Université de Bretagne Occidentale

Note de cours

# Ondes et Matière

*Malo Kerebel*

Cours par
Bruno Rouvellou

Semestre 6, année 2020-2021

# Table des matières

**1 Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide** **2**
1.1 Équations de Maxwell . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide . . . . . . . . . . . . . . 2
1.2.1 Équations de propagation . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
1.2.2 Onde plane progressive monochromatique . . . . . . . 3
1.2.3 Vecteur de Poynting . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
1.2.4 Impédance cacractéristique . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

# Chapitre 1

# Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide

**CC1 (2021-01-15)**

## 1.1 Équations de Maxwell

1. $$\nabla \cdot E = divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
2. $$\nabla \cdot B = divB = 0$$
3. $$\nabla \wedge E = rotE = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
4. $$\nabla \wedge B = rotB = \mu_0 \left( j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

1) Forme locale du théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} E \cdot dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$
2) pas de monopole magnétique : $\oiint_{(S)} B \cdot dS = 0$
3) Induction de Faraday : $\oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt}$
4) Théorème d'Ampère : $\oint B \cdot dl = \mu_0 I \Rightarrow rotB = \mu_0 j$

## 1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations 1 et 4 deviennent :

$$divE = 0 \qquad rotB = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$\rho$ et $j$ sont nuls dans le vide ((absence de source de courant).

### 1.2.1 Équations de propagation

En prenant le rotationnel de l'équation (3) il vient :

$$rot(rotE) = -rot\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}rotB$$

À l'aide de l'équation 4' on obtient :

$$rot(rotE) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

$$rot(rotE) = grad(divE) - \Delta E$$

compte tenu de 1' :

$$\Delta E = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}$$

avec $\mu_0$ la perméabilité du vide

De même pour B en utilisant 4', 3 et 2 On a l'équation de propagation :

$$\Delta B = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial^2 t}$$

### 1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

$$E = E_m\cos(kr - \omega t = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}\cos(kr - \omega t) \tag{1.1}$$

$$B = B_m\cos(kr - \omega t = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}\cos(kr - \omega t) \tag{1.2}$$

La divergence du champ électrique est donné par :

$$\nabla E = divE = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(E_xk_x + E_yk_y + E_zk_z)\sin(kr - \omega t)$$

La condition $divE = 0$ implique donc que $E_mk = 0 \Rightarrow$ E est transversal, de même B est transversal.

À l'aide l'équation 3 on obtient :

$$k \wedge E_m = \omega B_m \text{ ou } k \wedge E = B$$

En notation complexe c'est plus simple.

$$divE = ik \cdot E \qquad rotE = ik \wedge E$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} = -i\omega E \qquad \Delta E - k^2 E$$

**relation de dispersion**

$$k = \frac{\omega}{c}$$

**Polarisation** Hypotèse : propagation selon $o_z \Rightarrow k \cdot r = kz$

$$E_x = E_{m_0x} \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = E_{m_0y} \cos(kz - \omega t + \phi)$$
$$E_z = 0$$

Par définition ce qui définit la polarisation est la direction de E.
Les composantes du champ électriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{E_x}{E_{m_0x}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{m_0y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\phi - \sin(kz - \omega t)\sin\phi$$

d'où après simplification :

$$\frac{E_y^2}{E_{m_0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{m_0x}^2} = \frac{2E_y}{E_{m_0x}^2}\frac{E_y}{E_{m_0y}}\cos\phi + \sin^2\phi$$

Dans le cas $\phi = 0 ou \phi = \pi$ on a une polarisation rectiligne. Si on a $\phi \pm \pi/2$ on a une polarisation circulaire.

### 1.2.3 Vecteur de Poynting

Charge élémentaire $\rho d\tau$ (Charge $\rho$ dans un volume élémentaire $d\tau$) subie dans oem : $F = \rho d\tau(R + v \wedge B)$

La puissance fourni à cette charge élémentaire est :

$$\begin{aligned} F \cdot v &= \rho d\tau(R + v \wedge B) \cdot v \\ &= \rho d\tau E \cdot v \end{aligned}$$

On peut rééecrire :

$$F \cdot v = j \cdot E d\tau$$

(j la densité du courant) avec la 4ème équation de Maxwell on a :

$$E \cdot j = \frac{1}{\mu_0} rotB \cdot E - \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

En utilisant :

$$div(U \wedge V) = rot(U) \cdot V - U \cdot rotV$$

Ainsi, on a :

$$E \cdot j = -div\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) + \frac{B}{\mu_0} \cdot rotE - \varepsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

À l'aide de la troisième équation de Maxwell

$$E \cdot j = -div\left(E \wedge \frac{B}{\mu_0}\right) - \frac{B}{\mu_0} \cdot rotE - \varepsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

On définit le vecteur de Poynting R par la relation :

$$R = E \wedge \frac{B}{\mu_0}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -div\vec{R} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

avec $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

En abscence de courant on a la loi de conservation des charges :

$$div\vec{R} + \frac{\partial}{\partial t} w = 0$$

On peut considérer le vecteur de Poynting cocmme une "densité de courant d'énergie". Il est de la forme :

$$\vec{R} = w\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega \mu_0}$$

Finalement :

$$\vec{R} = \frac{kE^2}{\omega \mu_0} \frac{\vec{k}}{k}$$

La densité d'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2$$

On peut écrire :

$$E = \frac{\omega}{k}B = cB$$

La densité d'énergie magnétique est donc égale à la densité d'énergie électrique

### 1.2.4 Impédance cacractéristique

Dans le cas d'une onde plane monochromatique on définit l'impédance caractéristique d'un milieu par :

$$Z = \frac{E}{H}$$

Dans le vide on définit H par :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Donc l'impédance du vide est de

$$Z_0 = 377\Omega$$