二次方程式と二次関数のグラフ

◆式の展開と因数分解　まとめ

「 **展開** 」とは、「 **カッコを開く** 」という意味。

分配法則

$$\boldsymbol{a(b+c)=ab+ac} \qquad \boldsymbol{(a+b)c=ac+bc}$$

乗法公式

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2} \qquad \boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$
$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$
$$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$
$$\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd}$$

「 **因数分解** 」とは「 **展開の逆** 」をすることです。

１．共通因数をくくりだす

２．乗法公式を逆にする

因数分解の公式

$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

３．和と積の値から 2 数を求める

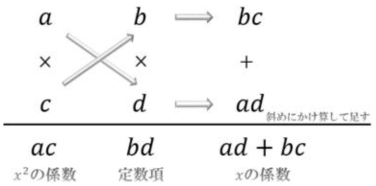
乗法公式$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$を逆に使って、$\boldsymbol{x^2+Ax+B}$を因数分解するには、積が$\boldsymbol{B}$、和が$\boldsymbol{A}$となる 2 つの数$\boldsymbol{a,b}$を見つける。

４．たすきがけの因数分解

$$\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$$
$$\boldsymbol{ac=A} \quad \boldsymbol{ad+bc=B} \quad \boldsymbol{bd=C}$$

$\boldsymbol{A}$の約数$\boldsymbol{a,c}$および$\boldsymbol{C}$の約数で$\boldsymbol{b,d}$で$\boldsymbol{ad+bc=B}$となるものを見つけます。

たすきがけの図



「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

◆2次方程式の解法

($\boldsymbol{x}$ の 2 次式)＝0 の形になる方程式を、「 **2 次方程式** 」という。2 次方程式には一般に解が 2 つあります。

1．因数分解による解法

$\boldsymbol{AB=0}$ が成り立つのは、$\boldsymbol{A=0}$ のときと$\boldsymbol{B=0}$ のときだけです。従って、

$$\boldsymbol{(x+a)(x+b)=0}$$

が成り立つのは、$\boldsymbol{x+a=0}$ のときと $\boldsymbol{x+b=0}$ のときだけです。

$\boldsymbol{x+a=0}$ より　$\boldsymbol{x=-a}$

$\boldsymbol{x+b=0}$ より　$\boldsymbol{x=-b}$　　よって、解は、$\boldsymbol{x=-a,-b}$

【例】

2 次方程式 $\boldsymbol{x^2-2x-15=0}$ を解きなさい。

左辺を因数分解して、$\boldsymbol{(x+3)(x-5)=0}$　　解は、$\boldsymbol{x=-3,5}$

2．平方根による解法

因数分解できない場合でも、平方根を求めて 2 次方程式を解くことができます。

方程式を変形して、$\boldsymbol{(x+○)^2}$ ＝△ の形にできれば平方根を求めて解くことができます。

【例】

次の 2 次方程式を解きなさい。

① $\boldsymbol{x^2=4}$

平方根を求めて、

解は　$\boldsymbol{x=\pm 2}$

② $\boldsymbol{x^2-2=0}$

まず定数項を移行　$\boldsymbol{x^2=2}$

解は　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}}$

③ $\boldsymbol{x^2+4x-1=0}$

左辺の−1 を移行　$\boldsymbol{x^2+4x=1}$

両辺に 4 を加えて　$\boldsymbol{x^2+4x+4=1+4}$

左辺を因数分解　$\boldsymbol{(x+2)^2=5}$

平方根を求めて、$\boldsymbol{x+2=\pm\sqrt{5}}$

解は　$\boldsymbol{x=-2\pm\sqrt{5}}$

3．解の公式

2 次方程式 $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ の解は

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$\boldsymbol{(b^2-4ac \geqq 0)}$

$\boldsymbol{ax^2+2b'x+c=0}$ の解は

$$\boldsymbol{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

$\boldsymbol{(b'^2-ac \geqq 0)}$

【例】

2 次方程式 ）$\boldsymbol{3x^2+7x+3=0}$ を解きなさい。

$$\boldsymbol{x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times3\times3}}{2\times3}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}}$$

2 次方程式 $\boldsymbol{2x^2+6x+3=0}$ を解きなさい。

$$\boldsymbol{2x^2+6x+3=2x^2+2\times3\times x+3 \quad x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2\times3}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2}}$$

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

【練習問題】

１．次の２次方程式を解きなさい。

(1) $x^2+x-12=0$

(2) $x^2+3x=0$

(3) $-4x^2+9=0$

(4) $x^2+9x-22=0$

(5) $3x^2+14x-5=0$

(6) $4x^2-12x+9=0$

(7) $x^2-2x-1=0$

(8) $x^2+4x+1=0$

(9) $x^2+2x-5=0$

(10) $x^2+3x-1=0$

(11) $3x^2-5x+1=0$

(12) $5x^2+6x-2=0$

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

２．次の問題を解くための２次方程式を作り、解を求めなさい。

(1) 差が７で、積が18の２数があります。大きいほうの数を x としてこの２数を求めなさい。

式　　　　　　　　　　　　解

(2) 縦が横より $5cm$ 長い長方形があります。面積が $36cm^2$ のとき、横の長さ x を求めなさい。

式　　　　　　　　　　　　解

(3) 正方形の紙があり、横を $3cm$ 、縦を $5cm$ 短くした長方形にすると、面積が $35cm^2$ になります。もとの正方形の１辺　を求めなさい。

式　　　　　　　　　　　　解

(4) 連続した３つの整数があります。最も大きい数の２乗が、他の２数の２乗の和に等しいとき、真ん中の数 x を求めなさい。

式　　　　　　　　　　　　解

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

◆2 次関数のグラフ

１．関数とは

2 つの変数 x と y があり、x の値が定まればそれに対応する y の値が 1 つ定まる場合、y は x の関数という。

x の最高次数が「1」のときを「　　　」**関数**、x の最高次数が「2」のときを「　　　」**関数**という。

２．2 乗に比例する関数

$y = ax^2$　（a は比例定数）

関数は x の値に対応して、y の値が 1 つ定まるので、関数の式が分かっている場合、x に値を代入することで y の値を求めることができる。

(1) $y = x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2							

表をもとにして、グラフ用紙に点をとり、点を結んでグラフにする。
（1 次関数のグラフ同様、座標軸・軸の向き・座標軸の名前などに注意する）

$y = x^2$ のような曲線を「　　　　」という。
この曲線は、「　」**軸**つまり「　　　　」について「　　　　」で、この対称となる直線を「　　　」という。
また、$x = 0$ のとき y は最小値 $y = 0$ をとる。　この点（$0, 0$）を放物線の「　　　　」という。

(2) $y = ax^2$

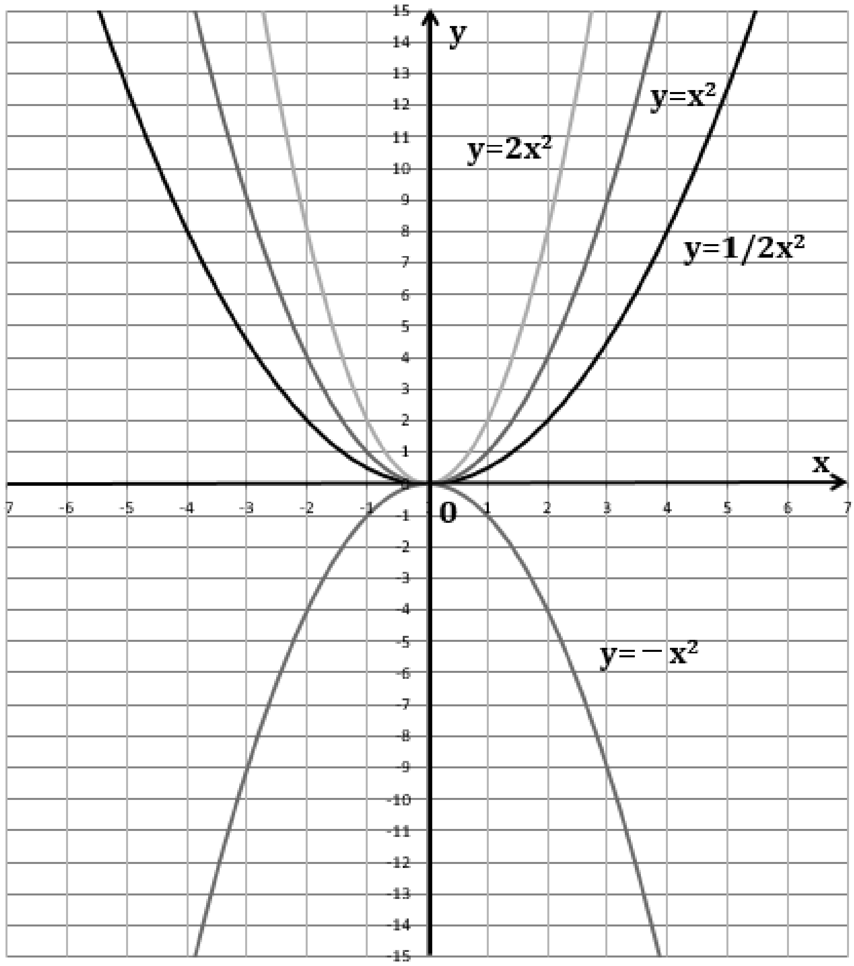
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$2x^2$							
$\frac{1}{2}x^2$							
$-x^2$							

【$y = ax^2$ のグラフの特徴】

・必ず【　　　　】を通りその原点が【　　　　】である。
・【　　】**軸**について【　　　　】である。
・$a > 0$ のときは【　　　】に開き、$a < 0$ のときは【　　　】に開く。
・a の絶対値が【　　　　　】ほどグラフの開きが【　　　　　】。
・$y = ax^2$ のグラフと $y = -ax^2$ のグラフは【　　】**軸**について【　　　　】である。

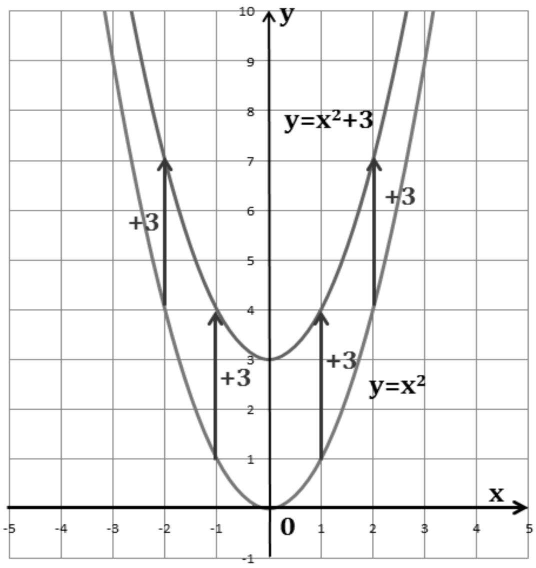
「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院



(3) $\mathrm{y} = x^2 + c$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 3$							



【$\mathrm{y} = x^2 + c$ のグラフの特徴】

　$\mathrm{y} = x^2 + c$ のグラフは、$\mathrm{y} = x^2$ のグラフを

【　　】**軸**方向に【　　】だけ平行移動したもの。

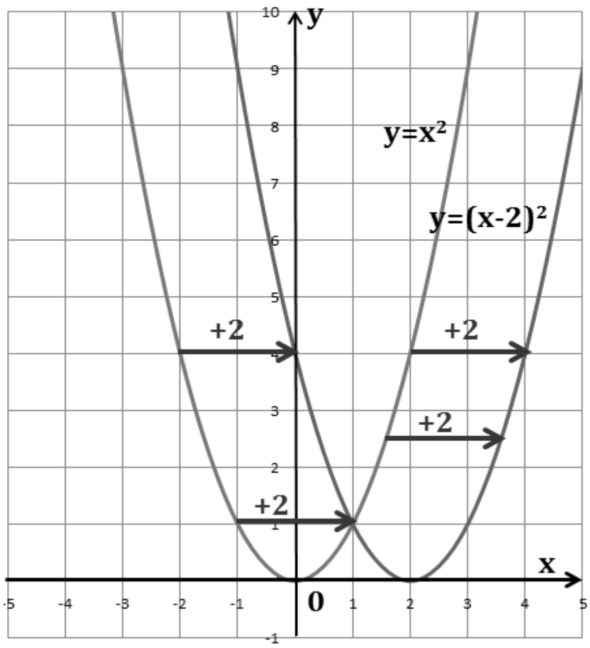
　軸は直線【　　　　】、頂点は【　　　　】

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

(4) $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2$

x	−1	0	1	2	3	4	5
x^2	1	0	1	4	9	16	25
$(x-2)^2$							



【$\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2$ のグラフの特徴】

$\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2$ のグラフは、$\mathbf{y}=\boldsymbol{x}^2$ のグラフを【　　】軸方向に【　　】だけ平行移動したもの。

軸は直線【　　　　】、頂点は【　　　　】

【練習問題 1】次の関数の軸と頂点の座標と y 切片を求めなさい。

① $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^2$

軸　　　　　**頂点**　　　　　**y 切片**

② $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2$

軸　　　　　**頂点**　　　　　**y 切片**

③ $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2$

軸　　　　　**頂点**　　　　　**y 切片**

(5) まとめ

$\mathbf{y}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{c}$ のグラフ

$\mathbf{y}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{c}$ のグラフは、【　　　　　】のグラフを【　　】軸方向に【　　】、【　　】軸方向に【　　】平行移動した放物線。

軸は直線【　　　　】、頂点の座標は【　　　　】

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

【練習問題 2】次の関数の軸と頂点の座標と $\mathbf{y}$ 切片を求めなさい。

① $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}$

軸　　　　　**頂点**　　　　　$\mathbf{y}$ 切片

② $\mathbf{y}=\mathbf{2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$

軸　　　　　**頂点**　　　　　$\mathbf{y}$ 切片

③ $\mathbf{y}=-(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}$

軸　　　　　**頂点**　　　　　$\mathbf{y}$ 切片

【練習問題 3】次の関数のグラフを描きなさい。

⑴ $\mathbf{y}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$　⑵ $\mathbf{y}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}$　⑶ $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$　⑷ $\mathbf{y}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}$

３．２次関数の平方完成

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描くには、$y = (x + ■)^2 + \Delta$ の形に変形します。このような変形を「 **平方完成** 」といいます。

【例】

$y = 2x^2 - 4x - 1$ を平方完成すると、

$$
\begin{aligned}
y = 2x^2 - 4x - 1 &= 2(x^2 - 2x) - 1 && \leftarrow \ x^2 \text{ の係数 } 2 \text{ で } x^2, x \text{ をくくる} \\
&= 2\{x^2 - 2x + (-1)^2 - (-1)^2\} - 1 && \leftarrow \ x \text{ の係数 } -2 \text{ を } 2 \text{ で割ってそれを} \\
& && \quad 2\text{ 乗した } (-1)^2 \text{ を足してすぐ引く} \\
&= 2\{(x-1)^2 - 1\} - 1 && \leftarrow \ x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \\
&= 2(x-1)^2 - 2 - 1 = 2(x-1)^2 - 3 && \leftarrow \ \text{式を整理する}
\end{aligned}
$$

【練習問題 4】次の関数の軸と頂点の座標と y 切片を求めなさい。

① $y = x^2 - 4x + 3$

軸　　　　**頂点**

y 切片

② $y = x^2 + 6x + 6$

軸　　　　**頂点**

y 切片

③ $y = x^2 - 2x + 3$

軸　　　　**頂点**

y 切片

④ $y = 2x^2 - 4x + 3$

軸　　　　**頂点**

y 切片

⑤ $y = -x^2 + 4x + 3$

軸　　　　**頂点**

y 切片

⑥ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

軸　　　　**頂点**

y 切片

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

◆グラフのプログラム

1．$y = x^2$ のグラフをプログラムで描いてみましょう。

(0) [C_学籍番号_氏名]フォルダをコピーし、自分の学籍番号氏名に変更する。

(1) ソリューション[MathCalc]のプロジェクト[MathGraph00]の[MyDrawClass.cs]を変更して、$y = x^2$ のグラフを描きましょう。

ヒント！

グラフが表示されなかったら、

①x の増分(step)の変更

②x・y に倍率(scaleX・scaleY)を掛ける

③x の初期値の変更

をやってみましょう。

(2) 確認できたら、以下のグラフで表示してみましょう。

① $\mathbf{y} = -x^2$

② $\mathbf{y} = x^2 + 800$

③ $\mathbf{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

④ $\mathbf{y} = 2x^2 - 3x - 800$

⑤ $\mathbf{y} = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 800$

◆2 次関数のグラフと方程式

1．実数解の個数の判定

方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式の根号の中身 $b^2 - 4ac$ を「　　　　　　」といい、「　　　」で表します。2 次方程式の解の個数は判別式 D のの符号$(+, 0, -)$で決まります。

①$D > 0$ のとき、解は、$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ の 2 個

②$D = 0$ のとき、$\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ より、解は、$x = \dfrac{-b}{2a}$ の 1 個

③$D < 0$ のとき、解の公式の根号の中は負になるので、実数解はない。

$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数

$D = b^2 - 4ac$ として、

D 　　0 のとき、実数解は　　個

D 　　0 のとき、実数解は　　個

D 　　0 のとき、実数解は

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

【例題】

2 次方程式 $x^2+5x+6=0$ の判別式の符号を調べ、実数解の個数を求めなさい。

$D=5^2-4\times1\times6=25-24=1>0$　解は 2 個

ちなみに、解は、$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{1}}{2\times1}=\dfrac{-5\pm1}{2}=-2,-3$

【練習問題 5】

判別式 D の符号を調べ、実数解の個数を求めなさい。

(1) $2x^2-6x+3=0$

(2) $4x^2-12x+9=0$

(3) $3x^2-5x+3=0$

２．2 次関数のグラフと方程式

$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の交点は次の連立方程式の解です。

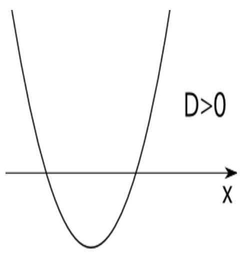
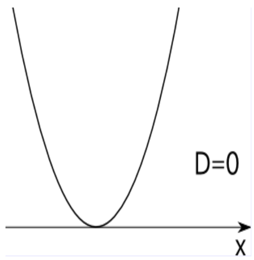
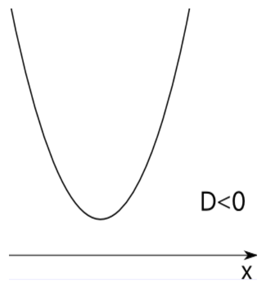
$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c & ① \\ y=0 & ② \end{cases}$$

①②から y を消去すると、$ax^2+bx+c=0$

この方程式の解は、①のグラフと x 軸の交点の x 座標です。

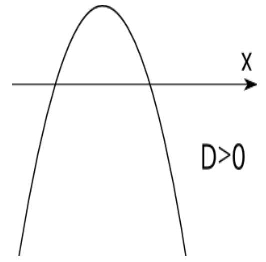
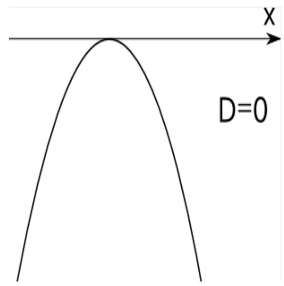
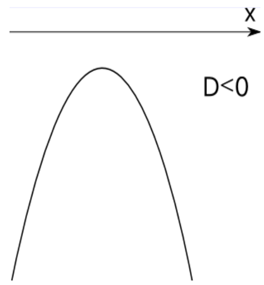
３．2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

$a>0$ のとき、$y=ax^2+bx+c$ のグラフとx 軸との位置関係は、**3 通り考えられます。**

		
x 軸と 2 点で交わる	**x 軸と 1 点で接する**	**x 軸と交わらない**
$ax^2+bx+c=0$ の 実数解は 2 個	**$ax^2+bx+c=0$ の 実数解は 1 個**	**$ax^2+bx+c=0$ の 実数解はない**
$a>0$　$D>0$	$a>0$　$D=0$	$a>0$　$D<0$

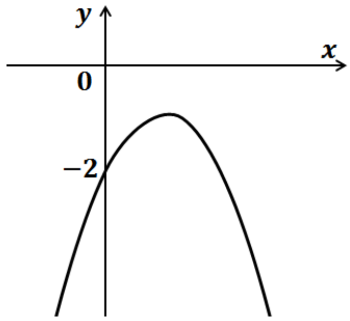
「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

$a<0$ のときも、$y=ax^2+bx+c$ のグラフとx 軸との位置関係は、3 通り考えられます。

		
x 軸と 2 点で交わる	**x 軸と 1 点で接する**	**x 軸と交わらない**
$ax^2+bx+c=0$ の 実数解は 2 個	**$ax^2+bx+c=0$ の 実数解は 1 個**	**$ax^2+bx+c=0$ の 実数解はない**
$a<0\quad D>0$	$a<0\quad D=0$	$a<0\quad D<0$

【例題 1】

$y=-2x^2+3x-2$ のグラフとx 軸の位置関係を調べなさい。



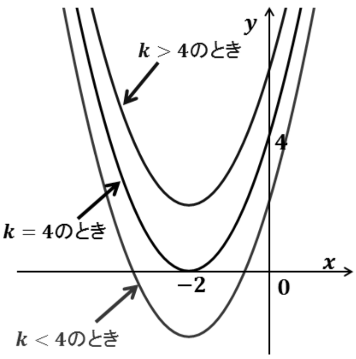
$y=ax^2+bx+c$ とおくと、$a<0$ である。

また、判別式の符号は、$D=3^2-4\times(-2)\times(-2)=9-16$
$=-7<0$

x 軸とは交わらない。y 切片は、$(0,-2)$

【例題 2】

方程式　$x^2+4x+k=0$ が実数解を持つような k の値の範囲を求めなさい。



判別式 $D=4^2-4\times1\times k=16-4k$ が正か 0 のとき、

実数解を持つ。

$16-4k\geqq0$ を満たす k の範囲は $k\leqq4$

方程式　$x^2+4x+k=0$ が実数解を持つには、

$k\leqq4$ のとき

【練習問題 6】

(1) 方程式 $x^2-6x+k=0$ が実数解を持つような k の範囲を求めなさい

(2) 方程式 $x^2+5x+k=0$ が異なる 2 つの実数解を持つような k の範囲を求めなさい

「　二次方程式と二次関数のグラフ　」

東京情報クリエイター工学院

【MyDrawClass.cs　プログラム例】

```
    class MyDrawClass:Draws
   {
      Vector2 p0;  //座標
      float x, y, a, b,c, step;  //修正
      float scaleX, scaleY; //倍率

      public MyDrawClass() { }

      public void graph()
      {
          x = -140.0f;  //x の初期値
          a = 1.0f;
          b = 0.0f;
          c = 0.0f;    //追加
          step = 4.0f; //x の増分
          scaleX = 1.0f;   //x の倍率
          scaleY = 0.01f;  //y の倍率

          Clear();

          //グラフの描画　倍率を掛ける
          while (x * scaleX < 200 && y * scaleY < 200)
          {
              y = a * x * x + b * x + c;    //直線の式
              p0 = new Vector2(x * scaleX, y * scaleY);
              Dot(p0);
              Render();
              x = x + step;  //x の値を step 増加
          }
      }
```