Université de Bretagne Occidentale

Note de cours

Ondes et Matière

Malo Kerebel

Cours par
Bruno Rouvellou

Semestre 6, année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide

CM1 (2021-01-15)

1.1 Équations de Maxwell

1. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div\vec{B} = 0$$

3. $$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. $$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = rot\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

1) Forme locale du théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$
2) pas de monopole magnétique : $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
3) Induction de Faraday : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$
4) Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations 1 et 4 deviennent :

$$div\vec{E} = 0 \qquad rot\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ρ et j sont nuls dans le vide ((absence de source de courant).

1.2.1 Équations de propagation

En prenant le rotationnel de l'équation (3) il vient :

$$rot(rot\vec{E}) = -rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B}$$

À l'aide de l'équation 4' on obtient :

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

$$rot(rot\vec{E}) = g\vec{rad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

compte tenu de 1' :

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t}$$

avec μ_0 la perméabilité du vide

De même pour B en utilisant 4', 3 et 2 On a l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t}$$

1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

$$\vec{E} = \vec{E_m}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{1.1}$$

$$\vec{B} = \vec{B_m}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{1.2}$$

La divergence du champ électrique est donné par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z)\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

La condition $div\vec{E} = 0$ implique donc que $\vec{E_m} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ est transversal, de même $div\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ est transversal.

À l'aide l'équation 3 on obtient :

$$\vec{k} \wedge \vec{E_m} = \omega \vec{B_m} \text{ ou } \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{B}$$

En notation complexe c'est plus simple.

$$div\vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \qquad rot\vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E} \qquad \Delta\vec{E} - k^2\vec{E}$$

relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Polarisation Hypotèse : propagation selon $o_z \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz$

$$E_x = E_{m0x}\cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = E_{m0y}\cos(kz - \omega t + \phi)$$
$$E_z = 0$$

Par définition ce qui définit la polarisation est la direction de E.

Les composantes du champ électriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{E_x}{E_{m0x}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{m0y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\phi - \sin(kz - \omega t)\sin\phi$$

d'où après simplification :

$$\frac{E_y^2}{E_{m0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{m0x}^2} = \frac{2E_y}{E_{m0x}^2}\frac{E_y}{E_{m0y}}\cos\phi + \sin^2\phi$$

Dans le cas $\phi = 0 ou \phi = \pi$ on a une polarisation rectiligne. Si on a $\phi \pm \pi/2$ on a une polarisation circulaire.

1.2.3 Vecteur de Poynting

Charge élémentaire $\rho d\tau$ (Charge ρ dans un volume élémentaire $d\tau$) subie dans oem : $\vec{F} = \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance fourni à cette charge élémentaire est :

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{v} &= \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

(j la densité du courant) avec la 4ème équation de Maxwell on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} rot\vec{B} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant :

$$div(\vec{U} \wedge \vec{V}) = rot(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot rot\vec{V}$$

Ainsi, on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot rot\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

À l'aide de la troisième équation de Maxwell

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot rot\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On définit le vecteur de Poynting R par la relation :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\vec{R} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

avec $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

En abscence de courant on a la loi de conservation des charges :

$$div\vec{R} + \frac{\partial}{\partial t} w = 0$$

On peut considérer le vecteur de Poynting cocmme une "densité de courant d'énergie". Il est de la forme :

$$\vec{R} = w\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega\mu_0}$$

Finalement :

$$\vec{R} = \frac{kE^2}{\omega\mu_0}\frac{\vec{k}}{k}$$

La densité d'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2$$

On peut écrire :

$$E = \frac{\omega}{k}B = cB$$

La densité d'énergie magnétique est donc égale à la densité d'énergie électrique

1.2.4 Impédance cacractéristique

Dans le cas d'une onde plane monochromatique on définit l'impédance caractéristique d'un milieu par :

$$Z = \frac{E}{H}$$

Dans le vide on définit H par :

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

Donc l'impédance du vide est de

$$Z_0 = 377\Omega$$

Chapitre 2

Ondes et matières dans des milieu l homogène isotrope

CM2 (2021-01-20)

2.1 Milieux dispersifs

C'est un milieu matériel, transparent aux ondes électro-magnétiques Les ondes planes progressives (O.P.P) restent solutions de l'équation de propagation $\neq$ de celle du vide.

Les conditions à respecter sont différentes, nouvelles relation de dispersion

Ex : O.P.P.M

Propagation suivant O_z et polarisation suivant O_y

$$E_y = E_m e^{i(kz-\omega t)}$$

Def : La relation de dispersion est la relation h$(\omega, \omega(h)$ entre la pulsation et le nombre d'onde

Def La vitesse de phase est la vitesse de propagation des plans équiphases

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_y = E_m e^{i(kz-\omega t)} &= E_m e^{ik(z-\frac{\omega}{k}t)} \\ &= E_m e^{ik(z-v_\phi t)} \end{aligned}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

- Dans le vide v_ϕ est indépendant de la pulsation ω $v_\phi = c$
Dans le vide, $k = \frac{\omega}{c}$
- Dans la matière v_ϕ dépend en général de ω

Def : un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase dépend de la pulsation

Def : indice, $v_\phi = \dfrac{c}{n(\omega)}$

$\Rightarrow$ Conséquence : Superposition d'OPPM de différente pulsation, n'est pas en générale une OPPM car les ondes ne se propagent pas à la même vitesse.

2.1.1 E : Somme de 2 OPPM

$$\Rightarrow E_y = E_m \left(e^i(k_1x - \omega_1 t) + e^i(k_2x - \omega_2 t)\right)$$

avec :

$$k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}$$
$$k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}$$
$$\omega = \omega(k)$$
$$\Delta k = k_2 - k_1 \ll k_0$$

On fait un DL1 autour de k_0 : $\left(\omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}_{k_0}\right)$

$$\omega_1 = \omega(k_1) \simeq \omega(k_0) - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0) = \omega_0 - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0)$$
$$\omega_2 = \omega(k_2) \simeq \omega(k_0) - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0) = \omega_0 - \frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0)$$

$$\Rightarrow E_y = E_m e^{i(k_0x-\omega t)}\left[e^{i(-\frac{\Delta k}{2}x+(\frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0))t)} + e^{i(+\frac{\Delta k}{2}x-(\frac{\Delta k}{2}\omega'(k_0))t)}\right]$$

$$\Rightarrow E_y = 2E_m e^{i(k_0x-\omega_0 t}\cos(\frac{\Delta k}{2}(x - \omega'(k_0)t))$$
$$\Rightarrow E_y = Re(E_z)$$

$$\Rightarrow E_y = 2E_m \cos(k_0(x - \frac{\omega_0}{k_0}t))\cos(\frac{\Delta k}{2}(x - \frac{\omega_0}{k_0}t))$$

Produit de 2 OPPM qui se propagent à deux vitesses différentes

$$v_1 = \frac{\omega_0}{k_0} \qquad v_2\omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}_{k=k_0}$$

On obtient une onde modulé, avec une onde porteuse et une moduleuse.

$$v_1 = \frac{\omega_0}{k_0} = v_\phi \qquad v_2 = \frac{d\omega}{dk}_{k_0} = v_g \text{ vitesse de groupe}$$

v_g vitesse de déplacement de l'enveloppe (modulation ici)

En terme de signaux $\equiv$ vitesse de transmission de l'info En terme d'énergie $\equiv$ vitesse de transport de l'énergie

Dans le vide

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dkc}{dk} = c = v_\phi$$

Dans un milieu dispersif

$$v_g \neq v_\phi$$

2.1.2 Généralisation : paquets d'ondes

En mécanique quantique ça permet de rendre la dualité onde-corpuscule possible

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kz-\omega t)}dk$$

Somme d'une infinité d'onde, plutot que juste 2 dans l'exemple précedant. On prendra généralement $A(k)$ une gaussienne.

$$\text{On prendra } \omega = \omega(k_0) + (k - k_0)\frac{d\omega}{dk}_{k_0}$$

On transforme E_y en :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp(-\omega(k_0)t + k_0 z + (k - k_0)z - t(k - k_0)\frac{d\omega}{dk}_{k_0})dk$$

$$E_y = e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\exp\left(i\left[(k - k_0)(z - \frac{d\omega}{dk}_{k_0}t)\right]\right)dk$$

Dans un milieu non dispersif, les vitesses sont les même et donc le paquet d'onde n'est pas déformé, dans un milieu dispersif, les vitesses sont différentes et donc le paquet d'onde se déforme.

Remarque : Souvent A(k) est une gaussienne on parle de paquet d'onde gaussien

2.2 Polarisation de la matière

On définit le moment dipolaire (ou polarisation) $\vec{P}$:

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

avec N, le nombre de molécule par unité de volume et $\vec{p}$ le moment dipolaire moyen par molécule.

a) Potentiel créé par les dipoles d'un dipole électrique.

$$V_2 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Dans un volume τ', le volume élementaire $d\tau'$, autour du point A, M le point où l'on calcule le potentiel.

$$dV(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P} \cdot \vec{r_1}}{r_M^2}d\tau'$$

$$dV(m) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}(\frac{1}{r_m})\right)d\tau'$$
$$dV(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}'(\frac{1}{r_m})\right)d\tau'$$

Avec :

$$\vec{\nabla}'(\frac{1}{r}) = -\frac{-\vec{r}_1}{r^2} = \frac{\vec{r_1}}{r^2}$$

Calculé en A pour permettre l'intégration sur le volume τ', on a :

$$\vec{\nabla}'(\frac{1}{r}) = \frac{\vec{r_1}}{r^2}$$

On a $r \gg$ distance de la molécule $\Rightarrow$ approximation dipolaire par intégration On intègre donc $dV(m)$:

$$V(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}'(\frac{1}{r_m})d\tau'$$

Or $\vec{\nabla}(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$
Donc avec $\vec{A} = \vec{p} \quad f = \frac{1}{r}$:

$$V(m) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{\tau'}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{p}}{r}\right)d\tau' - \int_{\tau'}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{p}}{r}d\tau'\right)$$

Par Green-ostrogradski :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\oint_{S'}\frac{\vec{p}\cdot d\vec{S'}}{r} - \int_{\tau'}\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{p}}{r}d\tau'\right)$$

Avec S', la surface qui entoure τ' dirigé vers l'extérieur

On définit :

$$\sigma_{pol} = \vec{p}\cdot\vec{n}$$
$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla}'\cdot\vec{p}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\oint_{S'}\frac{\sigma_{pol}\cdot d\vec{S'}}{r} - \int_{\tau'}\frac{\rho_{pol}}{r}d\tau'\right)$$

σ_{pol} est la densité surfacique de chage liées et ρ_{pol} est la densité volumique de charge liées.

CM2 (2021-01-x)