

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

NOTE DE COURS

# Ondes et Matière

*Malo Kerebel*

Cours par  
Bruno ROUVELLOU

Semestre 6, année 2020-2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide</b>	<b>2</b>
1.1	Équations de Maxwell . . . . .	2
1.2	Ondes électromagnétiques dans le vide . . . . .	3
1.2.1	Équations de propagation . . . . .	3
1.2.2	Onde plane progressive monochromatique . . . . .	3
1.2.3	Vecteur de Poynting . . . . .	5
1.2.4	Impédance caractéristique . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Ondes et matières dans des milieu linéaire homogène isotrope</b>	<b>7</b>
2.1	Milieux dispersifs . . . . .	7
2.1.1	E : Somme de 2 OPPM . . . . .	8
2.1.2	Généralisation : paquets d'ondes . . . . .	9
2.2	Polarisation de la matière . . . . .	10
2.2.1	Polarisation magnétique et Aimantation . . . . .	12
2.3	Équation de Maxwell dans les milieux linéaires homogènes isotropes . . . . .	13
2.4	Modèle de Drude-Lorentz . . . . .	15
2.5	Milieu diélectrique . . . . .	16
2.5.1	Équations de propagation . . . . .	16
2.5.2	O.P.P.M . . . . .	17

# Chapitre 1

## Rappel d'ondes électromagnétiques dans le vide

CM1 (2021-01-15)

### 1.1 Équations de Maxwell

1.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0$$

3.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

- 1) Forme locale du théorème de Gauss :  $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$
- 2) pas de monopole magnétique :  $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
- 3) Induction de Faraday :  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$
- 4) Théorème d'Ampère :  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

## 1.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les équations 1 et 4 deviennent :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\rho$  et  $j$  sont nuls dans le vide ((absence de source de courant)).

### 1.2.1 Équations de propagation

En prenant le rotationnel de l'équation (3) il vient :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B}$$

À l'aide de l'équation 4' on obtient :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

compte tenu de 1' :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t}$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité du vide

De même pour B en utilisant 4', 3 et 2 On a l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial^2 t}$$

### 1.2.2 Onde plane progressive monochromatique

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.1)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.2)$$

La divergence du champ électrique est donné par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -(E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

La condition  $\text{div} \vec{E} = 0$  implique donc que  $\vec{E}_m \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{E}$  est transversal, de même  $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$  est transversal.

À l'aide l'équation 3 on obtient :

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_m = \omega \vec{B}_m \text{ ou } \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{B}$$

En notation complexe c'est plus simple.

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= i\vec{k} \cdot \vec{E} & \text{rot} \vec{E} &= i\vec{k} \wedge \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -i\omega \vec{E} & \Delta \vec{E} &= k^2 \vec{E} \end{aligned}$$

**relation de dispersion**

$$k = \frac{\omega}{c}$$

**Polarisation** Hypothèse : propagation selon  $o_z \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz$

$$\begin{aligned} E_x &= E_{m0x} \cos(kz - \omega t) \\ E_y &= E_{m0y} \cos(kz - \omega t + \phi) \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Par définition ce qui définit la polarisation est la direction de E.

Les composantes du champ électriques peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{E_x}{E_{m0x}} = \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{E_y}{E_{m0y}} = \cos(kz - \omega t) \cos \phi - \sin(kz - \omega t) \sin \phi$$

d'où après simplification :

$$\frac{E_y^2}{E_{m0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{m0x}^2} = \frac{2E_y}{E_{m0x}} \frac{E_y}{E_{m0y}} \cos \phi + \sin^2 \phi$$

Dans le cas  $\phi = 0$  ou  $\phi = \pi$  on a une polarisation rectiligne. Si on a  $\phi \pm \pi/2$  on a une polarisation circulaire.

### 1.2.3 Vecteur de Poynting

Charge élémentaire  $\rho d\tau$  (Charge  $\rho$  dans un volume élémentaire  $d\tau$ ) subie dans oem :  $\vec{F} = \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance fourni à cette charge élémentaire est :

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{v} &= \rho d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

(j la densité du courant) avec la 4ème équation de Maxwell on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En utilisant :

$$\text{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \text{rot}(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \text{rot} \vec{V}$$

Ainsi, on a :

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\text{div} \left( \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

À l'aide de la troisième équation de Maxwell

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\text{div} \left( \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On définit le vecteur de Poynting  $\vec{R}$  par la relation :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = -\text{div} \vec{R} - \frac{\partial}{\partial t} w$$

avec  $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

En absence de courant on a la loi de conservation des charges :

$$\text{div} \vec{R} + \frac{\partial}{\partial t} w = 0$$

On peut considérer le vecteur de Poynting comme une "densité de courant d'énergie". Il est de la forme :

$$\vec{R} = w\vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de propagation de l'énergie

Le vecteur de Poynting a donc pour expression :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})}{\omega\mu_0}$$

Finalement :

$$\vec{R} = \frac{kE^2}{\omega\mu_0} \frac{\vec{k}}{k}$$

La densité d'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2$$

On peut écrire :

$$E = \frac{\omega}{k} B = cB$$

La densité d'énergie magnétique est donc égale à la densité d'énergie électrique

### 1.2.4 Impédance caractéristique

Dans le cas d'une onde plane monochromatique on définit l'impédance caractéristique d'un milieu par :

$$Z = \frac{E}{H}$$

Dans le vide on définit H par :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Donc l'impédance du vide est de

$$Z_0 = 377\Omega$$

# Chapitre 2

## Ondes et matières dans des milieu linéaire homogène isotrope

CM2 (2021-01-20)

### 2.1 Milieux dispersifs

C'est un milieu matériel, transparent aux ondes électro-magnétiques Les ondes planes progressives (O.P.P) restent solutions de l'équation de propagation  $\neq$  de celle du vide.

Les conditions à respecter sont différentes, nouvelles relation de dispersion

**Ex :** O.P.P.M

Propagation suivant  $O_z$  et polarisation suivant  $O_y$

$$E_y = E_m e^{i(kz - \omega t)}$$

**Def :** La relation de dispersion est la relation  $h(\omega, \omega(h))$  entre la pulsation et le nombre d'onde

**Def** La vitesse de phase est la vitesse de propagation des plans équiphases

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_y &= E_m e^{i(kz - \omega t)} = E_m e^{ik(z - \frac{\omega}{k}t)} \\ &= E_m e^{ik(z - v_\phi t)} \end{aligned}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$



- Dans le vide  $v_\phi$  est indépendant de la pulsation  $\omega$   $v_\phi = c$
- Dans le vide,  $k = \frac{\omega}{c}$
- Dans la matière  $v_\phi$  dépend en général de  $\omega$

**Def :** un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase dépend de la pulsation

**Def :** indice,  $v_\phi = \frac{c}{n(\omega)}$

$\Rightarrow$  Conséquence : Superposition d'OPPM de différente pulsation, n'est pas en générale une OPPM car les ondes ne se propagent pas à la même vitesse.

### 2.1.1 E : Somme de 2 OPPM

$$\Rightarrow E_y = E_m (e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)})$$

avec :

$$\begin{aligned} k_1 &= k_0 - \frac{\Delta k}{2} \\ k_2 &= k_0 + \frac{\Delta k}{2} \\ \omega &= \omega(k) \\ \Delta k &= k_2 - k_1 \ll k_0 \end{aligned}$$

On fait un DL1 autour de  $k_0$  :  $\left(\omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk} k_0\right)$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega(k_1) \simeq \omega(k_0) - \frac{\Delta k}{2} \omega'(k_0) = \omega_0 - \frac{\Delta k}{2} \omega'(k_0) \\ \omega_2 &= \omega(k_2) \simeq \omega(k_0) + \frac{\Delta k}{2} \omega'(k_0) = \omega_0 + \frac{\Delta k}{2} \omega'(k_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_y = E_m e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \left[ e^{i(-\frac{\Delta k}{2} x + (\frac{\Delta k}{2} \omega'(k_0)) t)} + e^{i(+\frac{\Delta k}{2} x - (\frac{\Delta k}{2} \omega'(k_0)) t)} \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_y &= 2E_m e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \cos\left(\frac{\Delta k}{2}(x - \omega'(k_0)t)\right) \\ \Rightarrow E_y &= Re(E_z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_y = 2E_m \cos(k_0(x - \frac{\omega_0}{k_0}t)) \cos(\frac{\Delta k}{2}(x - \frac{\omega_0}{k_0}t))$$

Produit de 2 OPPM qui se propagent à deux vitesses différentes

$$v_1 = \frac{\omega_0}{k_0} \quad v_2 \omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}_{k=k_0}$$

On obtient une onde modulée, avec une onde porteuse et une moduleuse.

$$v_1 = \frac{\omega_0}{k_0} = v_\phi \quad v_2 = \frac{d\omega}{dk}_{k_0} = v_g \text{ vitesse de groupe}$$

$v_g$  vitesse de déplacement de l'enveloppe (modulation ici)

En terme de signaux  $\equiv$  vitesse de transmission de l'info En terme d'énergie

$\equiv$  vitesse de transport de l'énergie

Dans le vide

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dkc}{dk} = c = v_\phi$$

Dans un milieu dispersif

$$v_g \neq v_\phi$$

### 2.1.2 Généralisation : paquets d'ondes

En mécanique quantique ça permet de rendre la dualité onde-corpuscule possible

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

Somme d'une infinité d'onde, plutôt que juste 2 dans l'exemple précédent.  
On prendra généralement  $A(k)$  une gaussienne.

$$\text{On prendra } \omega = \omega(k_0) + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}_{k_0}$$

On transforme  $E_y$  en :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp(-\omega(k_0)t + k_0 z + (k - k_0)z - t(k - k_0) \frac{d\omega}{dk}_{k_0}) dk$$

$$E_y = e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp\left(i \left[ (k - k_0) \left( z - \frac{d\omega}{dk}_{k_0} t \right) \right] \right) dk$$

Dans un milieu non dispersif, les vitesses sont les mêmes et donc le paquet d'onde n'est pas déformé, dans un milieu dispersif, les vitesses sont différentes et donc le paquet d'onde se déforme.

**Remarque :** Souvent  $A(k)$  est une gaussienne on parle de paquet d'onde gaussien

## 2.2 Polarisation de la matière

On définit le moment dipolaire (ou polarisation)  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

avec  $N$ , le nombre de molécule par unité de volume et  $\vec{p}$  le moment dipolaire moyen par molécule.

a) Potentiel créé par les dipoles d'un dipole électrique.

$$V_2 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dans un volume  $\tau'$ , le volume élémentaire  $d\tau'$ , autour du point A, M le point où l'on calcule le potentiel.

$$dV(m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_1}{r_M^2} d\tau'$$

$$dV(m) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r_m} \right) \right) d\tau'$$

$$dV(m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{p} \cdot \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{r_m} \right) \right) d\tau'$$

Avec :

$$\vec{\nabla}' \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}_1}{r^2} = \frac{\vec{r}_1}{r^2}$$

Calculé en A pour permettre l'intégration sur le volume  $\tau'$ , on a :

$$\vec{\nabla}' \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{r}_1}{r^2}$$

On a  $r \gg$  distance de la molécule  $\Rightarrow$  approximation dipolaire par intégration

On intègre donc  $dV(m)$  :

$$V(m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{r_m} \right) d\tau'$$

Or  $\vec{\nabla}(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$

Donc avec  $\vec{A} = \vec{p}$   $f = \frac{1}{r}$  :

$$V(m) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_{\tau'} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{p}}{r} \right) d\tau' - \int_{\tau'} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{p}}{r} d\tau' \right)$$

Par Green-ostrogradski :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \oint_{S'} \frac{\vec{p} \cdot d\vec{S}'}{r} - \int_{\tau'} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{p}}{r} d\tau' \right)$$

Avec  $S'$ , la surface qui entoure  $\tau'$  dirigé vers l'extérieur

On définit :

$$\begin{aligned}\sigma_{pol} &= \vec{p} \cdot \vec{n} \\ \rho_{pol} &= -\vec{\nabla}' \cdot \vec{p}\end{aligned}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \oint_{S'} \frac{\sigma_{pol} \cdot d\vec{S}'}{r} - \int_{\tau'} \frac{\rho_{pol}}{r} d\tau' \right)$$

$\sigma_{pol}$  est la densité surfacique de charge liées et  $\rho_{pol}$  est la densité volumique de charge liées.

### CM3 (2021-01-25)

$d\tau' = \vec{d} \cdot d\vec{S}$ , Les charges qui vont passer à travers  $dS$ , s'obtient avec :

$$dQ = NQ_m \vec{d} \cdot d\vec{S}'$$

Avec  $N$  = Nombre de molécule par Charge traversant  $dS'$  sous l'action de  $E$

$$dQ = N\vec{p} \cdot d\vec{S}' = \vec{P} \cdot d\vec{S}' = (\vec{P} \cdot \vec{n})d\vec{S}'$$

$$\sigma_{pol} = \frac{dQ}{dS'} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

La charge totale qui a traversé  $S'$  est :

$$Q = \int_{S'} dQ = \int_{S'} \vec{P} \cdot d\vec{S}'$$

Charge restante à l'intérieur de  $\tau'$  :  $-Q = \int_{\tau'} \rho_{pol} d\tau'$  Par Green OStrogradski on a :

$$-Q = - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d\tau'$$

Donc :

$$P_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

c) Généralisation

\* Le calcul de V à l'extérieur du milieu est calculé identiquement à l'intérieur

\* E est créé par la distribution extérieure de charge à l'origine de (pas réussi à lire)

$$V_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho_{libre} + \rho_{pol}}{r} d\tau' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma_{libre} + \sigma_{pol}}{r} dS'$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau'} \frac{\rho_{libre} + \rho_{pol}}{r^2} \vec{r}_1 d\tau' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma_{libre} + \sigma_{pol}}{r^2} \vec{r}_1 dS'$$

(On écrira ensuite  $\sigma_l/\rho_l$  avec le l pour libre et  $\sigma_{pol}/\rho_{pol}$  pour polarisation (ou les charges liées)

d) Densité de courant de polarisation

Si  $E = E(t) \Rightarrow$  mouvement des charges liées  $\Rightarrow \vec{j}_{pol}$

Conservation des charges donc :

$$\iint_S \vec{j}_{pol} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho_{pol} d\tau$$

Car la vitesse des charges qui traverse S est égal à la vitesse de diminution à l'inter\*\*\*\* de S ( $\tau$ ), par green Ostrogradski on a :

$$\iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{pol} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} -(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau$$

$$= \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\tau$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} (\text{Ampère}/m^2)$$

## 2.2.1 Polarisation magnétique et Aimantation

### Définitions

Diamagnétique, phénomène très faible, induit, moment magnétique compensé

Paramagnétique, phénomène faible, orientation des molécules, moment magnétique non compensé, l'intensité du phénomène est inversement proportionnelle à la température (les molécules sont plus désorganisées à haute température)

Ferromagnétique, phénomène fort, phénomène collectif, persistant, non linéaire

**Identification** entre magnétique et électrique :

Une boucle de courant génère un champ magnétique, dont l'intensité varie suivant :  $\vec{m} = IS\vec{k}$

En électrique on a la polarisation :  $\vec{P} = N\vec{p}$  en magnétique on a similairement :  $\vec{M} = N\vec{m}$  (qu'on appelle plutôt aimantation).

Le moment dipolaire :  $V_{dip} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  en magnétique on a :  $A_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}_1}{\sigma^2}$  (On remarquera que c'est désormais un vecteur et non un scalaire)

$$dV_{dip} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et en magnétique : } dA_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}_1}{\sigma^2}$$

Densité de charge surfacique en électrique :  $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}$  en magnétique la densité linéique est :  $\lambda_m = \vec{M} \wedge \vec{n}$

Et de même en dimension supérieure :  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  en magnétique :  $\vec{j}_m = \text{rot} \vec{M}$

## 2.3 Équation de Maxwell dans les milieux linéaires homogènes isotropes

Deux équations sont des équations de structure et ne seront donc pas modifiées

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La première équation va changer :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rho = \rho_l + \rho_{pol}$$

Avec  $\rho_{pol} = -\text{div} \vec{P}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \cdot \text{div} \vec{E} = \rho_l - \text{div} \vec{P}$$

$$\Leftrightarrow \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l$$

On note donc  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  l'induction électrique

$$\Leftrightarrow \text{div} \vec{D} = \rho_l$$

Si le milieu est un LMHI on a

$$\vec{p} \propto \vec{E}_{loc}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = N\vec{p} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Avec  $\chi_e$  la susceptibilité électrique, la capacité du milieu a réagir à un milieu électrique.

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E}$$

Donc dans un MLHI on a  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  avec  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

**Remarque** Dans un MLHI  $\vec{D} \propto \vec{E}$

La quatrième équation de Maxwell va changer aussi.

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Dans un MLHI on aura :

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_m + \vec{j}_{pol}$$

La densité de courant lié aux charges libres et aux charges liées Avec  $\vec{j}_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  et  $\vec{j}_m = \text{rot} \vec{M}$ , donc :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_l + \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On définit le champ magnétique  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{m}$

Comme avant, dans un MLHI on a  $\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H}$ , avec encore une fois,  $\chi_m$  un scalaire, la susceptibilité magnétique.

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Avec  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$

**Remarque** Si le matériau est transparent on prendra  $\chi_r = 1$  et donc  $\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{H}$

Dans un matériau diamagnétique on a  $\chi_m$  est inférieur à 0 et est indépendant de la température, pour le paramagnétique  $\chi_m$  est inversement proportionnel à la température et est supérieur à 0 et pour un matériau ferromagnétique,  $\chi_m$  augmente quand la température diminue et est  $\gg 0$ , il y a existence de la température de Curie, en dessous de laquelle un matériau est ferromagnétique et la valeur de  $\chi_m$  dépend de la valeur de H, c'est donc non linéaire.

Dans un MLHI on peut obtenir :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$M1 : \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon} \Leftrightarrow \text{div} \vec{D} = \rho_l$$

$$M2 : \text{div} \vec{B} = 0$$

$$M3 : \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$M4 : \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

## 2.4 Modèle de Drude-Lorentz

Hypothèse de départ, l'électron est lié aux atomes par une force de type ressort (oscillateur), la réponse de l'oscillateur détermine la polarisation de l'atome.

Modèle de DL :

- L'électron a une charge -e et une masse m, une vitesse  $\vec{v}$  et une position  $\vec{r}$
- Force de Lorentz :  $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
- Force de frottement visqueux (collision avec son environnement) :  $-\alpha \vec{v}$
- Force de rappel (interaction des noyaux) :  $-k \vec{r}$

Dans la force de Lorentz la force magnétique est négligé sauf si on rajoute une force magnétique extérieur

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

Si on néglige la dépendance spatiale de la force excitatrice (taille de l'atome très inférieure par rapport à la longueur d'onde) :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$



Les solutions sont du type :

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_m e^{-i\omega t} \quad \text{avec } \vec{r}_m = \vec{r}_0 e^{i\phi} \\ \Rightarrow -\omega^2 \vec{r}_m - i\omega \vec{r}_m + \omega_0^2 \vec{r}_m &= -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \\ \Leftrightarrow \vec{r}_m &= \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{E}_0\end{aligned}$$

1.  $\tau = 1/\gamma$  temps de relaxation (caractéristique de l'amortissement)
2.  $k$  constante de la force de rappel associé à la pulsation propre de resonance ;  $\omega_0$

Pour un électron lié  $k = 0$  et  $\omega_0 = 0$

Dans le modèle DL, pour un conducteur on a  $\omega_0 = 0; \gamma \neq 0$ , pour un diélectrique on a  $\omega_0 \neq 0; \gamma \neq 0$  et pour un plasma on a  $\omega_0 = 0; \gamma = 0$

## 2.5 Milieu diélectrique

**Hypothèse** Milieu diélectrique dilué : diélectrique parfait

$$\begin{aligned}\rho l &= 0 \\ \vec{j} l &= 0\end{aligned}$$

### 2.5.1 Équations de propagation

Les équation de Maxwell M3 et M1 sont inchangée

$$\begin{aligned}M1''(mlhi) : \text{div} \vec{D} &= \rho l \Rightarrow \text{div} \vec{D} = 0 \\ M4'' : \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On mijote et on trouve :

$$\Delta \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

L'équation de propagation de  $\vec{E}$  dans un diélectrique parfait. de même pour  $\vec{B}$  :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) &= \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{H}) - \Delta\vec{H} \\ &= \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{\mu}\text{div}\vec{B}\right) - \Delta\vec{H} \\ &= -\Delta\vec{H} \end{aligned}$$

Par la 4ème équation de Maxwell on a :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{H}) &= \text{rot}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{D} \\ &= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{E} \\ &= -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

On trouve donc l'équation de propagation de  $\vec{H}$  dans un diélectrique :

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

**Remarque** l'équation de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  est identique. Avec  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  homogène à une vitesse.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

**Remarque** les équations de propagation sont identique dans le vide.

## 2.5.2 O.P.P.M

### a) Structure de l'onde

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad \text{div}\vec{H} = 0$$

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}$$

$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{H} \Rightarrow \vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$  Trièdre direct équivalent au vide

**b) relation de dispersion**

$$k^2 = n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$$

**c) Transport d'énergie**

Puissance fournie  $\vec{E} \cdot \vec{j}_l$  par unité de volume de charge libre

$$\vec{j}_l = \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_l = \text{rot} \vec{H} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Or  $\text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \text{rot} \vec{v}$ , On a donc :

$$\vec{E} \cdot \vec{j}_l = -\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{E} \wedge \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (2.1)$$

On retrouve :

$$\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

avec  $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  vecteur de Poynting (définition générale), en effet :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\frac{w_e}{w_m} = \frac{\varepsilon E^2}{\mu H^2} \quad (2.2)$$

Comme pour le vide, dans un diélectrique on trouve,  $w_e = w_m$ , la densité d'énergie électrique...

**d) Impédance du milieu**

L'impédance du milieu est donné par

$$Z = \frac{E}{H}$$

Or par la troisième équation de Maxwell :  $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} = \omega \mu \vec{H}$ . Or par la relation de dispersion :  $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2$  donc :

$$Z = \mu \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

Dans un milieu non magnétique :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \mu_0 c \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{Z_0}{n} \quad \text{avec } Z_0 = 377 \Omega$$

**CM4 (2021-02-03)**

#### e) Dispersion et absorption

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_m e^{-i\omega t}$$

#### $\alpha$ ) Susceptibilité électrique

$$\vec{P} = -\delta_e \vec{r} \quad \text{avec } \delta_e \text{ le moment dipolaire}$$

$$\vec{P}_m = \frac{\delta_e^2}{m} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}$$

On compare avec la relation de susceptibilité

$$\vec{P}_m = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$$

$$\Rightarrow \chi_e = \frac{\omega_e^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} = \chi'_e + i\chi''_e$$

$\chi_e \in \mathbb{C}$  il y a donc un déphasage entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$

$$\chi'_e = \frac{\delta_e^2}{M \varepsilon} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

$$\chi''_e = \frac{\delta_e^2}{M \varepsilon} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

Quand on a  $\omega$  grand devant  $\omega_0$ ,  $\chi'_e$  tend vers 0  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en opposition de phase lorsque  $\omega$  est grand. Lorsque que  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\chi_e \rightarrow 0$  c'est comme si l'onde se propagé dans le vide, à haute fréquence le milieu est invisible.

### $\beta$ ) Permittivité

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$$

$$\begin{aligned}\varepsilon'_r &= 1 + \chi'_e \Rightarrow \varepsilon'_r = \varepsilon_0(1 + \chi'_e) \\ \varepsilon''_r &= \chi''_e \Rightarrow \varepsilon''_r = \varepsilon_0\chi''_e\end{aligned}$$

$$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \simeq \sqrt{\varepsilon_r} \Rightarrow n^2 = \varepsilon_r$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c}\beta z} e^{i\omega(\frac{n_0 z}{c} - t)}$$

1. pour  $\omega$  très grand, ou très petit devant  $\omega_0$ ,  $\varepsilon''_r$  et  $\beta$  tendent vers 0, il n'y a donc pas d'absorption
2. À l'inverse lorsque  $\omega = \omega_0$ , il y a une très forte absorption, on est à la résonnance
3. Quand  $\omega \rightarrow \infty$ , on a  $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_0$
4. Forte corrélation entre la vitesse de propagation et la fréquence, d'où le nom de milieu dispersif
5. On parle de dispersion normale lorsque quand  $\omega$  augmente,  $\varepsilon'$  augmente.

$\gamma$ ) **dissipation de l'énergie** Le déphasage entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  influence l'énergie dissipé par l'onde électromagnétique dans le dielectrique. La puissance  $P$  cédée correspond au travail de la force électrique qui s'exerce sur les charges liées qui se déplacent sous la force de polarisation. Déplacement des charges sous l'action de  $\vec{E}$  :  $\vec{j}_{pol}$

$$P = \vec{j}_{pol} \cdot \vec{E} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

avec  $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{-i\omega t})$  et  $\vec{P} = \text{Re}(\vec{P}_0 e^{-i\omega t + \varphi})$

$$\vec{P}_m = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0$$

$$\begin{aligned}P &= \text{Re}\left(\varepsilon_0((\varepsilon_r - 1) + i\varepsilon''_r)\vec{E}_0(\cos \omega t - \sin \omega t)\right) \\ &= \varepsilon_0[(\varepsilon'_r - 1)\cos \omega t + \varepsilon''_r \sin \omega t] \vec{E}_0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \omega [(\varepsilon'_r - 1)\sin \omega t - \varepsilon''_r \cos \omega t] \vec{E}_0 \\ &\Rightarrow P = -\varepsilon_0 \omega [(\varepsilon'_r - 1)\cos \omega t \sin \omega t - \varepsilon''_r \cos^2 \omega t] E_0^2 \Rightarrow \langle P \rangle_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega \varepsilon''_r E_0^2\end{aligned}$$

On remarque que  $\langle P \rangle_t \propto \varepsilon_r''$  dissipation par effet Joule

**Exemple :** four micro-onde

$$f_{micro\_onde} = 2.45 GHz \quad (\lambda_{micro} \simeq 12.2)$$

On décale légèrement la fréquence des micro-ondes de façon à ce que  $\omega_{micro} \neq \omega_{eau}$ , pour "cuisiner à cœur". Si la fréquence était égale, tout serait absorbé à la surface et rien n'irait au centre

### δ Les différents types de polarisation

1. polarisation électronique domine au HF
2. polarisation ionique domine à des fréquences plus basses
3. polarisation d'orientation : molécules polaires

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$$

En général :  $T \gg \tau$   $\rho = 0$ , dissipation rapide

Ce qui permet d'écrire  $\text{div} \vec{E} = 0$

$$\text{rot} \vec{B} = -\mu_0 \left( \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

L'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

Lorsqu'on a un processus irréversible on a dissipation de l'énergie électrique

**CM5 (2021-02-10)**