Université de Bretagne Occidentale

Note de cours

# Ondes et Matière

*Malo Kerebel*

Cours par
Bruno Rouvellou

Semestre 6, année 2020-2021

# Table des matières

# Chapitre 1

# Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide

**CM1 (2021-01-15)**

## 1.1 Équations de Maxwell

1. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div\vec{B} = 0$$

3. $$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. $$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = rot\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

1) Forme locale du théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$
2) pas de monopole magnétique : $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
3) Induction de Faraday : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$
4) Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

## 1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations 1 et 4 deviennent :

$$div\vec{E} = 0 \qquad rot\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\rho$ et $j$ sont nuls dans le vide ((absence de source de courant).

### 1.2.1 Équations de propagation

En prenant le rotationnel de l'équation (3) il vient :

$$rot(rot\vec{E}) = -rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B}$$

À l'aide de l'équation 4' on obtient :

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

$$rot(rot\vec{E}) = gr\vec{a}d(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

compte tenu de 1' :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

avec $\mu_0$ la perméabilité du vide

De même pour B en utilisant 4', 3 et 2 On a l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}$$

### 1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

$$\vec{E} = \vec{E_m}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{1.1}$$

$$\vec{B} = \vec{B_m}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{1.2}$$

La divergence du champ électrique est donné par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z)\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

La condition $div\vec{E} = 0$ implique donc que $\vec{E_m} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ est transversal, de même $div\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ est transversal.

À l'aide l'équation 3 on obtient :

$$\vec{k} \wedge \vec{E_m} = \omega \vec{B_m} \text{ ou } \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{B}$$

En notation complexe c'est plus simple.

$$div\vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \qquad rot\vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E} \qquad \Delta\vec{E} - k^2\vec{E}$$

**relation de dispersion**

$$k = \frac{\omega}{c}$$

**Polarisation** Hypotèse : propagation selon $o_z \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz$

$$E_x = E_{m_0x}\cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = E_{m_0y}\cos(kz - \omega t + \phi)$$
$$E_z = 0$$

Par définition ce qui définit la polarisation est la direction de E.

Les composantes du champ électriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{E_x}{E_{m_0x}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{m_0y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\phi - \sin(kz - \omega t)\sin\phi$$

d'où après simplification :

$$\frac{E_y^2}{E_{m_0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{m_0x}^2} = \frac{2E_y}{E_{m_0x}^2}\frac{E_y}{E_{m_0y}}\cos\phi + \sin^2\phi$$

Dans le cas $\phi = 0 ou \phi = \pi$ on a une polarisation rectiligne. Si on a $\phi \pm \pi/2$ on a une polarisation circulaire.

### 1.2.3 Vecteur de Poynting

Charge élémentaire $\rho d\tau$ (Charge $\rho$ dans un volume élémentaire $d\tau$) subie dans oem : $\vec{F} = \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance fourni à cette charge élémentaire est :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v} &= \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

(j la densité du courant) avec la 4ème équation de Maxwell on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} rot\vec{B} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant :

$$div(\vec{U} \wedge \vec{V}) = rot(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot rot\vec{V}$$

Ainsi, on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot rot\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

À l'aide de la troisième équation de Maxwell

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot rot\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On définit le vecteur de Poynting R par la relation :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\vec{R} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

avec $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

En abscence de courant on a la loi de conservation des charges :

$$div\vec{R} + \frac{\partial}{\partial t} w = 0$$

On peut considérer le vecteur de Poynting cocmme une "densité de courant d'énergie". Il est de la forme :

$$\vec{R} = w\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega\mu_0}$$

Finalement :

$$\vec{R} = \frac{kE^2}{\omega\mu_0}\frac{\vec{k}}{k}$$

La densité d'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2$$

On peut écrire :

$$E = \frac{\omega}{k}B = cB$$

La densité d'énergie magnétique est donc égale à la densité d'énergie électrique

### 1.2.4 Impédance cacractéristique

Dans le cas d'une onde plane monochromatique on définit l'impédance caractéristique d'un milieu par :

$$Z = \frac{E}{H}$$

Dans le vide on définit H par :

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

Donc l'impédance du vide est de

$$Z_0 = 377\Omega$$

# Chapitre 2

# Ondes et matières dans des milieu linéaire homogène isotrope

**CM2 (2021-01-20)**

## 2.1 Milieux dispersifs

C'est un milieu matériel, transparent aux ondes électro-magnétiques Les ondes planes progressives (O.P.P) restent solutions de l'équation de propagation $\neq$ de celle du vide.

Les conditions à respecter sont différentes, nouvelles relation de dispersion

**Ex :** O.P.P.M

Propagation suivant $O_z$ et polarisation suivant $O_y$

$$E_y = E_m e^{i(kz-\omega t)}$$

**Def :** La relation de dispersion est la relation h$(\omega, \omega(h)$ entre la pulsation et le nombre d'onde

**Def** La vitesse de phase est la vitesse de propagation des plans équiphases

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_y = E_m e^{i(kz-\omega t)} &= E_m e^{ik(z-\frac{\omega}{k}t)} \\ &= E_m e^{ik(z-v_\phi t)} \end{aligned}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

- Dans le vide $v_\phi$ est indépendant de la pulsation $\omega$ $v_\phi = c$
Dans le vide, $k = \frac{\omega}{c}$
- Dans la matière $v_\phi$ dépend en général de $\omega$

**Def :** un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase dépend de la pulsation

**Def :** indice, $v_\phi = \dfrac{c}{n(\omega)}$

$\Rightarrow$ Conséquence : Superposition d'OPPM de différente pulsation, n'est pas en générale une OPPM car les ondes ne se propagent pas à la même vitesse.

### 2.1.1 E : Somme de 2 OPPM

$$\Rightarrow E_y = E_m \left( e^i(k_1 x - \omega_1 t) + e^i(k_2 x - \omega_2 t) \right)$$

avec :

$$k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}$$
$$k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}$$
$$\omega = \omega(k)$$
$$\Delta k = k_2 - k_1 \ll k_0$$

On fait un DL1 autour de $k_0$ : $\left( \omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}_{k_0} \right)$

$$\omega_1 = \omega(k_1) \simeq \omega(k_0) - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0) = \omega_0 - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0)$$
$$\omega_2 = \omega(k_2) \simeq \omega(k_0) - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0) = \omega_0 - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0)$$

$$\Rightarrow E_y = E_m e^{i(k_0 x - \omega t)} \left[ e^{i(-\frac{\Delta k}{2}x + (\frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0))t)} + e^{i(+\frac{\Delta k}{2}x - (\frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0))t)} \right]$$

$$\Rightarrow E_y = 2E_m e^{i(k_0 x - \omega_0 t} \cos(\frac{\Delta k}{2}(x - \omega'(k_0)t))$$
$$\Rightarrow E_y = Re(E_z)$$

$$\Rightarrow E_y = 2E_m\cos(k_0(x-\frac{\omega_0}{k_0}t))\cos(\frac{\Delta k}{2}(x-\frac{\omega_0}{k_0}t))$$

Produit de 2 OPPM qui se propagent à deux vitesses différentes

$$v_1 = \frac{\omega_0}{k_0} \qquad v_2\omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}_{k=k_0}$$

On obtient une onde modulé, avec une onde porteuse et une moduleuse.

$$v_1 = \frac{\omega_0}{k_0} = v_\phi \qquad v_2 = \frac{d\omega}{dk}_{k_0} = v_g \text{ vitesse de groupe}$$

$v_g$ vitesse de déplacement de l'enveloppe (modulation ici)

En terme de signaux $\equiv$ vitesse de transmission de l'info En terme d'énergie $\equiv$ vitesse de transport de l'énergie

Dans le vide

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dkc}{dk} = c = v_\phi$$

Dans un milieu dispersif

$$v_g \neq v_\phi$$

### 2.1.2 Généralisation : paquets d'ondes

En mécanique quantique ça permet de rendre la dualité onde-corpuscule possible

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kz-\omega t)}dk$$

Somme d'une infinité d'onde, plutot que juste 2 dans l'exemple précedant. On prendra généralement $A(k)$ une gaussienne.

$$\text{On prendra } \omega = \omega(k_0) + (k-k_0)\frac{d\omega}{dk}_{k_0}$$

On transforme $E_y$ en :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp(-\omega(k_0)t + k_0z + (k-k_0)z - t(k-k_0)\frac{d\omega}{dk}_{k_0})dk$$
$$E_y = e^{i(k_0z-\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp\left(i\left[(k-k_0)(z-\frac{d\omega}{dk}_{k_0}t)\right]\right)dk$$

Dans un milieu non dispersif, les vitesses sont les même et donc le paquet d'onde n'est pas déformé, dans un milieu dispersif, les vitesses sont différentes et donc le paquet d'onde se déforme.

**Remarque :** Souvent A(k) est une gaussienne on parle de paquet d'onde gaussien

## 2.2 Polarisation de la matière

On définit le moment dipolaire (ou polarisation) $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

avec N, le nombre de molécule par unité de volume et $\vec{p}$ le moment dipolaire moyen par molécule.

a) Potentiel créé par les dipoles d'un dipole électrique.

$$V_2 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Dans un volume $\tau'$, le volume élementaire $d\tau'$, autour du point A, M le point où l'on calcule le potentiel.

$$dV(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P} \cdot \vec{r_1}}{r_M^2}d\tau'$$

$$dV(m) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}(\frac{1}{r_m})\right)d\tau'$$
$$dV(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}'(\frac{1}{r_m})\right)d\tau'$$

Avec :

$$\vec{\nabla}'(\frac{1}{r}) = -\frac{-\vec{r}_1}{r^2} = \frac{\vec{r_1}}{r^2}$$

Calculé en A pour permettre l'intégration sur le volume $\tau'$, on a :

$$\vec{\nabla}'(\frac{1}{r}) = \frac{\vec{r_1}}{r^2}$$

On a $r \gg$ distance de la molécule $\Rightarrow$ approximation dipolaire par intégration
On intègre donc $dV(m)$ :

$$V(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'}\vec{p} \cdot \vec{\nabla}'(\frac{1}{r_m})d\tau'$$

Or $\vec{\nabla}(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$
Donc avec $\vec{A} = \vec{p} \quad f = \frac{1}{r}$ :

$$V(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{\tau'}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{p}}{r}\right)d\tau' - \int_{\tau'}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{p}}{r}d\tau'\right)$$

Par Green-ostrogradski :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\oint_{S'}\frac{\vec{p}\cdot d\vec{S'}}{r} - \int_{\tau'}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{p}}{r}d\tau'\right)$$

Avec S', la surface qui entoure $\tau'$ dirigé vers l'extérieur

On définit :

$$\sigma_{pol} = \vec{p}\cdot\vec{n}$$
$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla}'\cdot\vec{p}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\oint_{S'}\frac{\sigma_{pol}\cdot d\vec{S'}}{r} - \int_{\tau'}\frac{\rho_{pol}}{r}d\tau'\right)$$

$\sigma_{pol}$ est la densité surfacique de chage liées et $\rho_{pol}$ est la densité volumique de charge liées.

**CM3 (2021-01-25)**

$d\tau' = \vec{d}\cdot d\vec{S}$, Les charges qui vont passer à travers dS, s'obtient avec :

$$dQ = NQ_m\vec{d}\cdot d\vec{S'}$$

Avec $N =$ Nombre de molécule par Charge traversant dS' sous l'action de E

$$dQ = N\vec{p}\cdot d\vec{S'} = \vec{P}\cdot d\vec{S'} = (\vec{P}\cdot\vec{n})d\vec{S'}$$

$$\sigma_{pol} = \frac{dQ}{dS'} = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

La charge totale qui a traversé S' est :

$$Q = \int_{S'} dQ = \int_{S'}\vec{P}\cdot d\vec{S'}$$

Charge restante à l'intérieur de $\tau'$ : $-Q = \int_{\tau'}\rho_{pol}d\tau'$ Par Green OStrogradski on a :

$$-Q = -\int\vec{\nabla}\cdot\vec{P}d\tau'$$

Donc :

$$P_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

c) Généralisation

* Le calcul de V à l'extérieur du milieu est calculé identiquement à l'intérieur

* E est créé par la distribution extérieure de charge à l'origine de (pas réussi à lire)

$$V_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\tau'} \frac{\rho_{libre} + \rho_{pol}}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{S'} \frac{\sigma_{libre} + \sigma_{pol}}{r} dS'$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\tau'} \frac{\rho_{libre} + \rho_{pol}}{r^2} \vec{r_1} d\tau' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{S'} \frac{\sigma_{libre} + \sigma_{pol}}{r^2} \vec{r_1} dS'$$

(On écrira ensuite $\sigma_l/\rho_l$ avec le l pour libre et $\sigma_{pol}/\rho_{pol}$ pour polarisation (ou les charges liées)

d) Densité de courant de polarisation

Si $E = E(t) \Rightarrow$ mouvement des charges liées $\Rightarrow \vec{j_{pol}}$

Conservation des charges donc :

$$\iint\limits_{S} \vec{j_{pol}} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\tau} \rho_{pol} d\tau$$

Car la vitesse des charges qui traverse S est égal à la vitesse de diminution à l'inter**** de S ($\tau$), par green Ostrogradski on a :

$$\iiint\limits_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{j_{pol}} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\tau} -(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau$$

$$= \iiint\limits_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\tau$$

$$\Rightarrow \vec{j_{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} (\text{Ampère}/m^2)$$

### 2.2.1 Polarisation magnétique et Aimantation

**Définitions**

Diamagnétique, phénomène très faible, induit, moment magnétique compensé

Paramagnétique, phénomène faible, orientation des molécules, moment magnétique non compensé, l'intensité du phénomène est inversement proportionelle à la température (les molécules sont plus désorganisé à haute température)

Ferromagnétique, phénomène fort, phénomène collectif, persistant, non linéaire

**Identification** entre magnétique et électrique :

Une boucle de courant génère un champ magnétique, dont l'intensité varie suivant : $\vec{m} = IS\vec{k}$

En électrique on a la polarisation : $\vec{P} = N\vec{p}$ en magnétique on a similairement : $\vec{M} = N\vec{m}$ (qu'on appele plutot aimantation).

Le moment dipolaire : $V_{dip} = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{r_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ en magnétique on a : $\vec{A_{dip}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m} \wedge \vec{r_1}}{\sigma^2}$ (On remarquera que c'est désormais un vecteur et non un scalaire)

$dV_{dip} = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{r_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ et en magnétique : $d\vec{A_{dip}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{M} \wedge \vec{r_1}}{\sigma^2}$

Densité de charge surfacique en électrique : $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ en magnétique la densité linéique est : $\vec{\lambda_m} = \vec{M} \wedge \vec{n}$

Et de même en dimension supérieur : $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ en magnétique : $\vec{j_m} = rot\vec{M}$

## 2.3 Équation de Maxwell dans les milieux linéaires homogènes isotropes

Deux équation sont des équation de structure et ne seront donc pas modifié

$$div\vec{B} = 0 \qquad rot\vec{E} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$$

La première équation va changer :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rho = \rho_l + \rho_{pol}$$

Avec $\rho_{pol} = -div\vec{P}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{.} div\vec{E} = \rho_l - div\vec{P}$$
$$\Leftrightarrow div(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

On note donc $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ l'induction électrique

$$\Leftrightarrow div\vec{D} = \rho_l$$

Si le milieu est un LMHI on a

$$\vec{p} = \propto \vec{E_{loc}}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = N\vec{p} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$$

Avec $\chi_e$ la suceptibilité électrique, la capacité du milieu a réagir à un milieu électrique.

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$$

Donc dans un MLHI on a $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e) = \varepsilon_0\varepsilon_r$

**Remarque** Dans un MLHI $\vec{D} \propto \vec{E}$

La quatrième équation de Maxwell va changer aussi.

$$rot\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

Dans un MLHI on aura :

$$\vec{j} = \vec{j_l} + \vec{j_m} + \vec{j_{pol}}$$

La densité de courant lié aux charges libres et aux charges liées Avec $\vec{j_{pol}} = \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ et $\vec{j_m} = rot\vec{M}$, donc :

$$rot\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j_l} + rot\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

On définit le champ magnétique $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m}$

Comme avant, dans un MLHI on a $\vec{M} = \chi_m\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m\vec{H}$, avec encore une fois, $\chi_m$ un scalaire, la suceptibilité magnétique.

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

Avec $\mu = \mu_0(1+\chi_m) = \mu_0\mu_r$

**Remarque** Si le matériau est transparent on prendra $\chi_r = 1$ et donc $\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{H}$

Dans un matériau diamagnétique on a $\chi_m$ est inférieur à 0 et est indépendant de la température, pour le paramagnétique $\chi_m$ est inversement proportionnel à la température et est supérieur à 0 et pour un matériau ferromagnétique, $\chi_m$ augmente quand la température diminue et est $\gg 0$, il y a existence de la température de Curie, en dessous de laquelle un matériau est ferromagnétique et la valeur de $\chi_m$ dépend de la valeur de H, c'est donc non linéaire.

Dans un MLHI on peut obtenir :

$$rot\vec{H} = \vec{j_l} + \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} = \vec{j_l} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
&M1 : div\vec{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon} \Leftrightarrow divD \vec{=} \rho_l \\
&M2 : div\vec{B} = 0 \\
&M3 : rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&M4 : rot\vec{H} = \vec{j_l} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

## 2.4 Modèle de Drude-Lorrentz

Hypothèse de départ, l'électron est lié aux atomes par une force de type ressort (oscillateur), la réponse de l'oscillateur détermine la polarisation de l'atome.

Modèle de DL :

- L'électron a une charge -e et une masse m, une vitesse $\vec{v}$ et une position $\vec{r}$
- Force de Lorrentz : $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
- Force de frottement visqueux(collision avec son environnement) : $-\alpha\vec{v}$
- Force de rappel (interaction des noyaux) : $-k\vec{r}$

Dans la force de Lorrentz la force magnétique est négligé sauf si on rajoute une force magnétique extérieur

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

Si on néglige la dépendance spaciale de la force excitatrice (taille de l'atome très inférieure par rapport à la longueur d'onde) : $\underline{\vec{E}} = \vec{E_0}e^{-i\omega t}$

Les solutions sont du type :

$$\vec{r} = \vec{r_m} e^{-i\omega t} \quad \text{avec} \vec{r_m} = \vec{r_0} e^{i\phi}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \underline{\vec{r_m}} - i\omega \underline{\vec{r_m}} + \omega_0^2 \underline{\vec{r_m}} = -\frac{e}{m} \vec{E_0}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\vec{r_m}} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E_0}$$

1. $\tau = 1/\gamma$ temps de relaxation (caractéristique de l'amortissement)
2. $k$ constante de la force de rappel associé à la pulsation propre de resonnance ; $\omega_0$

Pour un électron lié $k = 0$ et $\omega_0 = 0$

Dans le modèle DL, pour un conducteur on a $\omega_0 = 0; \gamma \neq 0$, pour un diélectrique on a $\omega_0 \neq 0; \gamma \neq 0$ et pour un plasma on a $\omega_0 = 0; \gamma = 0$

## 2.5 Milieu diélectrique

**Hypothèse** Milieu diélectrique dilué : diélectrique parfait

$$\rho l = 0$$
$$\vec{j}l = 0$$

### 2.5.1 Équations de propagation

Les équation de Maxwell M3 et M1 sont inchangée

$$M1''(mlhi) : div\vec{D} = \rho l \Rightarrow div\vec{D} = 0$$
$$M4'' : rot\vec{H} = \vec{j}l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On mijote et on trouve :

$$\Delta \vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

L'équation de propagation de $\vec{E}$ dans un diélectrique parfait. de même pour $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned} rot(rot\vec{H}) &= \vec{grad}(div\vec{H}) - \Delta\vec{H} \\ &= \vec{grad}(\frac{1}{\mu}div\vec{B}) - \Delta\vec{H} \\ &= -\Delta\vec{H} \end{aligned}$$

Par la 4ème équation de Maxwell on a :

$$\begin{aligned} rot(rot\vec{H}) &= rot\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}rot\vec{D} \\ &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{E} \\ &= -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On trouve donc l'équation de propagation de $\vec{H}$ dans un diélectrique :

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

**Remarque** l'équation de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ est identique. Avec $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ homogène à une vitesse.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

**Remarque** les équations de propagation sont identique dans le vide.

### 2.5.2 O.P.P.M

#### a) Structure de l'onde

$$\begin{aligned} div\vec{E} &= 0 \\ div\vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

$$i\vec{k}\wedge\vec{E} = i\omega\vec{B}$$

$$\vec{k}\wedge\vec{E} = \omega\vec{H} \Rightarrow \vec{k},\vec{E},\vec{H} \text{ Trièdre direct équivalent au vide}$$

**b) relation de dispersion**

$$k^2 = n^2(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}$$

**c) Transport d'énergie**
Puissance fournie $\vec{E} \cdot \vec{j_l}$ par unité de volume de charge libre

$$\vec{j}l = rot\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j}l = rot\vec{H} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Or $div(\vec{u} \wedge \vec{v}) = rot\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot rot\vec{v}$, On a donc :

$$\vec{E} \cdot \vec{j}l = -div(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{H} \cdot rot\vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$div\vec{E} \wedge \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \tag{2.1}$$

On retrouve :

$$div\vec{R} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

avec $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ vecteur de Poynting (définition générale), en effet :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\frac{w_e}{w_m} = \frac{\varepsilon E^2}{\mu H^2} \tag{2.2}$$

Comme pour le vide, dans un diélectrique on trouve, $w_e = w_m$, la densité d'énergie électrique...

**d) Impédance du milieu**
L'impédance du milieu est donné par

$$Z = \frac{E}{H}$$

Or par la troisième équation de Maxwell : $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B} = \omega\mu\vec{H}$. Or par la relation de dispersion : $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$ donc :

$$Z = \mu \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

Dans un milieu non magnétique :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \mu_0 c\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{Z_0}{n} \quad \text{avec } Z_0 = 377\Omega$$

**CM4 (2021-02-03)**

### e) Dispersion et absorbtion

$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{-i\omega t}$$
$$\vec{B} = \vec{B_m}e^{-i\omega t}$$

#### $\alpha$) Suceptibilité électrique

$$\vec{P} = -\delta_e\vec{r} \quad \text{avec } \delta_e \text{ le moment dipolaire}$$

$$\vec{P_m} = \frac{\delta_e^2}{m}\frac{\vec{E_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}$$

On compare avec la relation de suceptibilité

$$\vec{P_m} = \epsilon_0\chi_e\vec{E_0}$$

$$\Rightarrow \chi_e = \frac{\omega_e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} = \chi_e' + i\chi_e''$$

$\chi_e \in \mathbb{C}$ il y a donc un déphasage entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$

$$\chi_e' = \frac{\delta_e^2}{M\varepsilon}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2/\tau^2}$$
$$\chi_e'' = \frac{\delta_e^2}{M\varepsilon}\frac{\omega/\tau}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

Quand on a $\omega$ grand devant $\omega_0$, $\chi_e'$ tend vers 0 $\vec{P}$ et $\vec{E}$ sont en opposition de phase lorsque $\omega$ est grand. Lorsque $\omega \to +\infty, \chi_e \to 0$ c'est comme si l'onde se propagé dans le vide, à haute fréquence le milieu est invisible.

$\beta$) **Permitivité**

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + i\varepsilon_r''$$

$$\varepsilon_r' = 1 + \chi_e' \Rightarrow \varepsilon_r' = \varepsilon_0(1+\chi_e')$$
$$\varepsilon_r'' = \chi_e'' \Rightarrow \varepsilon_r'' = \varepsilon_0\chi_e''$$

$$n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \simeq \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow n^2 = \varepsilon_r$$
$$\vec{E} = \vec{E_0}e^{-\frac{\omega}{c}\beta z}e^{i\omega\left(\frac{n_0 z}{c}-t\right)}$$

1. pour $\omega$ très grand, ou très petit devant $\omega_0$, $\varepsilon_r''$ et $\beta$ tendent vers 0, il n'y a donc pas d'absorption
2. À l'inverse lorsque $\omega = \omega_0$, il y a une très forte absorption, on est à la résonnance
3. Quand $\omega \to \infty$, on a $\varepsilon' \to \varepsilon_0$
4. Forte corélation entre la vitesse de propagation et la fréquence, d'où le nom de milieu dispersif
5. On parle de dispersion normale lorsque quand $\omega$ augmente, $\varepsilon'$ augmente.

$\gamma$) **dissipation de l'énergie** Le déphasage entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$ influence l'énergie dissipé par l'onde électromagnétique dans le dielectrique. La puissance P cédée correspont au travail de la force électrique qui s'exerce sur les charges liées qui se déplacent sous la force de polarisation. Déplacement des charges sous l'action de $\vec{E}$ : $\vec{j_{pol}}$

$$P = \vec{j_{pol}} \cdot \vec{E} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

avec $\vec{E} = Re\left(\vec{E_0}e^{-i\omega t}\right)$ et $\vec{P} = Re\left(\vec{P_0}e^{-i\omega t+\varphi}\right)$

$$\vec{P_m} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E_0} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E_0}$$

$$\begin{aligned}
P &= Re\Big(\varepsilon_0((\varepsilon_r - 1) + i\varepsilon_r'')\vec{E_0}(\cos\omega t - \sin\omega t)\Big) \\
&= \varepsilon_0\left[(\varepsilon_r' - 1)\cos\omega t + \varepsilon_r''\sin\omega t\right]\vec{E_0} \\
&\Rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\varepsilon_0 s\omega\left[(\varepsilon_r' - 1)\sin\omega t - \varepsilon_r''\cos\omega t\right]\vec{E_0} \\
&\Rightarrow P = -\varepsilon_0\omega\left[(\varepsilon_r' - 1)\cos\omega t\sin\omega t - \varepsilon_r''\cos^2\omega t\right]E_0^2 \quad \Rightarrow \langle P\rangle_t = \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega\varepsilon_r''E_0^2
\end{aligned}$$

On remarque que $\langle P \rangle_t \propto \varepsilon_r''$ dissipation par effet Joule
**Exemple :** four micro-onde

$$f_{micro_onde} = 2.45GHz \quad (\lambda_{micro} \simeq 12.2)$$

On décalle légèrement la fréquence des micro-ondes de façon à ce que $\omega_{micro} \neq \omega_{eau}$, pour "cuir à coeur". Si la fréquence était égale, tout serait absorbé à la surface et rien n'irait au centre

$\delta$ **Les différents types de polarisation**

1. polarisation électronique domine au HF
2. polarisation ionique domine à des fréquence plus basse
3. polarisation d'orientation : mlécules polaires

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho$$

En général : $T \gg \tau$ $\rho = 0$, dispation rapide
Ce qui permet d'écrire $dev\vec{E} = 0$

$$rot\vec{B} = -\mu_0 \left( \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

L'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

Lorsqu'on a un processus irréversible on a dissipation de l'énergie électrique

**CM5 (2021-02-10)**

Étudions la propagation d'une onde plane uniforme en posant :

$$\vec{E} = \vec{E_m} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{E} &= \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
-k^2 \vec{E} &= \mu_0 \sigma (-i\omega) \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \vec{E} \\
k^2 &= i \mu_0 \sigma \omega + \frac{\omega^2}{c^2} \\
k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \quad k \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Amplitude diminue lorsque z augmente, il y a donc dissipation d'énergie. si $\sigma \ll \omega\varepsilon_0$ c'est un milieu à perte, un mauvais conducteur. À l'inverse dans le cas $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$ c'est un bon conducteur. On peut approximer :

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = i\mu_0\sigma\omega$$

$$k = (1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}$$

On voit que dans le cas d'un bon conducteur, la partie réelle et imaginaire sont égales.

**définition**

épaisseur de peau

Distance après laquelle l'amplitude est divisé par e, pour un bon conducteur on a :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}$$

$\delta$ diminue lorsque la fréquence augmente.

**Impédance**

OPPS donc on utilise Maxwell 3 $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B} = \omega\mu_0 H$

L'impédance du métal est donc :

$$z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu_0}{k}$$

Après simplification on a :

$$z = \frac{\mu_0 c}{\sqrt{1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}}}$$

On mijote et on trouve :

$$\frac{(\mu_0 c)^2}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}} = |z|^2$$

**Modèle de la conductivité électrique**

Dans un conducteur, les életrons libre à vitesse aléatoire.

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \langle \vec{v} \rangle = 0$$

$$\vec{E} > 0 \Rightarrow \text{Changement de la vitesse} \rightarrow \textit{courant}$$

Lorsque les électrons entre en collision avec des ions, perte d'énergie
Hypothèses :
La seule force considéré est la force électrostatique
Entre deux collision, 1 seule force : $-e\vec{E}$
La collision rend la vitesse aléatoire
Le changement de vitesse $\Delta\vec{v}$ d'un électron entre deux collisions :

$$\left( m\frac{\Delta\vec{v}}{\tau} = -e\vec{E} \right) \Rightarrow \Delta\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m}\tau$$

$$\Delta\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle \quad \text{Car toute les autres composantes sont aléatoires.}$$

La densité de courant implique $\vec{j} = -Ne\langle \vec{v} \rangle$

$$\vec{j} = \frac{\omega e^2}{m}\tau\vec{E}$$

Or $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ implique :

$$\sigma = \frac{We^2}{m}\tau \quad \text{La conductivité statique}$$

L'expression de la conductivité est :

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega\tau}$$

On peut approximer que c'est réel lorsqu'il y a beaucoup de collision ($\omega_\tau \ll 1$) dans un milieu resistif.

**Conducteur non parfait $\omega_0 \neq 0$**

### 2.5.3 Plasma

**CM6 (2021-02-17)**

Beaucoup moins dense qu'un conducteur métallique, les collisions sont plus rare, donc $\tau \gg 1$, on va pouvoir négliger les colisions.

Ions sont libre mais leur masse est très supérieurs à celle des électrons, on néglige donc la contribution des électrons.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = -e\vec{E}$$

Dans le modèle de DL si $\tau \gg 1$ on a $\gamma = 0, \omega_0 = 0$.

On se place dans un régime permanent. $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} e^{-i\omega t}$.

$\vec{v}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature $\langle P_{dissipe} \rangle = \langle \vec{F}\vec{v} \rangle = \langle q\vec{E}\vec{v} \rangle = 0$

On considère que seul les électrons sont mobiles.

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= -Ne\vec{v} \\
&= -\frac{Ne^2}{i\omega m}\vec{E} = \sigma\vec{E} \\
&\Rightarrow \sigma = i\frac{Ne^2}{\omega m}
\end{aligned}$$

C'est uniquement imaginaire, il n'y a donc pas de dissipation d'énergie.

Plasma comme conducteur :

$$M4 \quad rot\vec{B} = \mu_0(\sigma\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\vec{B} = \mu_0(\sigma - i\omega m)\vec{E}$$

Conducteur diélectrique :

$$rot\vec{B} = -i\omega\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

On identifie entre conducteur et diélectrique

$$\sigma - i\omega m = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = 1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0} \quad \sigma = \frac{i\omega e^2}{m\omega}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = 1 - \frac{\omega e^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega^2}$$

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega p^2}{\omega^2}$$

On utilise désormais Maxwell 1, $\rho/\varepsilon_0$, bien que le plasma est globalement neutre, il est localement chargé, car la distance entre les électrons est grande, donc $\rho \neq 0$.

On en déduit l'équation de propagation.

$$rotrot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{B}\right)$$

$$gr\vec{a}d(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) + k^2\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\vec{E}$$

Mode longitudinale

$$\Rightarrow -k^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = 0 \Rightarrow \omega = \omega_p$$

avec $\omega_p$ la pulsation plasma. Il y a une permitivité nulle à UNE fréquence donnée.

Mode transverse

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

Si $\omega < \omega_p$, k est un imaginaire pur, propagation est impossible, l'onde est réfléchie.

Si $\omega > \omega_p$, on a une propagation sans perte d'énergie, on a un k réel.