2. فراکتال‌ها

همانگونه که در مقدمه اشاره شد از خوانندگان این کتاب انتظار می رود که حداقل به یک زبان برنامه نویسی کامپیوتر مسلط باشند. از آنجا که امکان دارد بعضی از ایشان برای مدتی از برنامه نویسی فاصله گرفته باشند و یا تمایل داشته باشند که همراه با این کتاب توانایی برنامه نویسی خود را افزایش دهند، این بخش را میتوان به عنوان تمرینی برای برنامه نویسی تلقی کرد.

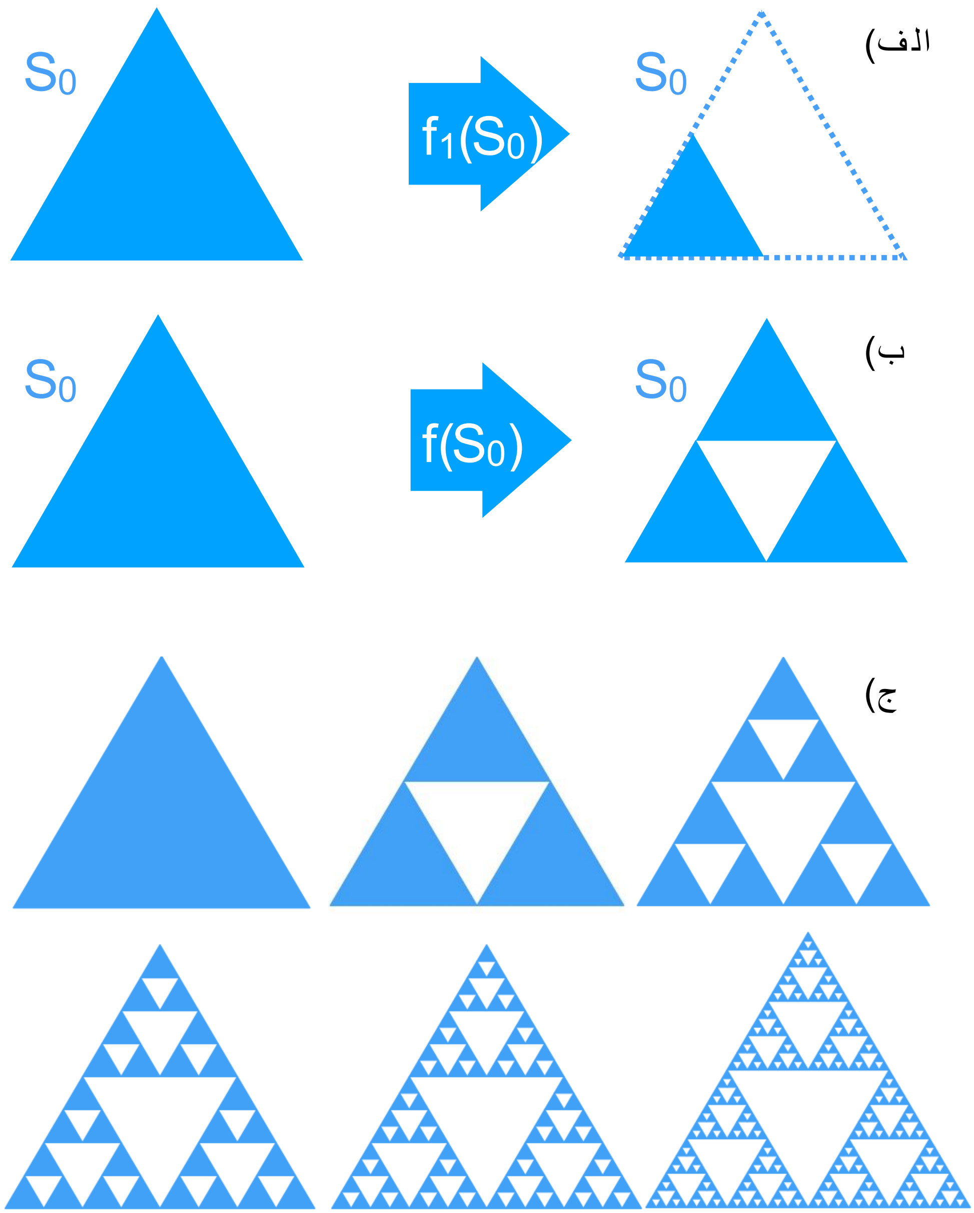
در این بخش به شبیه سازی ساختارهای فراکتالی می پردازیم. امید دارم که جذابیت نظری و تصویری این موجودات زیبا باعث شود که شروع شیرین‌تری داشته باشید. نکته جالب در این بخش این است که برای این شبیه‌سازی‌ها نیازی به نوشتن برنامه‌های طولانی ندارید. اکثر آلگوریتم‌های معرفی شده در این بخش بسیار ساده هستند و میتوانند به عنوان تمرینی برای افزایش مهارت‌های برنامه نویسی به کار آیند. به اضافه اینکه نمی‌توان از زیبایی این فراکتال‌ها بی آنکه آنها را به تماشا بنشینیم لذت بریم. (به نظرم تکرار داریم) پس برای شبیه سازی آنها باید بیاموزیم که چگونه آنها را نمایش دهیم. در حقیقت تنها خروجی تمرینات این بخش نمایش تصاویر فراکتالهای زیبا بر روی نمایشگر و یا چاپ آنهاست. در نتیجه این نیز تمرین خوبی برای استفاده از توانایی نمایش و بکارگیری واسط گرافیک است که در بخش‌های دیگر این کتاب به آن نیازمندیم.

از دیدگاه ریاضی فراکتال‌ها مجموعه‌های با توپولوژی غیر بدیهی هستند. این مجموعه‌ها می‌توانند ابعاد غیر صحیح داشته باشند. هر یک از این مجموعه‌ها در فضای بزرگتری قرار دارند و به عبارتی زیر مجموعه آن فضای بزرگتر هستند. این فضای بزرگتر را فضای غوطه‌وری فراکتال می‌نامیم. بُعد هر فراکتال کوچکتر یا مساوی بعد توپولوژی فضای غوطه وری آن است. برای تعریف بعد توپولوژی از پیچیدگی‌های ریاضی صرفنظر می‌کنیم و با تعریف سادۀ مرز آنرا توصیف می‌کنیم. یک نقطه، یک مجموعه با بعد توپولوژی صفر است. حال هر مجموعه‌ای که برای محدود کردن حرکت بر روی آن بتوان از مرزهای صفر بُعدی (نقطه) استفاده کرد دارای بُعد یک است. حرکت بر روی یک پاره خط می‌تواند به کمک دو مرز نقطه‌ای محدود شود. در نتیجه پاره خط یک مجموعه یک بعدی است. به همین ترتیب یک زندان دو بعدی دیوارهای یک بعدی دارد و یک زندان سه بعدی دیوارهای دو بعدی.

گاهی برای توصیف بعد توپولوژی از مفهوم حجم d بعدی استفاده می‌شود. برای یک مجموعه بسته d بعدی، فقط حجم d بعدی خوش تعریف، محدود و غیر صفراست. یک پاره خط دارای طول (حجم یک بعدی) محدود و سطح (حجم دوبعدی) صفر است. یک صفحه متناهی طول نامحدود، سطح محدود و حجم صفر دارد. ولی در مورد فراکتالها با وجود اینکه مجموعه‌های متناهی هستند ولی امکان دارد حجم d بعدی (برای d های صحیح) متناهی نداشته باشند. به همین دلیل این مجموعه ها به موجوداتی با بعد غیر صحیح معروف هستند (که همیشه درست نیست).

2.1. فراکتال‌های خود شبیه

ساده ترین مثال‌هایی که درمورد فراکتال‌ها می‌توان زد مربوط به فراکتال‌های خود شبیه است. با مثال معروف مثلث سرپینسکی (Sierpinski) شروع می‌کنیم.



شکل 2-1. مراحل تولید مثلث سرپینسکی

مثلث متساوی الاضلاع S_0 و تابع تجانس f_1 با ضریب تجانس $r=\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید. اثر این تابع بر S_0 از آن مثلث کوچکتری با ابعاد $\frac{1}{2}$ مثلث اول می سازد (شکل ۲-الف). حال توابع f_2 و f_3 را نیز در نظر بگیرید که مشابه با f_1 مثلث را کوچک میکنند ولی یک جابجایی هم در صفحه می‌دهد، به گونه ای که اثراجتماع این سه تابع، $f=f_1\cup f_2\cup f_3$، بر روی این مثلث، مجموعه $S_1=f(S_0)$ که زیر مجموعه S_0 می‌باشد را نتیجه می‌دهد(شکل ۲-ب). با تکرار اثر تابع f بر روی آن مجموعه های زیبای

$$S_1 = f(S_0)$$
$$S_2 = f(S_1) = f^2(S_0)$$
$$\vdots$$
$$S_n = f^n(S_0)$$

بدست می‌آید. تکرار این عمل در حد $n \to \infty$ به مجموعه خود شبیه $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ منجر می‌شود که اثر تابع f بر روی آن خودش را نتیجه می‌دهد،

$$S = f(S)$$

مجموعه S یک فراکتال خود شبیه است که به مجموعه سرپینسکی معروف است (شکل ۲-ج).

اگر مساحت مثلث ابتدایی را A_0 بگیریم، هر یک از مثلثهای تولید شده به وسیله توابع تجانس مساحتی برابر با $\frac{A_0}{4}$ دارند. در نتیجه مساحت مجموعه S_1 برابر $\frac{3}{4}A_0$ است و به همین ترتیب برای S_n مساحت $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$ بدست می‌آید. در نتیجه در حد $n \to \infty$ مساحت مجموعه سرپینسکی صفر است. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که بعد توپولوژی مجموعه سرپینسکی کمتر از 2 است.

با نگاهی به شکل ۱-۲ می‌توان دید که تمام نقاط روی مرز مثلث اولیه عضو مجموعه نهایی خواهند بود. به همین ترتیب تمام اضلاع مثلثهای میانی نیز عضو مجموعه نهایی خواهند ماند. پس مجموعه‌ی محیط تمام مثلثها (اضلاع آنها) زیرمجموعه‌ای از مجموعه نهایی خواهند بود. اگر طول هر ضلع مثلث اولیه را l بگیریم، برای محیط مجموعه S_1 داریم: $p(S_1) = 3\left(\frac{l}{2}\right) \times 3$. و به همین ترتیب برای محیط S_n داریم، $p(S_n) = 3l \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$. این عبارت برای $n \to \infty$ واگرا می‌شود. در نتیجه حجم یک بعدی زیر مجموعه‌ای از مجموعه سرپینسکی بینهایت است. این نشان می‌دهد که بعد توپولوژی این مجموعه بزرگتر از 1 است. پس مجموعه سرپینسکی مجموعه‌ای با بعد توپولوژی بزرگتر از 1 و کوچکتر از 2 است. پس بعد توپولوژی برای این گونه مجموعه ها خوش تعریف نیست و اگر بخواهیم بعدی به این مجموعه نسبت دهیم باید یک عدد غیر صحیح باشد.

2.2. بعد فراکتال*

تعریف‌های متفاوتی برای بعد فراکتال‌ها ارائه شده‌است که در رابطه با فراکتال‌های خود تشابه همگی با هم همخوانی دارند و پاسخ یکسانی دارند. به طور کلی بُعد یک فراکتال همواره کوچکتر یا مساوی بعد توپولوژی فضای غوطه وری آن است. برای مثال بعد فراکتال سرپنسکی باید کوچکتر مساوی 2 باشد.

بعد خود تشابهی:

در مورد فراکتال‌های خود تشابه

$$S = f(S)$$

که در آن f اجتماع توابع $f_i\,(i = 1 \cdots n)$ با ضرایب تجانس (تراکم) $r_i \leq 1$ است، بعد خود تشابهی d_{ss} براحتی از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\Sigma_{i=1}^{n} r_i^{d_{ss}} = 1 .$$

مثال:
بعد خود تشابهی مثلث سرپینسکی را بدست آورید.
پاسخ:

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^{d_{ss}} = 1 \rightarrow d_{ss} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

همانگونه که انتظار داشتیم بعد این فراکتال عددی بزرگتر از 1 و کوچکتر از 2 است.

بعد جرمی:

این تعریف که به مفهوم بعد در فیزیک نزدیکی بیشتری دارد برای هر نوع فراکتالی قابل تعریف است. به زبان ساده رفتار مقیاسی رشد جرم (حجم) با ابعاد سیستم را بررسی می‌کند. برای درک بیشتر با مثال‌هایی از اجسام متعارف شروع می‌کنیم. برای یک جسم سه بعدی ساده در صورت تغییر ابعاد با یک ضریب 2 حجم جسم و در نتیجه جرم آن (جسم را همگن فرض کنید) $2^3 = 8$ برابر می‌شود. در نتیجه می‌توان گفت که برای اجسام 3 بعدی

$$M(r) \sim r^3.$$

و به طور کلی برای اجسام d_m بعدی

$$M(r) \sim r^{d_m}.$$

حال با همین رویه رفتار مقیاسی جرم در مثلث سرپینسکی را بدست می‌آوریم. فرض می‌کنیم که جرم کوچکترین مثلثی که در این مجموعه با قدرت تفکیک ما (r_0) قابل تشخیص است برابر با واحد جرم (m_0) باشد. به این ترتیب با دو برابر کردن ابعاد، ما 3 مثلث داریم پس جرم سه برابر می‌شود. با ادامه این روند دیده می‌شود که با 4 برابر کردن ابعاد، جرم 9 برابر می‌شود و در حالت کلی

$$\frac{r}{r_0} = 2^n \Rightarrow \frac{m}{m_0} = 3^n$$

با حذف n از روابط بالا

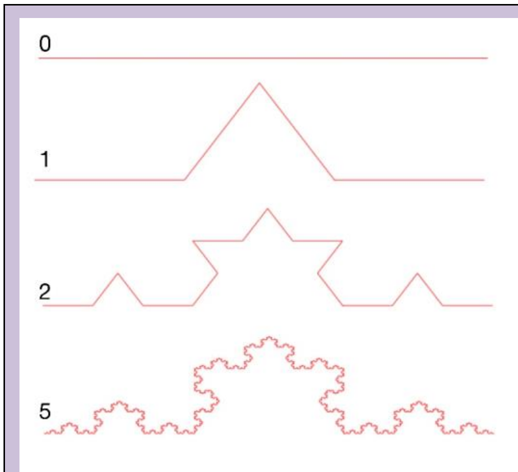
$$\frac{m}{m_0} = (r/r_0)^{\frac{\log 3}{\log 2}}$$

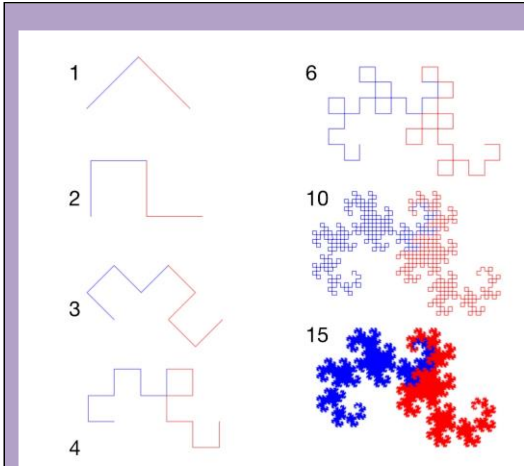
در نتیجه بعد جرمی این فراکتال $d_m = \frac{\log 3}{\log 2}$ است که همانطور که قبلا اشاره شد با بعد خود تشابهی برابر است. در ادامه این بخش منظور از بعد فراکتالی که آنرا با d_f نشان می‌دهیم، همان بعد جرمی d_m است مگر اینکه صریحا غیر از این اشاره شده باشد.

2.3. شبیه سازی فراکتالهای خود تشابه

برای شبیه سازی فراکتال‌های خود تشابه روشهای متعددی وجود دارد. ساده ترین آلگوریتمی که در ابتدا به نظر می‌رسد استفاده از توابع خود تشابهی است. به طور مثال کافی‌است که شما بدانید چگونه یک خط را نمایش دهید. برای این کار باید مختصات دو نقطه انتهای خط را بدانید. حال با اعمال توابع خود تشابه بر این پاره خط، پاره خطهای جدیدی تولید می‌شود که قابل رسم به همان طریق هستند. ادامه این کار در یک چرخه و اعمال توابع خود تشابه به مجموع پاره خطهای جدید، فراکتال را تولید می‌کنند. البته بدیهی‌است که ما نمی‌توانیم این کار را بینهایت بار انجام دهیم. ولی در حقیقت نیازی به این کار نیز وجود ندارد. اگر منظور از این شبیه سازی تولید تصویری از فراکتال باشد، به دلیل محدودیت قدرت تفکیک نمایشگر بعد از تعدادی تکرار

دیگر نمی‌توان جزییات بیشتری بر تصویر نمایان کرد. این یک نمونه قابل نمایش از محدودیت‌های عددی و محاسباتی‌است که در آینده بیشتر در باره‌ی آن صحبت خواهیم کرد.

.2.1 تمرین	مجموعه کوخ: ساختار فراکتالی زیر را پله به پله تولید کرده و تصویر آنرا بر روی نمایشگر نشان دهید. توجه کنید که برای ساختن این فراکتال به چهار تابع نیاز دارید که هر چهار مجموعه اولیه $\frac{1}{3}$تابع با نسبت کنند ولی در دو را کوچک می تابع بغیر از تجانس و انتقال، دوران نیز سهیم است. بهتر است که برای تبدیلات نقاط مورد نظر از ماتریس‌های انتقال استفاده کنید.	

.2.2 تمرین	اژدهای هی وی: ساختار فراکتالی زیر را پله به پله تولید کرده و تصویر آنرا بر روی نمایشگر نشان دهید. توجه کنید که برای ساختن این فراکتال فقط به دو تابع نیاز دارید. یکی از نکات جالب این فراکتال این است که هرگز خودش را قطع نمی کند یا از روی یک یال دوبار رد نمی شود. برای دیدن این خاصیت می توانید از طیف رنگی برای نمایش جهت حرکت استفاده کنید. این کار خروجی را بسیار جذاب می کند.	

.2.3 تمرین	مثلث سرپینسکی: مثلث سرپینسکی را به استفاده از توابع خود تشابه تولید کنید. توجه کنید که در اینجا باید اول فرا بگیرید چگونه یک مثلث را با استفاده از مختصات رئوس آن تولید کنید.

برای تولید فراکتال‌های خود تشابه می‌توان الگرویتم‌های متفاوتی به کار برد. بعضی از این الگوریتم‌ها کاملا مبتکرانه و معمولا قابل استفاده برای

تولید فراکتال خاصی هستند. تمرین زیر یکی از این الگوریتم‌های مبتکرانه را معرفی می‌کند.

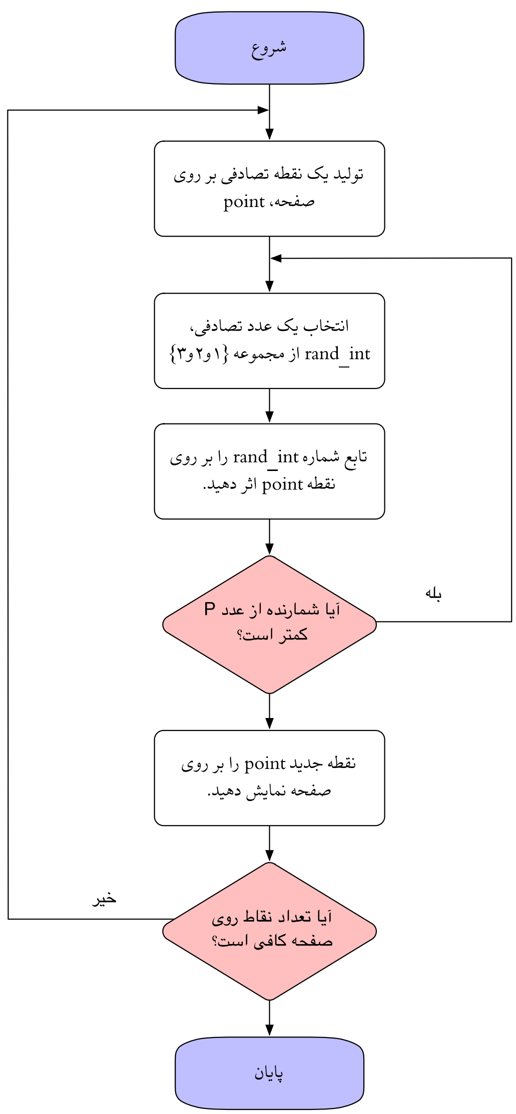
2.4. تمرین	مثلث خیام: مطمئنا با مثلث خیام که در بدست آوردن ضرایب بست دو جمله‌ای به کار می‌رود آشنا هستید. هر درایه این مثلث مجموع دو عدد بالای آن است. برنامه ای برای تولید این مثلث بنویسید. در نمایش مثلث بر روی نمایشگر به جای نشان دادن اعداد به هر عدد یک پیکسل اختصاص دهید. تمام عددهای فرد را با رنگ سبز و اعداد زوج را با رنگ قرمز نشان دهید. آیا نتیجه آشنا نیست؟	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 1 6 15 20 15 6 1

الگوریتم‌های بالا برای تولید فراکتال‌ها، ساختاری کاملا تعینی دارند. به این معنی که در این الگوریتم‌ها نیازی به اعداد تصادفی نیست. البته این جای تعجب ندارد زیرا ساختارهایی که مورد توجه بودند نیز کاملا غیر تصادفی هستند. ولی هدف این کتاب این است که نشان دهد برای حل مسائل تعینی نیز می‌توان از الگوریتم‌های تصادفی استفاده کرد. منظور از الگوریتم تصادفی، الگوریتمی است که یک مولد اعداد تصادفی (random generator) نقش اساسی در الگوریتم داشته باشد. اکنون نشان می دهیم چنین الگوریتمی چگونه می‌تواند در تولید فراکتال‌های خود تشابه به کار آید.

همانطور که در توصیف مثلث سرپینسکی بیان شد، این فراکتال با اعمال متمادی 3 تابع خود تشابه تولید می‌شود. البته همانطور که گفته شد به دلیل محدودیت قدرت تفکیک نمایشگر تعداد دفعاتی که باید این توابع بر مثلث اولیه اثر کند تا شکل قابل قبولی بدست بیاید محدود است. فرض کنید بعد از P بار تاثیر توابع، این شکل(؟) بدست آمده است پس هر نقطه از آن در اثر تاثیر متوالی رشته‌ای از این توابع با طول P تولید شده است. حال می‌توان از این نکته برای معرفی یک الگوریتم تصادفی ساده استفاده کرد. در زیر این الگوریتم برای مثلث سرپینسکی با 3 تابع خود تشابه معرفی می‌شود. ولی می‌توان آن را برای هر فراکتال دیگری نیز به کار برد.

1. یک نقطه دلخواه را با استفاده از مولد اعداد تصادفی در صفحه نمایش انتخاب کنید.
2. یک عدد به طور تصادفی از مجموعه‌ی {1,2,3} انتخاب کنید و تابع متناظر با آن را بر روی نقطه اثر دهید.
3. قدم 2 را P بار تکرار کنید و بعد نقطه نهایی را بر روی نمایشگر نشان دهید.
4. به قدم اول برگردید و تا زمانی که تصویر مطلوبی بر روی خروجی بدست آید این الگوریتم را تکرار کنید.

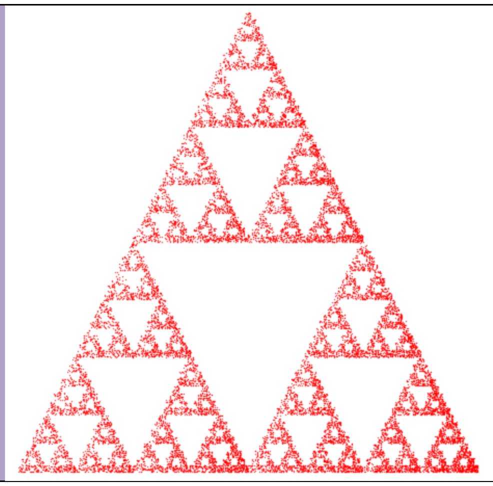
این الگوریتم مستقل از سادگی (فقط دو چرخه‌ی ساده‌ی تو در تو) قابلیت به کار گیری برای تولید هر فراکتال دیگری را نیز دارد.

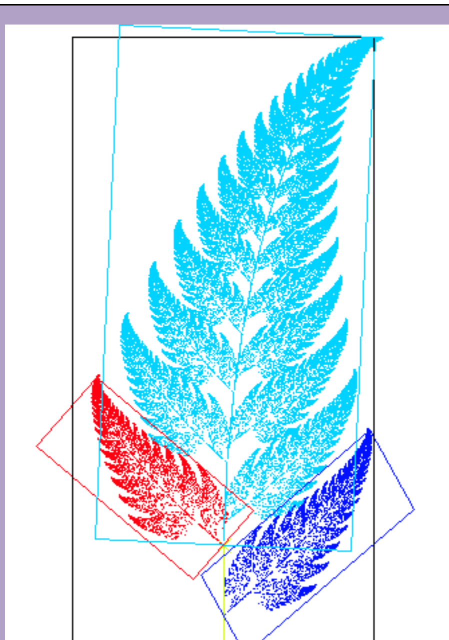


برای اثر تابع بر روی نقاط و انتقال آنها می‌توان به سادگی از رابطه

$$\overrightarrow{x'} = r.R.\vec{x} + \vec{a}$$

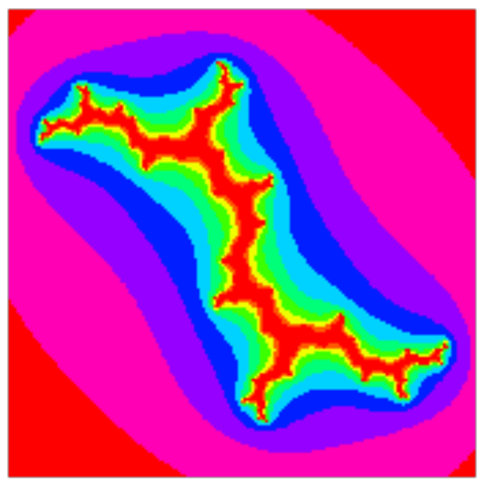
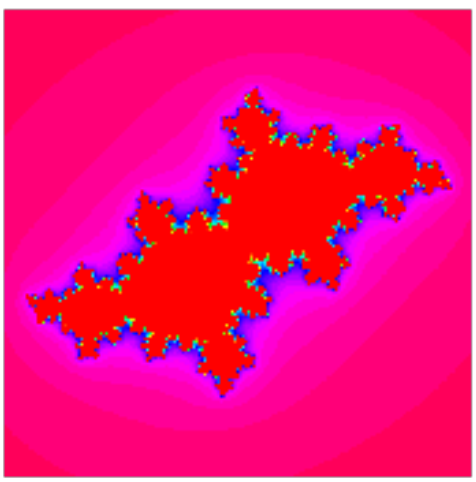
استفاده کرد، که در اینجا r ضریب تشابه R ماتریس انتقال و $\vec{a}$ بردار انتقال است. با تغییر این پارامترها می‌توان اشکال متفاوتی تولید کرد.

.2.5 تمرین	بازهم مثلث سرپینسکی: مثلث سرپینسکی را به استفاده از توابع خود تشابه و آلگوریتم تصادفی معرفی شده در اینجا تولید کنید.	

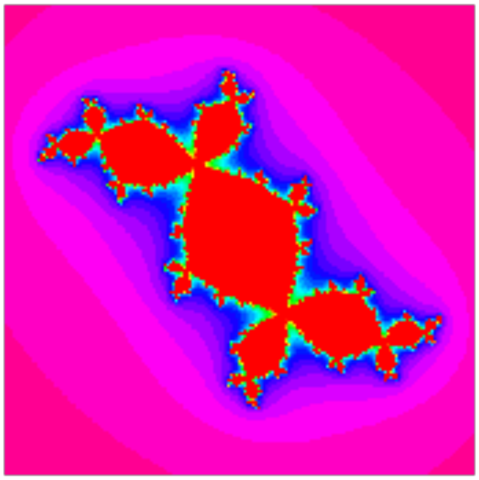
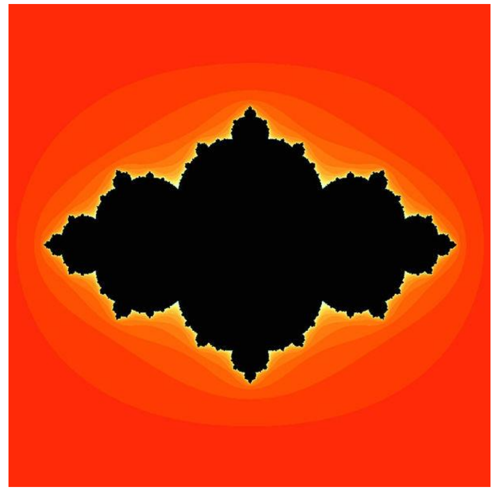
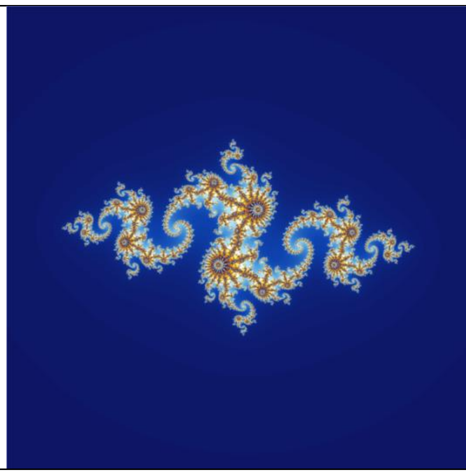
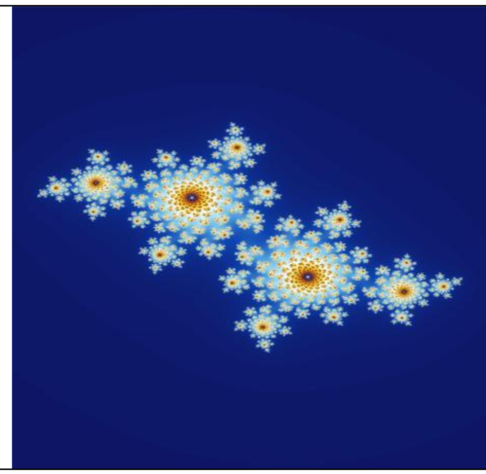
.2.6 تمرین	برگ سرخس: یکی از فراکتالهای بسیار زیبا، فراکتالی است که به دلیل شباهتش به برگ گیاه سرخس به این نام معروف است. اگر به این فراکتال نگاه کنید میتوانید توابع خود تشابه آن را بیابید. با استفاده از یک خطکش و نقاله میتوانید نسبت های تجانس و زوایای انتقال این توابع را بیابید. این امکان وجود دارد که ضرایب تشابه توابع انتقال در تمام راستاها یکسان نباشد و به عبارتی به جای آنکه تابع خود تشابه باشد خود آفین (self-affine) باشد. با استفاده ازتوابعی که بدست آورده اید و آلگوریتم تصادفی معرفی شده در متن، این فراکتال را بسازید. با توابعی که بدست آورده اید بازی کنید و با تغییر پارامترهای آن ببینید چگونه میتوانید شکلهای متفاوتی از فراکتال سرخس را تولید کنید.	

2.4. مجموعه ی ژولیا (Julia Set)

نقطه ی $z_0 = x + i\,y$ را در فضای مختلط در نظر بگیرید. با اثر تابع $F(z)$ بر روی آن، نقطه‌ی جدید $z_1 = F(z_0)$ بدست می‌آید. اگر به همین ترتیب تابع را n بار اثر دهیم، فاصله $z_{n+1} = F(z_n)$ از مبدا تغییر خواهد کرد. مجموعه نقاطی که فاصله‌ی آنها از مبدا با تکرار اعمال این تابع بر روی آنها به بینهایت میل نمی‌کنند را مجموع ژولیا می‌نامند. به عبارت دقیقتر مجموعه‌ی ژولیا مرز نقاطی‌است که تحت تاثیر تابع F بر روی آنها، به بینهایت می‌روند و آنهایی که نمی‌روند. به طور مثال برای تابع $F(z) = z^2$ به وضوح این مرز یک دایره به شعاع واحد است. ولی درصورتی که این تابع به صورت $F(z) = z^2 + c$ تعریف شود برای مقادیر غیر صفر c این مرز یک فراکتال است[3] که به مجموعه ی ژولیا معروف است. در نمایش این شکلهای زیبا می‌توان بعد از اثر تابع F به تعداد متناهی بر روی هر نقطه از فضا رنگی به این نقطه، بر حسب فاصله ی نقطه ی نهایی از مبدا مختصات، تخصیص داد. در این صورت طیفی رنگی از دینامیک فرار نقاط از مرکز بدست می‌آید. جدول 1 تعدادی از این فراکتالها را با مقادیر c متناظر آنها نشان می‌دهد.

	
$c = -i$	$c = -0.4 - 0.6\,i$

[3] برای مقدار $c = -2$ نیز شکل بدست آمده فراکتال نیست.

	
$c = -0.12 - 0.75\, i$	$c = -0.6$
	
$c = -0.8 + 0.16\, i$	$c = -0.4 + 0.6\, i$

جدول 2-1 - مجموعه های متفاوت ژولیا به ازای مقادیر متفاوت پارامتر c

.2.7 تمرین	مجموعه های ژولیا: شکلهای جدول 1 را تولید کنید. با تغییر پارامتر c سعی کنید شکلهای زیبای دیگری خلق کنید.

بیشتر بدانیم:

کتاب‌های زیادی در مورد فراکتال‌ها وجود دارد. برای دانشجویان علاقه‌مند به پایه‌های ریاضی این مبحث کتاب Measure, Topology and Fractals نوشته Gerald Edgar توصیه می‌شود. این کتاب با ریاضیات دقیق به شکلی ساده، قابل درک، و خود آموز تنظیم شده است.