の位の数が 0 か 5 である数は「5 で割り切れる」

【練習問題１】

(1)36 と 60 の最大公約数を求めなさい。

(2)42、56、84 の最大公約数を求めなさい。

【例３】　７２と９６の公約数の数を求めよう。

４．公約数の数の求め方

<u>公約数は、最大公約数の約数</u>であることを利用する。

考え方）７２と９６の最大公約数は[　２４　]である。

２４を素因数分解する

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1$$

２４の約数の個数は、

$$(3 + 1) \times (1 \times 1) = 8$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 72 & 96 \\ \hline 2 & 36 & 48 \\ \hline 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

２×２×２×３＝２４

【練習問題２】

６０と７２の公約数の数を求めなさい。

◆倍数

ある整数Ａを１倍、２倍、３倍、・・・ｎ倍してできる数を、Ａの「　　　　」といいます。

【例４】

９の倍数を求めてみよう。

９×ｎ　　　９，１８，２７，３６，４５，５４，６３，７２，８１，・・・・

いくつかの整数に共通な倍数を「　　　　　」といいます。

そして、公倍数のうち一番小さい数を「　　　　　　　　　」といいます。

※LCM(least common multiple)

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

【最小公倍数の求め方】

①最大公約数を求めるときと同じように、１のほかに公約数がなくなるまで、割り算をする。

②最後に割った数と商を全部掛け合わせると最小公倍数になる。

【例５】

１８と３０の最小公倍数は？

```
2) 18  30
3)  9  15
    3   5
```

２×３×３×５＝９０

【３つの数の最小公倍数の求め方】

①最大公約数を求めるときと同じように、割り算をする。

②２つの数が１以外の数で割り切れるときは割り算を続ける。

③最後に割った数と商を全部掛け合わせると最小公倍数になる。

【例６】

１２、２４、３０の最小公倍数は？

```
2) 12  24  30
3)  6  12  15
2)  2   4   5
    1   2   5
```

２×３×２×１×２×５

$=2^3\times3\times5=120$

１２、１６、３０の最小公倍数は？

```
2) 12  16  30
2)  6   8  15
3)  3   4  15
    1   4   5
```

２×２×３×１×４×５＝２×２×３×１×２×２×５

$=2^4\times3\times5=240$

【練習問題３】

(1)12 と 18 の最小公倍数を求めなさい。

(2)12 と 15 と 18 の最小公倍数を求めなさい。

[redacted]

倍数の個数は、ある範囲の中にある倍数の個数は、割り算を利用して求めることができま

【例】

「１から１０のまでの整数の中に４の倍数は何個あるか」

⇒　１，２，３，$\boxed{4}$，５，６，７，$\boxed{8}$，９，１０

「４，８」の２つ

４の倍数は、４×１，４×２，４×３，…のように、**４×（整数）**　で表される

そこで、「１から１０のまでの整数の中に４の倍数は３個」というのを具体的に書きださないで、どのようにすれば分かるかというと、

１０÷４＝２…２　　（１０＝４×２＋１）

商に注目し、割り算をして、商から「２個」と求めることができる。

※ある範囲の中にある公倍数の個数も、倍数の個数同様、割り算を利用して求めることができます。

【練習問題４】

⑴ １から１００までの整数の中に、４の倍数は何個ありますか？

１００÷４＝２５個

⑵ １００から２００までの整数の中に４の倍数は何個ありますか？

１から２００までの個　　　２００÷４＝５０

数１から９９までの個数００－１）÷４＝２４・・・

よって　１００～２００までの個数は　５０－２４＝２６個

⑶ １００から２００までの整数の中に、４でも５でも割り切れる数は何個ありますか？

４でも５でも割り切れる数は[　（４×５＝）２０　]の倍数

[　２０　]の倍数の個数を求めればよい。

１から２００までの個　　　２００÷２０＝１０

数　　１から９９まで　　　（１００－１）÷２０＝４・・・１

よの個数　１００～２００までの個数は　１０－４＝６個

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

[redacted]

最大公約数と最小公倍数をプログラムで求めてみましょ

1.うプログラムを作成するための知識

(1)ユークリッドの互除法

これまでに示した最大公約数を求める2つの方法は、「共通な約数が分かる場合」「素因数分解できる場合」に使えますが、プログラムでそれをやろうとするとちょっと面倒です。そこで、ここでは、「　**ユークリッドの互除法**　」で最大公約数を求めます。

ユークリッドの互除法とは、「整数 $\boldsymbol{m}$ を整数 $\boldsymbol{n}$ で割ったときの商を $\boldsymbol{Q}$ 余りを $\boldsymbol{r}$ とするとき、$\boldsymbol{m}$と $\boldsymbol{n}$ の最大公約数は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ の最大公約数でもある」という理論を余り $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{0}$ になるまで繰り返し用いることによって、整数　と整数　の最大公約数を求めるものです。

【ユークリッドの互除法】

$\boldsymbol{m} \div \boldsymbol{n} = \boldsymbol{Q} \cdots \boldsymbol{r}$ のとき、

$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ の最大公約数 ＝ $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ の最大公約数

【例】

1回目　　$\boldsymbol{m} \div \boldsymbol{n}$ 余り $\boldsymbol{r}$　　　$\boldsymbol{96 \div 36 = 2 \cdots}$

2回目　　$\boldsymbol{m} \div \boldsymbol{n}$ 余り $\boldsymbol{r}$　　　$\boldsymbol{24 \quad 36 \div 24 = 1}$

3回目　　$\boldsymbol{m} \div \boldsymbol{n}$ 余り $\boldsymbol{0}$　　　$\boldsymbol{\cdots 12 \quad 24 \div 12 =}$

$\boldsymbol{m} \div \boldsymbol{n}$ の結果、余り $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{0}$ となったときの除数 $\boldsymbol{n}$ が最大公約数となる。
$\boldsymbol{2 \cdots 0}$

(2)最小公倍数の求め方

2つの整数 $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ の最小公倍数 $\boldsymbol{L}$ と最大公約数 $\boldsymbol{G}$ の関係から、最小公倍数を求めます。

$\boldsymbol{m \times n = L \times G} \qquad \boldsymbol{L = (m \times n) \div G}$

(3)繰り返し処理

条件が満たされるまで何度も同じ処理を繰り返す場合、「　**ｗｈｉｌｅ文**　」を使います。

```
while( 条件式 )        ※条件が真の間繰り返される
{
     処理
}
```

２．準備

(1)ソリューション「Calculation」の中に新しいプロジェクト「Pro03」を作成する。

(2)作成した「Pro03」を「スタートアップ プロジェクトに設定」

３．プログラムの作成

それでは、プログラムを作成しましょう。2つの整数は、任意に入力されたものとします。

【演習問題１　Ｐｒｏ０３　プログラム例】

```
static void Main(string[] args)
{
    int m, n, a, b, gcm, lcm, r;

    // 整数を２つ入力
    Console.Write("1 つ目の整数を入力してください : ");
    m = Int32.Parse(Console.ReadLine());    //整数型に変換
    Console.Write("2 つ目の整数を入力してください : ");
    n = Int32.Parse(Console.ReadLine());    //整数型に変換

    //2 つの数 m,n を作業用の変数 a,b に入れる
    a = m;
    b = n;

    // ユークリッド互除法を使って a と b の最大公約数を求める
    while (b != 0)  // 余り が 0 になるまで繰り返し実行される
    {
        r = a % b;
        a = b;
        b = r;
    }
    gcm = a;

    //2 つの数の最小公倍数を求める
    //2 つの数 m,n を作業用の変数 a,b に入れる
    a = m;
    b = n;
    lcm = a * b / gcm;

    //結果の表示
    Console.Write(m+"と"+n+"の最大公約数  : ");
    Console.WriteLine(gcm);
    Console.Write(m+"と"+n+"の最小公倍数  : ");
    Console.WriteLine(lcm);
}
```

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

◆分数の計算

1．分数の足し算・引き算

分数の足し算・引き算は、
①：2 つの分数の「分母」が同じになるようにそろえて(通分して)から
②：2 つの分数の「分子」を足し算・引き算をして
③：最後に「約分」をする。

【例】　①　②　③

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{9\div3}{12\div3}=\frac{3}{4}$$

①　②

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{3\times3}{4\times3}-\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$$

2．分数の掛け算

分数の掛け算は、
①：分子どうしをかけ算する
②：分母どうしをかけ算する
③：最後に「約分」する

この 3 つのステップをふむことで求まります。

【例】　①②　③

$$\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{3\times1}{10\times6}=\frac{3}{60}=\frac{3\div3}{60\div3}=\frac{1}{20}$$

【別解】

$$\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times1}{10\times\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{1}{20}$$

計算の途中で約分できる
ときは約分する

3．分数の割り算

分数の割り算は、
①：割る数の分子と分母をひっくり返す
②：÷を×に変える
③：分子どおし
④：分母どおしを掛け算する
⑤：最後に「約分」する

①②：割る数の逆数を
掛ける

この 5 つのステップをふむことで求まります。

【例】　①②　③④

$$\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{1\times5}{3\times2}=\frac{5}{6}$$

【練習問題５】

次の計算をしなさい。

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times3}{2\times3}+\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

(2) $\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{5}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8}{12}=\frac{8\div4}{12\div4}=\frac{2}{3}$

(3) $\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{3\times7}{5\times7}-\frac{1\times5}{7\times5}=\frac{21}{35}-\frac{5}{35}=\frac{16}{35}$

(4) $\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=\frac{3\times3}{4\times3}-\frac{1}{12}=\frac{9}{12}-\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{8\div4}{12\div4}=\frac{2}{3}$

(5) $\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{7\times3}=\frac{10}{21}$

(6) $\frac{2}{3}\times\frac{6}{11}=\frac{2\times6}{3\times11}=\frac{4}{11}$

(7) $\frac{2}{7}\div\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}=\frac{10}{21}$

(8) $\frac{15}{8}\div\frac{5}{3}=\frac{15}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{15\times3}{8\times5}=\frac{9}{8}$

４．小数を分数にするやり方

計算をするときに小数で考えたほうが楽な場合と分数で考えたほうが楽な場合があります。その際に小数を分数に、分数を小数に簡単にできるようになると計算のスピードがぐんとあがります。ここでは、小数を分数にするやり方を説明します。

1 を 10 等分したものの 1 個分を 0.1 または、$\frac{1}{10}$と表します。つまり、

$$0.1=\frac{1}{10}$$

「　約数・倍数と分数の計算　」

【例１】

分子は 7

$\mathbf{0.7}$ を分数に直す　　$\mathbf{0.7}$

小数点の右側に 1 個だけ数字がある時、分母は 10

従って、$\mathbf{0.7 = \frac{7}{10}}$

$\mathbf{0.6}$ を分数に直す

$\mathbf{0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}}$

約分できるときは約分する

以下の関係を基本にして小数を分数に直します。

$$\mathbf{0.1 = \frac{1}{10} \qquad 0.01 = \frac{1}{100} \qquad 0.001 = \frac{1}{1000}}$$

【例２】

$\mathbf{0.12}$ を分数に直す　　$\mathbf{0.12}$

小数点の右側に 2 個数字がある時、分母は 100

従って、$\mathbf{0.12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}}$

約分できるときは約分する

５．分数を小数にするやり方

分数を小数に直すには、

分子÷分母

を計算します。

【例３】

$\mathbf{\frac{4}{5}}$を小数に直す　　$\mathbf{\frac{4}{5} = 4 \div 5 = 0.8}$

６．小数と分数の混じった式

分数と小数の混じった式では、**小数を分数に変えることが大原則**です。

【例４】

$$\mathbf{\frac{7}{5} - 0.75 = \frac{7}{5} - \frac{3}{4} = \frac{28}{20} - \frac{15}{20} = \frac{13}{20}}$$

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

◆演習問題

１．234、390、1040 の最大公約数を求めなさい。

最大公約数＝１３×２＝２６

２．12、40、64 の最小公倍数を求めなさい。

最小公倍数＝２×２×２×３×５×８＝960

３．108 を素因数に分解しなさい。

$$\mathbf{108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3}$$

４．108 の約数は全部で何個あるか調べなさい。

$\mathbf{108 = 2^2 3^3}$ だから、$\mathbf{(2+1) \times (3+1) = 3 \times 4 = 12}$

５．1 から 100 までの整数で 3 で割り切れるが、4 で割り切れない整数は全部で何個ですか。

1 から 100 までの整数で 3 で割り切れる数は 100÷3＝33 あまり 1 で 33 個。
3 でも 4 でも割り切れる数は 12 の倍数なので、100÷12＝8 あまり 4 の 8 個。 3 で割り切れるが、4 で割り切れない整数は全部で 33−8＝25 個。

６．次の計算をしなさい。

(1) $\mathbf{\frac{2}{3} + 0.2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}}$

「　約数・倍数と分数の計算　」

東京情報クリエーター工学院

(2) $1.8\times\frac{4}{3}=\frac{18}{10}\times\frac{4}{3}=\frac{18\times4}{10\times3}=\frac{12}{5}$

(3) $8.75\div\frac{5}{4}=\frac{875}{100}\times\frac{4}{5}=\frac{875\times4}{100\times5}=7$

(4) $\frac{19}{7}\div5.7+\frac{5}{3}\div\frac{35}{11}=\frac{19}{7}\div\frac{57}{10}+\frac{5}{3}\div\frac{35}{11}=\frac{19}{7}\times\frac{10}{57}+\frac{5}{3}\times\frac{11}{35}=\frac{10}{21}+\frac{11}{21}=1$