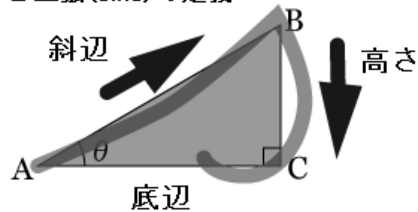


# 三角関数1

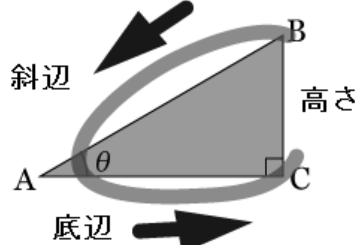
## ◆三角比

直角三角形の辺の比率を「 三角比 」といいます。

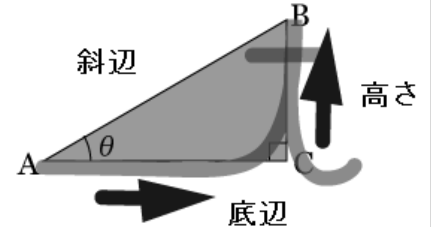
### ■ 正弦 (sine) の定義



### ■ 余弦 (cosine) の定義



### ■ 正接 (tangent) の定



正弦は「 斜辺と高さ 」の比率

余弦は「 斜辺と底辺 」の比率

正接は「 底辺と高さ 」の比率

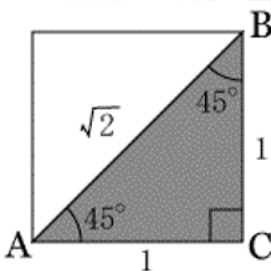
$$\sin \theta =$$

$$\cos \theta =$$

$$\tan \theta =$$

## 基本的な三角形と三角比

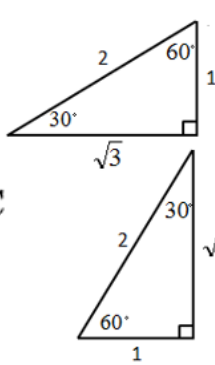
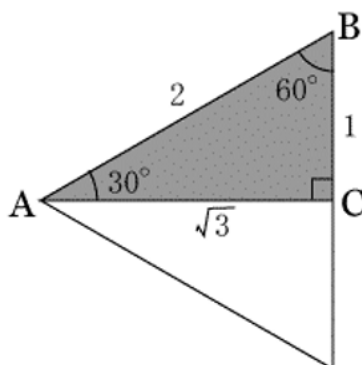
### ■ 正方形の半分 直角二等辺三角形(各辺の比は 1:1:√2 )



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ =$$

$$\tan 45^\circ =$$

### ■ 正三角形の半分 各辺の比が 1:2:√3 の直角三角形



$$\sin 30^\circ = \cos 30^\circ = \tan 30^\circ =$$

$$\sin 60^\circ = \cos 60^\circ = \tan 60^\circ =$$

★その他の三角関数 プログラムでよく使用されるのが「 逆三角関数 」です。

逆正弦関数(アークサイン)

$$y = \sin \theta \leftrightarrow \theta =$$

逆余弦関数(アークコサイン)

$$x = \cos \theta \leftrightarrow \theta =$$

逆正接関数(アークタンジェント)

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \leftrightarrow \theta =$$

これらの関数は、例えば、「ゲームのキャラクターが空中の標的に矢を射る場合を想定する。標的位置とキャラクターの位置がわかっている場合に、空中の標的を射るにはキャラクターはどの角度で狙いを定めればよいか。」といった場合に使用します。

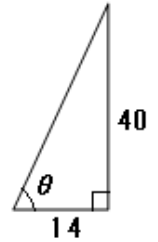
## 【例】

次の直角三角形の  $\theta$  の角度を求めなさい。ただし、三角関数表で一番近い値とします。

$$\text{図より、 } \tan \theta = \frac{40}{14} \approx 2.857$$

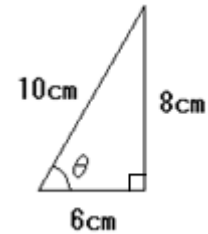
$$\tan^{-1}(2.857) = 71^\circ$$

三角関数表から読み取ると、 $\theta \approx$



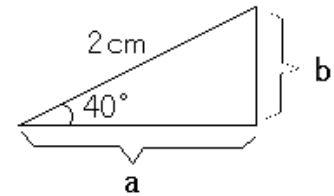
## 【練習問題 1】

(1) 右図の直角三角形の  $\sin \theta$   $\cos \theta$   $\tan \theta$  を求めなさい。

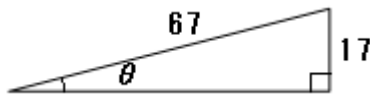


(2) 右図の直角三角形  $a$   $b$  の長さを求めなさい。

ただし、 $\sin 40^\circ = 0.64$   $\cos 40^\circ = 0.76$  とする。



(3) 次の直角三角形の  $\theta$  の角度を求めなさい。ただし、三角関数表で一番近い値とします。



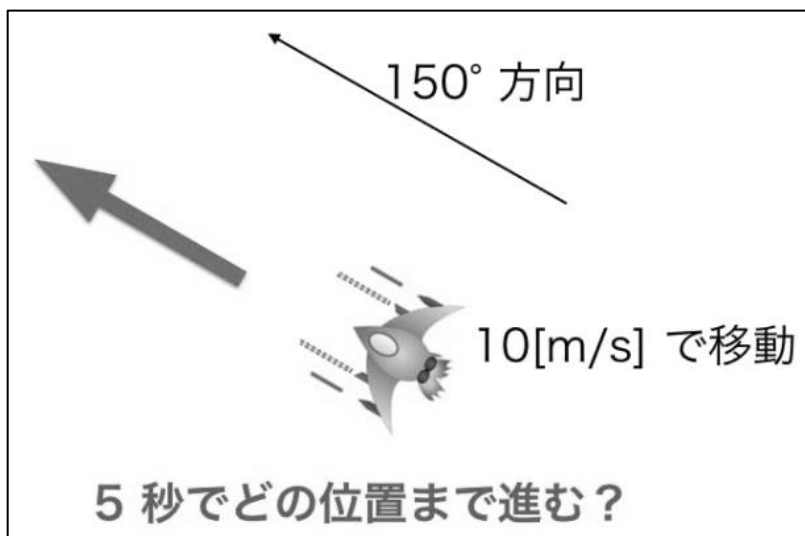
(4)  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  で、 $\tan \theta = \frac{3}{4}$  のとき  $\sin \theta$   $\cos \theta$  を求めなさい。

## 三角関数表

角度	sin	cos	tan
0	0.0000	1.0000	0.0000
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9511	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9397	0.3640
21	0.3584	0.9336	0.3839
22	0.3746	0.9272	0.4040
23	0.3907	0.9205	0.4245
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8988	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325
44	0.6947	0.7193	0.9657
45	0.7071	0.7071	1.0000

角度	sin	cos	tan
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281
56	0.8290	0.5592	1.4826
57	0.8387	0.5446	1.5399
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8572	0.5150	1.6643
60	0.8660	0.5000	1.7321
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4695	1.8807
63	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900
90	1.0000	0.0000	#####

## ◆三角関数

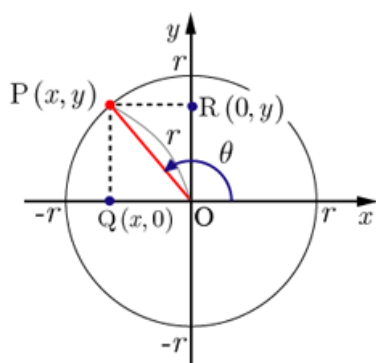


ゲーム制作や航法などにおいては、「x 軸方向からみて 150 度の角度方向に、秒速 10m で進んだら 5 秒後にはどこにいるのでしょうか」といった問題にはしばしば遭遇します。

このような問題を解決する手段として三角関数は大変有効です。上の問題では結局  $10 \times 5 = 50\text{m}$  進んでいるわけですが、まずは 1 m 進んだ場合にどこにいるのかを考えてみましょう。それを 50 倍すればいいです。

ここで単位円による三角関数の定義が大活躍します。実際に移動後の座標がどうなるかは、三角関数を定義してから、計算してみましょう。

そこでまずは、三角関数を定義します。今までの三角比の分野で行った定義では、使える角度が  $0^\circ$  以上  $90^\circ$  以下でした。三角関数の分野ではこの角度を一般の角にまで拡張して定義します。



原点 0 を中心とする半径  $r$  の円を考え、この円上の点として、 $P(x, y)$  をとります。

線分  $OP$  と  $x$  軸のなす角を  $\theta$  とすると、このとき、

$$\sin\theta = \quad \cos\theta = \quad \tan\theta =$$

と定義し、それぞれ一般角の「正弦」「余弦」「正接」といいます。これらを「 $\theta$  の三角関数」といいます。

そして、この 3 つの値は、角度  $\theta$  だけで決まる値であり、円の半径  $r$  をどのような値にしても同じ値になります。

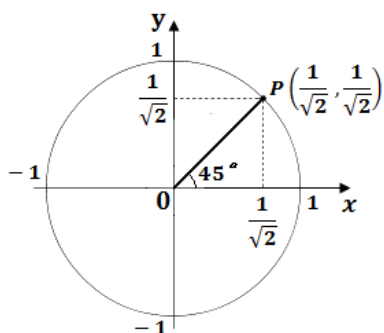
具体的な計算で確かめてみましょう。

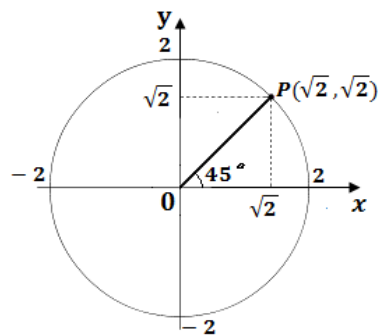
まず、 $r = 1$  として  $\sin 45^\circ$  を計算してみましょう。

$\theta = 45^\circ$ 、3 辺の長さの比が  $1:1:\sqrt{2}$  の直角三角形が

できます。よって、 $r = 1$   $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ですから

$$\sin 45^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$





次に、 $r = 2$  として  $\sin 45^\circ$  を計算してみましょう。

$$\theta = 45^\circ \quad r = 2 \quad y = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

確かに一致しましたね。 $r$  をその他の値にしても、結局同じ結果になります。

なぜでしょうか？

その理由は、簡単です 1 つの角を  $45^\circ$  として作った直角三角形はいつも同じ形になりますよね。そして辺の比はいつも等しかったですね(この場合は、 $1:1:\sqrt{2}$ )。

結局、大きさが異なる図形でも、それらが相似であれば対応する辺の比は等しいという相似形の性質から明らかな話なわけです。

以上から、 $r = 1$  つまり、円を半径 1 の円(単位円)で考えてよいわけです。こうすると、計算が楽になりますしね。まとめると、

### 三角関数

単位円の円周上の点の  $x$  座標は  $\cos\theta$        $x = \cos\theta$

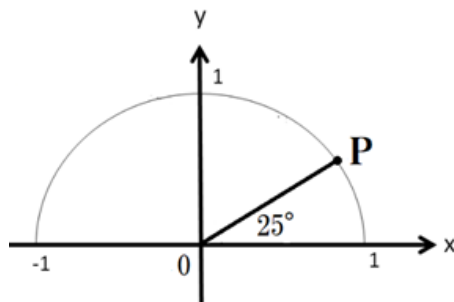
単位円の円周上の点の  $y$  座標は  $\sin\theta$        $y = \sin\theta$

原点と単位円の円周上の点を結ぶ直線の傾きが  $\tan\theta$        $\tan\theta = \frac{y}{x}$

### 【例題 1】

点  $P$  の座標を求めなさい。

(1)



単位円の円周上の点の

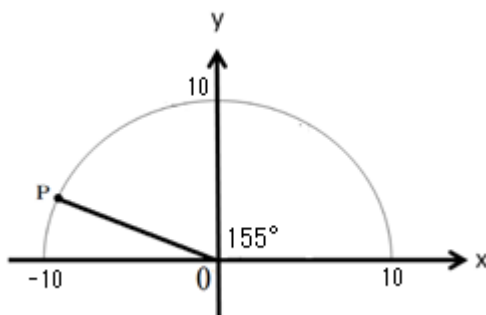
$x$  座標は  $\cos\theta$ 、 $y$  座標は  $\sin\theta$

三角関数表より、

$$\cos 25^\circ = \quad \quad \quad \sin 25^\circ =$$

従って、点  $P$  の座標は

(2)



$$180^\circ - 155^\circ =$$

三角関数表より、

$$\cos 25^\circ = \quad \quad \quad \sin 25^\circ =$$

点  $P$  は、 $x$  座標「-」、 $y$  座標「+」

従って、半径が 1 なら ( )

問題は、半径が 10 なので、

( )

さて、三角関数の定義と座標の求め方はわかりましたか？

それでは、最初の例の「 $x$  軸方向からみて  $150$  度の角度方向に、秒速  $10\text{m}$  で進んだら  $5$  秒後にはどこにいるでしょうか」を計算してみましょう。 $150$  度の角度ですから、まずは単位円で考えてみると、

$$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\text{三角関数表より、}\cos 30^\circ = \qquad \sin 30^\circ =$$

単位円で考えると  $150^\circ$  の座標は、 $x$  座標が「 $-$ 」  $y$  座標が「 $+$ 」だから、

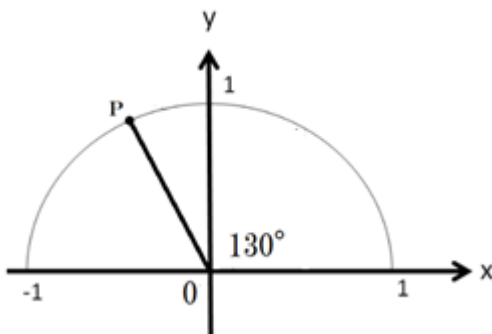
$$(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = ( \qquad \qquad \qquad )$$

$$\text{これを } 50 \text{ 倍して、} ( \qquad \qquad \qquad )$$

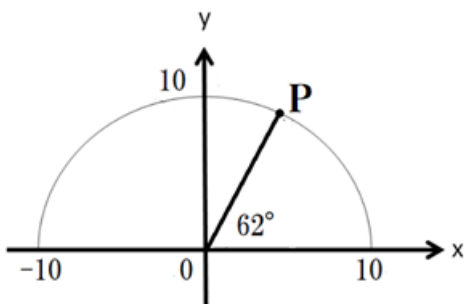
### 【練習問題 2】

点  $P$  の座標を求めなさい。

(1)



(2)



## ◆三角比の相互関係

三角比の相互関係を以下にまとめます。

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$$

$$\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta$$

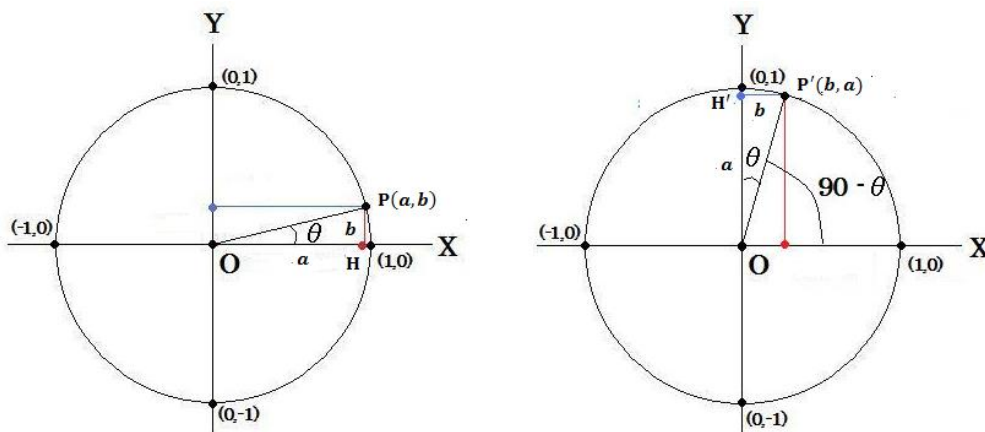
この関係は、例えば、 $\theta = 60^\circ$  だとすると、

$$\sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

つまり、 $\sin 30^\circ$  と  $\cos 60^\circ$  が同じ値だということを表しています。実際に、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  ですから、イコールは成り立ちます。

これから、この公式が成り立つ理由を説明します。まず、 $90^\circ - \theta$  からです。



左図のように、 $OP$  と  $x$  軸がなす角が  $\theta$  となるように、単位円の円周上に点  $P(a, b)$  をとります。この  $x$  座標  $y$  座標がそれぞれ、 $\cos \theta$   $\sin \theta$  だから、 $P(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$

次に右図のように  $OP'$  と  $x$  軸がなす角が  $(90^\circ - \theta)$  となるように、単位円の円周上に点  $P'$  をとります。 $OP'$  は  $x$  軸と  $(90^\circ - \theta)$  の角をなすので、 $P'(\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta))$  とおけます。

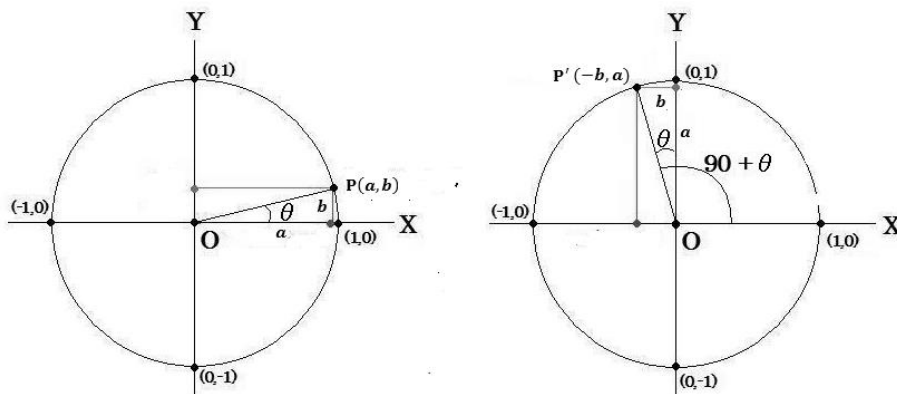
ここで、 $\angle P'OH' = \theta$  従って、 $\triangle OPH$  と  $\triangle OP'H'$  は合同になるから、

$$\text{点 } P' = (\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta)) = (b, a)$$

$$a = \cos \theta \quad b = \sin \theta \quad \text{だから} \quad (\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta)) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

従って、 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$   $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$

次に、 $(90^\circ + \theta)$  です。



先ほどと同様、左図のように、 $OP$  と  $x$  軸がなす角が  $\theta$  となるように、単位円の円周上に点  $P(a, b)$  をとります。この  $x$  座標  $y$  座標がそれぞれ、 $\cos \theta$   $\sin \theta$  だから、 $P(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$

次に $OP'$  と  $x$  軸がなす角が  $(90^\circ + \theta)$  となるように、単位円の円周上に点  $P'$  をとります。すると、 $\triangle OPH$  と  $\triangle OP'H'$  は合同になります。従って、 $P'H' = PH = b$   $OH' = OH = a$

点 $P'$  を座標で表すと、点 $P' = (-b, a)$

また、点 $P'$  の  $x$  座標は $\cos(90^\circ + \theta)$  で、 $y$  座標は、 $\sin(90^\circ + \theta)$  だから、

$$\text{点 } P' = (\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta)) = (-b, a)$$

$a = \cos \theta$   $b = \sin \theta$  だから  $(\cos(90^\circ + \theta), \sin(90^\circ + \theta)) = (-\sin \theta, \cos \theta)$

従って、 $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$   $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$

この考え方を使うと以下の関係も導き出せますね。

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$$

### 【例題】

次の三角比の値を三角関数表で求めなさい。

$$(1) \sin 151^\circ = \sin(90^\circ + \quad) = \\ = \sin(180^\circ - \quad) =$$

$$(2) \cos 131^\circ = \cos(90^\circ + \quad) = \\ = \cos(180^\circ - \quad) =$$

【練習問題 3】 次の等式を完成させなさい。

$$(1) \sin 74^\circ = \cos(\quad)^\circ \qquad (2) \sin 83^\circ = \cos(\quad)^\circ$$

$$(3) \cos 53^\circ = \sin(\quad)^\circ \qquad (4) \cos 75^\circ = \sin(\quad)^\circ$$

【練習問題 4】 次の三角比の値を三角関数表で求めなさい。

$$(1) \sin 123^\circ$$

$$(2) \cos 132^\circ$$

$$(3) \sin 139^\circ$$

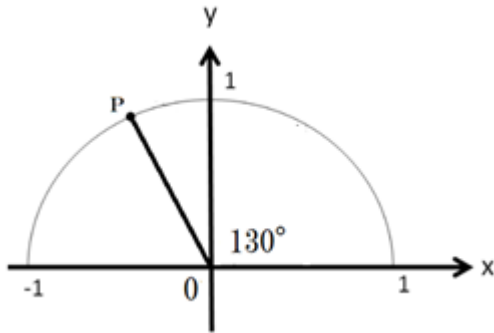
$$(4) \cos 144^\circ$$



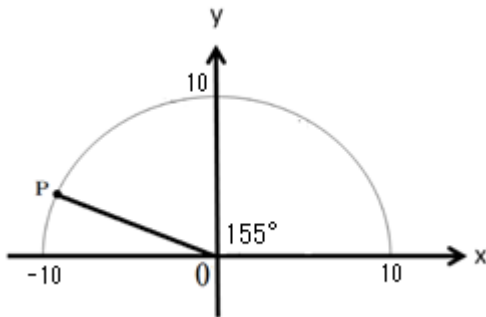
## 【練習問題 5】

点  $P$  の座標を求めなさい。(三角比の相互関係を使用)

(1)



(2)



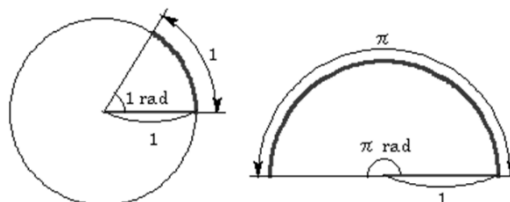
## ◆弧度法

これまでは、角の大きさの単位として、「度」を使ってきました。これは、円周 1 周を 360 に分割して角度 (°) としたものでこれを「度数法」といいます。

これに対して、プログラムにおいては、「弧度法」が使われます。弧度法は、少々定義がわかりにくいのですが、扱いに慣れておかないとプログラムで使うことができません。ここで、弧度法について慣れておきましょう。

## 【弧度法の定義】

半径 1 の円において、半径と同じ長さの弧をもつ扇形を考えます。この扇形の中心角を「1 ラジアン (rad)」とします。



## 【弧度法と度数法の関係】

「 $180^\circ = \pi$  ラジアン」の関係であり、

$$\begin{aligned} \text{[ラジアンで表した角]} &= \text{[度で表した角]} \times \frac{\pi}{180} \\ \text{[度で表した角]} &= \text{[ラジアンで表した角]} \times \frac{180}{\pi} \end{aligned}$$

距離を測るのに、「フィート」を使ったり「メートル」を使ったりするのと同じように角の場合も、度・ラジアンどちらで測ってもかまいません。フィートやメートルにしても、度やラジアンにしても、ただ単なる単位というだけの話です。

## 【例題】

次の角を度はラジアンで、ラジアンは度で表しなさい。

$$(1) 45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$(2) \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60^\circ$$

## 【練習問題 6】

次の角を度はラジアンで、ラジアンは度で表しなさい。

$$(1) 15^\circ$$

$$(2) 135^\circ$$

$$(3) -150^\circ$$

$$(4) \frac{2}{3} \pi (\text{rad})$$

$$(5) -\frac{5}{6} \pi (\text{rad})$$

## ◆演習問題 1

1. マウス入力された座標値と原点を結ぶ線の角度を求めるプログラムを作成しましょう。

(1) プログラムを作成するための知識(復習)

角度を求める。 角度は、ラジアンであることに注意しましょう。

計算式 「  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$  」 を利用

(2) 準備

①ソリューション[MathCalc]の中にテンプレートを使用して[Math02Ex02]を作成する。

②始点は原点で、入力点を終点として計算します。(マウス入力: 1つ)

(3) プログラムの入力

[Math02Ex02 MyDrawClass.cs]

```
using DrawUtility;
using System.Drawing;
using MathUtility.Vector_2;

namespace Math02Ex02
{
    public class MyDrawClass : Draws, IDraws
    {
        //フィールド
        InputState input;
        Vector2 p0, p1;    //修正 原点と入力値
        float angle;      //追加 角度

        //コンストラクタ
        public MyDrawClass()
        {
            input = new InputState();
            input.MouseOn();
            p0 = Vector2.Zero;    //追加
        }

        //メソッド
        public void InputData()
        {
            Init();
            Clear();
            List<PointF> p = new List<PointF>();
            p = input.GetPoint(1, "座標点入力"); //修正
            if (p.Count == 0) { return; }
            p1 = new Vector2(p[0].X, p[0].Y);    //修正

            //以降追加 角度を求める
            angle =
            angle *=

            Draw();
            Render();
        }

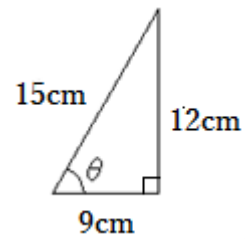
        public void Update() { }

        public void Draw()
        {
            Text(p1, angle.ToString());
            Line(p0, p1);
            Dot(p1);
        }
    }
}
```

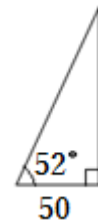
2. 2のプログラムでは、90度以下は正しく表示されるが、90度以上は正しく表示されません。90度以上も正しく表示されるようにプログラムを変更しましょう。

## ◆演習問題2

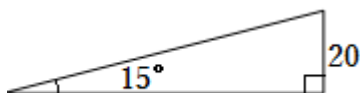
- (1) 右図の直角三角形の  $\sin \theta$   $\cos \theta$   $\tan \theta$  を求めなさい。



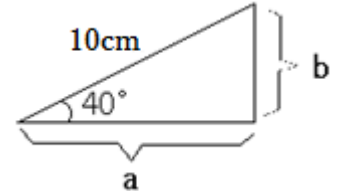
- (2) 次の直角三角形の斜辺と高さの長さを求めなさい。



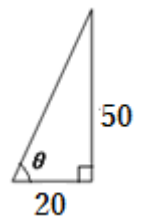
- (3) 次の直角三角形の斜辺と底辺の長さを求めなさい。



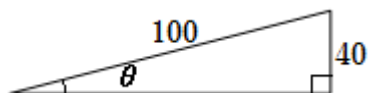
- (4) 右図の直角三角形  $a$   $b$  の長さを求めなさい。



- (5) 次の直角三角形の  $\theta$  の角度を求めなさい。ただし、三角関数表で一番近い値とします。

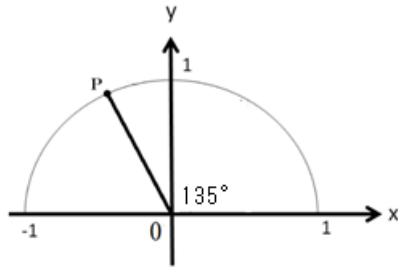


- (6) 次の直角三角形の  $\theta$  の角度を求めなさい。ただし、三角関数表で一番近い値とします。

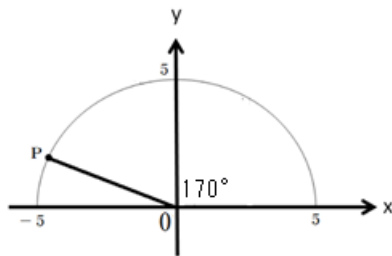


(7) 点  $P$  の座標を求めなさい。

①



②



(8) 山のふもとのA駅と山頂のB駅を結ぶケーブルカーの路線の全長は3000m、傾斜角は $25^\circ$ です。A駅とB駅の標高差と水平距離は、それぞれ何mですか。1m未満は四捨五入して求めなさい。

(9) ゲームのキャラクターが空中の標的に矢を射る場合を想定します。標的は(600,200)の位置にあり、キャラクターは(100,0)の位置にいます。矢が直線経路に沿って飛んでいくとすると、空中の標的を射るにはキャラクターはどの角度で狙いを定めればよいでしょうか。なお、角度は三角関数表から求めた最も近い角度とします。

(10) 今、弾が初期位置(50,100)から角度 $35^\circ$ で、右上に向かって飛んでいます。弾が、角度 $35^\circ$ の方向に、初期位置から、100進んだ時の座標位置を計算しなさい。

## [Math02Ex02 MyDrawClass.cs プログラム例]

```
//角度を求める
angle = (float) Math.Atan(p1.Y / p1.X); //角度を求める
angle *= 180 / (float) Math.PI;          //ラジアンを度に変換

//追加 3 時方向を 0 度として角度を修正
if (p1.X < 0) angle += 180;
else if (angle < 0) angle += 360;

Draw();
Render();
}
```