

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

NOTE DE COURS

# Outils fondamentaux pour la physique

*Malo Kerebel*

Cours par  
Pascal RIVIÈRE

Semestre 6, année 2020-2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Distributions et fonctions test</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	L'espace $\mathcal{D}$ des fonctions test . . . . .	3
1.3	L'espace $\mathcal{D}'$ des distributions . . . . .	4
1.4	Opérations et propriétés élémentaires dans $\mathcal{D}'$ . . . . .	8
1.4.1	Translation . . . . .	8
1.4.2	Dilatation . . . . .	9
1.4.3	Convergence dans $\mathcal{D}'$ . . . . .	10

# Chapitre 1

## Distributions et fonctions test

CC1 (2021-01-13) : Distributions

### 1.1 Introduction

Dernier outils en maths pour la physique. Introduit pour résoudre des problèmes physiques que l'on ne pouvait pas traiter avec les fonction, eg :

1. Impulsion
2. Electromagnétisme
3. Mécanique quantique

**Exemple 1**, une bille fait un choc dur avec une bille au repos qui ne recevait aucune énergie avant le choc et après le choc, elle reçoit donc une énergie fini en un temps nul

On représente l'énergie par une fonction  $f$  telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = E_{\text{fini}}$$

$$f(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}^*$$

La théorie de l'intégration nous dirait que l'intégrale est nulle

On peut tenter un passage à la limite :

$$f_n(t) \begin{cases} n & \text{si } t \in [\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 2** Potentiel électrostatique. Distribution de charge continue :  
 $V(r) = k$

$$\int \int \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dv' \text{ avec } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Distribution de charge ponctuelle :

$$V(r) = k \frac{Q}{|r - a|} = k \frac{1}{|r - a|}$$

Pour faire le lien entre les deux il faudrait  $\rho$  telle que  $\int \int \rho = Q$  mais avec  $\rho = 0$  sauf en  $a$

Dirac a donc créé la distribution de Dirac  $\delta_a$

$$\int_R \delta_a \varphi dx =_{notation} \langle \delta_a, \varphi \rangle =_{definition} \varphi(a)$$

Toute la théorie des distributions va donc venir de la définition de ces fonctions  $\varphi$ , les fonctions test.

## 1.2 L'espace D des fonctions test

**Définition 1.1.** L'espace D

Ces fonctions sont indéfiniment dérivables  $C^\infty$  et à support borné, elles sont nulles en dehors d'un intervalle  $[a, b]$  ensuite elles sont lisses entre  $a$  et  $b$

**Définition 1.2.** Support d'une fonction

Si  $\varphi$  est une fonction, son support est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle. Ça se note  $\text{supp}(\varphi)$ .

Puisque  $\varphi$  est  $C^\infty$  on doit avoir  $\varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemples :

- La fonction dite de Schwartz :

$$\varphi_s(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } |x| < 1$$

On doit vérifier que les dérivées sont bien nulles en  $-1$  ou  $1$  (la fonction est paire donc ça ne change rien)

On peut toujours trouver des fonctions  $\varphi \in \mathbb{D}$  de support  $[c, d]$  et telle que  $\varphi = 1$  sur  $[a, b]$ , où  $c < a < b < d \in \mathbb{R}$

De même si au lieu de  $\varphi = 1$  on a  $\varphi = f$ , où  $f \in C^\infty$

Ex :

$$1) \psi_a(x) = \varphi_s\left(\frac{x}{a}\right) \times \frac{1}{\int_R \varphi_s\left(\frac{x}{a}\right) dx}$$

$$2) h = \psi_a(x) * \chi_{[0, L]}$$

Pour  $\varphi = f$  on multiplie juste la fonction pour  $\varphi = 1$  par  $f$ .

**Définition 1.3.** Convergence dans  $\mathbb{D}$ 

$\phi_n \rightarrow \phi$  dans  $\mathbb{D}$  si et seulement si il existe  $K$  inclus dans  $\mathbb{R}$  borné, tel que le support de  $\phi_n$  est inclus dans  $K \forall n$  et le support de  $\phi$  est inclus dans  $K$  ainsi que  $\varphi_n^{(\alpha)} \rightarrow \varphi^{(\alpha)}$  uniformément  $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

**Propriétés 1.1.**

1. Si  $\varphi \in \mathbb{D}$  et  $f$  est une fonction à support borné, alors :  $\varphi * f \in \mathbb{D}$
2.  $\forall f L^1_{loc}(\mathbb{R})$  (localement sommable, c'est à dire sommable sur tout intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ),  $\forall \varphi \in \mathbb{D} : f \cdot \varphi \in L^1(\mathbb{R})$
3. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $L^1_{loc}$  :

$$f =_{pp} g \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

Ce qui revient à dire que toute fonction  $d \in L^1_{loc}$

**1.3 L'espace  $\mathbb{D}'$  des distributions**

**Définition 1.4.** Distributions Une distributions  $T$  est une application linéaire continue de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathbb{D}'$  l'ensemble des distributions.  $\mathbb{D}'$  est aussi appelé espace dual de  $\mathbb{D}$ .

**Exemples :**

1. Distribution  $\delta$

**Définition 1.5.** Distribution de Dirac en 0 :

On note  $\delta$  la distribution de dirac en 0 définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

1. On a bien une application de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{R}$
2. Linéarité :  $\langle \delta, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle \delta, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle \delta, \varphi_2 \rangle$
3. Continuité  $\varphi_n \rightarrow \varphi$   
 $\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$  donc c'est bien continu

2. L'application suivante est aussi une distribution de  $\mathbb{D}'$  :

$$T : \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

1. L'intégrale donne bien un réel donc c'est bien une application de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{R}$
2. L'intégrale est linéaire donc cette application est linéaire aussi
3. Soit  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  dans  $\mathbb{D}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$$

Donc  $T$  est continue

## CM2 (2021-01-14) : Distributions

### 1.6. Somme et multiplication par un scalaire :

Si  $T_1, T_2 \in \mathbb{D}$  :

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

Similaire au fonctionnement d'une intégrale

Si  $T \in \mathbb{D}'$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle$$

**Exemple :**  $\delta + \delta = 2\delta$

$$\langle \delta + \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle = 2\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 2\delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

$$\langle \delta + \delta, \varphi \rangle = 2\varphi(0)$$

**Définition 1.7.** Distribution nulle

$$T = 0 \text{ dans } \mathbb{D}' \Leftrightarrow \langle \alpha T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

**Définition 1.8.** Égalité dans  $\mathbb{D}'$

$$T_1 = T_2 \text{ dans } \mathbb{D}' \Leftrightarrow T_1 - T_2 = 0 \text{ dans } \mathbb{D}'$$

C'est à dire :

$$T_1 = T_2 \text{ dans } \mathbb{D}' \Leftrightarrow \langle \alpha T_1 - T_2, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

**Théorème 1.2.**  $(\mathbb{D}', +, \cdot, 0)$  est un espace vectoriel de dimension infinie

**Définition 1.9.** Distributions régulières et singulières

1. On appelle distribution régulière une distribution que l'on peut définir à partir d'une fonction  $f$  de façon :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

C'est équivalent au produit scalaire de  $f$  par  $\varphi$ , on notera  $T_f$  ou  $[f]$

2. Toutes les autres distributions sont singulières

La distribution  $\delta$  est par exemple singulière, tandis que  $T : \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$  est une distribution régulière

**Remarques :**

1. Toute fonction de  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  définit une distribution (régulière)
2. Par abus de langage on pourra dire "Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  une distribution"
3. Inversement, par abus on pourra dire aussi  $T(x)$  avec  $T \in (\mathcal{D})'$
4. On ne peut pas définir le produit entre deux distributions quelconques, la théorie des distributions ne s'applique qu'à des problèmes linéaires. En particulier les équations différentielles ordinaires (E.D.O) linéaire

**Définition 1.10.** Multiplication par une fonction  $C^\infty$

Si  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{D}'$  on peut définir la distribution  $f \cdot T \in \mathcal{D}'$  par :

$$\langle f \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f \cdot \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

**Exemple :**  $\cos \cdot \delta$

$\cos \in C^\infty$  et  $\delta \in \mathcal{D}'$  Pour définir  $\cos \cdot \delta$  il faut trouver la valeur de  $\langle \cos \cdot \delta, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \cos \cdot \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \cos \varphi \rangle \\ &= (\cos \cdot \varphi)(0) \\ &= \cos(0) \cdot \varphi(0) \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

**Exemples de distributions**

**1. Distributions régulières** Les fonction  $L_{loc}^1$  sont les plus utilisées :

1. Fonctions constantes :  $f(x) = 1$  par exemple

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$$

2. Fonctions indicatrices :  $f = \chi_{[a,b]}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x) dx$$

3. Fonction Heavyside :  $H = \chi_{[0,+\infty[}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

4. Fonction signe ;  $Sgn) = \chi_{[0,+\infty[} - \chi_{]-\infty,0]}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx$$

5. Et beaucoup d'autre fonctions :  $f = |vert \cos|, f = \ln|vert x|$

$f =_{pp} g$  dans  $L_{loc}^1 \Leftrightarrow T_f = T_g$  dans  $\mathbb{D}'$

## 2. Distributions singulières

**Définition 1.11. Distributions de Dirac** On note  $\delta_a$  la distribution de dirac au point a. On notera parfois  $\delta_a = \delta(x - a)$

**Définition 1.12. Distribution peigne de Dirac** Un peigne de Dirac noté  $\text{III}_a$  est une somme de distribution de dirac sous la forme :

$$\langle \text{III}_a, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$$

où a est un réel constant. Le peigne de dirac permet d'échantillonner la fonction  $\varphi$  et de faire la somme de toutes les valeurs échantillonnées.

**Définition 1.13. Distribution Valeur principale de  $1/x$**  On définit la distribution valeur principale de  $1/x$  notée  $Vp(\frac{1}{x})$  par :

$$\langle Vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}$$



**Définition 1.14. Distribution Partie finie de  $1/x^2$**  On définit la distribution Partie finie de  $1/x^2$  notée  $\text{Pf}(\frac{1}{x^2})$  par :

$$\langle Pf(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}$$

## 1.4 Opérations et propriétés élémentaires dans $\mathbb{D}'$

### 1.4.1 Translation

**Définition 1.14.** (Rappel) Translations des fonctions

Si  $f$  est une fonction, on définit  $\tau_a f$  translaté de  $a$  de la fonction  $f$  par :

$$\tau_a f = f(x - a)$$

Comment définir  $\tau_a T$  si  $T \in \mathbb{D}'$  et  $T$  quelconque ?

$$\begin{aligned} \langle \tau_a[f], \varphi \rangle &= \langle [\tau_a f], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x - a) \varphi(x) dx, \text{ chgmt de variable } y = x - a, x = y + a, J = 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y + a) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau_{-a} \varphi(y) dy \\ &= \langle [f], \tau_{-a} \varphi \rangle \end{aligned}$$

**CM3 (2021-01-21)**

**Définition 1.16.** Translation dans  $\mathbb{D}'$

Si  $T \in \mathbb{D}'$  et  $a \in \mathbb{R}$ , on définit  $\tau_a T \in \mathbb{D}'$  :

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x + a) \rangle$$

**Exemple :**  $\tau_a \delta$

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi \rangle &= \varphi(0) \\ \langle \tau_a \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \varphi(x + a) \rangle \\ &= \varphi(x + a)|_{x=0} \\ &= \varphi(a) \\ &= \langle \delta_a, \varphi \rangle \end{aligned}$$

### 1.4.2 Dilatation

**Définition 1.17.** (Rappel) Dilatation des fonctions

Si  $f$  est une fonction et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on définit  $d_\lambda f$  dilatée de  $\lambda$  de la fonction  $f$  par :

$$d_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

On établit une formule pour  $d_\lambda T, T \in \mathbb{D}'$ , lorsque  $T$  est régulière

$$\begin{aligned} \langle d_\lambda[f], \varphi \rangle &= \langle [d_\lambda f], \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d_\lambda f(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

On fait un changement de variable,  $y = \frac{x}{\lambda}, x = \lambda y, J = \lambda$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(\lambda y) |\lambda| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi(y) |\lambda| dy \\ &= \langle [f], |\lambda| d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle \end{aligned}$$

**Définition 1.18** Dilatation dans  $\mathbb{D}'$

Si  $T \in \mathbb{D}'$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on définit  $d_\lambda T \in \mathbb{D}'$  la dilatée de la distribution  $T$  par :

$$\langle d_\lambda T, \varphi \rangle = \langle [f], |\lambda| d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle = \langle [f], |\lambda| \varphi(\lambda x) \rangle$$

**Exemple :**  $\delta_0 = \delta$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

On cherche  $\delta_{-3}$

$$\begin{aligned} \langle \delta_{-3}, \varphi \rangle &=_{def} \langle [f], |-3| d_{\frac{-1}{-3}} \varphi \rangle \\ &= \langle [f], 3\varphi(-3x) \rangle \\ &= 3\varphi(-3 \times 0) = 3\varphi(0) \\ &= 3\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 3\delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Donc  $\delta_{-3} = 3\delta$

**Définition 1.19** Parité dans  $\mathbb{D}'$

$T$  est une distribution paire  $\Leftrightarrow d_{-1}T = T$   $T$  est une distribution impaire  $\Leftrightarrow d_{-1}T = -T$

**Exemple** distribution régulière impaire

Soit  $[x]$  régulière associé à la fonction  $(x \rightarrow x)$ . Cette fonction est impaire. Montrons que la distribution  $[x]$  est impaire dans  $\mathbb{D}'$

Remarque  $[x] \in \mathbb{D}'$  existe.

$$\begin{aligned}\langle d_{-1}[x], \varphi \rangle &= \langle [x], |-1|d_{-1}\varphi \rangle = \langle [x], \varphi(-x) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\varphi(-x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -y\varphi(y)dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} y\varphi(y)dy = -\langle [x], \varphi \rangle = \langle -[x], \varphi \rangle\end{aligned}$$

On retiendra qu'une distribution régulière associé à une fonction paire (ou impaire) est paire (ou impaire).

**Définition 1.20.** Périodicité dans  $\mathbb{D}'$

Si  $T \in \mathbb{D}'$ ,  $T$  est dite périodique de période  $a$  si :

$$\tau_a T = T$$

Toutes distribution régulière associé à une fonction périodique est périodique.

### 1.4.3 Convergence dans $\mathbb{D}'$

**Définition 1.21.** Convergence dans  $\mathbb{D}'$

Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de distribution dans  $\mathbb{D}'$ .

On dit que  $T_n$  converge vers  $T$  dans  $\mathbb{D}'$  et on notera  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$  ou  $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T$  si :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$$

**Exemple 1** Dirac peut s'obtenir par la limite d'une suite de distribution :

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais au sens des distributions on va montrer que  $[f_n] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \delta$

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x) dx$$

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = n [\Phi]_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi'(0)$$

**CM4 (2021-01-2x)**