

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

NOTE DE COURS

Ondes et Matière

Malo Kerebel

Cours par
Bruno ROUELLOU

Semestre 6, année 2020-2021

Table des matières

1	Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide	2
1.1	Équations de Maxwell	2
1.2	Ondes électromagnétiques dans le vide	2
1.2.1	Équations de propagation	3
1.2.2	Onde plane progressive monochromatique	3
1.2.3	Vecteur de Poynting	4
1.2.4	Impédance caractéristique	6

Chapitre 1

Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide

CC1 (2021-01-15)

1.1 Équations de Maxwell

1.

$$\nabla \cdot E = \operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.

$$\nabla \cdot B = \operatorname{div} B = 0$$

3.

$$\nabla \wedge E = \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

4.

$$\nabla \wedge B = \operatorname{rot} B = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

1) Forme locale du théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} E \cdot dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

2) pas de monopole magnétique : $\oiint_{(S)} B \cdot dS = 0$

3) Induction de Faraday : $\oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt}$

4) Théorème d'Ampère : $\oint B \cdot dl = \mu_0 I \Rightarrow \operatorname{rot} B = \mu_0 j$

1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations 1 et 4 deviennent :

$$\operatorname{div} E = 0 \quad \operatorname{rot} B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

ρ et j sont nuls dans le vide ((absence de source de courant)).

1.2.1 Équations de propagation

En prenant le rotationnel de l'équation (3) il vient :

$$\text{rot}(\text{rot}E) = -\text{rot}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}B$$

À l'aide de l'équation 4' on obtient :

$$\text{rot}(\text{rot}E) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

$$\text{rot}(\text{rot}E) = \text{grad}(\text{div}E) - \Delta E$$

compte tenu de 1' :

$$\Delta E = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

avec μ_0 la perméabilité du vide

De même pour B en utilisant 4', 3 et 2 On a l'équation de propagation :

$$\Delta B = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial^2 t}$$

1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

$$E = E_m \cos(kr - \omega t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \cos(kr - \omega t) \quad (1.1)$$

$$B = B_m \cos(kr - \omega t) = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \cos(kr - \omega t) \quad (1.2)$$

La divergence du champ électrique est donné par :

$$\nabla E = \text{div}E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z) \sin(kr - \omega t)$$

La condition $\text{div}E = 0$ implique donc que $E_m k = 0 \Rightarrow E$ est transversal, de même B est transversal.

À l'aide l'équation 3 on obtient :

$$k \wedge E_m = \omega B_m \text{ ou } k \wedge E = B$$

En notation complexe c'est plus simple.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= ik \cdot E & \operatorname{rot} E &= ik \wedge E \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -i\omega E & \Delta E &= k^2 E \end{aligned}$$

relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Polarisation Hypothèse : propagation selon $o_z \Rightarrow k \cdot r = kz$

$$\begin{aligned} E_x &= E_{m_0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_y &= E_{m_0y} \cos(kz - \omega t + \phi) \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Par définition ce qui définit la polarisation est la direction de E .

Les composantes du champ électriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{E_x}{E_{m_0x}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{m_0y}} = \cos(kz - \omega t) \cos \phi - \sin(kz - \omega t) \sin \phi$$

d'où après simplification :

$$\frac{E_y^2}{E_{m_0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{m_0x}^2} = \frac{2E_y}{E_{m_0x}} \frac{E_y}{E_{m_0y}} \cos \phi + \sin^2 \phi$$

Dans le cas $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$ on a une polarisation rectiligne. Si on a $\phi \pm \pi/2$ on a une polarisation circulaire.

1.2.3 Vecteur de Poynting

Charge élémentaire $\rho d\tau$ (Charge ρ dans un volume élémentaire $d\tau$) subie dans oem : $F = \rho d\tau(R + v \wedge B)$

La puissance fourni à cette charge élémentaire est :

$$\begin{aligned} F \cdot v &= \rho d\tau(R + v \wedge B) \cdot v \\ &= \rho d\tau E \cdot v \end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$F \cdot v = j \cdot E d\tau$$

(j la densité du courant) avec la 4ème équation de Maxwell on a :

$$E \cdot j = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} B \cdot E - \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

En utilisant :

$$\text{div}(U \wedge V) = \text{rot}(U) \cdot V - U \cdot \text{rot} V$$

Ainsi, on a :

$$E \cdot j = -\text{div} \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) + \frac{B}{\mu_0} \cdot \text{rot} E - \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

À l'aide de la troisième équation de Maxwell

$$E \cdot j = -\text{div} \left(E \wedge \frac{B}{\mu_0} \right) - \frac{B}{\mu_0} \cdot \text{rot} E - \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

On définit le vecteur de Poynting R par la relation :

$$R = E \wedge \frac{B}{\mu_0}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\text{div} \vec{R} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

avec $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

En absence de courant on a la loi de conservation des charges :

$$\text{div} \vec{R} + \frac{\partial}{\partial t} w = 0$$

On peut considérer le vecteur de Poynting comme une "densité de courant d'énergie". Il est de la forme :

$$\vec{R} = w \vec{v}$$

où \vec{v} est la vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega \mu_0}$$

Finalement :

$$\vec{R} = \frac{k E^2}{\omega \mu_0} \frac{\vec{k}}{k}$$

La densité d'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2$$

On peut écrire :

$$E = \frac{\omega}{k} B = cB$$

La densité d'énergie magnétique est donc égale à la densité d'énergie électrique

1.2.4 Impédance caractéristique

Dans le cas d'une onde plane monochromatique on définit l'impédance caractéristique d'un milieu par :

$$Z = \frac{E}{H}$$

Dans le vide on définit H par :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Donc l'impédance du vide est de

$$Z_0 = 377\Omega$$