Université de Bretagne Occidentale

Note de cours

Outils fondamentaux pour la physique

Malo Kerebel

Cours par
Pascal Rivière

Semestre 6, année 2020-2021

Table des matières

Chapitre 1

Distributions et fonctions test

CC1 (2021-01-13) : Distributions

1.1 Introduction

Dernier outils en maths pour la physique. Introduit pour résoudre des problèmes physiques que l'on ne pouvait pas traiter avec les fonction, eg :

1. Impulsion
2. Electromagnétisme
3. Mécanique quantique

Exemple 1, une bille fait un choc dur avec une bille au repos qui ne recevait aucune énergie avant le choc et après le choc, elle reçoit donc une énergie fini en un temps nul

On représente l'énergie par une fonction f telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = E\text{fini}$$

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

La théorie de l'intégration nous dirait que l'intégrale est nulle

On peut tenter un passage à la limite :

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2 Potentiel électrostatique. Distribution de charge continue : V(r) = k

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dv' \text{ avec } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Distribution de charge ponctuelle :

$$V(r) = k\frac{Q}{|r-a|} = k\frac{1}{|r-a|}$$

Pour faire le lien entre les deux il faudrait ρ telle que $\int\int\int \rho = Q$ mais avec $\rho = 0$ sauf en a

Dirac a donc créer la distribution de dirac δ_a

$$\int_R \delta_a \varphi dx =_{notation} \langle \delta_a, \varphi \rangle =_{definition} \varphi(a)$$

Toute la théorie des distribution va donc venir de la définitons de ces fonction φ, les fonctions test.

1.2 L'espace $\mathcal{D}$des fonctions test

Définition 1.1. L'espace $\mathcal{D}$
Ces fonctions sont indéfiniment dérivable C^∞ et à support borné, elle sont nulles en dehors d'un intervalle [a,b] ensuite elles sont lisses entre a et b

Définition 1.2. Support d'une fonction
Si φ est une fonction, son support est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle. Ça se note supp(φ).

Puisque φ est C^∞ on doit avoir $\varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemples :

- La fonction dite de Schwartz :

$$\varphi_s(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } |x| < 1$$

On doit vérifier que les dérivé sont bien nulle en -1 ou 1 (la fonction est paire donc ça ne change rien)

On peut toujours trouver des fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ de support [c,d] et telle que $\varphi = 1$ sur [a,b], où $c < a < b < d \in \mathbb{R}$

De même si au lieu de $\varphi = 1$ on a $\varphi = f$, où $f \in C^\infty$

Ex :

$$1)\ \psi_a(x) = \varphi_s\left(\frac{x}{a}\right) \times \frac{1}{\int_R \varphi_s\left(\frac{x}{a}\right) dx}$$

$$2)\ h = \psi_a(x) * \chi_{[0,L]}$$

Pour $\varphi = f$ on multiplus juste la fonction pour $\varphi = 1$ par f.

Définition 1.3. Convergence dans $\mathcal{D}$
$\phi_n \to \phi$ dans $\mathcal{D}$si et seulement si il existe K inclus dans R borné, tel que le support de ϕ_n est inclus dans $\mathbb{K}$ $\forall n$ et le support de ϕ est inclus dans $\mathbb{K}$ ainsi que $\varphi_n^{(\alpha} \to \varphi^{(\alpha}$ uniformement $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

Propriétés 1.1.

1. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et f est une fonction à support borné, alors : $\varphi * f \in \mathcal{D}$
2. $\forall f L_l^1 oc(\mathbb{R})$ (localement sommable, c'est à dire sommable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$), $\forall \varphi \in \mathcal{D}$: $\quad f \cdot \varphi \in L^1(\mathbb{R})$
3. Si f et g sont des fonctions L^1_{loc} :

$$f =_{pp} g \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Ce qui revient à dire que toute fonction $d \in L^1_{loc}$

1.3 L'espace $\mathcal{D}$' des distributions

Définition 1.4. Distributions Une distributions T est une application linéaire continue de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}$' l'ensemble des distributions. $\mathcal{D}$' est aussi appelé espace dual de $\mathcal{D}$.

Exemples :

1. Distribution δ

Définition 1.5. Distrirbution de Dirac en 0 :
On note δ la distribution de dirac en 0 définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

1. On a bien une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$
2. Linéarité : $\langle \delta, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1\langle \delta, \varphi_1 \rangle + \alpha_2\langle \delta, \varphi_2 \rangle$
3. Continuité $\varphi_n \to \varphi$
   $\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ donc c'est bien continu

2. L'application suivante est aussi une distribution de $\mathcal{D}$' :

$$T : \varphi \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

1. L'intégrale donne bien un réelle donc c'est bien une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$
2. L'intégrale est linéaire donc cette application est linéaire aussi
3. Soit $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

   Donc T est continue

CM2 (2021-01-14) : Distributions

1.6. Somme et multiplication par un scalaire :
Si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}$:

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Similaire au fonctionnement d'une intégrale
Si $T \in \mathcal{D}'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle$$

Exemple : $\delta + \delta = 2\delta$

$$\langle \delta + \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle = 2\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 2\delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\langle \delta + \delta, \varphi \rangle = 2\varphi(0)$$

Définition 1.7. Distribution nulle

$$T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow \langle \alpha T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Définition 1.8. Égalité dans $\mathcal{D}$'

$$T_1 = T_2 \text{ dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow T_1 - T_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'$$

C'est à dire :

$$T_1 = T_2 \text{ dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow \langle \alpha T_1 - T_2, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Théorème 1.2. $(\mathcal{D}', +, \cdot, 0$ est un espace vectoriel de dimension infinie

Définition 1.9. Distributions régulières et singulières

1. On appelle distribution régulière un distribution que l'on peut définir à partir d'une fonction f de façon :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi x dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

   C'est équivalent au produit scalaire de f par φ, on notera T_f ou $[f]$

2. Toutes les autres distributions sont singulières

La distribution δ est par exemple singulière, tandis que $T : \varphi \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$ est une distribution régulière

Remarques :

1. Toute fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R}$ définit une distribution (régulière)
2. Par abus de langage on pourra dire "Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ une distribution"
3. Inversement, par abus on pourra dire aussi $T(x)$avec$T \in (D)'$
4. On ne peut pas définir le produit entre deux distributions quelconques, la théorie des distributions ne s'applique qu'à des problèmes linéaires. En particulier les équations différentielles ordinaires (E.D.O) linéaire

Définition 1.10. Multiplication par une fonction C^∞

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'$ on peut définir la distribution $f \cdot T \in ensD'$ par :

$$\langle f \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f \cdot \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Exemple : $\cos \cdot \delta$

$\cos \in C^\infty$ et $\delta \in \mathcal{D}'$ Pour définir $\cos \cdot \delta$ il faut trouver la valeur de $\langle \cos \cdot \delta, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \cos \cdot \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \cos \varphi \rangle \\ &= (\cos \cdot \varphi)(0) \\ &= \cos(0) \cdot \varphi(0) \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Exemples de distributions

1. Distributions régulières Les fonction L^1_{loc} sont les plus utilisées :

1. Fonctions constantes : $f(x) = 1$ par exemple
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$
2. Fonctions indicatrices : $f = \chi_{[a,b]}$
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x)dx$$
3. Fonction Heavyside : $H = \chi_{[0,+\infty[}$
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$
4. Fonction signe ; $Sgn) = \chi_{[0,+\infty[} - \chi_{]-\infty,0]}$
$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx$$
5. Et beaucoup d'autre fonctions : $f = |\cos|, f = ln|x|$

$f =_{pp} g$ dans $L^1_{loc} \Leftrightarrow T_f = T_g$ dans $\mathcal{D}$'

2. Distributions singulières

Définition 1.11. Distributions de Dirac On note δ_a la distribution de dirac au point a. On notera parfois $\delta_a = \delta(x-a)$

Définition 1.12. Distribution peigne de Dirac Un peigne de Dirac noté $Ш_a$ est une somme de distribution de dirac sous la forme :

$$\langle Ш_a, \varphi \rangle = \langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$$

où a est un réel constant. Le peigne de dirac permet d'échantilloner la fonction φ et de faire la somme de toutes les valeurs échantillonnées.

Définition 1.13. Distribution Valeur printcipale de $1/x$ On définit la distribution valeur principale de $1/x$ notée $Vp(\frac{1}{x}$ par :

$$\langle Vp(\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Définition 1.14. Distribution Partie finie de $1/x^2$ On définit la distr-tibution Partie finie de $1/x^2$ notée Pf($\frac{1}{x^2}$ par :

$$\langle Pf\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}$$

1.4 Opérations et propriétés élémentaires dans $\mathcal{D}$'

1.4.1 Translation

Définition 1.14. (Rappel) Translations des fonctions

Si f est une fonction, on définit $\tau_a f$ translaté de a de la fonction f par :

$$\tau_a f = f(x-a)$$

Comment définir $\tau_a T$ si $T \in \mathcal{D}'$ et T quelconque ?

$$\langle\tau_a[f], \varphi\rangle = \langle[\tau_a f], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\tau_a f(x)\varphi(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\varphi(x)dx, \text{chgmt de variable } y = x-a, x = y+a, J = 1$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(y+a)dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\tau_{-a}\varphi(y)dy$$
$$= \langle[f], \tau_{-a}\varphi\rangle$$

CM3 (2021-01-21)

Définition 1.16. Translation dans $\mathcal{D}$'

Si $T\in\mathcal{D}'$ et $a\in\mathbb{R}$, on définit $\tau_a T\in\mathcal{D}'$:

$$\langle\tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle = \langle T, \varphi(x+a)\rangle$$

Exemple : $\tau_a\delta$

$$\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$

$$\begin{aligned}\langle\tau_a\delta, \varphi\rangle &= \langle\delta, \varphi(x+a)\rangle\\ &= \varphi(x+a)|_{x=0}\\ &= \varphi(a)\\ &= \langle\delta_a, \varphi\rangle\end{aligned}$$

1.4.2 Dilatation

Définition 1.17. (Rappel) Dilatation des fonctions

Si f est une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $d_\lambda f$ dilatée de λ de la fonction g par :

$$d_\lambda f(x) = f(\frac{x}{\lambda})$$

On établit une formule pour $d_\lambda T, T \in \mathcal{D}'$, lorsque T est régulière

$$\begin{aligned}
\langle d_\lambda [f], \varphi\rangle &= \langle [d_\lambda f], \varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} d_\lambda f(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx \\
&\text{On fait un changement de variable, } y = \frac{x}{\lambda}, x = \lambda y, J = \lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(\lambda y)|\lambda| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) d_{\frac{1}{\lambda}}\varphi(y)|\lambda| dy \\
&= \langle [f], |\lambda| d_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\rangle
\end{aligned}$$

Définition 1.18 Dilatation dans $\mathcal{D}$'

Si $T \in \mathcal{D}'$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $d_\lambda T \in \mathcal{D}'$ la dilaté de la distribution T par :

$$\langle d_\lambda T, \varphi\rangle = \langle [f], |\lambda| d_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\rangle = \langle [f], |\lambda|\varphi(\lambda x)\rangle$$

Exemple : $\delta_0 = \delta$

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$$

On cherche δ_{-3}

$$\begin{aligned}
\langle \delta_{-3}, \varphi\rangle &=_{def} \langle [f], |-3| d_{\frac{-1}{3}}\varphi\rangle \\
&= \langle [f], 3\varphi(-3x)\rangle \\
&= 3\varphi(-3 \times 0) = 3\varphi(0) \\
&= 3\langle \delta, \varphi\rangle = \langle 3\delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Donc $\delta_{-3} = 3\delta$

Définition 1.19 Parité dans $\mathcal{D}$'

T est une distribution paire $\Leftrightarrow d_{-1}T = T$ T est une distribution impaire $\Leftrightarrow d_{-1}T = -T$

Exemple distribution régulière impaire

Soit [x] régulière associé à la fonction ($x \to x$). Cette fonction est impaire. Montrons que la distribution [x] est impaire dans $\mathcal{D}$'

Remarque $[x] \in \mathcal{D}'$ existe.

$$\begin{aligned}
\langle d_{-1}[x], \varphi \rangle = \langle [x], |-1| d_{-1}\varphi \rangle &= \langle [x], \varphi(-x) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\varphi(-x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} -y\varphi(y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} y\varphi(y)dy = -\langle [x], \varphi \rangle = \langle -[x], \varphi \rangle
\end{aligned}$$

On retiendra qu'une distribution régulière associé à une fonction paire (ou impaire) est paire (ou impaire).

Définition 1.20. Périodicité dans $\mathcal{D}$'

Si $T \in \mathcal{D}'$, T est dite périodique de période a si :

$$\tau_a T = T$$

Toutes distribution régulière associé à une fonction périodique est périodique.

1.4.3 Convergence dans $\mathcal{D}$'

Définition 1.21. Convergence dans $\mathcal{D}$'

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distribution dans $\mathcal{D}$'.

On dit que T_n converge vers T dans $\mathcal{D}$' et on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T$ ou $T_n \underset{n\to+\infty}{\to} T$ si :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \underset{n\to+\infty}{\to} \langle T, \varphi \rangle$$

Exemple 1 Dirac peut s'obtenir par la limite d'une suite de distribution :

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais au sens des distributions on va montrer que $[f_n] \underset{n\to+\infty}{\to} \delta$

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)dx$$

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = n\, [\Phi]_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{=\to} \Phi'(0)$$

Chapitre 2

Dérivation des distributions

CM4 (2021-02-10)

2.1 Introduction

On prend l'exemple d'une balle qui fait un choc dur avec un mur, passant instantanemment d'une vitesse v_0 à $-v_0$, avec des fonctions ce n'est pas descriptible, ici on n'a pas v(t) une fonction mais on a $v(t) = -v_0 sgn(t)$ une distribution. On va montrer que $sgn' = 2\delta$

2.2 Dérivée des distributions

Comme d'habitude, pour définir la dérivée d'une distribution on va se servir de ce qu'on sait faire avec les fonction : si [f] est une distribution régulière associée à une fonction dérivable partout, on va faire en sorte que $[f]' = [f']$ et établir une formule générale de dérivation. Si on veut que $[f]' = [f']$, alors, si $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}
\langle [f]', \varphi \rangle &= \langle [f'], \varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{E}} f'(x)\varphi(x)dx \\
&\underset{ipp}{=} [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \\
\langle [f]', \varphi \rangle &= \langle [f], \varphi' \rangle
\end{aligned}$$

2.2.1 Définition est exemple

Définition 2.1 Dérivation dans $\mathcal{D}$'
Si $T \in \mathcal{D}'$ on définit sa dérivée $T' \in \mathcal{D}'$ par :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Théorème 2.1. Si $T \in \mathcal{D}'$ sa dérivée n-ième $T^{(n)} \in'_D$ est défini par :

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Exemples

$$[sgn]' = 2\delta$$

$$[cos]' = [sin]$$

La démonstration est trivial et est laissé en exercice au lecteur.

CM5 (2021-02-17)

2.2.2 Cas des fonctions continues par morceaux

Théorème 2.2 Formule des sauts
Soit f une fonction continue dérivable sauf en n points de discontinuité $a_1, a_2, \cdots, a_n$. On suppose que $a_1, a_2, \cdots, a_n$. sont des discontinuités de première espèce c'est à dire que le saut en a_p défini par $\sigma_p = f(a_p^+) - f(a_p^-)$ est fini.

Alors

$$[f]' = [f'] + \sum_{p=1}^{n} \sigma_p \delta_{a_p}$$

Ce théorème reste valable dans le cas où $n = +\infty$

Exemple : Fonction rampe
Soit f la fonction rampe suivante : $f(t) = t \forall t \in [0, 1[$ périodique de période 1 :

$$[f]' = [f'] + \sum_{p=1}^{n} \sigma_p \delta_{a_p}$$

La fonction est périodique il y a donc une infinité de discontinuité, et $\forall p, \sigma_p = -1$, de plus $f'(t) = 1$

Donc :

$$[f]' = [1] - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

$$[f]' = [1] - \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta_p$$

$$[f]' = [1] - Ш_1$$

Exercice personnel :

Retrouver ce résultat par calcul direct avec des fonctions test.

2.2.3 Propriétés de la dérivation dans $\mathcal{D}$'

Théorème 2.3

$$\begin{aligned}
&(S+T)' = S' + T' \quad \forall S, T \in \mathcal{D} \\
&(\lambda T)' = \lambda T' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall T \in \mathcal{D} \\
&(\tau_a T)' = \tau_a T' \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall T \in \mathcal{D} \\
&(d_a T)' = \frac{1}{a} d_a T' \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall T \in \mathcal{D}
\end{aligned}$$

Remarque

C'est la même formule que pour les fonctions

Théorème 2.4 Si $f \in C^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$ alors dans $\mathcal{D}'$

$$(f \cdot T)' = f' \cdot T + f \cdot T'$$

Théorème 2.5

$$t\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)} \quad \forall \in \mathbb{N}^\star$$

Remarque : On a vu que $t\delta = 0$ mais $t\delta' = -\delta$

Chapitre 3

Transformée de Fourier des distributions

CM6 (2021-03-11)

3.1 Introduction

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} = \delta$$

$$\mathcal{F}(\frac{1}{a} \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}) = \text{sinc}(\pi \nu a)$$

$$\langle [\mathcal{F}(f)], \varphi \rangle =$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ en général, $\mathcal{F}(\varphi)$ existe mais n'a pas de support borné.

Il va falloir définir des fonctions test dans un ensemble qui est stable par transformée de Fourier. Cet ensemble est $\mathcal{S}$, l'ensemble des fonctions à décroissance rapide. On a vu au semestre 5 que

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$$

$\mathcal{F}$forme une bijection sur S

3.2 L'ensemble des distributions tempérées S'

Rappels :

1. Fonction à décroissance rapide : $\mathcal{S}(\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonction :f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$f \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}, \underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|x^k f^{(l)}(x)| < +\infty$$

2. La transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 3.1. L'ensemble des distributions tempérées est le dual de $\mathcal{S}$ noté $\mathcal{S}$' :

Remarque

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

Exemples de distributions tempérées

1. Fonction à croissance lente : Si $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}$ telle que $|f^{(\alpha)} \leq |P|$ avec P un polynôme.
2. $\delta \in \S'$
3. $Ш \in \mathcal{S}'$
4. Si P est un polynôme et $T \in \mathcal{S}$ alors $PT \in \mathcal{S}$ avec $\langle PT, \psi \rangle = \langle T, P\psi \rangle$
5. Les fonction L^1 et L^2 sont dans $\mathcal{S}$'
6. Si $T \in \mathcal{S}$ alors $T' \in \mathcal{S}'$
7. Toute distribution périodique est dans $\mathcal{S}$', ce que l'on admettra

3.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition 3.2. Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit :

$$\langle \mathcal{F}(T), \psi \rangle) \langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \psi \rangle) \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

Remarque : $\mathcal{F}$et $\mathcal{F}^{-1}$ sont linéaires sur $\mathcal{S}$' :

CM7 (2021-03-17)

Correctif aux chapitres 1 et 2.

$$\mathcal{D} : \{\phi/\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$$

Définition 3.2 Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit :

$$\langle \mathcal{F}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

$\mathcal{F}$est un bijection de $\mathcal{S}$sur $\mathcal{S}$dont l'inverse est $\mathcal{F}^{-1}$

Remarque : $\mathcal{F}$et $\mathcal{F}$' sont linéaires sur $\mathcal{S}$'

$$\mathcal{F}(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) = \alpha_1 \mathcal{F}(T_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(T_2) \quad \text{De même pour } \mathcal{F}^{-1}$$

Exemples de transformée de Fourier de distributions tempérées

(1) $\mathcal{F}(\delta) = 1$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(\delta), \psi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}(\psi) \rangle \\
&= \mathcal{F}(\psi)(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-2\pi\nu x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx \\
&= \langle [1], \psi \rangle
\end{aligned}$$

Donc dans $\mathcal{S}$' $\mathcal{F}(\delta) = 1$

Propriétés 3.1 Soit $T \in \mathcal{S}'$:

(1) **Dérivée :**

$$\mathcal{F}(T') = 2i\pi\nu \mathcal{F}(T)$$

$$\mathcal{F}(T^{(p)}) = (2i\pi\nu)^p \mathcal{F}(T)$$

(2) **Dérivation :**

$$(\mathcal{F}(T))' = -2i\pi \mathcal{F}(xT)$$

$$(\mathcal{F}(T))^{(p)} = (-2i\pi)^p \mathcal{F}(x^p T)$$

(3) **Translation :**

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2i\pi\nu a} F(T)$$

(4) **Modulation :**

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu a} T) = \tau_a \mathcal{F}(T)$$

(5) **Dilation :**

$$\mathcal{F}(d_{\frac{1}{a}} T) = \frac{1}{|a|} d_a \mathcal{F}(T)$$

(6) **Symétrie :**

$$d_{-1}\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}^{-1}(T)$$

(7)

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T))$$

(8) Si T est paire alors $\mathcal{F}(T)$ est paire, et $\mathcal{F}^{-1}(T) = \mathcal{F}(T)$

(9) Si T est impaire alors $\mathcal{F}(T)$ est impaire, et $\mathcal{F}^{-1}(T) = -\mathcal{F}(T)$

(10) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'$ lorsque n tend vers l'infini, alors $\mathcal{F}(T_n)$ converge vers $\mathcal{F}(T)$. C'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est continue sur $\mathcal{S}'$.

Exemples de Transformée de Fourrier de distributions tempérées

(1) $\mathcal{F}(1) = \delta$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(1), \psi \rangle &= \langle [1], \mathcal{F}(\psi) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi)(\nu) d\nu \\
&= \cdots \\
&= \psi(0)
\end{aligned}$$

Cette méthode par les fonctions test est trop dure.
Autre méthode : On sait que $\mathcal{F}(\delta) = [1]$, on prend donc $\mathcal{F}^{-1}$ de chaque côté.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\delta) &= [1] \\
\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\delta)) &= \mathcal{F}^{-1}([1]) \\
\delta &= \mathcal{F}([1])
\end{aligned}$$

Donc dans $\mathcal{S}$' $\mathcal{F}(1) = \delta$

Chapitre 4

Produit de convolution

CM8 (2021-04-01)

4.1 Introduction

Si on considère deux fonction f et g sommables, le produit de convolution de f par g est défini par :

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)dy$$

Et on sait que h est sommable.
Soit $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\langle [h], \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x)\phi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \right) \phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\phi(x)dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\phi(u+y)du \right) dy\end{aligned}$$

$$\langle [f*g], \phi \rangle = \langle [f(y)], \underbrace{\langle [g(u)], \overbrace{\phi(u+y)}^{u \to \phi(u+y)} \rangle}_{\psi(y)} \rangle$$

Pour que $[f * g]$ existe il faut que $\psi \in \mathcal{D}(ou\mathcal{S})$
Si S et T sont dans $\mathcal{D}$' on va définir

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S[y], \underbrace{\langle T(u), \phi(y+u) \rangle}_{\in R, fonction\ de\ y} \rangle$$

4.2 Produit de convolution

Définition 4.1. Produit de convolution dans $\mathcal{D}$'
Si $S, T \in \mathcal{D}'$ on pose :

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S[y], \langle T(u), \phi(y+u) \rangle \rangle = \langle T[y], \langle S(u), \phi(y+u) \rangle \rangle$$

Si on peut les calculer.

exemples

1. $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_a(x), \varphi(x+b) \rangle \\ &= \varphi(a+b)\end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

2. $\delta * H = H$

$$\begin{aligned}\langle \delta * H, \varphi \rangle &= \langle H(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle H(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \varphi(x)\chi_{[0,+\infty]} \\ &= H\varphi(x)\end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta * H = H$

3. $\delta_a * H = \tau_a H$

$$\begin{aligned}\langle \delta * H, \varphi \rangle &= \langle H(x), \langle \delta_a(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle H(x), \varphi(x+a) \rangle \\ &= \varphi(x+a)\chi_{[0,+\infty]} \\ &= H\varphi(x+a)\end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta_a * H = \tau_a H$

4. $\delta' * H = \delta$

$$\begin{aligned}
\langle \delta' * [H], \varphi\rangle &= \langle [H(x)], \langle \delta'(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle \\
&= \langle [H(x)], -\langle \delta, \frac{d}{dy}(\varphi(x+y))\rangle\rangle \\
&= \langle [H(x)], -\langle \delta(y), \varphi'(x+y)\rangle\rangle \\
&= \langle [H(x)], -\varphi'(x)\rangle \\
&= \langle [H]', \varphi\rangle \\
&= \langle \delta, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta' * H = \delta$

4.3 Propriétés

CM9 (2021-04-08)

Propriétés 4.1

Le produit de convolution est commutatif : $S * T = T * S$

Propriétés 4.2

1. δ est l'élément neutre pour $*$: $\forall T \in \mathcal{D}' \quad T * \delta = \delta * T = T$
   (Voir exemple $H * \delta$, la démonstration est similaire)
2. $(S * T)' = S' * T = S * T'$

$$\begin{aligned}
\langle (S * T)', \varphi\rangle &= -\langle S * T, \varphi'\rangle \\
&= -\langle S(x), \langle T(y), \varphi'(x+y)\rangle\rangle \\
&= -\langle S(x), \langle T(y), \frac{d}{dy}\varphi'(x+y)\rangle\rangle \\
&= -\langle S(x), -\langle T(y)', \varphi'(x+y)\rangle\rangle \\
&= +\langle S(x), +\langle T(y)', \varphi'(x+y)\rangle\rangle \\
&= \langle S * T', \varphi\rangle
\end{aligned}$$

3. $\tau_a(S * T) = \tau_a S * T = S * \tau_a T$
4. Si $S * T_1$ et $S * T_2$ existent alors $S * (\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha S * T_1 + \beta S * T_2$
   avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Propriétés 4.3. (Cas de Dirac)

1. $T * \delta' = T'$

$$\begin{aligned} \langle T * \delta', \varphi \rangle &= \langle T(x), \langle \delta'(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T(x), -\varphi'(x+0) \rangle \\ &= -\langle T, \varphi \rangle \\ &= \langle T', \varphi \rangle \end{aligned}$$

2. $T * \delta^{(n)} = T^{(n)}$
3. $T * \delta_a = \tau_a T$ (On utilise la propriété 4.2.1 et 4.2.3)
4. Périodisation par un peigne de Dirac :
   Soit $K \in \mathbb{R}^{+\star}$. Si f est une fonction nulle en dehors de $[0, K]$, on note g la fonction de période K égale à f sur $[0, K]$. Alors :

   $$g = f * \text{Ш}_K = f * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n K$$

   On peut généraliser cela à des fonctions sur une intervalle $[a, b]$ quelconque en ajustant la période du peigne de Dirac.

   $$g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nK} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f * \delta_{nK} = f * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nK} = f * \text{Ш}_K$$

   Remarque
   La produit de convolution par un peigne de Dirac Ш permet une périodisation.
   $f \cdot \text{Ш}_K$ permet une discrétisation (prendre les valeurs de la fonction seulement en certains point)

Propriétés 4.4. Transformée de Fourrier et produit de convolution
Si $T \in S'$ et $f \in S$ alors $T * [f] \in \S'$ et :

$$\mathcal{F}(T * [f]) = \mathcal{F}(T) \cdot \mathcal{F}(f)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(T * [f]) = \mathcal{F}^{-1}(T) \cdot \mathcal{F}^{-1}(f)$$