Université de Bretagne Occidentale

Note de cours

Ondes et Matière

Malo Kerebel

Cours par
Bruno Rouvellou

Semestre 6, année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide

CC1 (2021-01-15)

1.1 Équations de Maxwell

1. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div\vec{B} = 0$$

3. $$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. $$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = rot\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

1) Forme locale du théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$
2) pas de monopole magnétique : $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
3) Induction de Faraday : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$
4) Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations 1 et 4 deviennent :

$$div\vec{E} = 0 \qquad rot\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ρ et j sont nuls dans le vide ((absence de source de courant).

1.2.1 Équations de propagation

En prenant le rotationnel de l'équation (3) il vient :

$$rot(rot\vec{E}) = -rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B}$$

À l'aide de l'équation 4' on obtient :

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

$$rot(rot\vec{E}) = \vec{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

compte tenu de 1' :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

avec μ_0 la perméabilité du vide

De même pour B en utilisant 4', 3 et 2 On a l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}$$

1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

$$\vec{E} = \vec{E_m}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{1.1}$$

$$\vec{B} = \vec{B_m}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{1.2}$$

La divergence du champ électrique est donné par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z)\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

La condition $div\vec{E} = 0$ implique donc que $\vec{E_m} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ est transversal, de même $div\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ est transversal.

À l'aide l'équation 3 on obtient :

$$\vec{k} \wedge \vec{E_m} = \omega \vec{B_m} \text{ ou } \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{B}$$

En notation complexe c'est plus simple.

$$div\vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \qquad rot\vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E} \qquad \Delta \vec{E} - k^2 \vec{E}$$

relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Polarisation Hypotèse : propagation selon $o_z \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz$

$$E_x = E_{m_0 x} \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = E_{m_0 y} \cos(kz - \omega t + \phi)$$
$$E_z = 0$$

Par définition ce qui définit la polarisation est la direction de E.

Les composantes du champ électriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{E_x}{E_{m_0 x}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{m_0 y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\phi - \sin(kz - \omega t)\sin\phi$$

d'où après simplification :

$$\frac{E_y^2}{E_{m_0 y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{m_0 x}^2} = \frac{2E_y}{E_{m_0 x}^2} \frac{E_y}{E_{m_0 y}} \cos\phi + \sin^2\phi$$

Dans le cas $\phi = 0 ou \phi = \pi$ on a une polarisation rectiligne. Si on a $\phi \pm \pi/2$ on a une polarisation circulaire.

1.2.3 Vecteur de Poynting

Charge élémentaire $\rho d\tau$ (Charge ρ dans un volume élémentaire $d\tau$) subie dans oem : $\vec{F} = \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance fourni à cette charge élémentaire est :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v} &= \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

(j la densité du courant) avec la 4ème équation de Maxwell on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} rot\vec{B} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant :

$$div(\vec{U} \wedge \vec{V}) = rot(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot rot\vec{V}$$

Ainsi, on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot rot\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

À l'aide de la troisième équation de Maxwell

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot rot\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On définit le vecteur de Poynting R par la relation :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\vec{R} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

avec $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

En abscence de courant on a la loi de conservation des charges :

$$div\vec{R} + \frac{\partial}{\partial t} w = 0$$

On peut considérer le vecteur de Poynting cocmme une "densité de courant d'énergie". Il est de la forme :

$$\vec{R} = w\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega\mu_0}$$

Finalement :

$$\vec{R} = \frac{kE^2}{\omega\mu_0}\frac{\vec{k}}{k}$$

La densité d'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2$$

On peut écrire :

$$E = \frac{\omega}{k}B = cB$$

La densité d'énergie magnétique est donc égale à la densité d'énergie électrique

1.2.4 Impédance cacractéristique

Dans le cas d'une onde plane monochromatique on définit l'impédance caractéristique d'un milieu par :

$$Z = \frac{E}{H}$$

Dans le vide on définit H par :

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

Donc l'impédance du vide est de

$$Z_0 = 377\Omega$$