指数と無理数の計算

◆指数

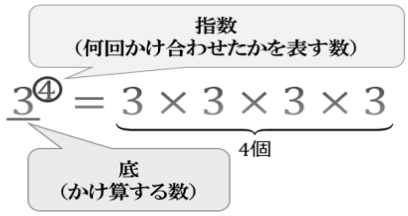
「 $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{n}$ 乗 」の形で表される数 $\boldsymbol{a^n}$ のことを「 $\boldsymbol{a}$ のべき乗」といいます。

$\boldsymbol{a^n}$ の定義

正の整数	$\boldsymbol{a^n = a \times a \times \cdots \times a}$	$\boldsymbol{2^3 = 2 \times 2 \times 2}$
0	$\boldsymbol{a^0 = 1}$	$\boldsymbol{2^0 = 1}$
負の整数	$\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$	$\boldsymbol{2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2\times2\times2}}$

1．$\boldsymbol{n}$ が自然数（正の整数）

$\boldsymbol{n}$ が自然数（正の整数）のときの $\boldsymbol{a^n}$ は、「 **$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{n}$ 回掛け合わせた値** 」と定義されます。



3 は「 底 」といって、「繰り返し掛け算する数」
4 は「 指数 」といって、「何回掛け合わせたかを表す数」

$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$

−5を2回掛ける

負の数が絡んだ累乗の計算をするときは、指数がどこにかかっているかに注目してみてください。

$$-5^2 = -(5 \times 5) = -25$$

5を2回掛けた値のマイナス

2．$\boldsymbol{n}$ が 0

$\boldsymbol{n}$ が 0 のときは、$\boldsymbol{a^0 = 1}$ と定義されます。これは、「 $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{0}$ 回かけ合わせた値」と考えると意味が分かりにくいですが、$\boldsymbol{4}$ 乗 → $\boldsymbol{3}$ 乗 → $\boldsymbol{2}$ 乗 → $\boldsymbol{1}$ 乗 と指数が $\boldsymbol{1}$ つ減るにつれて値が $\boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$ 倍されているのに注目すると分かりやすいです。

$$\begin{aligned} a^4 &= a \times a \times a \times a \\ a^3 &= a \times a \times a \\ a^2 &= a \times a \\ a^1 &= a \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

a倍　a倍　a倍

$\frac{1}{a}$倍　$\frac{1}{a}$倍　$\frac{1}{a}$倍　$\frac{1}{a}$倍

3．$\boldsymbol{n}$ が負の数

$\boldsymbol{n}$ が負の整数のときは、$\boldsymbol{a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}}$ と定義されます。これも、「 $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{-2}$ 回かけ合わせた値」 と考えると意味が分かりにくいですが、指数が $\boldsymbol{1}$ つ減るにつれて値が $\boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$ 倍されているのに注目すると分かりやすいです。

$$\begin{aligned} a^2 &= a \times a \\ a^1 &= a \\ a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ a^{-2} &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \\ a^{-3} &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \end{aligned}$$

a倍

$\frac{1}{a}$倍　$\frac{1}{a}$倍　$\frac{1}{a}$倍　$\frac{1}{a}$倍

「　指数と無理数の計算　」

東京情報クリエイター工学院

４．指数計算の公式

$a^m \times a^n =$	$a^m \div a^n =$	$(a^m)^n =$
$(a \times b)^m =$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m =$	

⑴べき乗同士の掛け算

$2^3 \times 2^4$ を計算する方法は、2 通りあります。1 つは、$(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$ と乗数をばらして計算する方法。もう一つは、公式を用いて計算する方法です。今回のように、ばらしても簡単に計算できる場合はいいですが、数が大きくなると、計算するのも大変です。その時便利なのが公式です。**「べき乗同士の掛け算は、指数部分を足し算」**します。

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$

⑵べき乗同士の割り算

「べき乗同士の割り算は、指数部分を引き算」します。例えば、

$$3^5 \div 3^3 = (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \div (3 \times 3 \times 3) = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3} = 3^2 = 3^{5-3}$$

⑶べき乗のべき乗

$(a^m)^n$ の意味は、「 m 回かけたもの」を「 n 回かける」ということです。この場合は、**「指数部分を掛け算」**します。つまり、「 m 回かけたもの」を「 n 回かける」と mn 掛けたものになるということです。例えば、

$$(4^2)^3 = (4 \times 4)^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^6 = 4^{2\times3}$$

⑷掛け算のべき乗

「掛け算のべき乗は、べき乗の掛け算」になります。つまり、掛け算して m 乗したものは、m 乗して掛け算したものに等しくなるということです。例えば、

$$(4 \times 5)^3 = (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5) = (4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5) = 4^3 5^3$$

⑸割り算のべき乗

「割り算のべき乗は、べき乗の割り算」になります。これも、割り算して m 乗したものは、m 乗して割り算したものに等しくなるということです。例えば、

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5\times5\times5}{4\times4\times4} = \frac{5^3}{4^3}$$

【練習問題 1】

次の計算をしなさい。

⑴ $3^3 =$

⑵ $(-3)^3 =$

⑶ $3^{-3} =$

⑷ $365^0 =$

(5) $2^3 2^7 =$

(6) $(3^2)^3 =$

(7) $5^{100} \div 5^{97} =$

(8) $3a^2b^5 \times 10a^3b^5 =$

(9) $(-x)^4 \times (-x^2) =$

(10) $(-3x^3y^2)^3 =$

◆無理数とその計算

1．無理数とは？

a, b を整数としたとき、「**2 つの整数 a, b を使って、$\frac{a}{b}$ と表せる数**」のことを、「 **有理数** 」といいます。これに対して、「**2 つの整数 a, b を使って、$\frac{a}{b}$ と表すことが<u>できない</u>数**」のことを、「 **無理数** 」といいます。

【例】

有理数　：　$5 = \frac{5}{1}$　　$0.3 = \frac{3}{10}$　　$-\frac{1}{7}$

無理数　：　$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.4142\cdots$　　$\pi \fallingdotseq 3.1415\cdots$　　$e = 2.7182$

2．平方根とは？

2 乗して a になる数を「 **a の平方根** 」といいます。「16 の平方根は？という問題では 「2 乗したら 16 になる数はいくつか？」を考えると分かりやすいでしょう。

2 乗したら 16 になる数は、「4 と－4」（まとめて±4 と書く）の２つがありますね。このとき、+4 を「16 の**正の平方根**」、－4 を「16 の**負の平方根**」といいます。
平方根は、整数だけではありません。例えば、2 の平方根は、$\pm 1.42421356\cdots$ と無限に続く数です。こういう場合、「 $\sqrt{\ }$ 」で表される記号を使って、「**2 の平方根は $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$**（まとめて$\pm\sqrt{2}$)」と表記されます。「 $\sqrt{\ }$ 」の記号は「 根号(ルート) 」と呼びます。

【例】

4 の平方根は、「 2 」と「 －2 」まとめて書くと「 ±2 」
5 の平方根は、「 $\sqrt{5}$ 」と「 $-\sqrt{5}$ 」まとめて書くと「 $\pm\sqrt{5}$ 」

【練習問題 2】

次の数の平方根を求めよ。

(1) 9　　　　(2) 121

(3) x^4　　　　(4) a^2x^2

「　指数と無理数の計算　」

東京情報クリエイター工学院

３．平方根の計算

(1) ルートの中身を簡単にする

$$a > 0 \ \ b > 0 \qquad \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

分数を使って数字を表すときは、$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ のようにできるだけ約分をしますよね。それと同じで、平方根を使って数を表すときはルートの中身を可能な限り小さな自然数にします。

【例】

$\sqrt{28}$ のルートの中身を可能な限り簡単にする

$\sqrt{28} = \sqrt{2 \times 2 \times 7} = 2\sqrt{7}$　　← **ルートの中身は素因数分解**する

(2) 平方根の足し算・引き算

平方根の足し算と引き算は、「**<u>ルートの中身が同じ数を一つに</u>**」まとめます。パッと見は中身が異なる場合でも、ルートの中身を簡単にすると同じになるケースもあるので、ルートの中身を可能な限り簡単にしてから足し算・引き算を行います。

【例】

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$　→　ルートの中身が同じなので１つにまとめる　→　$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$　→　ルートの中身が異なるのでそのままでOK!

$\sqrt{50} + \sqrt{18}$　→　まずは、ルートの中身を簡単に！

→　$\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 5 \times 5} + \sqrt{2 \times 3 \times 3} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

(3) 平方根の掛け算・割り算

平方根のかけ算と割り算は、ルートの中身をそのまま掛け算・割り算します。

【例】

$$5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = (5 \times 3)\sqrt{2 \times 2} = 15 \times 2 = 30$$
$$4\sqrt{3} \times 2\sqrt{5} = (4 \times 2)\sqrt{3 \times 5} = 8\sqrt{15}$$
$$4\sqrt{6} \div 2\sqrt{2} = (4 \div 2)\sqrt{6 \div 2} = 2\sqrt{3}$$

(4) 分母を有利化する

分数の分母に平方根がある場合には、計算しやすくするために分母と分子に同じ数をかけることで分母に平方根を含まない形に変形します。これを分母の有利化といいます。

【例】

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

平方根の計算のまとめ

(1)　平方根の中身は可能な限り簡単にする

(2)　平方根の足し算・引き算はルートの中身が同じ数を１つにまとめる

(3)　平方根のかけ算・割り算はルートの中身をそのまま計算する

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

(4) 分母に平方根があるときは有利化する

「　指数と無理数の計算　」

東京情報クリエイター工学院

【練習問題 3】

１．次の計算をしなさい。

①$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=$　　②$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=$

③$\sqrt{5}\times\sqrt{3}=$　　④$3\sqrt{2}\div\sqrt{2}=$

⑤$\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+5\sqrt{3}=$

⑥$\sqrt{4}+2\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}=$

⑦$\sqrt{3}\times\sqrt{15}=$

２．分母を有理化しなさい。

①$\frac{1}{\sqrt{2}}=$

②$\frac{3}{2\sqrt{3}}=$

③$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=$

④$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=$

【演習問題１】

以下の計算をプログラムを作成して計算しなさい。

ソリューション「Calculation」の中に新しいプロジェクト「Pro04」(コンソールアプリ)を作成し、そこで行うこと。　なお、$\sqrt{2}$ は、(float)Math.Sqrt(2)　で求めることができます。

【問題】

①　$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4.242\cdots$　　②　$5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5.196\cdots$

③　$\sqrt{5}\times\sqrt{3}=3.872\cdots$　　④　$3\sqrt{2}\div\sqrt{2}=3$

【演習問題２】

１．次の計算をしなさい。分母は有理化すること。

①$\sqrt{72}-\sqrt{54}-\sqrt{32}+\sqrt{6}$

②$\sqrt{5}\left(\sqrt{20}-\sqrt{15}\right)$

③$\left(\sqrt{98}-\sqrt{18}\right)\div\sqrt{8}$

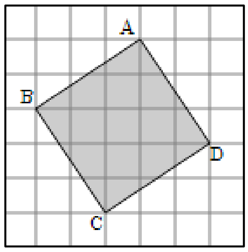
④$2\sqrt{5}\left(7-\sqrt{3}\right)+3\sqrt{5}$

⑤$\dfrac{4}{\sqrt{24}}$

⑥$\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{18}-\dfrac{5}{\sqrt{50}}$

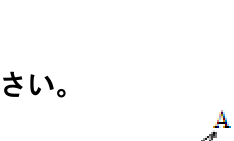
⑦$\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\div\dfrac{9\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

２．図の四角形 ABCD は正方形です。(1 メモリを 1cm とします)
①この正方形 ABCD の面積を求めなさい。

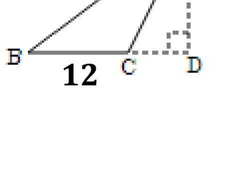


②この正方形 ABCD の一辺の長さを求めなさい。

３．$AB=\sqrt{5}cm$、 $BC=2cm$とき、ACの長さを求めなさい。
ヒント！　三平方の定理
a と b が直角三角形の直角を挟む 2 辺の長さ、c が斜辺の長さとするとき、$a^2+b^2=c^2$



４．右の図で、$AB=25$、 $AD=15$、$BC=12$のとき、ACの長さを求めなさい。



「　指数と無理数の計算　」

東京情報クリエイター工学院

【演習問題１　Ｐｒｏ０４　プログラム例】

```
static void Main(string[] args)
{
    float ans;

    ans = (float)Math.Sqrt(2) + 2 * (float)Math.Sqrt(2);
    Console.WriteLine("√2+2√2=" + ans);

    ans = 5 * (float)Math.Sqrt(3) - 2 * (float)Math.Sqrt(3);
    Console.WriteLine("5√3-2√3=" + ans);

    ans = (float)Math.Sqrt(5) * (float)Math.Sqrt(3);
    Console.WriteLine("√5*√3=" + ans);

    ans = 3 * (float)Math.Sqrt(2) / (float)Math.Sqrt(2);
    Console.WriteLine("3√2/√2=" + ans);

    float AB = (float)Math.Sqrt(5);
    float BC = 2.0f;
    float AC = (float)Math.Sqrt(AB * AB - BC * BC);
    Console.WriteLine("AC=" + AC);
}
```

【演習問題２　解答】

１．次の計算をしなさい。分母は有理化すること。

①$\sqrt{72}-\sqrt{54}-\sqrt{32}+\sqrt{6}$

$$=\sqrt{6^2\times 2}-\sqrt{3^2\times 6}-\sqrt{4^2\times 2}+\sqrt{6}=6\sqrt{2}-3\sqrt{6}-4\sqrt{2}+\sqrt{6}=2\sqrt{2}-2\sqrt{6}$$

②$\sqrt{5}\left(\sqrt{20}-\sqrt{15}\right)=\sqrt{100}-\sqrt{75}=\sqrt{10^2}-\sqrt{5^2\times 3}=10-5\sqrt{3}$

③$\left(\sqrt{98}-\sqrt{18}\right)\div\sqrt{8}$

$$=\left(\sqrt{7^2\times 2}-\sqrt{3^2\times 2}\right)\div\sqrt{2^2\times 2}=\left(7\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\div 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}=2$$

④$2\sqrt{5}\left(7-\sqrt{3}\right)+3\sqrt{5}$

$$=2\times 7\sqrt{5}-2\sqrt{5\times 3}+3\sqrt{5}=14\sqrt{5}-2\sqrt{15}+3\sqrt{5}=17\sqrt{5}-2\sqrt{15}$$

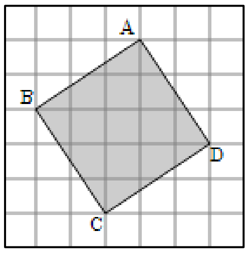
⑤$\dfrac{4}{\sqrt{24}}=\dfrac{4}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

⑥$\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{18}-\dfrac{5}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{3^2\times 2}-\dfrac{5}{\sqrt{5^2\times 2}}$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

⑦$\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\div\dfrac{9\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\times\dfrac{10}{9\sqrt{2}}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\times 10\times 3\times\sqrt{3}}{5\times 9\times 2}=2\sqrt{3}$

２．図の四角形 ABCD は正方形です。(1 メモリを 1cm とします)

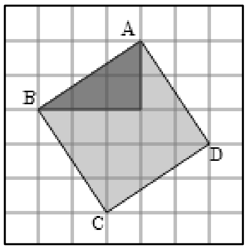


①この正方形 ABCD の面積を求めなさい。

図の赤い三角形の面積は 3×2÷2=3

同じものが全部で 4 つ。中央の正方形の面積は 1 なので

正方形 ABCD の面積は 3×4+1=13

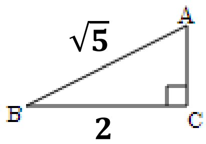


②この正方形 ABCD の一辺の長さを求めなさい。

正方形 ABCD の面積が 13 なのでその辺を　とすると

$\boldsymbol{x^2 = 13 \quad x = \pm\sqrt{13} \quad x > 0 \ \ x = \sqrt{13}}$

３．$AB = \sqrt{5}cm$、 $BC = 2cm$とき、ACの長さを求めなさい。

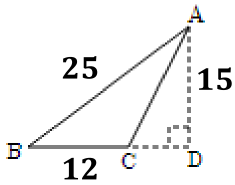


$AB^2 = BC^2 + AC^2$ より、

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

$AC = 1$cm

４．右の図で、 $AB = 25$、 $AD = 15$、$BC = 12$のとき、ACの長さを求めなさい。



$AB^2 = AD^2 + BD^2$ より、

$25^2 = 15^2 + BD^2 \quad BD^2 = 625 - 225 = 400 \quad BD = 20$

$CD = BD - BC = 20 - 12 = 8$

$AC^2 = CD^2 + AD^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \quad AC = 17$

◆発展問題

西暦で入力された年月日を和暦表示に変換するプログラムを作成しなさい。
なお、西暦を和暦の対応表は以下の通りです。

元号	期間
明治	1868/09/08 ～ 1912/07/29
大正	1912/07/30 ～ 1926/12/24
昭和	1926/12/25 ～ 1989/01/07
平成	1989/01/08 ～ 2019/04/30
令和	2019/05/01 ～

ソリューション「Calculation」の中に新しいプロジェクト「Wareki」を作成し、そこで行うこと。

【演習問題１　Wareki　プログラム例】

```
static void Main(string[] args)
{
    string str, wareki, nen, tuki, hi;
    int year, month, day;
    Console.Write("西暦の年月日を入力(例：20160520) : ");
    str = Console.ReadLine();          //西暦入力
    int seireki = Int32.Parse(str);      //西暦を数値型に変換

    day = seireki % 100;                        //「日」の取り出し
    month = (seireki % 10000 - day) / 100;      //「月」の取り出し

    tuki = month.ToString() + "月";             //「月」を文字型に変換
    hi = day.ToString() + "日";                 //「日」を文字型に変換

    if (seireki < 18680908)       //1968 年 09 月 08 日以前の処理
    {
        wareki = "明治以前";
        nen = "";
        tuki = "";
        hi = "";
    }
    else if (seireki < 19120730)    //明治：1868 年 09 月 08 日～1912 年 07 月 29 日の処理
    {
        wareki = "明治";
        year = seireki / 10000 - 1900 + 33;   //明治の年は「西暦下２桁＋33」
        nen = year.ToString() + "年";
    }
    else if (seireki < 19261225)   //大正：1912 年 07 月 30 日～1926 年 12 月 24 日の処理
    {
        wareki = "大正";
        year = seireki / 10000 - 1900 - 11;   //大正の年は「西暦下２桁－11」
        nen = year.ToString() + "年";
    }
    else if (seireki < 19890108)  //昭和：1926 年 12 月 25 日～1989 年 01 月 07 日の処理
    {
        wareki = "昭和";
        year = seireki / 10000 - 1900 - 25;   //昭和の年は「西暦下２桁－25」
        nen = year.ToString() + "年";
    }
```

```
        else  if(seireki<20190501)   //平成：1989年01月08日～2019年04月30日の処理
        {
            wareki = "平成";
            year = seireki / 10000 - 2000 + 12;  //平成の年は「西暦下2桁(西暦-2000)+12」
            nen = year.ToString() + "年";
        }
        else    //令和：2019年05月1日以降の処理
        {
            wareki = "令和";
            year = seireki / 10000 - 2000 - 18;  //令和の年は「西暦下2桁-18」
            nen = year.ToString() + "年";
        }
        Console.WriteLine("和暦 : " + wareki + nen + tuki + hi);
    }
```