0.0.1 Exercice 5

$$F(v_x, v_y, v_z) = f_1(v_x) \cdot f_2(v_y) \cdot f_3(v_z)$$

Si la distribution des vitesse est isotrope on a $f_1 = f_2 = f_3 = f$, donc F peut se réécrire

$$F(v_x, v_y, v_z) = f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z)$$

Dans un gaz parfait, l'énergie cinétique permet de classer statistiquement les molécules :

$$F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z)$$

La fonction de distribution des vitesses suivant x est :

$$f(v_x) = A_x \cdot e^{-\alpha v_x^2}$$

Sachant qu'il y a isotropie : $A_x = A_y = A_z = A$

En point de départ on prend $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} dv_x\right)^2 = 1$$

$$\frac{\alpha}{\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x\right)^2 = 1$$

On fait un changement de variable de coordonnées cartésiennes à polaire :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\alpha v_x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\alpha v_y^2}\right) = 1$$

$$A^2 \cdot \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} v \cdot e^{-\alpha v^2} dv d\theta\right) = 1$$

$$2\pi \cdot A^2 \cdot \left(\int_0^{+\infty} v \cdot e^{-\alpha v^2} dv\right) = 1$$

$$2\pi \cdot A^2 \cdot \left[\frac{-e^{-\alpha v^2}}{2\alpha}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$2\pi \cdot A^2 \cdot \left(\frac{1}{2\alpha}\right) = 1 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -A_x \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \right)$$

où $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \right) = \frac{1}{A} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ Donc :

$$-A_x \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \right) = -A_x \frac{d}{d\alpha} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = -A_x \frac{d}{d\alpha} \left(\sqrt{\pi} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
-A_x \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \right) &= -\frac{1}{2} \cdot A_x \cdot \sqrt{\pi} \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}} \\
\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} &= -\frac{1}{2} \cdot A \cdot \sqrt{\pi} \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{2\alpha} \\
\Leftrightarrow A &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}
\end{aligned}$$

Finalement on a la densité de probabilité, la distribution Maxwellienne des vitesses :

$$G(v) = 4\pi v^2 \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\dfrac{mv^2}{2k_B T}}$$

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= \int_0^{+\infty} v \cdot G(v) dv \\
&= \int_0^{+\infty} C \cdot v^3 \cdot e^{-\dfrac{mv^2}{2k_B T}} dv \\
&= \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}
\end{aligned}$$

L'intégration par partie fonctionne pour faire ce calcul.

Mais on va le faire avec la fonction Γ d'Euler. Elle s'écrit :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

On met $\langle v \rangle$ sous la forme d'une fonction d'Euler :

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= \int_0^\infty C \cdot v^3 \cdot e^{-\dfrac{mv^2}{2k_BT}} dv \\
&= \frac{C}{2a} \int_0^\infty te^{-t} dt = \frac{C}{2a^2}\Gamma(2) \\
a &= \frac{m}{2k_BT} \\
C &= 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Or $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et une fois qu'on remplace dans l'expression on retrouve le même résultat que précedemment.

Pour trouver la vitesse quadratique moyenne on utilise de nouveau la fonction d'Euler.

$$\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle &= \int_0^{+\infty} C \cdot v^4 \cdot e^{-\dfrac{mv^2}{2k_BT}} dv \\
&= C \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2} e^{-t} \frac{dt}{2av} \\
&= C \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^3} \sqrt{\frac{a}{t}} e^{-t} dt \\
&= \frac{C}{2a^{5/2}} \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t} dt \\
&= \frac{C}{2a^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{C}{2a^{5/2}} \\
&= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{m}{2k_B T}^{5/2}} \\
&= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \pi}{m \dfrac{1}{2k_B T}} \\
&= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \pi k_B T}{m}
\end{aligned}
$$