Physique statistique

L3 Physique

1 Dénombrement d'états

L'énergie d'une particule est donnée par $\epsilon = n\epsilon^\star$ où $\epsilon^\star$ est une constante et n un entier strictement positif. On considère 3 particules sans interaction dont l'énergie totale est $E = 6\epsilon^\star$.

1. Quel est le nombre d'états accessibles à cette énergie si les particules sont discernables ?
2. Même question pour des bosons de spin nul
3. Même question pour des fermions de spin $\frac{1}{2}$

2 Particules dans un puits infini

Trois particules de même masse et sans interactions mutuelles sont dans un puits de potentiel infini à une dimension. On supposera dans un premier temps qu'elles sont discernables.

1. Exprimer les énergies des états stationnaires en fonction du paramètre $\epsilon_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$
2. L'énergie totale du système étant de 33 ε_0, quel est le nombre de micro-états accessibles?
3. On suppose maintenant que les particules sont indiscernables. Trouver le nombre de micro-états accessibles dans les cas suivants:
   (a) des bosons de spin 0 ;
   (b) des bosons de spin 1 ;
   (c) des fermions de spin 1/2.
   (d) des fermions de spin 3/2

3 États d'une particule dans une boîte

Une particule de masse m est enfermée dans une boîte cubique de côté L dont les parois très rigides sont impénétrables. On peut considérer qu'elle se trouve dans un puits de potentiel infini à trois dimensions :

a) $V(x, y, z) = 0$
si $0 < x < L,\ 0 < y < L,\ 0 < z < L$

b) $V(x, y, z) \to \infty$ autrement.

1. Donner l'expression des énergies des états stationnaires et les fonctions d'onde associées.
2. Donner explicitement les énergies et les dégénérescences des 10 premiers niveaux.
3. Donner approximativement le nombre d'états dont l'énergie est inférieure ou égale à une certaine valeur E. On supposera que cette énergie est beaucoup plus grande que celle de l'état fondamental.
4. Calculer la densité d'états.
5. Calculer à l'approximation classique l'extension en phase et le nombre d'états dont l'énergie est inférieure ou égale à E.

4 Particule dans une boîte cubique

Une particule de masse m se trouve dans une boîte cubique dont l'arête est 1 mm.

1. Calculer l'énergie de l'état fondamental (en eV) s'il s'agit d'une atome d'hélium.
2. Que devient cette énergie pour un électron ?
3. Calculer, pour un atome d'hélium et pour un électron, le nombre d'états dont l'énergie est inférieure ou égale à 1 eV.
4. Calculer dans chaque cas la densité d'états (par Joule et par eV) au voisinage de 1eV.
5. L'énergie de la particule est 1 eV $\pm$ 1 meV. Combien d'états trouvera t-on dans cet intervalle ?

5 Gaz parfait classique

N atomes d'un gaz parfait monoatomique sont placés dans un récipient de volume V.

1. Calculer à l'approximation classique le nombre d'états dont l'énergie est inférieure ou égale à E.

   N.B. Le volume d'une hypersphère dans un espace à n dimensions est :

$$V_n = C_n r^n \text{ où } C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

2. Obtenir l'expression de la densité d'états.

   On considère un gaz d'hélium enfermé dans un cube dont l'arête est de 1mm, sous une pression de 10^{-10} Torr à T = 273 K.

3. Calculer le nombre d'atomes.
4. Calculer l'énergie totale du gaz.
5. Comparer la densité d'états à 1,000 eV et à 1,001 eV.

6 Interaction thermique

Soit un système constitué de deux boîtes cubiques identiques de côté L. Chacune de ces boîtes contient deux particules discernables de même masse, sans interactions mutuelles. L'énergie des particules contenues dans la boîte A vaut 12 ε_0 celle des particules contenues dans la boîte B vaut 18 ε_0.

1. Calculer le nombre de micro-états accessibles au système A. Même chose pour les micro-états accessibles au système B.

2. Calculer le nombre de micro-états accessibles au système global.

   Les deux boîtes sont mises en contact. Leur paroi commune est diatherme mais imperméable aux particules.

3. Donner les énergies possibles du sous-système A ainsi que leurs probabilités.

4. Calculer l'énergie moyenne de ce sous-système à l'équilibre.

5. Déterminer la variation d'entropie entre l'instant où les boîtes sont mises en contact et l'instant où l'équilibre est atteint.

7 Oscillateur harmonique isotrope

On considère un oscillateur harmonique à trois dimensions.

1. Donner l'expression des énergies

2. Donner explicitement les énergies et les dégénérescences des cinq premiers niveaux

8 Comparaison d'entropie

On souhaite démontrer de façon analytique le dicton suivant: "une image en dit plus que mille mots". Pour cela on suppose que le texte s'écrit en utilisant un dictionnaire de 100 000 mots différents, et que tous sont équivalents; c'est-à-dire, qu'on les utilisent sans prédilection pour l'un ou l'autre (équiprobabilité).

De même, nous supposons que l'image dont nous parlons soit dessinée sur un écran de PC dont la résolution est de 640 x 480 pixels pour chaque pixel 16 couleurs sont possibles (équiprobabilité).

Calculer l'entropie du texte et de l'image en base 2 et en déduire qu'il faut une plus grande connaissance pour "fabriquer" l'image, donc plus d'information.

Rappel : Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K.