1 Dénombrement d'états

1.1 particules discernables

Les seuls type de combinaisons possibles sont :

$$1-2-3$$
$$1-1-4$$
$$2-2-2$$

Pour $1-2-3$ on peut mettre dans l'ordre que l'on veut, il y a donc $3! = 6$ combinaisons possibles. Pour $1-1-4$, on peut mettre le 4 à chaque particule, il y a donc 3 combinaisons possibles. Pour $2-2-2$, on ne peut mélanger les énergies, il n'y a donc qu'une seule combinaison possible. Au total il y a donc 10 combinaisons possibles.

1.2 Boson

Pour des bosons de spin nul, ils ne sont plus discernables. Donc il n'y a plus que la possibilité 1-2-3, 1-1-4 et 2-2-2, avec une seule possibilité pour chaque donc il n'y a que 3 possibilités.

1.3 fermions

On utilise la formule :

$$\Omega = \sum_{conf} \prod_{r} \frac{g_r!}{n_r!(g_r - n_r)!}$$

exemple :

Pour $1-1-4$, pour 1, on a $n_r = 2$ car il y a deux fermions à ce niveau d'énergie.

$$\Omega^{(1-1-4)} = \left(\frac{2!}{2!(2-2)!}\right)^2 \cdot \frac{2!}{1!(2-1)!} = 1^2 \cdot 2 = 2$$

Pour (1-2-3) on a $n_r = 1$ car il n'y a que 1 fermions par niveau d'énergie.

$$\Omega^{(1-2-3)} = \left(\frac{2!}{2!(2-2)!}\right)^3 = 8$$

Il y a donc 10 combinaisons possibles

2 Particules dans un puits infinis

2.1 énergies des états stationnaires

$$E = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\varepsilon_0$$

Avec $n_1, n_2, n_3 > 0$

2.2 $E = 33\varepsilon_0$

Il y a 6 micro-états accessibles. 4-4-1 et 5-2-2

2.3 Particules indiscernables

2.3.1 s = 0

La formule est :

$$\Omega^B = \prod_r \frac{(n_r + g_r - 1)!)}{n_r! - g_r - 1)!}$$

Avec $g_r = 1$ car les états sont indiscernables. Ici on a :

$$\Omega^{(1-4-4)} = \Omega^{(5-2-2)} = \frac{(1+1-1)!}{1!0!} \times \frac{(2+1-1)!}{2!0!} = 1$$

Il y a donc deux combinaisons

2.3.2 s = 1

ici $g_r = 3$

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1-4-4)} = \Omega^{(5-2-2)} &= \frac{(1+3-1)!}{1!(3-1)!} \times \frac{(2+3-1)!}{2!(3-1)!} \\
&= \frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{2!2!} \\
&= 3 \times \frac{24}{4} \\
&= 3 \times 6 = 18
\end{aligned}$$

Il y a donc 36 configurations.

2.3.3 s = 1/2

Il y a donc $g_r = 2$, on a donc :

$$\begin{aligned}\Omega^{(1-4-4)} = \Omega^{(5-2-2)} &= \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{2!}{2!(1-1)!} \\ &= \frac{2!}{1!} \times \frac{2!}{2!0!} \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Il y a donc 4 configurations

2.3.4 s = 3/2

Il y a donc $g_r = 4$, on a donc :

$$\begin{aligned}\Omega^{(1-4-4)} = \Omega^{(5-2-2)} &= \frac{4!}{1!(4-1)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} \\ &= \frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{2!2!} \\ &= 4 \times \frac{12}{2} \\ &= 4 \times 6 = 24\end{aligned}$$

Il y a donc 24 configurations

3 Interaction cubique

3.1

Pour l'énergie : $12\varepsilon_0$, on prend le sextuplet : (1,1,1,1,2,2), de même pour l'énergie : $18\varepsilon_0$, on peut utiliser le sextuplet : (2,2,2,2,1,1). Dans ces deux cas, il faut choisir la position à 2 niveaux ($2\varepsilon_0$ pour la boite A et ε_0 pour la boite B). On a donc :

$$\Omega_A = \Omega_B = C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

3.2

Les boites sont indépendantes, il y a donc :

$$15 \times 15 = 225$$

états possibles.

3.3

Les énergies possibles pour une particules sont :

E(ε_0	3	6	9	11	12	14
Triplet	1,1,1	1,1,2	1,2,2	1,1,3	2,2,2	1,2,3

E(ε_0	17	18	19	21
Triplet	2,2,3	1,1,4	3,3,1	1,2,4

Les seules manières d'obtenir $30\varepsilon_0$ sur l'ensemble des boites A et B mise en contact sont : 6-24, 9-21, 12-18, 15-15

Et inversement on peut mettre la boite B les énergies de la boite A. Les états possibles sont donc :

$E_A(\varepsilon_0)$	6	9	12	15	18	21	24
$E_B(\varepsilon_0)$	24	21	18	15	12	9	6
#	31	72	225	400	225	72	31
P	$\frac{31}{1056}$	$\frac{72}{1056}$	$\frac{225}{1056}$	$\frac{400}{1056}$	$\frac{225}{1056}$	$\frac{72}{1056}$	$\frac{31}{1056}$

3.4

On peut désormais calculer l'énergie moyenne :

$$\sum E_A \times P_A = \frac{1}{1056} \times \sum E_A \cdot \#$$
$$= \frac{1}{1056} \times (31 \cdot 6 + 72 \cdot 9 + 225 \cdot 12 + 400 \cdot 15 + 225 \cdot 18 + 72 \cdot 21 + 31 \cdot 24)$$

$$\sum E_A \cdot \# = 15\ 840$$
$$P = 15$$

3.5

On calcule l'entropie :

$$S_f - S_i = k_B \cdot \ln\left(\frac{\Omega_f}{\Omega_i}\right)$$

Avec $\Omega_f = 1\ 056$ et $\Omega_i = 225$, on a donc l'entropie :

$$S_f - S_i = k_B \cdot \ln\left(\frac{1056}{225}\right)$$

3.6 Oscillateur harmonique isotrope

L'énergie d'un oscillateur harmonique à 3 dimensions est donnée par la relation :

$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)\hbar \cdot \omega$$

Ici on autorise les énergies nulles, ça induit une dégénérescence de 3 dans tout le problème. Les 5 premiers niveaux d'énergies sont donc :

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega, \frac{5}{2}\hbar\omega, \frac{7}{2}\hbar\omega, \frac{9}{2}\hbar\omega, \frac{11}{2}\hbar\omega,$$