

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

NOTE DE COURS

Outils fondamentaux pour la physique

Malo Kerebel

Cours par
Pascal RIVIÈRE

Semestre 6, année 2020-2021

Table des matières

1	Distributions et fonctions test	2
1.1	Introduction	2
1.2	L'espace \mathcal{D} des fonctions test	3
1.3	L'espace \mathcal{D}' des distributions	4
1.4	Opérations et propriétés élémentaires dans \mathcal{D}'	8
1.4.1	Translation	8
1.4.2	Dilatation	9
1.4.3	Convergence dans \mathcal{D}'	10
2	Dérivation des distributions	12
2.1	Introduction	12
2.2	Dérivée des distributions	12
2.2.1	Définition et exemple	13
2.2.2	Cas des fonctions continues par morceaux	13
2.2.3	Propriétés de la dérivation dans \mathcal{D}'	14
3	Transformée de Fourier des distributions	15
3.1	Introduction	15
3.2	L'ensemble des distributions tempérées \mathcal{S}'	16
3.3	Transformée de Fourier des distributions tempérées	16
4	Produit de convolution	19
4.1	Introduction	19
4.2	Produit de convolution	20
4.3	Propriétés	21

Chapitre 1

Distributions et fonctions test

CC1 (2021-01-13) : Distributions

1.1 Introduction

Dernier outils en maths pour la physique. Introduit pour résoudre des problèmes physiques que l'on ne pouvait pas traiter avec les fonction, eg :

1. Impulsion
2. Electromagnétisme
3. Mécanique quantique

Exemple 1, une bille fait un choc dur avec une bille au repos qui ne recevait aucune énergie avant le choc et après le choc, elle reçoit donc une énergie fini en un temps nul

On représente l'énergie par une fonction f telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = E_{\text{fini}}$$

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$$

La théorie de l'intégration nous dirait que l'intégrale est nulle

On peut tenter un passage à la limite :

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2 Potentiel électrostatique. Distribution de charge continue :
 $V(r) = k$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dv' \text{ avec } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Distribution de charge ponctuelle :

$$V(r) = k \frac{Q}{|r - a|} = k \frac{1}{|r - a|}$$

Pour faire le lien entre les deux il faudrait ρ telle que $\int \int \rho = Q$ mais avec $\rho = 0$ sauf en a

Dirac a donc créé la distribution de Dirac δ_a

$$\int_R \delta_a \varphi dx =_{notation} \langle \delta_a, \varphi \rangle =_{definition} \varphi(a)$$

Toute la théorie des distributions va donc venir de la définition de ces fonctions φ , les fonctions test.

1.2 L'espace \mathcal{D} des fonctions test

Définition 1.1. L'espace \mathcal{D}

Ces fonctions sont indéfiniment dérivables C^∞ et à support borné, elles sont nulles en dehors d'un intervalle $[a, b]$ ensuite elles sont lisses entre a et b

Définition 1.2. Support d'une fonction

Si φ est une fonction, son support est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est nulle. Ça se note $\text{supp}(\varphi)$.

Puisque φ est C^∞ on doit avoir $\varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Exemples :

- La fonction dite de Schwartz :

$$\varphi_s(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ si } |x| < 1$$

On doit vérifier que les dérivées sont bien nulles en -1 ou 1 (la fonction est paire donc ça ne change rien)

On peut toujours trouver des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$ de support $[c, d]$ et telle que $\varphi = 1$ sur $[a, b]$, où $c < a < b < d \in \mathbb{R}$

De même si au lieu de $\varphi = 1$ on a $\varphi = f$, où $f \in C^\infty$

Ex :

$$1) \psi_a(x) = \varphi_s\left(\frac{x}{a}\right) \times \frac{1}{\int_R \varphi_s\left(\frac{x}{a}\right) dx}$$

$$2) h = \psi_a(x) * \chi_{[0, L]}$$

Pour $\varphi = f$ on multiplie juste la fonction pour $\varphi = 1$ par f .

Définition 1.3. Convergence dans \mathcal{D}

$\phi_n \rightarrow \phi$ dans \mathcal{D} si et seulement si il existe K inclus dans \mathbb{R} borné, tel que le support de ϕ_n est inclus dans $K \forall n$ et le support de ϕ est inclus dans K ainsi que $\varphi_n^{(\alpha)} \rightarrow \varphi^{(\alpha)}$ uniformément $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

Propriétés 1.1.

1. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et f est une fonction à support borné, alors : $\varphi * f \in \mathcal{D}$
2. $\forall f L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (localement sommable, c'est à dire sommable sur tout intervalle borné de \mathbb{R}), $\forall \varphi \in \mathcal{D} : f \cdot \varphi \in L^1(\mathbb{R})$
3. Si f et g sont des fonctions L^1_{loc} :

$$f =_{pp} g \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Ce qui revient à dire que toute fonction $d \in L^1_{loc}$

1.3 L'espace \mathcal{D}' des distributions

Définition 1.4. Distributions Une distributions T est une application linéaire continue de \mathcal{D} dans \mathbb{R} . On note \mathcal{D}' l'ensemble des distributions. \mathcal{D}' est aussi appelé espace dual de \mathcal{D} .

Exemples :

1. Distribution δ

Définition 1.5. Distribution de Dirac en 0 :

On note δ la distribution de dirac en 0 définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

1. On a bien une application de \mathcal{D} dans \mathbb{R}
2. Linéarité : $\langle \delta, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle \delta, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle \delta, \varphi_2 \rangle$
3. Continuité $\varphi_n \rightarrow \varphi$
 $\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ donc c'est bien continu

2. L'application suivante est aussi une distribution de \mathcal{D}' :

$$T : \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$$

1. L'intégrale donne bien un réel donc c'est bien une application de \mathcal{D} dans \mathbb{R}
2. L'intégrale est linéaire donc cette application est linéaire aussi
3. Soit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ dans \mathcal{D}

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$$

Donc T est continue

CM2 (2021-01-14) : Distributions

1.6. Somme et multiplication par un scalaire :

Si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$:

$$\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Similaire au fonctionnement d'une intégrale

Si $T \in \mathcal{D}'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle$$

Exemple : $\delta + \delta = 2\delta$

$$\langle \delta + \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle = 2\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 2\delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\langle \delta + \delta, \varphi \rangle = 2\varphi(0)$$

Définition 1.7. Distribution nulle

$$T = 0 \text{ dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow \langle \alpha T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Définition 1.8. Égalité dans \mathcal{D}'

$$T_1 = T_2 \text{ dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow T_1 - T_2 = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'$$

C'est à dire :

$$T_1 = T_2 \text{ dans } \mathcal{D}' \Leftrightarrow \langle \alpha T_1 - T_2, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Théorème 1.2. $(\mathcal{D}', +, \cdot, 0)$ est un espace vectoriel de dimension infinie

Définition 1.9. Distributions régulières et singulières

1. On appelle distribution régulière une distribution que l'on peut définir à partir d'une fonction f de façon :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

C'est équivalent au produit scalaire de f par φ , on notera T_f ou $[f]$

2. Toutes les autres distributions sont singulières

La distribution δ est par exemple singulière, tandis que $T : \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$ est une distribution régulière

Remarques :

1. Toute fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ définit une distribution (régulière)
2. Par abus de langage on pourra dire "Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ une distribution"
3. Inversement, par abus on pourra dire aussi $T(x)$ avec $T \in (D)'$
4. On ne peut pas définir le produit entre deux distributions quelconques, la théorie des distributions ne s'applique qu'à des problèmes linéaires. En particulier les équations différentielles ordinaires (E.D.O) linéaire

Définition 1.10. Multiplication par une fonction C^∞

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'$ on peut définir la distribution $f \cdot T \in \mathcal{D}'$ par :

$$\langle f \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, f \cdot \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Exemple : $\cos \cdot \delta$

$\cos \in C^\infty$ et $\delta \in \mathcal{D}'$ Pour définir $\cos \cdot \delta$ il faut trouver la valeur de $\langle \cos \cdot \delta, \varphi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \cos \cdot \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \cos \varphi \rangle \\ &= (\cos \cdot \varphi)(0) \\ &= \cos(0) \cdot \varphi(0) \\ &= \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Exemples de distributions

1. Distributions régulières Les fonction L_{loc}^1 sont les plus utilisées :

1. Fonctions constantes : $f(x) = 1$ par exemple

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$$

2. Fonctions indicatrices : $f = \chi_{[a,b]}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x) dx$$

3. Fonction Heavyside : $H = \chi_{[0,+\infty[}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

4. Fonction signe ; $Sgn) = \chi_{[0,+\infty[} - \chi_{]-\infty,0]}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx$$

5. Et beaucoup d'autre fonctions : $f = |\cos|, f = \ln|x|$
 $f =_{pp} g$ dans $L_{loc}^1 \Leftrightarrow T_f = T_g$ dans \mathcal{D}'

2. Distributions singulières

Définition 1.11. Distributions de Dirac On note δ_a la distribution de dirac au point a. On notera parfois $\delta_a = \delta(x - a)$

Définition 1.12. Distribution peigne de Dirac Un peigne de Dirac noté III_a est une somme de distribution de dirac sous la forme :

$$\langle \text{III}_a, \varphi \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(na)$$

où a est un réel constant. Le peigne de dirac permet d'échantillonner la fonction φ et de faire la somme de toutes les valeurs échantillonnées.

Définition 1.13. Distribution Valeur principale de $1/x$ On définit la distribution valeur principale de $1/x$ notée $Vp(\frac{1}{x})$ par :

$$\langle Vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Définition 1.14. Distribution Partie finie de $1/x^2$ On définit la distribution Partie finie de $1/x^2$ notée $\text{Pf}(\frac{1}{x^2})$ par :

$$\langle \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

1.4 Opérations et propriétés élémentaires dans \mathcal{D}'

1.4.1 Translation

Définition 1.14. (Rappel) Translations des fonctions

Si f est une fonction, on définit $\tau_a f$ translaté de a de la fonction f par :

$$\tau_a f = f(x - a)$$

Comment définir $\tau_a T$ si $T \in \mathcal{D}'$ et T quelconque ?

$$\begin{aligned} \langle \tau_a[f], \varphi \rangle &= \langle [\tau_a f], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x - a) \varphi(x) dx, \text{ chgmt de variable } y = x - a, x = y + a, J = 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(y + a) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau_{-a} \varphi(y) dy \\ &= \langle [f], \tau_{-a} \varphi \rangle \end{aligned}$$

CM3 (2021-01-21)

Définition 1.16. Translation dans \mathcal{D}'

Si $T \in \mathcal{D}'$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_a T \in \mathcal{D}'$:

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle T, \varphi(x + a) \rangle$$

Exemple : $\tau_a \delta$

$$\begin{aligned} \langle \delta, \varphi \rangle &= \varphi(0) \\ \langle \tau_a \delta, \varphi \rangle &= \langle \delta, \varphi(x + a) \rangle \\ &= \varphi(x + a)|_{x=0} \\ &= \varphi(a) \\ &= \langle \delta_a, \varphi \rangle \end{aligned}$$

1.4.2 Dilatation

Définition 1.17. (Rappel) Dilatation des fonctions

Si f est une fonction et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $d_\lambda f$ dilatée de λ de la fonction f par :

$$d_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

On établit une formule pour $d_\lambda T, T \in \mathcal{D}'$, lorsque T est régulière

$$\begin{aligned} \langle d_\lambda[f], \varphi \rangle &= \langle [d_\lambda f], \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} d_\lambda f(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

On fait un changement de variable, $y = \frac{x}{\lambda}, x = \lambda y, J = \lambda$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(\lambda y) |\lambda| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi(y) |\lambda| dy \\ &= \langle [f], |\lambda| d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle \end{aligned}$$

Définition 1.18 Dilatation dans \mathcal{D}'

Si $T \in \mathcal{D}'$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $d_\lambda T \in \mathcal{D}'$ la dilatée de la distribution T par :

$$\langle d_\lambda T, \varphi \rangle = \langle [f], |\lambda| d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle = \langle [f], |\lambda| \varphi(\lambda x) \rangle$$

Exemple : $\delta_0 = \delta$

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

On cherche δ_{-3}

$$\begin{aligned} \langle \delta_{-3}, \varphi \rangle &=_{def} \langle [f], |-3| d_{\frac{-1}{3}} \varphi \rangle \\ &= \langle [f], 3\varphi(-3x) \rangle \\ &= 3\varphi(-3 \times 0) = 3\varphi(0) \\ &= 3\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 3\delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Donc $\delta_{-3} = 3\delta$

Définition 1.19 Parité dans \mathcal{D}'

T est une distribution paire $\Leftrightarrow d_{-1}T = T$ T est une distribution impaire $\Leftrightarrow d_{-1}T = -T$

Exemple distribution régulière impaire

Soit $[x]$ régulière associé à la fonction $(x \rightarrow x)$. Cette fonction est impaire. Montrons que la distribution $[x]$ est impaire dans \mathcal{D}'

Remarque $[x] \in \mathcal{D}'$ existe.

$$\begin{aligned}\langle d_{-1}[x], \varphi \rangle &= \langle [x], |-1|d_{-1}\varphi \rangle = \langle [x], \varphi(-x) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\varphi(-x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -y\varphi(y)dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} y\varphi(y)dy = -\langle [x], \varphi \rangle = \langle -[x], \varphi \rangle\end{aligned}$$

On retiendra qu'une distribution régulière associé à une fonction paire (ou impaire) est paire (ou impaire).

Définition 1.20. Périodicité dans \mathcal{D}'

Si $T \in \mathcal{D}'$, T est dite périodique de période a si :

$$\tau_a T = T$$

Toutes distribution régulière associé à une fonction périodique est périodique.

1.4.3 Convergence dans \mathcal{D}'

Définition 1.21. Convergence dans \mathcal{D}'

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distribution dans \mathcal{D}' .

On dit que T_n converge vers T dans \mathcal{D}' et on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$ ou $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T$ si :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$$

Exemple 1 Dirac peut s'obtenir par la limite d'une suite de distribution :

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais au sens des distributions on va montrer que $[f_n] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \delta$

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x) dx$$

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = n [\Phi]_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi'(0)$$

Chapitre 2

Dérivation des distributions

CM4 (2021-02-10)

2.1 Introduction

On prend l'exemple d'une balle qui fait un choc dur avec un mur, passant instantanément d'une vitesse v_0 à $-v_0$, avec des fonctions ce n'est pas descriptible, ici on n'a pas $v(t)$ une fonction mais on a $v(t) = -v_0 \operatorname{sgn}(t)$ une distribution. On va montrer que $\operatorname{sgn}' = 2\delta$

2.2 Dérivée des distributions

Comme d'habitude, pour définir la dérivée d'une distribution on va se servir de ce qu'on sait faire avec les fonction : si $[f]$ est une distribution régulière associée à une fonction dérivable partout, on va faire en sorte que $[f]' = [f']$ et établir une formule générale de dérivation. Si on veut que $[f]' = [f']$, alors, si $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\langle [f]', \varphi \rangle &= \langle [f'], \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \\ \langle [f]', \varphi \rangle &= \langle [f], \varphi' \rangle\end{aligned}$$

2.2.1 Définition est exemple

Définition 2.1 Dérivation dans \mathcal{D}'

Si $T \in \mathcal{D}'$ on définit sa dérivée $T' \in \mathcal{D}'$ par :

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Théorème 2.1. Si $T \in \mathcal{D}'$ sa dérivée n-ième $T^{(n)} \in \mathcal{D}'$ est défini par :

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Exemples

$$[sgn]' = 2\delta$$

$$[\cos]' = [\sin]$$

La démonstration est trivial et est laissé en exercice au lecteur.

CM5 (2021-02-17)

2.2.2 Cas des fonctions continues par morceaux

Théorème 2.2 Formule des sauts

Soit f une fonction continue dérivable sauf en n points de discontinuité a_1, a_2, \dots, a_n . On suppose que a_1, a_2, \dots, a_n sont des discontinuités de première espèce c'est à dire que le saut en a_p défini par $\sigma_p = f(a_p^+) - f(a_p^-)$ est fini.

Alors

$$[f]' = [f'] + \sum_{p=1}^n \sigma_p \delta_{a_p}$$

Ce théorème reste valable dans le cas où $n = +\infty$

Exemple : Fonction rampe

Soit f la fonction rampe suivante : $f(t) = t \forall t \in [0, 1[$ périodique de période 1 :

$$[f]' = [f'] + \sum_{p=1}^n \sigma_p \delta_{a_p}$$

La fonction est périodique il y a donc une infinité de discontinuité, et $\forall p, \sigma_p = -1$, de plus $f'(t) = 1$

Donc :

$$\begin{aligned}[f]' &= [1] - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n \\[f]' &= [1] - \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_p \\[f]' &= [1] - \mathbb{I}\mathbb{I}_1\end{aligned}$$

Exercice personnel :

Retrouver ce résultat par calcul direct avec des fonctions test.

2.2.3 Propriétés de la dérivation dans \mathcal{D}'

Théorème 2.3

$$\begin{aligned}(S + T)' &= S' + T' \quad \forall S, T \in \mathcal{D} \\(\lambda T)' &= \lambda T' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall T \in \mathcal{D} \\(\tau_a T)' &= \tau_a T' \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall T \in \mathcal{D} \\(d_a T)' &= \frac{1}{a} d_a T' \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall T \in \mathcal{D}\end{aligned}$$

Remarque

C'est la même formule que pour les fonctions

Théorème 2.4 Si $f \in C^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$ alors dans \mathcal{D}'

$$(f \cdot T)' = f' \cdot T + f \cdot T'$$

Théorème 2.5

$$t\delta^{(n)} = -n\delta^{(n-1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque : On a vu que $t\delta = 0$ mais $t\delta' = -\delta$

Chapitre 3

Transformée de Fourier des distributions

CM6 (2021-03-11)

3.1 Introduction

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} = \delta$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a} \chi_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}\right) = \text{sinc}(\pi \nu a)$$

$$\langle [\mathcal{F}(f)], \varphi \rangle =$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ en général, $\mathcal{F}(\varphi)$ existe mais n'a pas de support borné.

Il va falloir définir des fonctions test dans un ensemble qui est stable par transformée de Fourier. Cet ensemble est \mathcal{S} , l'ensemble des fonctions à décroissance rapide. On a vu au semestre 5 que

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$$

\mathcal{F} forme une bijection sur \mathcal{S}

3.2 L'ensemble des distributions tempérées \mathcal{S}'

Rappels :

1. Fonction à décroissance rapide : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < +\infty$$

2. La transformée de Fourier est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 3.1. L'ensemble des distributions tempérées est le dual de \mathcal{S} noté \mathcal{S}' :

Remarque

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

Exemples de distributions tempérées

1. Fonction à croissance lente : Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $|f^{(\alpha)}| \leq |P|$ avec P un polynôme.
2. $\delta \in \mathcal{S}'$
3. $\text{III} \in \mathcal{S}'$
4. Si P est un polynôme et $T \in \mathcal{S}$ alors $PT \in \mathcal{S}$ avec $\langle PT, \psi \rangle = \langle T, P\psi \rangle$
5. Les fonction L^1 et L^2 sont dans \mathcal{S}'
6. Si $T \in \mathcal{S}$ alors $T' \in \mathcal{S}'$
7. Toute distribution périodique est dans \mathcal{S}' , ce que l'on admettra

3.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition 3.2. Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit :

$$\langle \mathcal{F}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

Remarque : \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} sont linéaires sur \mathcal{S}' :

CM7 (2021-03-17)

Correctif aux chapitres 1 et 2.

$$\mathcal{D} : \{\phi/\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

Définition 3.2 Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit :

$$\langle \mathcal{F}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

\mathcal{F} est une bijection de \mathcal{S} sur \mathcal{S} dont l'inverse est \mathcal{F}^{-1}

Remarque : \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont linéaires sur \mathcal{S}'

$$\mathcal{F}(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) = \alpha_1 \mathcal{F}(T_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(T_2) \quad \text{De même pour } \mathcal{F}^{-1}$$

Exemples de transformée de Fourier de distributions tempérées

$$(1) \quad \mathcal{F}(\delta) = 1$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta), \psi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \mathcal{F}(\psi)(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-2\pi i x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx \\ &= \langle [1], \psi \rangle \end{aligned}$$

Donc dans \mathcal{S}' $\mathcal{F}(\delta) = 1$

Propriétés 3.1 Soit $T \in \mathcal{S}'$:

(1) **Dérivée :**

$$\mathcal{F}(T') = 2i\pi\nu \mathcal{F}(T)$$

$$\mathcal{F}(T^{(p)}) = (2i\pi\nu)^p \mathcal{F}(T)$$

(2) **Dérivation :**

$$(\mathcal{F}(T))' = -2i\pi \mathcal{F}(xT)$$

$$(\mathcal{F}(T))^{(p)} = (-2i\pi)^p \mathcal{F}(x^p T)$$

(3) **Translation :**

$$\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2i\pi\nu a} \mathcal{F}(T)$$

(4) **Modulation :**

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu a} T) = \tau_a \mathcal{F}(T)$$

(5) **Dilation :**

$$\mathcal{F}(d_{\frac{1}{a}} T) = \frac{1}{|a|} d_a \mathcal{F}(T)$$

(6) **Symétrie :**

$$d_{-1} \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}^{-1}(T)$$

(7)

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T))$$

(8) Si T est paire alors $\mathcal{F}(T)$ est paire, et $\mathcal{F}^{-1}(T) = \mathcal{F}(T)$

(9) Si T est impaire alors $\mathcal{F}(T)$ est impaire, et $\mathcal{F}^{-1}(T) = -\mathcal{F}(T)$

(10) Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T dans \mathcal{S}' lorsque n tend vers l'infini, alors $\mathcal{F}(T_n)$ converge vers $\mathcal{F}(T)$. C'est-à-dire que \mathcal{F} est continue sur \mathcal{S}' .

Exemples de Transformée de Fourier de distributions tempérées

(1) $\mathcal{F}(1) = \delta$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(1), \psi \rangle &= \langle [1], \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\psi)(\nu) d\nu \\ &= \dots \\ &= \psi(0) \end{aligned}$$

Cette méthode par les fonctions test est trop dure.

Autre méthode : On sait que $\mathcal{F}(\delta) = [1]$, on prend donc \mathcal{F}^{-1} de chaque côté.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta) &= [1] \\ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\delta)) &= \mathcal{F}^{-1}([1]) \\ \delta &= \mathcal{F}([1]) \end{aligned}$$

Donc dans \mathcal{S}' $\mathcal{F}(1) = \delta$

Chapitre 4

Produit de convolution

CM8 (2021-04-01)

4.1 Introduction

Si on considère deux fonction f et g sommables, le produit de convolution de f par g est défini par :

$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)dy$$

Et on sait que h est sommable.

Soit $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\langle [h], \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} h(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \right) \phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\phi(x)dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\phi(u+y)du \right) dy \\ \langle [f * g], \phi \rangle &= \langle [f(y)], \underbrace{\langle [g(u)], \overbrace{\phi(u+y)}^{u \rightarrow \phi(u+y)} \rangle}_{\psi(y)} \rangle\end{aligned}$$

Pour que $[f * g]$ existe il faut que $\psi \in \mathcal{D}$ (ou \mathcal{S})

Si S et T sont dans \mathcal{D} on va définir

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S[y], \underbrace{\langle T(u), \phi(y+u) \rangle}_{\in R, \text{fonction de } y} \rangle$$

4.2 Produit de convolution

Définition 4.1. Produit de convolution dans \mathcal{D}'

Si $S, T \in \mathcal{D}'$ on pose :

$$\langle S * T, \phi \rangle = \langle S[y], \langle T(u), \phi(y+u) \rangle \rangle = \langle T[y], \langle S(u), \phi(y+u) \rangle \rangle$$

Si on peut les calculer.

exemples

1. $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a(x), \langle \delta_b(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_a(x), \varphi(x+b) \rangle \\ &= \varphi(a+b) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

2. $\delta * H = H$

$$\begin{aligned} \langle \delta * H, \varphi \rangle &= \langle H(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle H(x), \varphi(x) \rangle \\ &= \varphi(x) \chi_{[0,+\infty]} = H\varphi(x) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta * H = H$

3. $\delta_a * H = \tau_a H$

$$\begin{aligned} \langle \delta_a * H, \varphi \rangle &= \langle H(x), \langle \delta_a(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle H(x), \varphi(x+a) \rangle \\ &= \varphi(x+a) \chi_{[0,+\infty]} = H\varphi(x+a) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta_a * H = \tau_a H$

4. $\delta' * H = \delta$

$$\begin{aligned} \langle \delta' * [H], \varphi \rangle &= \langle [H(x)], \langle \delta'(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle [H(x)], -\langle \delta, \frac{d}{dy}(\varphi(x+y)) \rangle \rangle \\ &= \langle [H(x)], -\langle \delta(y), \varphi'(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle [H(x)], -\varphi'(x) \rangle \\ &= \langle [H]', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Donc on a bien $\delta' * H = \delta$

4.3 Propriétés

CM9 (2021-04-08)