行列（マトリックス）②

**■行列の掛け算（積）についての性質**

**◆　結合法則**

（１）実数との結合法則

のとき、

（2）行列どうしの結合法則

**◆**行列どうしの**分配法則**

（１）　のとき、

（2）

**◆　行列の掛け算は非可換です**

【　可換　】とは、演算の順番を変えても結果が変わらないことをいいます。

【　非可換　】とはその逆で、演算の順番を変えると結果も変わる可能性があります。

　と　　の結果は2つとも６になりますが、

行列とがあったとき、と　の結果は必ずしも同じとは限りません。

よって、

**◆　単位行列との掛け算**

単位行列との掛け算は【　可換　】です。

さらに単位行列との積は、もとの行列そのものになっています。

まとめると、以下の式が成り立ちます。



※どのサイズの正方行列でも成り立ちます

**■行ベクトル／列ベクトル**

**【　行ベクトル　】**とは

のように、成分を横方向に並べて書いたベクトルのことをいいます。

１行３列の行列ともいえます。

**【　列ベクトル　】**とは

のように、成分を縦方向に並べて書いたベクトルのことをいいます。

３行１列の行列ともいえます。

**◆　行列（マトリックス）の別解釈**

いま、列ベクトル があるとき、

この３つのベクトルを成分に持つ行ベクトルを考えます。

　となり、  
各成分の（）を外すと となり、行列の形となります。

行列はベクトルを成分に持つベクトルと解釈できそうです。

**◆行オーダー／列オーダー**

Unity（左手系）の行列データ型(Matrix3x3やMatrix4x4)は、成分を列オーダーでメモリに格納していきます。C言語の配列的に解釈すると、さきほどの行列はつぎのようになります。DirectX（左手系）は行オーダーで、OpenGL（右手系）は列オーダーです。

または

列オーダーの場合、ゲームエンジンやグラフィックスライブラリ（シェーダ含む）で行列の積を計算する場合は、ベクトルは列ベクトルとして扱います。

ベクトル、行列、積の結果をとしたとき、

以下のように、行列は左から掛けます（左から掛けないと計算できない）。

行オーダーの場合は、ベクトルは行ベクトルとして扱います。　ベクトル、

行列としたとき、行列は右から掛けます（右から掛けないと計算できない）。

※行／列オーダーが変わっただけで対応する成分の計算結果は変わらない

**【参考①】　実数との結合法則の証明**

“のとき、 ”を証明する。

とできるので

となる。

したがって

となり、行列の積の定義より

となる。また

となり、行列の積の定義より

となる。さらに

となり、行列の積の定義より

となる。　となった。

証明以上。

“”を証明する。

とする。　ここで行列の積の定義より,

となる。　よっては

となる。 これは

証明以上。

**【参考②】　行列どうしの分配法則の証明**

“のとき、 ”を証明する。

とする。　ここで

となる。　行列の積の定義より、

となる。　 より

したがって である。

証明以上。

“”を証明する。

とする。　ここで

となる。　行列の積の定義より、

となる。　 より

したがって である。

証明以上。

**【参考③】　単位行列の導出**

単位行列の定義は以下のとおり。

任意の正方行列に対して

となる行列を単位行列という。

の単位行列を導出してみる。 **≫**

任意の行列　とする。

単位行列の定義　より

となる。したがって、以下の連立方程式を解けばよい。

整理して

よって

となり、

また

となり、

以上より

単位行列

が導出された。　定義　についても同様に導出できる。

※3x3以上の正方行列についても同じ方法で導出できる