Physique statistique

1 Dénombrement

1. On lance une pièce de monnaie 8 fois. Combien existe-t-il de façons différentes;
   i) d'obtenir 5 piles? ii) de ne pas obtenir 5 piles?

2. On jette une pièce de monnaie 6 fois. Calculer la probabilité pour que l'on obtienne face plus souvent que pile;

3. On distribue au hasard n bonbons à n enfants. Calculer la probabilité pour que chaque enfant ait un bonbon. Application pour $n = 3$?

4. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot "PLANCK" ? avec celles du mot "EINSTEIN" ?

5. Un vieux rentier veut léguer 9 tableaux à ses 3 enfants. De combien de façons différentes peut-il répartir les 9 tableaux aux 3 enfants si chacun doit avoir 3 tableaux ?

6. Un club sportif de 50 personnes doit choisir un président et un trésorier. Combien de choix sont possibles :

   s'il n'y a pas de restriction ?

   si l'individu A est d'accord mais seulement s'il est président ?

   Si les individus B et C sont d'accord mais à condition d'être ensemble ?

2 Marche aléatoire à une dimension

Le processus de diffusion peut être appliqué au dopage des semi-conducteurs. Si la température est assez élevée, des atomes d'impuretés déposés sur le cristal peuvent migrer en sautant d'un site à l'autre du réseau cristallin. On peut étudier expérimentalement ce processus en faisant diffuser des atomes radioactifs (faciles à suivre) dont on mesure la concentration en fonction de la position et du temps.

Pour analyser simplement ce processus, on utilisera un modèle à une dimension. Au début de l'expérience, on irradie les atomes situés au voisinage de $x = 0$ de façon à les marquer. On suppose que chaque atome ne peut effectuer que des sauts de $\pm d$ (où d est la distance entre deux atomes voisins) avec la même probabilité. On suppose que les différents sauts sont indépendants et que le temps moyen entre deux sauts est τ.

1. Calculer la probabilité pour qu'un atome effectue n sauts à droite en un temps $t = N\tau$.

2. Donner l'abscisse d'un tel atome.

3. On considère un grand nombre d'atomes situés initialement en $x = 0$. Calculer la valeur moyenne et la variance de x en fonction du temps.

4. Quelle est la valeur la plus probable de n au temps t ?

5. Donner l'expression approximative de la probabilité pour qu'un atome fasse n sauts à droite lorsque $N \gg 1$ (après un temps très long).

3 Marche aléatoire à deux dimensions

On considère une marche au hasard sur les noeuds d'un réseau carré (on peut sauter au hasard sur un des quatre sites voisins d'un site donné) Le côté de la maille carrée est pris comme unité de longueur (a). Un mobile part d'un site (origine) puis saute de site en site voisin de façon aléatoire. Le mobile peut repasser plusieurs fois au même endroit. Après un grand nombre de sauts, montrer que la distance moyenne $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$ entre la position du mobile et l'origine varie en $N^{1/2}$. Calculer la densité de probabilité caractérisant la position du mobile.

4 Dépôt de métal sur un support

Pour effectuer un dépôt de métal de très faible épaisseur sur un support, on met dans un creuset une petite quantité de métal que l'on sublime. Le support éloigné du creuset est maintenu à une température assez basse pour éviter la migration des atomes.

On veut sublimer 3mg d'or de masse molaire 197 g. Le support dont la surface est de 1cm^2 est situé à 20 cm du creuset et est tenu perpendiculairement au trajet des atomes.

1. Calculer l'angle solide sous-tendu par le support à la position du creuset (supposé ponctuel).

2. Estimer le nombre d'atomes ayant frappé le support lorsque l'or est complètement évaporé. On suppose que les atomes sont émis uniformément dans un angle solide de 2π stéradians.

3. On suppose que les atomes d'or sont assimilables à des sphères dont l'aire du grand cercle est de 10^{-20}m^2. On imagine que le support est divisé en cellules ayant une telle surface. Quelle est la probabilité pour qu'un atome quittant le creuset atteigne une cellule particulière ?

4. Calculer le nombre moyen d'atomes par cellule.

5. Calculer la fraction de la surface du support recouverte de 0, 1, 2, 3, 4, 5 atomes d'or.

6. Calculer la dispersion relative du nombre d'atomes par cellule.

5 Distribution des vitesses moléculaires

Dans un gaz parfait uniforme et en équilibre thermique à la température, les seules contributions à l'énergie sont d'origine cinétique. Les 3 composantes de la vitesse sont statistiquement indépendantes, en supposant F(v$_x$, v$_y$, v$_z$) la distribution des vitesses et avec l'hypothèse d'indépendance on peut écrire

$$F(v_x, v_y, v_z) = f_1(v_x) \cdot f_2(v_y) \cdot f_3(v_z) \tag{1}$$

1. Que devient l'équation précédente si on admet que la distribution des vitesses est isotrope.

2. À supposer que l'on peut classer les molécules -de même masse- par leur énergie cinétique comment réécrire de la question précédente.

3. Une distribution gaussienne des vitesses est associée à une composante de la vitesse, par exemple v$_x$.

   $$f(v_x) = A \exp\left(-\alpha v_x^2\right) \tag{2}$$

   Trouver la relation reliant A et α

4. Avec le calcul de $< v_x^2 >$ déduire A et α.

5. Obtenir la densité de probabilité de la norme de la vitesse d'une molécule.

6. Calculer la valeur moyenne de la norme de la vitesse en fonction de la température et de la masse moléculaire.

7. Obtenir l'expression de la vitesse la plus probable en fonction de la température et de la masse moléculaire.

8. Calculer la valeur moyenne, la valeur la plus probable et la racine quadratique moyenne de la norme de la vitesse d'une molécule d'azote et d'une molécule d'oxygène à T= 293 K.

9. Un récipient contient n molécules par unité de volume. En négligeant les collisions entre molécules, montrer que le nombre de chocs par unité de surface et par unité de temps sur une paroi est donnée par:

   $$\phi = \frac{1}{4}\, n\, \langle v \rangle$$

   où $\langle v \rangle$ est la valeur moyenne de la norme de la vitesse. On fera le calcul en coordonnées sphériques.

10. Exprimer ϕ en fonction de la pression et de la température du gaz.

6 Multiplicateurs de Lagrange

L'entropie s'écrit de façon la plus générale qui soit:

$$S = -k_B \sum_s P_s \ln\left(P_s\right) \tag{3}$$

où P$_s$ représente la probabilité d'un évènement.

1. On considère un ensemble d'état pour lequel la contrainte $\sum_s P_s = 1$ est vérifier. Identifier le multiplicateur de Lagrange puis déduire dans quelle condition l'entropie est maximale.

2. On ajoute une seconde contrainte à l'ensemble des états: $U = \sum_s P_s \epsilon_s$ où U est l'énergie moyenne et ϵ_s est l'énergie d'un microétat. Identifier les deux multiplicateurs de Lagrange et écrire la probabilité résultante. Que se passe-t-il quand on fait tendre la température vers l'infini.

3. Soit un dé pipé pour lequel la face 6 apparaît deux fois plus que la face 1, rien de spécial n'est noté pour les autres faces, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange trouver quelles probabilités seront attribuées aux différentes faces?