

式の展開・因数分解

◆式の展開

「 展開 」とは、「 カッコを開く 」という意味です。カッコを開くときは**分配法則**を使います。

分配法則

$$a(b + c) = ab + ac \quad (a + b)c = ac + bc$$

【例】

- (1) $2(a + 3)$ のカッコをはずす場合

$$2(a + 3) \quad 2 \text{ を } a \text{ と } +3 \text{ の両方に掛け算する}$$

- (2) $(a + 2)(b + 1)$ を展開する場合

$$(a + 2)(b + 1) \quad a \text{ を } b \text{ と } +1 \text{ の両方に、} +2 \text{ を } b \text{ と } +1 \text{ の両方にそれぞれ掛け算する}$$

展開には公式もありますが基本は分配法則です。まずは分配法則をつかって確実に展開できるようにしてから公式を覚えましょう。

乗法公式

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

【例】

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$(x + 3)(x - 2) = x^2 + (3 - 2)x + 3 \times (-2) = x^2 + x - 6$$

$$(2x + 1)(3x + 2) = 2 \times 3 \times x^2 + (2 \times 2 + 1 \times 3)x + 1 \times 2 = 6x^2 + 7x + 2$$

【練習問題1】

次の式を展開しなさい。

(1) $8(y - 5)$

(2) $-3(x - 6)$

(3) $(a + 4)(b - 1)$

(4) $(x + 3)(x - 2)$

(5) $(2x + 1)^2$

(6) $(3x - 4)^2$

(7) $(x + 3)(x - 3)$

(8) $(x + 3)(x + 5)$

(9) $(2x + 3)(5x + 4)$

(10) $(3x + 2)(4x - 3)$

◆因数分解

「 因数分解 」とは「 展開の逆 」をすることです。

$$\text{展開} \quad a(x + y) \rightarrow ax + ay \quad \text{因数分解} \quad ax + ay \rightarrow a(x + y)$$

1. 共通因数をくくりだす

展開とは分配法則でかっこを開くことでした。この展開を意識して因数分解します。

$a(x + y)$ を展開するときは a を x と y の両方にかけて $ax + ay$ としました。

$ax + ay$ を因数分解するときにはすべての項に a がかけられていることに着目し、 $a(x + y)$ と因数分解します。「各項に共通して含まれる文字や式(共通因数)をくくりだす」ことで因数分解するわけです。

【例】

$7a - 7b = 7(a - b)$

「 7 」が共通因数

$2x^2 - 18x = 2x(x - 9)$

$2x^2 = 2x \times x \quad -18x = 2x \times (-9)$

「 2x 」が共通因数

「 2 」だけでも「 x 」
だけでもダメ！

2. 乗法公式を逆にする

乗法公式の、和や差の2乗、和と差の積の公式を逆にすると因数分解の公式になります。

因数分解の公式

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

【例】

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \quad x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \quad x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

$2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$

★因数の1つが「0」になるような x をもとの式に代入して、正しいかチェックしましょう。

例えば、 $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$ と因数分解できたとき、 $2x^2 - 12x + 18$ に $x = 3$ を代入して、「0」になるかチェックする。

【練習問題 2】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $3xy + 4xz$

(2) $2x^2 - 5xy$

(3) $x^2 + 10x + 25$

(4) $4x^2 + 4x + 1$

(5) $x^2 - 6x + 9$

(6) $16x^2 - 8x + 1$

(7) $x^2 - 81$

(8) $36x^2 - 49$

3. 和と積の値から 2 数を求める

乗法公式 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ を逆に使って、 $x^2 + Ax + B$ を因数分解するには、積が B 、和が A となる 2 つの数 a, b を見つける。

【例】 $x^2 + 5x + 6$ を因数分解することを考えます。

和が「5」積が「6」になる 2 つの数は「2」と「3」

よって、 $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

4. たすきがけの因数分解

x^2 の係数 A が 1 以外の場合

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + b)(cx + d)$$

のように因数分解できることがあります。

そのためには乗法公式

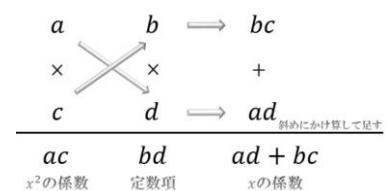
$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

を逆に使います。この方法を「たすきがけの因数分解」といいます。ここで、

$$ac = A \quad ad + bc = B \quad bd = C$$

なので、 A の約数 a, c および C の約数で b, d で $ad + bc = B$ となるものを見つめます。

たすきがけの図



【例】

$3x^2 - 7x + 2$ を因数分解することを考えます。

3 の約数 : $1 \cdot 3 \cdot -1 \cdot -3$ 2 の約数 : $1 \cdot 2 \cdot -1 \cdot -2$

斜めにかけ算して足す

$\overset{a}{3}$	$\overset{b}{-1}$	$\Rightarrow -1$
\times	\times	$+$
$\overset{c}{1}$	$\overset{d}{-2}$	$\Rightarrow -6$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 3 2 -7 </div>		
x^2 の係数	定数項	x の係数

$$3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$$

【練習問題 3】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^2 + 5x + 4$

(2) $x^2 - x - 6$

(3) $x^2 - 10x + 16$

(4) $x^2 + 2x - 24$

(5) $7x^2 + 27x - 4$

(6) $6x^2 + 7x + 2$

(7) $3x^2 - 10x + 8$

(8) $10x^2 - 14x - 12$

◆式の展開と因数分解

★展開して整理

式の計算では、展開して整理する、という必要がよく起こります。カッコの前に数がある（掛け算）場合、カッコの中の式を展開してから、数を掛けると間違えにくいでしょう。

【例】

$(2x + 3)^2 - 3(x + 1)(x - 1)$ を展開して、整理しなさい。

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 - 3(x + 1)(x - 1) &= (4x^2 + 12x + 9) - 3(x^2 - 1) \\ &= 4x^2 + 12x + 9 + (-3) \cdot x^2 + (-3)(-1) \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 3x^2 + 3 = x^2 + 12x + 12\end{aligned}$$

★いろいろな因数分解

- ・ 共通因数をくくり出した後、さらに因数分解する
- ・ おきかえを使った因数分解
- ・ x の 2 乗・1 乗・0 乗の項ごとに分け、 x の 0 乗の項を y で因数分解し、
因数分解した結果を定数項と考え、たすきがけを行う

【例】

$$\begin{aligned}ax^2 + 7ax + 12a &= a(x^2 + 7x + 12) = a(x + 3)(x + 4) \\ (x + y)^2 + 3(x + y) - 10 \quad x + y = A \text{ と置くと} \\ A^2 + 3A - 10 &= (A + 5)(A - 2) \quad A \text{ を元に戻す } (x + y + 5)(x + y - 2) \\ 2x^2 + 3y^2 + 7xy + x - 7y - 6 &= 2x^2 + (7y + 1)x + (3y^2 - 7y - 6) \\ &= 2x^2 + (7y + 1)x + (y - 3)(3y + 2) = (2x + y - 3)(x + 3y + 2)\end{aligned}$$

◆発展問題

1. 次の式を展開しなさい。

(1) $(x + 2)^2 - (x + 5)(x - 3)$

(2) $(x + y - 1)(x + y + 5) - (x - y)^2$

(3) $(x + 5)(x - 7) + (x - 3)^2$

(4) $(x + 1)^2 + 2(x - 5)^2 - (3x + 1)(x - 5)$

(5) $(x + 1)^2 + (x - 2)^2$

$$(6) (x+2)^2 - 3(x+1)^2$$

$$(7) (x+6)^2 + (x+6)(x-6)$$

$$(8) (x+3)(x-2) + (x+1)(x+5)$$

$$(9) (x+6)(x+2) - (x+3)^2$$

$$(10) 4(x+2)(x-1) - 2(2x-1)^2$$

2. 因数分解しなさい。

$$(1) 7x^2 + 27x - 4$$

$$(2) 6x^2 + 7x + 2$$

$$(3) ax + 2a + x + 2$$

$$(4) x^2 + x - 110$$

$$(5) (x+y)^2 + 3(x+y) - 10$$

$$(6) (a + b)^2 - (x + y)^2$$

$$(7) x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$$

$$(8) x^3 + 2x + x^2 + 2$$

3. $x^2 + 15x + n$ を因数分解したら、 $(x + 5)(x + a)$ となった。 a, n の値を求めなさい。