8. تولید اعداد کتره ای با هر توزیع دلخواه – روش متروپولیس

در فصل 6 با آلگوریتم‌هایی که امکان تولید اعداد کتره‌ای با توزیع غیر یکنواخت آشنا شدیم. درمورد توابع توزیع انتگرال پذیر و معکوس پذیر مشکلی وجود ندارد و با روش ارایه شده در آن بخش به راحتی می‌توان تابع تبدیلی برای تولید اعداد کاتوره ای با توزیع دلخواه بدست آورد. حتی در مورد تابع توزیع گوسی که در یک بعد انتگرال پذیر نیست، ترفندی به ما کمک کرد که تابع تبدیل را در فضای دو بعدی بیابیم. بدینوسیله برای تولید اعدادی با تابع توزیع گوسی دو روش معرفی شد.

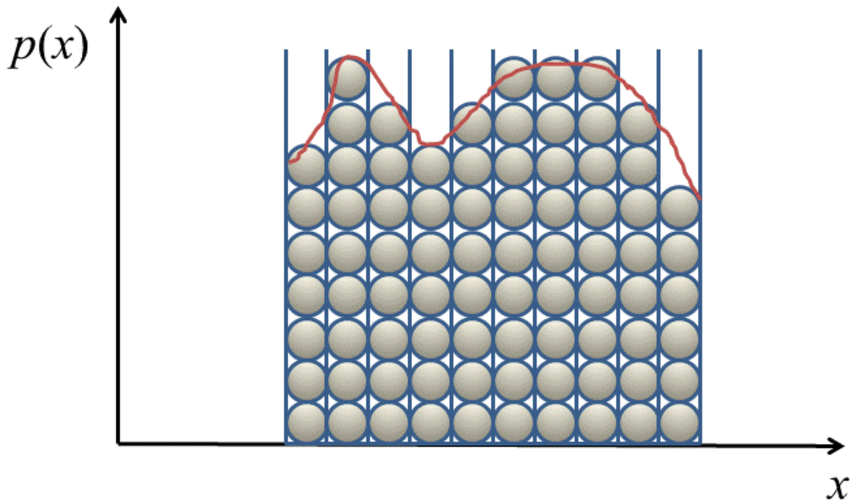
الف) استفاده از تابع تبدیل

ب) استفاده از قضیه حد مرکزی

اجازه بدهید که نگاهی دقیق تر بر روش دوم بیاندازیم. دراین روش جمع تعدادی عدد کاتوره‌ای به عنوان خروجی معرفی می‌شود. در ساده‌ترین شکل می‌توان این اعداد را رشته‌ای از عددهای 1+ و 1- در نظر گرفت که با احتمال برابر امکان ظهور دارند. در نتیجه این آلگوریتم هم ارز آلگوریتم ول گشت است. در حقیقت در این روش مکان ولگرد بعد از تعدادی قدم به عنوان خروجی داده می‌شود. می‌دانیم که مکان بعد از N قدم از تابع توزیع گوسی با پهنای $\sigma = \sqrt{N}$ تبعیت می‌کند.
نتیجه‌ای که از آلگوریتم (ب) می‌گیریم امکان طراحی یک بازی است که در یک فرآیند تصادفی خروجی‌هایی با تابع توزیع دلخواه ما تولید کند. در ادامه این فصل می‌خواهیم این روش را تعمیم دهیم و نشان دهیم که با فرآیند مشابهی می‌توان هر تابع توزیع دلخواهی را تولید کرد.

8.3. مهره ها در جعبه

فرض کنید که تابع مطلوب ما برای مولد اعداد کاتوره‌ای تابع توزیع احتمال $p(x)$ است. برای سادگی کار فعلا فرض می‌کنیم که دامنه‌ی این تابع محدود است. متناسب با توان تفکیک مورد نظر محور x را به اجزایی تقسیم می‌کنیم. هر یک از جزءِها را مانند جعبه‌ای در نظر می‌گیریم. فرض کنید که این جعبه‌ها را با گلوله‌هایی پر کنیم. تعداد گلوله‌ها در هر جعبه متناسب با مقدار تابع در آن نقطه است.



شکل 17 گلوله‌ها را متناسب با تابع توزیع در جعبه‌ها پخش می‌کنیم.

همچنین فرض کنید که هر گلوله شماره‌ای دارد. حال به کمک مولد اعداد کاتوره‌ای یکنواخت یک گلوله را بطور کاملا تصادفی انتخاب می‌کنیم و مقدار x آن گلوله را گزارش می‌کنیم. به این ترتیب مقدار گزارش شده کاملا تصادفی و کاتوره‌ای است. از طرف دیگر احتمال گزارش هر مقدار x متناسب با تعداد گلوله‌ها در آن جعبه یا به عبارت دیگر مقدار تابع توزیع است. پس به همین راحتی می‌توان مسئله را حل کرد.

شاید برای مثال ساده، محدود، و یک بعدی که در بالا زدیم این پایان ماجرا باشد ولی استفاده از این روش در حالت کلی با مشکلاتی همراه است. اگر تابع توزیع دامنه‌ای نامحدود داشته باشد که به دلیل محدود بودن تابع توزیع احتمال باید در نقاط خیلی دور به صفر هم میل کند نمی‌توان آن را با روش فوق تولید کرد مگر اینکه مقدار بیشماری گلوله داشته باشیم. حتی در این صورت نیز مجبور به قطع تابع توزیع هستیم اگر بخواهیم این عدد محدود باشد. حتی اگر دقت خود را پایین بیاوریم و تابع را برای مقادیر کوچکتر از حد دقت ما صفر فرض کنیم، بازهم این روش برای توابع چند بعدی نیاز به ثبت حافظه‌ی بسیار زیادی برای نگه داشتن تعداد گلوله‌های بسیار زیاد دارد. و در نهایت نیاز به جارو کردن کل فضای فاز برای چیدن گلوله‌ها نیست که این کار معمولا در مسایل فیزیکی غیرممکن است. ولی نباید نا امید شد. در ادامه راهی برای چیره شدن بر این مشکلات ارایه می‌شود. ولی در ابتدا دینامیکی را معرفی می‌کنیم که در قالب یک بازی بتوان ازآن برای چیدن مناسب گلوله‌ها در جعبه‌ها برای هر تابع توزیع دلخواهی استفاده کرد.

8.4 دینامیک گلوله ها د رجعبه ها

مثال بالا را مجددا، ولی این بار با امکان جابجایی گلوله‌ها در جعبه‌ها نظر می‌گیریم. این جابجایی دینامیکی به گلوله‌ها می‌دهد که نه تنها باعث تغییر در چینش گلوله‌ها در جعبه‌ها می‌شود، بلکه می‌تواند توزیع آنها را نیز تغییر دهد. اگر جابجایی باعث شود که ارتفاع یک ستون پایین بیاید و ارتفاع ستون دیگری بالا برود، شکل تابع توزیع عوض می‌شود. حال سوال این است که آیا این امکان وجود دارد که قوانین این بازی را به گونه‌ای گذاشت که مستقل از شرایط اولیه بعد از گذشت زمان کافی توزیع گلوله

ها در جعبه‌ها به تابع $p(x)$ میل کند؟ پاسخ مثبت است. برای یافتن قوانین چنین بازی‌ای اول فرض می‌کنیم که در طی این فرآیند سیستم به توزیع دلخواه ما رسیده باشد. برای اینکه این توزیع پایا باشد انتظار داریم که ادامه‌ی بازی نتواند این توزیع را بهم بزند. یعنی در ادامه‌ی این بازی به طور متوسط باید همانقدر گلوله از هر ستون خارج شود که در طی همان زمان به آن وارد می‌شود. اگر به هر ستون نگاه کنیم انتظار داریم جریان خروج گلوله از این جعبه برابر با جریان ورود به آن جعبه باشد.

پس دینامیک این بازی را این گونه معرفی می‌کنیم. گلوله‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. این گلوله مثلا در خانه‌ی iام نشسته است. خانه ی دیگری مانند j را نیز به تصادف انتخاب می‌کنیم. اجازه می‌دهیم که گلوله‌ی انتخابی با احتمال w_{ij} به خانه جدید خود برود. چون در هر واحد زمان یک بار این کار را تکرار می‌کنیم، w_{ij} در حقیقت نرخ احتمال گذر (احتمال گذر در واحد زمان) است. بدیهی است که دینامیک این بازی به w_{ij} ها بستگی شدیدی دارد. با توجه به اینه w_{ij} نرخ انتقال گلوله از خانه ی i به خانه‌ی j است، نرخ خروج ذره از خانه‌ی i در واحد زمان به دو عامل بستگی دارد؛ (الف) احتمال انتخاب گلوله‌ای در جعبه ی iام، $p(x_i)$ و (ب) نرخ انتقال به جعبه‌های دیگر، w_{ij}. از آنجا که گلوله‌هایی که در جعبه‌ی i نشسته‌اند به هر جعبه‌ی دیگری می‌توانند بروند، پس نرخ خروج ذره از این جعبه برابر است با $\sum_j w_{ij}\, p(x_i)$ که جمع بر روی تمام جعبه‌هاست.
از طرف دیگر نرخ ورود گلوله به همین جعبه در همین بازه‌ی زمانی برابر با جمع گلوله‌های ورودی از تمام جعبه‌های دیگر به این جعبه است، $\sum_j w_{ji}\, p(x_j)$. مجددا جمع بر روی تمام جعبه‌هاست. مطابق فرضی که کردیم، سیستم را در زمانی در نظر می‌گیریم که تابع توزیع گلوله‌ها $p(x)$ است. برای اینکه این توزیع پایدار باشد، نرخ ورود و خروج گلوله به هر جعبه باید برابر باشد. در نتیجه شرط ثبات تابع توزیع

$$\sum_j w_{ij}\, p(x_i) = \sum_j w_{ji}\, p(x_j) \qquad (1)$$

است. این شرط به شرط "**توازن**" معروف است. شرط توازن، شرط لازم و کافی است که ثبات تابع توزیع را تضمین می‌کند. ولی می‌توان شرط قوی‌تری که ازنظر کاربردی ساده‌تر است برای این منظور معرفی کرد. کافی است که جمع‌ها را از طرفین رابطه ی بالا حذف کنیم.

$$w_{ij}p(x_i) = w_{ji}p(x_j) \qquad (2)$$

واضح است که در صورت درستی شرط فوق شرط توازن نیز بر قرار خواهد بود. در حقیقت این شرط قوی‌تر از شرط توازن است و برای ثبات تابع توزیع لازم نیست، ولی البته کافی است و آنرا شرط ***توازن جزیی***[۳۶] می‌نامند. توجه کنید که در معادله ی توازن جزیی مقادیر $p(x)$ معلوم هستند و سوال یافتن نرخ‌های انتقال بین جعبه‌های متفاوت است. همانطور که می‌بینید یک معادله و دو مجهول داریم. در نتیجه مجموعه نامتناهی از پاسخ وجود دارد. ولی برای هر دسته پاسخی که برای نرخ‌های عبور انتخاب کنیم، تابع توزیع $p(x)$ نقطه‌ی ثابت تحول ما در فضای توابع خواهد بود.

ولی برای اینکه $p(x)$ تابع توزیع پایدار این بازی باشد، باید این نقطه‌ی ثابت جاذب باشد. مطابق معمول برای تست پایداری تعادل فرض می‌کنیم که توزیع گلوله‌ها کمی از $p(x)$ دور شود. به طور مثال در i تعداد گلوله‌ها پایین بیاید و در j تعداد آنها بالا برود. با نگاهی به نرخ انتقال خواهیم دید که در این شرایط احتمال انتخاب و جابجایی گلوله‌ای از جایگاه i کمتر می‌شود و

[36] Detailed Balance

احتمال ورود گلوله‌ها به این جعبه افزایش می‌یابد. در نتیجه با انحرا ف از نقطه‌ی ثابت، تغییرات در جریان گلوله‌ها به گونه‌ای است که سعی در تصحیح این انحراف دارد. این نشان دهنده‌ی پایداری این نقطه ثابت است. پس مستقل از تابع توزیع اولیه گلوله‌ها در جعبه‌ها با شروع بازی و بعد از مدتی سیستم در این نقطه‌ی ثابت جاذب متمایل می‌شود و به تابع توزیع تعادلی خود میل می‌کند و برای ادامه‌ی بازی نیز آن را حفظ می‌کند.

این نشان می‌دهد که لازم نیست در ابتدا گلوله‌ها در جعبه‌ها به شکل خاصی چیده شده باشند. گلوله‌ها را با توزیع دلخواه در بین جعبه‌ها توزیع می‌کنیم و بازی را مطابق توصیف بالا شروع می‌کنیم. بعد از گذشت زمان کافی توزیع گلوله‌ها به توزیع مورد نظر ما نزدیک خواهد شد.

حال اجازه بدهید به موضوع انتخاب پاسخ مناسب برای w_{ij} که باید در شرط توازن جزیی صدق کند، باز گردیم. همانطور که گفته شد یک معادله و دو مجهول داریم که پاسخ‌های بسیاری دارد. ساده ترین پاسخی که به ذهن می‌رسد

$$w_{ij} \sim p(j) \tag{3}$$

است. یعنی نرخ گذر فقط تابعی از جایگاه مقصد است. درست است که این رابطه بسیار ساده است، ولی انتخاب خوبی نیست. به دلیل کوچک بودن نرخ عبور د ر اینجا، دینامیک حرکت ذرات بسیار کند است و در نتیجه زمان خیلی زیادی باید منتظر شد تا سیستم بتواند نقطه ثابت خود را بیابد و به تابع توزیع تعادلی برسد.

انتخاب بسیار پرکاربرد و مهمی که می‌توان برای پاسخ‌ها ارایه کرد، انتخاب متروپولیس[۳۷] است؛

$$w_{ij} = \min\left\{1,\ \frac{p(x_i)}{p(x_j)}\right\}. \tag{4}$$

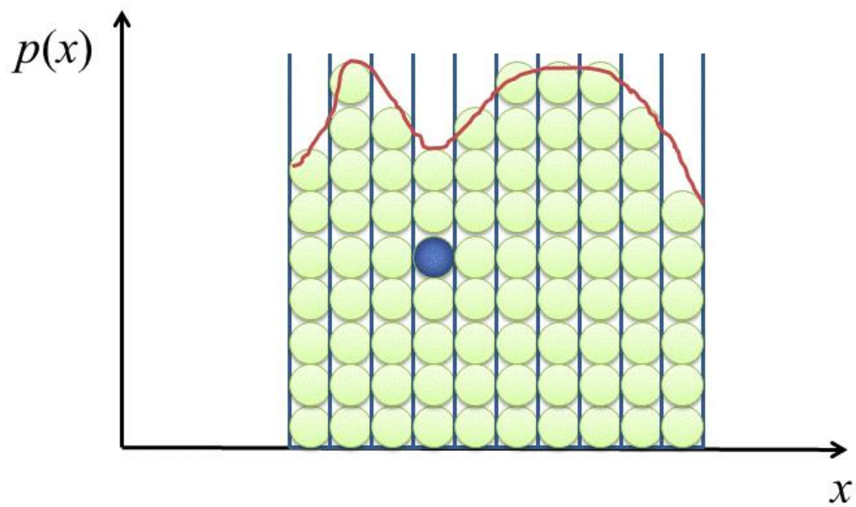
مطابق با این انتخاب، در آلگوریتم متروپولیس یک گلوله انتخاب می‌شود و بعد جایگاه دیگری به تصادف انتخاب می‌شود. اگر مقدار تابع در خانه جدید بالاتر بود گلوله حتما به آن خانه خواهد رفت. در غیر این صورت با نسبت تابع در خانه جدید به خانه ی قدیم به گلوله شانس جابجایی داده خواهد شد. همانطور که می‌بینید در اینجا نرخ گذر متناسب با نسبت تابع در این خانه هاست. در نتیجه گلوله‌ها شانس بیشتری برای جابجایی دارند و سیستم دارای دینامیکی سریع‌تر است.

8.5. تقلیل گلوله‌ها به یکی

درست است که ما راهی را یافتیم که بعد از گذشت زمان توزیع گلوله‌ها را به توزیع دلخواه ما نزدیک شود، ولی همانطور که قبلا هم اشاره شد این کار هنوز یک مشکل اساسی دارد و آن اینکه برای بدست آوردن توزیع با دقت و تفکیک مناسب نیاز به تعداد بیشماری گلوله داریم. اما برای این مشکل هم راه حلی وجود دارد. بگذارید که مسئله را یک بار دیگر مرور کنیم. قرار است که گلوله‌ای به شکل کاملا تصادفی انتخاب شود و مکان آن به عنوان خروجی گزارش شود. اینکه کدام گلوله انتخاب شود اصلا نباید در آمار تاثیری داشته باشد. فرض کنید که در جعبه‌ای که داریم یک گلوله را از بقیه مشخص کنیم. نشان دادیم که اگر بعد از رسیدن به تابع توزیع تعادلی به بازی ادامه دهیم تابع توزیع به هم نمی‌خورد. ولی مطمئنا ادامه بازی در چیدمان گلوله‌ها در خانه‌ها تغییر ایجاد می‌کند. به این معنی که اگر در بازه‌های زمانی نسبتا بزرگ به گلوله‌ها نگاه کنیم این گلوله متمایز

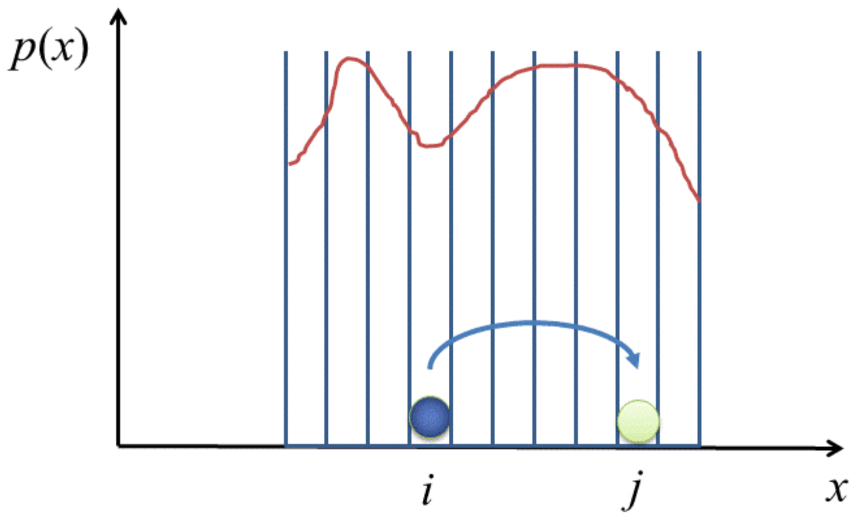
[37] Metropolis

در خانه‌ی دیگری یافت خواهد شد. مجددا احتمال حضور این گلوله در هر خانه با تابع توزیع دلخواه ما داده می‌شود. در نتیجه اگر مکان این گلوله در زمان‌های مختلف را گزارش کنیم. دنباله‌ای از اعداد خواهیم داشت که حتما تابع توزیع دلخواه ما را خواهد داشت.



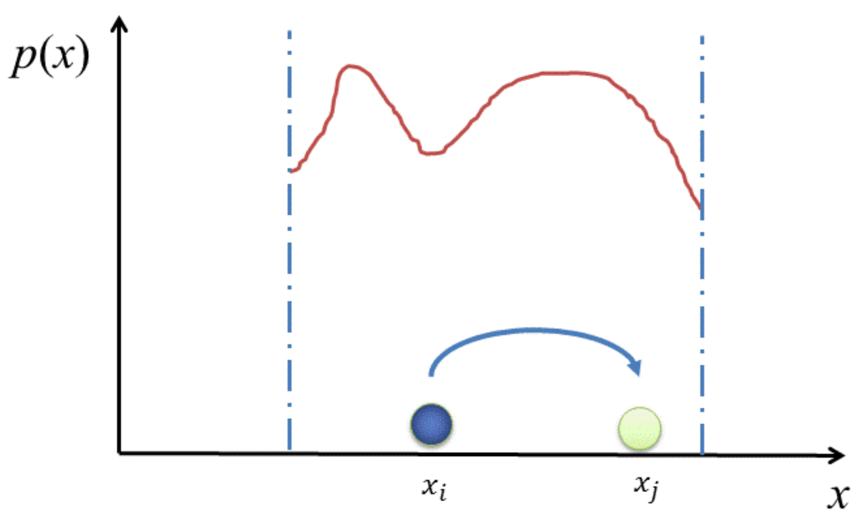
شکل 18 می‌توان از میان تمام گلوله‌ها یکی را نشان کرد و مکان انرا گزارش کرد.

دیدیم که یک مولد اعداد کاتوره‌ای خوب باید دو خاصیت مهم را داشته باشد؛ توزیع مناسب و عدم همبستگی. در مورد تابع توزیع اطمینان بدست آوردیم که جای نگرانی نیست. ولی در مورد عدم همبستگی باید کمی بیشتر دقت کنیم. به این موضوع دوباره باز می‌گیردیم. قبل از آن بهتر است نگاهی به گلوله‌های دیگر هم بیاندازیم. حال که دنباله اعداد کاتوره‌ای با گزارش مکان فقط یک گلوله ساخته می‌شود، چه نیازی به بقیه گلوله‌ها داریم. پاسخ ساده است؛ احتیاجی نداریم.



شکل 19 فقط کافی است که یک گلوله را دنبال کنیم و نیازی به حفظ بقیه نداریم.

فرض کنید که گلوله در لحظه‌ای از زمان در خانه ی i قرار گرفته است. در این بازی فقط کافی است که مکان جدیدی برای گلوله، مثل خانه‌ی j را بطور کاملا تصادفی انتخاب کنیم. احتمال رفتن گلوله از خانه‌ی i به خانه‌ی j با تابع متروپولیس (4) داده می‌شود. این دینامیک ساده باعث می‌شود که احتمال ظهور گلوله در خانه‌ها با تابع توزیع $p(x)$ متناسب باشد. اولین نتیجه ساده و مثبت این فرآیند این است که ما را از حصار خانه بندی رها می‌کند. هیچ دلیلی ندارد که نا پیوستگی خاصی به دلیل وجود خانه‌ها به گلوله‌ی ما تحمیل شود.



شکل 20 لازم نیست که خود را به خانه ها یا شبکه محدود کنیم و گلوله می‌تواند به هر نقطه‌ای در فضا برود.

در هر قدم نقطه‌ای تصادفی در دامنه‌ی تابع توزیع انتخاب می‌شود و گلوله با قاعده‌ی متروپولیس شانس خود را برای رفتن به خانه‌ی جدید امتحان می‌کند.

8.6. آلگوریتم متروپولیس

حال به موضوع عدم همبستگی میان اعداد دنباله بر می‌گردیم. در مثالی که در بالا معرفی کردیم به دلیل اینکه x_j کتره‌ای انتخاب می‌شود پس اعداد دنباله در صورت تغییر باید بدون همبستگی باشند[۳۸]. ولی فراموش نکنیم که همیشه این احتمال وجود دارد که گلوله به مکان جدید نرود. این مشکل برای توابع توزیع با دامنه‌ی نا محدود خیلی جدی‌تر بروز می‌کند. از آنجا که انتگرال یک تابع توزیع باید محدود باشد، برای یک تابع توزیع با دامنه‌ی نا محدود در بیشتر دامنه، تابع توزیع مقداری ناچیز دارد. بدیهی است که برای یک تابع توزیع با دامنه نامحدود انتخاب یک نقطه جدید در دامنه بی معنی است. فرض می‌کنیم که این مشکل را بتوان با قطع کردن دم تابع توزیع در نقاط دور حل کرد. با این وجود گلوله در لحظه‌ای در نقطه‌ای قرار داشته باشد که تابع مقدار قابل توجهی داشته باشد (انتظار نداریم که این اتفاق کم بیافتد). اگر x_j را به صورت کتره‌ای در تمام دامنه انتخاب کنیم در بیشتر نقاط تابع آنقدر کوچک است که هیچ شانسی برای جابجایی گلوله وجود ندارد. در حقیقت گلوله در این نقطه یخ می‌زند و باید مدت‌ها منتظر بماند تا بر حسب تصادف نقطه‌ای که مقدار تابع در آن قابل توجه است انتخاب شود که شاید بتواند به آن نقطه برود.

در قبل ثابت کردیم که آلگوریتم متروپولیس سیستم ما را به تابع توزیع مورد نظرمون هدایت می‌کند. ولی نگفتیم که این کار را در چه زمانی انجام می‌دهد. بدیهی است که برای یافتن نقطه ثابت (تعادل) در فضای توابع، سیستم باید بتواند این فضا را جستجو کند. یعنی برای یافتن این نقطه باید دینامیک داشته باشد. این انتظار که هرچه دینامیک سیستم سریع‌تر باشد، رسیدن به نقطه ثابت نیز راحت‌تر خواهد بود کاملا معقول است. پس با این حساب در صورت داشتن یک تابع توزیع متمرکز با دامنه‌ی گسترده، دینامیک سیستم آنقدر کند است که برای همگرا شدن به نقطه ثابت زمانی بسیار طولانی لازم است، و این اصلا مطلوب نیست.

برای حل این مشکل می‌توان با کوتاه کردن طول قدم‌ها دینامیک سیستم را تسریع کرد. در صورتی که تابع مورد نظر تابعی هموار باشد (که معمولا برای توابع توزیع احتمال فرض درستی است)، انتظار می‌رود که مقدار تابع در همسایگی خیلی تغییر نکند. پس اگر قدم‌هایی که برای یافتن مکان جدید بر می‌داریم در همسایگی نقطه‌ی توقف فعلی گلوله باشد، نسبت $p(x_j)/p(x_i)$ آنقدر مقدار دارد که شانس جابجایی را به گلوله بدهد. به این ترتیب گلوله به حرکت در می‌آید و به سیستم این شانس را می‌دهد که به سوی نقطه ثابت در فضای توابع جذب شود. پس می‌توان شکل نهایی آلگوریتم متروپولیس را نوشت.

---

[38] بهتر است بگویم که عدم همبستگی معادل با مولد مورد استفاده را دارد.

آلگوریتم متروپولیس:

1. $x = x_0$
"مقدار دهی اولیه (بهتر است که نقطه شروع در مکانی باشد که تابع مقدار قابل توجهی داشته باشد)"
2. $y = x + \Delta\, Rand(-1, 1)$
طول قدم $= \Delta$
3. If $Rand(0,1) < p(y)/p(x)$ Then $y = x$
" در صورتی که شرط متروپولیس بر آورده شود قدم قبول می‌شود
4. Loop (2) + (3)
"قدم‌های اصلی باید در یک حلقه قرار داده شوند"

آلگوریتم فوق به با تبدیل y, x و Δ به بردارهای d مولفه‌ای می‌تواند راحتی برای توابع توزیع d بُعدی (متغیره) به کار برده شود.

8.7 نرخ قبولی و انتخاب طول قدم

انتخاب طول قدم به شدت بر دینامیک و زمان رسیدن به تعادل تاثیر می‌گذارد. در حالت حدی طول قدم‌های خیلی بزرگ ما را به شکل قبلی مسئله و مشکل یخ زدگی و توقف گلوله می‌رساند. در این حالت بیشتر تلاش‌هایی که متحرک برای جابجایی بر می‌دارد ناکام می‌ماند. در سوی دیگر اگر قدم‌ها خیلی کوتاه انتخاب شود، با وجود اینکه گلوله تقریبا در هر قدم جابجا می شود، این جابجایی آنقدر کوتاه است که برای گشتن فضای فاز باز نیاز به زمان خیلی زیاد است. اگر نسبت قدم‌هایی که برای جابجایی قبول می‌شوند به کل تلاش‌های مونت کارلو را "نرخ قبولی"[39] a_r بنامیم، دیدیم که که هیچ یک از دو حد $a_r \to 0$ و $a_r \to 1$ برای سیستم ما مطلوب نیستند. بدون آنکه در اینجا اثبات کنیم می‌پذیریم که بهترین حالت برای سیستم که درسریع ترین زمان بتواند به تابع توزیع دلخواه برسد وقتی است که $a_r \approx 0.5$ باشد.
تنظیم نرخ قبول با تنظیم طول قدم امکان پذیر است. برای بالا بردن نرخ قبول باید طول قدم را کوچک کرد و افزایش طول قدم نرخ قبولی را کاهش می‌دهد. این انتظار وجود ندارد که مقدار نرخ قبولی دقیقا بر روی مقدار نیم تنظیم شود. در عمل $0.3 < a_r < 0.7$ دینامیک قابل قبولی به سیستم ما می‌دهد.

8.8 طول همبستگی

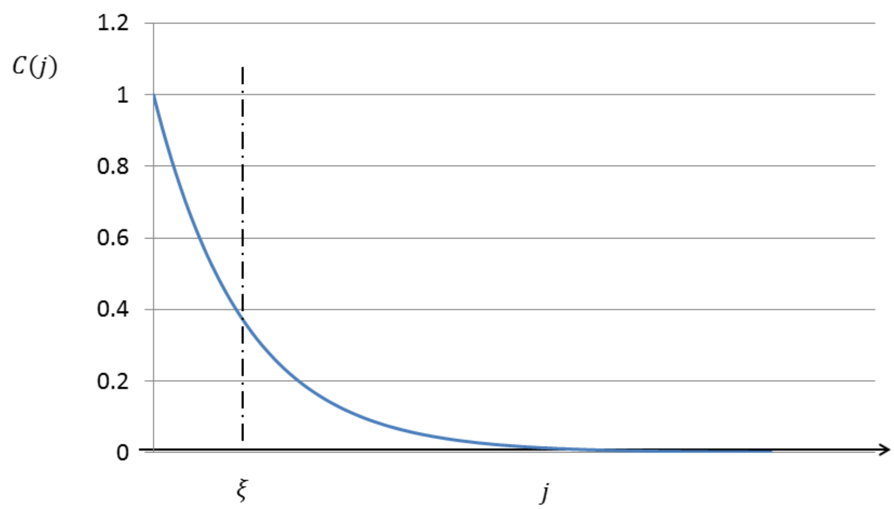
---

39 Acceptance rate

تا کنون صحبت‌های غیر دقیق و کیفی از همبستگی میان دنبالهی اعداد و نیز زمان لازم برای اینکه تابع توزیع تعادلی بدست آید داشته ایم. حال زمان آن رسیده که این مفاهیم را کمی کنیم. اگر خروجی مولد ما دنباله اعداد$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ باشد، تابع خود همبستگی به شکل زیر معرفی می‌شود:

$$C(j) = \frac{\langle x_i x_{i+j}\rangle_i - \langle x_i\rangle_i \langle x_{i+j}\rangle_i}{\sigma^2} \quad (5)$$

که در این رابطه $\sigma^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ مجذور انحراف از معیار دنباله است و منظور از $\langle\dots\rangle_i$ متوسط‌گیری بر روی اندیس i است. به راحتی می‌توان دید که $C(0) = 1$ است. برای j های خیلی بزرگ مقادیر x از یکدیگر مستقل می‌شوند. از آنجا که متوسط حاصل ضرب دو کمیت تصادفی و مستقل برابر است با حاصل ضرب متوسط آن کمیت‌ها، مقدار خود همبستگی در این حد هم قابل پیش بینی است و داریم $C(j \to \infty) \to 0$. برای بیشتر فرآیندهای تصادفی این تابع به صورت نمایی افت می‌کند و می‌توان آن را به خوبی به تابع $C(j) = e^{-\frac{j}{\xi}}$ برازش داد. دراین رابطه ξ زمان واهلش یا زمان همبستگی نامیده می‌شود.



شکل 21 تابع خود همبستگی به صورت نمایی با زمان افت می‌کند و در زمان واهلش به $\frac{1}{e}$ می‌رسد

این نشان می‌دهد که همبستگی عددهایی به فاصله ی ξ در دنباله به مقدار $1/e$ کاهش یافته و با تقریب خوبی می‌توان آنها را مستقل فرض کرد. از طول همبستگی دو استفاده‌ی مهم می‌کنیم. اول اینکه می‌توانیم تعداد عددهای کاتوره‌ای مستقل ازهم در دنباله را بدست آوریم. مثلا اگر دنباله 10^6 عدد داشته باشد ولی زمان همبستگی 100 باشد یعنی در این دنباله 10^4 عدد مستقل وجود دارد. نکته دیگر این است که زمان همبستگی میعاری از عدم وابستگی به گذشته است. یعنی این عدد میعاری است از اینکه چقدر باید صبر کرد تا خروجی های مولد مستقل از شرایط اولیه بشود. این همان چیزی است که دنبال آن می گشتیم؛ زمان واهلش یا تعادل سیستم. این زمانی است که باید منتظر بشویم تا گلوله‌ها به توزیع دلخواه ما برسند. در عمل ما بیش از یک زمان همبستگی برای اطمینان به رسیدن به تعادل منتظر میشویم.

8.1	
تمرین	1. با روش متروپولیس مولدی برای تولید اعداد کترهای با توزیع گوسی بسازید. 2. طول قدمها را به گونهای تعیین کنید که نرخ قبولی مقادیر $\{0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$ را داشته باشد. 3. برای تمام نرخهای قبولی فوق طول همبستگی را بیابید.

نکته 1:
برای این که شرط تعادل جزیی به درستی اعمال شود لازم است که احتمال تلاش در رفتن از یک نقطه به نقطهی دیگر با احتمال تلاش برای برگشت برابر باشد. اهمیت این نکته در مثالهای پیچیدهتر در بخشهای بعدی بیشتر مشخص میشود. ولی به عنوان سادهترین مثال برای زمانی که با دستگاههای قطبی یا کروی کار میکنیم باید به سهم ژاکوبی در عنصر حجم برای تلاش در جابجایی ها دقت کرد.

بیشتر بدانیم:

روش مونت کارلو و متروپولیس در بیشتر کتابهای مقدماتی شبیه سازی به خوبی بحث میشوند. یکی ازمعروفترین پیشگامان در استفاده از این روش و معرفی کاربردهای آن در علوم مختلف Kurt Binder استاد پیشکسوت دانشگاه ماینز است که کتابهای متعددی در این رابطه نوشته است. این کتابهای از مقدمات مونت کارلو تا کاربردهای تخصصی و پیشرفته ی آن را پوشش میدهند. به خوانندگانی که میخواهند در این موضوع بیشتر بدانند، با جستجو در کتابهای این پژوهشگر متناسب با دانش و علاقه خود مطمئنا میتوانند مباحث جالبی را بیابند.
شاید مقاله متروپولیس و همکارانش:

N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, and E. Teller,

"Equation of State Calculations by Fast Computing Machines". *Journal of Chemical Physics* **21,** page:

1087–1092, Year 1953,

بعد از گذشت بیش از نیم قرن کمی قدیمی به نظر بیاید ولی مطالعه آن هنوز هم ارزشمند است. شاید ایدهای که در این مقاله مطرح شده است به نظر ساده بیاید ولی اگر تعداد مقالاتی که در آنها نام متروپولیس آورده شده است را جستجو کنید شاید تعجب کنید که ببینید این تعداد هم مرتبه با تعداد مقالاتی است که در آنها نام افرادی مانند شرودینگر یا بوهر یا دیراک آمده است. شاید به این طریق بتوانید به عمق اثر این مقالهی تاریخی در علم پی ببرید.