

---

## باسمه تعالی

این نوشته مربوط به پروژه‌های پایانی درس نرم‌افزار ریاضی است. همانطور که در کلاس گفته شد، پروژه‌های پایانی محدود به موارد آمده در این نوشته نیست. در صورتی که موضوع مناسبی (ترجیحاً مربوط به سایر درس‌های این نیم‌سال) در نظر دارید می‌توانید پروژه مربوط به آن را تعریف کنید و با هماهنگی قبلی، روی آن کار کنید.

از پروژه‌های پایانی در مجموع به ۶۰ امتیاز نیاز دارید. توجه کنید که هر پروژه باید مثال‌هایی برای بررسی درستی آن داشته باشد. بهتر است از دستورات خاص متلب برای نوشتن برنامه‌ها استفاده کنید. مثلاً در مواردی که امکان جایگزینی حلقه `for` با یک دستور متلب وجود دارد این کار را انجام دهید. همچنین، تعمیم مسأله‌ها، توضیحات مناسب برای کد (comments)، خوانایی کد و تابعی کردن راه‌حل مسأله امتیاز اضافی خواهد داشت.

- [1] Skiena, S. S., & Revilla, M. A. (2006). Programming challenges: The programming contest training manual. Springer Science & Business Media.
- [2] Andreescu, T., & Feng, Z. (2002). 102 combinatorial problems: from the training of the USA IMO team. Springer Science & Business Media.

## ۱ کنترل لامپ‌ها (۲۰ امتیاز)

تعداد  $N$  لامپ در یک ردیف قرار گرفتند. چهار کلید دو حالتی داریم که با فشار دادن آن‌ها بخشی از لامپ‌ها تغییر وضعیت می‌دهند (اگر روشن باشند خاموش می‌شوند و اگر خاموش باشند روشن می‌شوند). کلید شماره ۱ وضعیت همه لامپ‌ها، کلید شماره ۲ وضعیت لامپ‌های با شماره فرد، کلید شماره ۳ وضعیت لامپ‌های با شماره زوج و کلید شماره ۴ وضعیت لامپ‌های با شماره‌های ۱، ۴، ۷ و ... را تغییر می‌دهد. به راحتی ملاحظه می‌شود که برای یک وضعیت (از نظر روشنایی) داده شده برای لامپ‌ها، همه حالت‌های ممکن پس از فشار دادن کلیدها را می‌توان با در نظر گرفتن دو حالت برای هر کلید به دست آورد. بنابراین برای هر وضعیت اولیه داده شده برای لامپ‌ها تعداد  $2^4 = 16$  وضعیت جدید ممکن است حاصل شود. برنامه‌ای بنویسید که با دریافت وضعیت داده شده از لامپ‌ها در برداری مانند  $A$ ، تمام حالت‌های ممکن را تولید کند. سپس، با دریافت یک وضعیت دیگر مانند  $B$  تعیین کند که آیا می‌توان از وضعیت  $A$  با فشار دادن برخی کلیدها به وضعیت  $B$  رسید یا خیر. اگر این کار امکان‌پذیر است، اعلام کند کدام کلیدها را باید فشار دهیم.

هر وضعیت از لامپ‌ها با رشته‌ای از «\*» و «.» تعیین می‌شود که «\*» نشان‌دهنده لامپ روشن و «.» نشان‌دهنده لامپ خاموش است. برنامه شما باید تعدادی وضعیت اولیه و نهایی را از داخل فایل بخواند و برای هر وضعیت داده شده در یک فایل خروجی اگر امکان دارد از وضعیت اولیه به وضعیت نهایی رسید شماره کلیدهایی که باید فشار دهیم را تعیین کند و در غیر این صورت باید کلمه impossible را قرار دهد. قالب فایل ورودی به صورت زیر است: در خط اول آن تعداد لامپ‌ها در قالب یک عدد صحیح آمده است. در خط دوم تعداد وضعیت‌های اولیه/نهایی که در فایل آمده ذکر شده است. از خط سوم به بعد جفت‌هایی از وضعیت‌های اولیه/نهایی در دو خط پشت سرهم آمده‌اند. جفت وضعیت‌ها با یک خط خالی از هم جدا شده‌اند. نمونه‌ای از فایل ورودی را در ادامه ملاحظه می‌کنید

```
5
2
*..**
*..**
***.
*****
```

---

نمونه‌ای از فایل خروجی را در ادامه ملاحظه می‌کنید:

1 2  
impossible

## ۲ Waldorf کجاست؟ (۲۰ امتیاز)

یک جدول  $m$  در  $n$  از حروف انگلیسی و فهرستی از کلمات را در نظر بگیرید. هدف پیدا کردن مکان کلمات در این جدول است. بزرگی یا کوچکی حروف مهم نیست و کلمه ممکن است در هر یک از ۸ حالت افقی، عمودی و جهت‌های قطری قرار گرفته باشد.

برنامه شما یک فایل ورودی به نام `in.txt` حاوی جدول حروف و کلمات را می‌خواند. در خط اول این فایل دو عدد صحیح  $m$  و  $n$  که نشان‌دهنده ابعاد جدول هستند نوشته شده‌اند. در ادامه فایل جدول حروف آمده است. در خط بعد از تعداد کلمات با یک عدد صحیح نشان داده شده است. بعد از آن کلمات در سطرهاى جداگانه آمده‌اند.

برنامه شما بعد از یافتن مکان هر یک از کلمات در جدول، آن‌ها را در یک فایل خروجی به نام `out.txt` قرار می‌دهد. در این فایل ابتدا کلمه و سپس شماره سطر و ستون حرف اول آن در جدول حروف نوشته می‌شود. در صورتی که کلمه در جدول وجود نداشته باشد به جای سطر و ستون  $0\ 0$  مقابل آن نوشته شود.

نمونه فایل ورودی

نمونه فایل خروجی

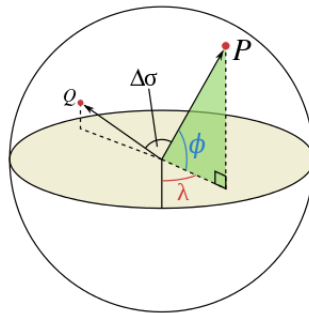
8 11	Waldorf 2 5
abcDEFGhigg	Bambi 2 3
hEbkWalDork	Betty 1 2
FtyAwaldORm	Dagbert 7 8
FtsimrLqsrc	
byoArBeDeyv	
Klcbqwikomk	
strEBGadhrb	
yUiqlxcnBjff	
4	
Waldorf	
Bambi	
Betty	
Dagbert	

### ۳ فاصله شهرهای دنیا (۲۰ امتیاز)

در فایل اکسل پیوست، اطلاعات مربوط به بیش از ۱۵۰۰۰ شهر دنیا آمده است. این اطلاعات شامل نام شهر (city\_name)، طول و عرض جغرافیایی برحسب درجه (lat و lng) و نام کشور (country) است. فاصله دو نقطه روی کره زمین را نمی‌توان با استفاده از رابطه فاصله اقلیدسی محاسبه کرد. بلکه برای محاسبه آن از فاصله ارتودرومیک استفاده می‌شود. تعریف این فاصله عبارت است از کوتاهترین فاصله بین دو نقطه روی پوسته یک کره. به بیان دقیق‌تر اگر  $(\lambda_1, \phi_1)$  و  $(\lambda_2, \phi_2)$  طول و عرض جغرافیایی دو نقطه برحسب رادیان روی کره زمین باشند، آنگاه زاویه مرکزی بین آن‌ها برحسب رادیان از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\Delta\sigma = \arccos(\sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\Delta\lambda)),$$

که در آن  $\Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2|$ . سپس با استفاده از زاویه مرکزی فاصله میان دو نقطه از رابطه  $d = r\Delta\sigma$  به دست می‌آید که در آن  $r = ۶۳۷۱\text{km}$  شعاع کره زمین است. شکل زیر را ملاحظه کنید



زاویه مرکزی بین دو نقطه  $P$  و  $Q$ .

برنامه شما باید نام‌های مربوط به تعدادی شهر را از یک فایل ورودی بخواند. سپس با استفاده از طول و عرض جغرافیایی داده شده در فایل پیوست برای آن شهرها، در یک فایل اکسل دیگر جدول مربوط به فواصل دو به دو دوی آن‌ها را تولید کند. مثلاً اگر فایل ورودی شامل نام‌های زیر باشد

Tehran  
Karachi  
Dallas

برنامه شما فایل اکسلی حاوی جدول زیر تولید کند

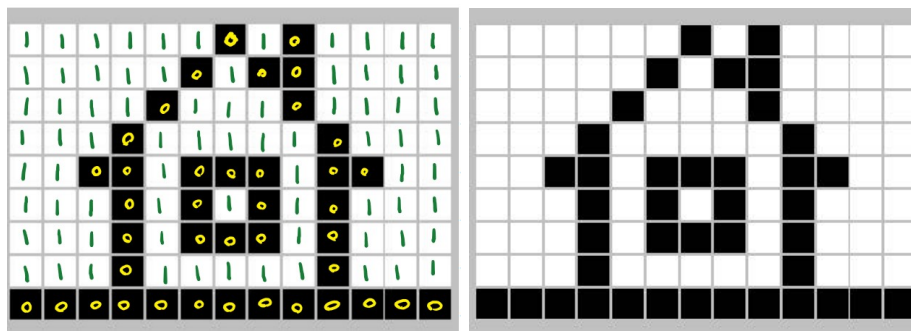
---

	Tehran	Karachi	Dallas
Tehran	0	1913.17	11714.65
Karachi	1913.17	0	13378.35
Dallas	11714.65	13378.35	0

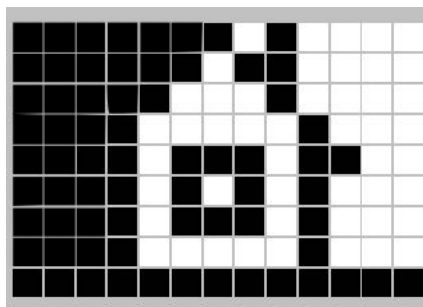
بعد از محاسبه فاصله میان شهرها به سوالات زیر پاسخ دهید: (الف) کدام یک از شهرهای فایل اکسل داده شده بیشترین و کمترین فاصله را تا تهران دارند؟ (ب) چند شهر کمتر از ۲۰۰۰۰ کیلومتر با تهران فاصله دارند؟ (پ) کدام شهر از کشور ژاپن به تهران نزدیکتر است و چقدر با تهران فاصله دارد؟ (ت) کدام دو شهر از ایران و عراق نزدیکترین فاصله را دارند؟ کدام دو شهر از ایران و ترکیه نزدیکترین فاصله را دارند؟

## ۴ پرکردن ناحیه بسته (۲۰ امتیاز)

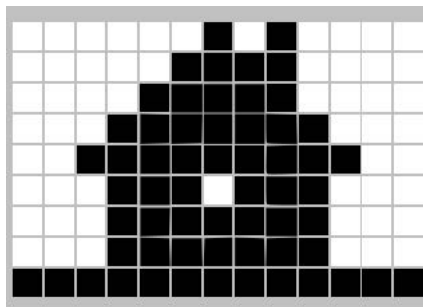
یک تصویر سیاه و سفید با یک آرایه از صفر و یک ها ذخیره می‌شود. به عنوان مثال تصویر ساده یک خانه را در نظر بگیرید که به صورت زیر در یک ماتریس صفر و یک  $9 \times 13$  قابل ذخیره‌سازی است



هدف ما این است که با تعیین شدن یک پیکسل از شکل، تمام ناحیه بسته‌ای از شکل که شامل آن نقطه است سیاه شود. در شکل فوق اگر پیکسل (۱, ۱) داده شود شکل به صورت زیر تبدیل شود



اگر پیکسل (۳, ۷) برای شروع انتخاب شود شکل زیر را خواهیم داشت



الگوریتمی که برای رنگ کردن یک فضای بسته به کار می‌رود به صورت زیر است:

---

۱. فرض کنید  $p$  پیکسل آغازین داده شده باشد. این پیکسل را در لیست  $A$  قرار دهید.

۲. تا وقتی لیست  $A$  خالی نشده کارهای زیر را انجام دهید:

(آ) مختصات یک پیکسل مانند  $p$  را از انتهای لیست بخوانید. آن را از لیست حذف کنید.

(ب) اگر پیکسل  $p$  سیاه است کاری نکنید ولی اگر سفید است آن را سیاه کنید و چهار خانه اطراف پیکسل  $p$  را بررسی کنید. هر کدام که سفید است مختصات آن را به انتهای لیست اضافه کنید.

برنامه‌ای بنویسید که یک تصویر سیاه-سفید را بخواند. سپس با دریافت مختصات یک پیکسل به روش فوق فضای بسته شامل پیکسل داده شده را سیاه کند. برای خواندن یک تصویر از دستور `S=imread('filename')` استفاده کنید که در آن `filename` نام فایل تصویر است. در این صورت فایل تصویر به صورت یک ماتریس صفر و یک در ماتریس  $S$  قرار می‌گیرد. برای امتحان برنامه خود تصاویر ضمیمه شده را به کار ببرید.



## ۵ روش اویلر (۲۰ امتیاز)

مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b]$$

هدف از حل این مسئله پیدا کردن تابع  $y$  است به طوری که در معادله دیفرانسیل داده شده صدق کند.  $(a, b)$  و  $y_0$  اعداد ثابت داده شده هستند. یکی از روش‌های حل این مسئله روش اویلر است. در این روش بازه  $[a, b]$  به  $n$  قسمت مساوی با نقاط میانی  $x_i = a + ih$  که  $h = (b - a)/n$  تقسیم می‌شود. سپس برای هر  $1 \leq k \leq n$  مقدار  $y(x_k)$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$$

(الف) تابعی بنویسید که با دریافت توابع  $f$ ، مقدارهای  $a, b, n$  و  $y_a$  روش اویلر را انجام دهد. تابع شما باید مقدار  $x_k$  و  $y_k$  را تکرارها را در یک فایل به شکل مناسب گزارش کند.

(ب) برای  $f(x, y) = x^2 + y$  و  $a = 0$  و  $b = 1$  و  $y_0 = 0$  تابع خود را امتحان کنید و جواب حاصل را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.