



$$\alpha z + B \geq 0 \rightarrow B \geq -\alpha z$$

$$S = \alpha(z) + B \quad \begin{cases} S_{\min} = -\alpha R + B = 2\alpha R \\ S_{\max} = \alpha R + B = 4\alpha R \end{cases}$$

$$-\alpha R + B = \frac{1}{2} (\alpha R + B) \rightarrow +\frac{3}{2} \alpha R = \frac{B}{2} \rightarrow \boxed{\frac{B}{\alpha} = +3R}$$

$$S = \alpha(z + 3R)$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{\int \alpha(z + 3R) \hat{r} d(\cos \theta) dr}{\int \alpha(2\pi r^2) d(\cos \theta) dr}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \rightarrow \int_0^R \int_{-1}^1 (r \cos \theta - 3R) (\cos \theta \hat{z}) r^3 d(-\cos \theta) dr &= \alpha \int_0^R \left[-r^4 \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{-1}^1 - 3R r^3 \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{-1}^1 \right] dr \\ &= \int_0^R -r^4 (-\frac{2}{3}) dr \hat{z} = \frac{2}{3} \left(\frac{R^5}{5} \right) = \boxed{\frac{2}{15} R^5 \alpha \hat{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_0^R \int_{-1}^1 \alpha(r \cos \theta + 3R) r^2 d(-\cos \theta) dr &= \alpha \int_0^R \left[r^3 \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{-1}^1 - 3R r^2 \cos \theta \Big|_{-1}^1 \right] dr \\ &= \alpha \int_0^R (2)(-3R) r^2 dr = 6\alpha R \left(\frac{R^3}{3} \right) = \boxed{2\alpha R^4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{\frac{2}{15} R^5 \alpha \hat{z}}{2\alpha R^4} = \boxed{\frac{1}{15} R \hat{z}} \quad \checkmark \quad \therefore$$

$$R_{cm} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow \ln R_{cm} = \ln I_1 - \ln I_2 \rightarrow$$

$$\frac{\Delta R_{cm}}{R_{cm}} = \frac{\Delta I_1}{I_1} + \frac{\Delta I_2}{I_2} \quad \left/ \begin{cases} I_1 = \frac{(1-0) \times (1-(-1))}{2} \langle f_1 \rangle \\ I_2 = 2 \langle f_2 \rangle \end{cases} \right.$$

$$\langle f_1 \rangle = \frac{1}{n} \int (r \cos \theta + 3R) r^3 \cos \theta = \frac{1}{n} \int (r \cos \theta + 3R) r^3 \cos \theta \quad \left. \begin{matrix} -1 < \theta < 1 \\ 0 < r < R \end{matrix} \right\}$$

$$\langle f_2 \rangle = \frac{1}{n} \int (r \cos \theta + 3R) r^2 = \frac{1}{n} \int (r \cos \theta + 3R) r^2$$

برای محاسبه این انتگرال از روش نمونه برداری استفاده شده است به خاطر سرعت بالاتر برنامه و برای ۱۰۰۰,۰۰۰ بار تکرار انجام شده . با استفاده از تمرین دیدیم بعد از ۱ میلیون بار هر دو روش جوابی نزدیک جواب اصلی را میدهند به همین علت روش نمونه برداری انتخاب شد که سریع تر انجام میشود. مقدار واقعی مرکز جرم برابر 1/15 است برای شعاع کره ی ۱.

خطا نمونه برداری با مقدار واقعی	زمان اجرا نمونه برداری	خطا نمونه برداری	نمونه برداری	n
0.000350	39.45 s	0.0003421	0.6664304	1000,000