Ch 1: Elementary Logic

Note Title ٣١/٠١/٢٣

1.1 Statements and Their Connectives

مقدمة: إن دراسة المنطق الرياضي هو دراسة المبادئ والطرق المستخدمة لتمييز ما إذا كانت البراهين متحققة أم لا، وبالتالي المبادئ والطرق التي تعتمد عليها المنطق الرياضي يبدأ من الحكم على صحة العبارات (statements) من عدمها.

Def: By *a statement*, we mean a sentence that is either true of false, but not both simultaneously.

Remark: It is not necessary that we know whether the statement is true or false

Illustration: (a) Each of the following is a statement:

1) Gaza is a city in Palestine.
[عبارة كاملة التحديد وتعتمد على المعرفة وهي صحيحة]

2) $5+2$ is 7
[عبارة كاملة التحديد وهي صحيحة]

3) $2*3-4$ is negative
[عبارة كاملة التحديد وهي خاطئة]

4) The Islamic University is in Gaza.
[عبارة كاملة التحديد وتعتمد على المعرفة وهي صحيحة]

5) In 2170, Palestine will be a greatest contry.
[عبارة تحتاج لمئات السنين لمعرفة صحتها، ولا سبيل لمعرفة صحتها من عدمها الآن]

6) The digit in the 105th decimal place in the decimal expansion of $\sqrt{3}$ is 7.
[عبارة تحتاج لمزيد من المعرفة والتحقق لتحديد إذا كانت صحيحة]

7) The moon is made of blue cheese.
[عبارة خاطئة]

8) There is no intelligent life on Mars.
[تعتمد على المعرفة لتحديد صحتها]

9) It is raining.

[تعتمد على حالة الجو و الوقت]

(b) None of the following is a statement, because it makes no sense to ask if any of them is true or false:

1) What did you say?
2) $x^2 = 36$. → (تعتمد على x)
3) He is a good man. → (تعتمد على من هو)
4) This sentence is false. → (Paradox)
5) Come to our Party!

Def: The statements consisting of one sentence are **simple statements**. A combination of two or more simple statements using logical connectives is called **a compound statement**.

Illustration: 1) The statements in previous example part (a) are simple statements.

2) " 5 + 2 is 7 " and " The moon is made of blue Cheese " is a Compound statement.

تنويه: ① سنقوم باستخدام الأحرف الصغيرة p, q, r, ... لتعبر عن العبارة " statement " بحالتيها البسيطة و المركبة / (simple and compound) بينما سنستخدم الأحرف الكبيرة P, Q, R, ... لتعبر عن Compound statements إلا من حالات يتم تحديدها.

② يوجد طرق متعددة للربط المنطقي بين العبارات البسيطة لتكون عبارة مركبة / ولكن أكثر أدوات الربط استخداماً هي خمسة كالتالي:

(a) " not " symbolized by $\sim$,
(b) " and " symbolized by $\wedge$,
(c) " or " symbolized by $\vee$,
(d) " if ... , then ... " symbolized by $\longrightarrow$,
(e) " ... if and only if ... " symbolized by $\longleftrightarrow$.

Defs: 1) Let p be a statement. Then the statement $\sim p$, read "not p" or "the negation of p" is true whenever the statement p is false and is false if p is true.

2) Let p and q be two statements. The **conjunction** of p and q (or p and q), symbolized by "$p \wedge q$" is a statement which is true exactly when both p and q are true.

Illustration: Suppose that:

p is the statement "$1 \neq 3$" which is true (T),

q is the statement "7 is odd" which is true (T), and

g is the statement "Palestine is a city" (F).

Then:

1) $p \wedge q$ is the statement: "$1 \neq 3$ and 7 is odd" which is true. [Since both p and q are true]

2) $g \wedge q$ is the statement: "Palestine is a city and 7 is odd" which is false. [Since g is false]

3) $\sim g$ is the statement: "It is not the case that, Palestine is a city", in English, we say "Palestine is a not a city" which is true statement.

Truth Table

لاحظ أن صحة العبارات المركبة compound statements تعتمد على صحة العبارات البسيطة المكونة لها، ولعله من المناسب الحديث عن حالات الصحة والخطأ للعبارات البسيطة وتأثير هذه الحالات على صحة العبارة المركبة، من الطرق السهلة لدراسة جميع الحالات هي من خلال جدول الصواب Truth Table، حيث يكون عدد جميع الحالات المحتملة هو 2^n حيث n تمثل عدد العبارات البسيطة number of simple statements في الجملة المركبة. انظر الجداول التالية.

Truth Table for $\sim p$

p	$\sim p$
T	F
F	T

في هذا الجدول نوضح أن الحالات الممكنة للعبارة p هي حالتين إثنتين / هما إما p تكون صحيحة وعليه فإن $\sim p$ تكون خاطئة (السطر الأول) وإما p تكون خاطئة وعليه فإن $\sim p$ تكون صحيحة (السطر الثاني) / ويسمى هذا الجدول / جدول الصواب للعبارة $\sim p$.
بالمثل / الجدول التالي يمثل جدول الصواب للعبارة $p \wedge q$.

Truth Table for $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$n = 2$ عدد الجمل البسيطة
لذا عدد الحالات $2^2 = 4$

واضح من خلال الجدول أن هناك 4 حالات لصحة كل من p و q / وواضح أن $p \wedge q$ صحيحة فقط عندما كانت العبارتان صحيحتين.

من خلال جداول الصواب السابقة يمكن إيجاد جدول الصواب لعبارات مركبة من أدوات الربط $\wedge$ / $\sim$.

Example: (a) Determine the truth of the following statements:

1) "It is not the case, $5 > 3$" (F)
[negation of "$5 > 3$"]

2) "Venus is smaller than Earth and $1+4$ is 5" (T)

3) "$6 < 7$ and $2^4 = 8$" (F)

(b) Construct the truth table for the compound statement

$$\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$$

Sol: في البداية، نلاحظ أننا نحتاج للأقواس لتحديد الترتيب الذي يجب علينا تطبيقه أولاً من أدوات الربط المنطقية، ولعله من المفيد لتقليل استخدام الأقواس بالحد الأدنى التوافق على جعل $\sim$ أقوى في التطبيق من $\wedge$ وبالتالي تطبق أولاً، لذا يمكن كتابة العبارة بالصورة المبسطة $\sim(\sim p \wedge \sim q)$، وللتسهيل خذ $r = \sim(\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	r
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F

Note Title ٣٤/٠٢/٢٢

1.2 Three More Connectives

Def: Let p and q be two statements. The disjunction of p and q denoted by "$p \vee q$" and read "p or q" is a compound statement. The truth values of $p \vee q$ are defined by that:

$p \vee q$ is true exactly when at least one of p or q is true.

Truth Table of $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تنويه: نلاحظ أن حالات الصواب للعبارة المركبة $p \vee q$ هي نفس حالات الصواب من آخر مثال من sec 1.1 / $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ ومثل هذه الحالات تسمى متكافئة منطقياً.

Def: Two statements p and q are logically equivalent if they have the same truth table. In this case, we write $p \equiv q$.

Example: For any two statements, $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ since, we say in previous examples that, they have the same truth table. In fact, we can deduce that $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, and later, this law is called De Morgan's Law

Def: Let p and q be two statements. The connective $\longrightarrow$ is called **the conditional** and may placed between p and q to form the compound statement $p \to q$, and read "*if p, then q.*". By def, the statement $p \to q$ is equivalent to the statement $\sim(p \wedge \sim q)$.

Truth Table of $p \to q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \to q\ [\equiv \sim(p \wedge \sim q)]$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

Illustration: Suppose that:

p is the statement "it is raining" and q is the statement "I will give you a dollar". Thus, the compound statement $p \to q$ represents "if it is raining, then I will give you a dollar"

ملحوظة: (١) العبارة المشروطة $p \to q$ أشبه بالعقد ففي المثال السابق كأنه قد تم التعاقد على أنه إذا أمطرت السماء فإنني سأقدم لك دولار، وعليه فإن العبارة تكون خاطئة في حالة واحدة فقط وهي حالة خرق العقد والذي لا يكون إلا عندما تمطر السماء ولكن لا أعطيك الدولار وهي تمثل حالة صحة p وخطأ q الحالة الثانية في جدول الصواب، أما الحالات الثلاثة الأخرى فإنها لا تمثل خرقًا للعقد،

وعليه فإن الحالة عندما تكون p خاطئة غير معتبرة ولا تؤخذ في عين الإعتبار لأن العبارة $p \to q$ تكون صحيحة بغض النظر عن صحة q،
[في المثال السابق، إذا لم تمطر، فإنه لا أخرق في العقد إذا أعطيتك دولار أو لم أعطك إياه]
ولهذا السبب فإن المعنى المنطقي لـ $p \to q$ لغة هي كالتالي،
"q صحيحة عندما p صحيحة"، "q is true whenever p is true"

② العبارة $p \to q$ تقرأ أيضاً "p only if q" .

③ في العبارة $p \to q$ ، تسمى p :
"a sufficient condition for q"
وتسمى q :
"a necessary condition for p" .

④ يمكن أن تكون العبارة $p \to q$ صحيحة إذا علمت صحة واحدة من p أو q بغض النظر عن صحة العبارة الأخرى في الحالتين التاليتين:
(أ) عندما تكون p خاطئة . ($p \to q$ صحيحة بغض النظر عن صحة q)
(ب) عندما تكون q صحيحة ($p \to q$ صحيحة بغض النظر عن صحة p)

وبالتالي يمكن استنتاج أن $p \to q \equiv \sim p \vee q$ ، وذلك يمكن إثبات التكافؤ من خلال جدول الصواب.

Def: Let p and q be two statements. The connective $\longleftrightarrow$ is called the biconditional and may placed between p and q to form the compound statement $p \leftrightarrow q$, and read " p if and only if q ". By def, the statement $p \leftrightarrow q$ is equivalent to the statement $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$ $[\equiv (p\to q)\wedge(q\to p)]$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ملحوظة: من جدول الصواب ، واضح أن العبارة $p \leftrightarrow q$ تكون صحيحة عندما تكون p و q صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً .

Example: Determine the truth of the following statement:
1) If $1+2=3$, then $1<0$ (F)
2) If $\sin \pi/6 = 1/2$, then $1+1=2$ (T)

3) If $1+1=3$, then $1<0$ (T)

4) If $1+1=3$, then $1>0$ (T)

5) $1+1=3$ if and only if $1>0$ (F)

6) $1+1=3$ if and only if $1<0$ (T)

Note Title

1.3 Tautology, Implication, and Equivalence

٢٣/٠٢/٢٤

For a statement p, consider the truth table for the statement $p \vee \sim p$:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

We see that $p \vee \sim p$ is always true in every case.

Def: ① A statement P is said to be a tautology if it is true in each of all logical possibilities.

② Let P and Q be two statements, compound or simple. If the conditional statement $P \to Q$ is a tautology, then it is called an implication and is denoted by $P \Rightarrow Q$ (read: P implies Q).

Example: All the following statements are implications:

1) $p \to p$.
2) $p \wedge q \longrightarrow q \wedge p$.
3) $p \to p \wedge p$.
4) $p \wedge p \to p$.

Remark: In logic or mathematics, "theorems" are meant to be true statements, and a "proof" (of a theorem

(a)

p	q	$p\vee q$	$p\to p\vee q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

واضح من خلال الجدول , العمود الأخير ان $p\to p\vee q$ هي tautology
وبالتالي صحيحة لجميع الحالات الممكنة / لذا فإنها بالتأكيد implication .

b)

p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q\to p$	$p\wedge q\to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

واضح ان $p\wedge q\to p$ وكذلك $p\wedge q\to q$ هما implication .

c) Suppose that $r\equiv(p\vee q)\wedge\sim p$ and $s\equiv(p\vee q)\wedge\sim p\to q$,
$\equiv r\to q$

p	q	$\sim p$	$p\vee q$	r	s
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

لذا فإن $(p\vee q)\wedge\sim p\to q$ هي implication . $\square$

Def: If a biconditional statement $p\leftrightarrow q$ happens to be a tautology, it is called *equivalence* and is denoted by $p\Leftrightarrow q$ (read: p is equivalent to q).

ملحوظة : من جدول الصواب / حتى يتحقق $p \Leftrightarrow q$ / يجب أن تكون قيمة الصواب لـ p مثل قيمة الصواب لـ q من جميع الإحتمالات المنطقية الممكنة،
وهذا حسب تعريف سابق يعني أن $p \equiv q$ ، وعليه فإن $p \Leftrightarrow q$ تحمل نفس المعنى لـ $p \equiv q$ وعليه ، استخدام إحداها مكان الأخرى بدون أي حرج.

Thrm 2: Let p and q be any two statements. Then

(a) (**Law of Double Negation (DN)**): $\sim(\sim p) \equiv p$.

(b) (**Commutative Laws (Com.)**): $p \wedge q \equiv q \wedge p$,
$p \vee q \equiv q \vee p$.

(c) (**Laws of Idempotency (Idemp)**): $p \wedge p \equiv p$,
$p \vee p \equiv p$.

(d) (**Contrapositive Law (Contrap)**): $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$

PF: سنقوم بإثبات قانون الـ Contrapositive / وبقية القوانين ستكون بالمثل

Suppose that $r \equiv (p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

p	q	$(p \to q)$	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim q \to \sim p)$	r
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

واضح من خلال جدول الصواب أن $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ هي tautology
وعليه فإنه وحسب التعريف $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$. $\square$

Thrm 3: (De Morgan's Law)

Let p and q be any two statements. Then
$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ and $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

PF:
من خلال جدول الصواب سنقوم بإثبات الأولى، وتكون الثانية بالمثل.

افرض أن $r \equiv \sim(p\wedge q) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$ ، المطلوب إثبات صحة r في جميع الاحتمالات المنطقية الممكنة .

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$	r
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

من العمود الأخير ، يتضح أن $\sim(p\wedge q) \equiv \sim p\vee\sim q$.

Thrm4: Let p, q and r be any statements. Then

(a) (Associative Laws): $(p\wedge q)\wedge r \equiv p\wedge(q\wedge r)$

$(p\vee q)\vee r \equiv p\vee(q\vee r)$

(b) (Distributive Laws): $p\wedge(q\vee r) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r) \equiv (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

(c) (Transitive Law): $(p\to q)\wedge(q\to r) \Rightarrow (p\to r)$

PF: البرهان باستخدام جدول الصواب شبيه ببرهان النظريات السابقة ، لذا سنقوم بإثبات احدى نقاط (b) و نقطة (c)

(b) Suppose that $w = p\wedge(q\vee r)$ and $s \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$. We need to prove that $w \Leftrightarrow s$, so consider the following truth table: عدد الاحتمالات الممكنة $2^3=8$

p	q	r	$q\vee r$	w	$p\wedge q$	$p\wedge r$	s	$w \Leftrightarrow s$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

واضح أن $p\wedge(q\vee r) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

(c) Suppose that $s \equiv (p \to q) \wedge (q \to r)$ and $w \equiv s \to (p \to r)$.

We need to prove that w is a tautology.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	s	$p \to r$	$s \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

تنويه: بسبب صحة قانون التجميع، فإنه يمكن حذف الأقواس في $(p \wedge q) \wedge r$ وكتابتها بالصورة $p \wedge q \wedge r$ وبالمثل $p \vee q \vee r$ وتمثيلها بشكل عام $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ ، $q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n$.

Thrm 5: Let p, q, r, and s be any statements. Then

(a) (Constructive Dilemmas):

(i) $(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r) \to (q \vee s)$,

(ii) $(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r) \to (q \wedge s)$.

(b) (Destructive Dilemmas):

(i) $(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (\sim q \vee \sim s) \to (\sim p \vee \sim r)$,

(ii) $(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s) \to (\sim p \wedge \sim r)$.

PF: يتم برهان الفرعية (a) باستخدام جدول الصواب كما تم مع النظريات السابقة، أما النقطة (b) فيمكن إثباتها باستخدام جدول الصواب، أو باستخدام نظرية سابقة (contrapositive) و نظرية ديموجان،

$$(p \wedge r) \to (q \wedge s) \equiv \sim(q \wedge s) \to \sim(p \wedge r) \equiv \sim q \vee \sim s \to \sim p \vee \sim r$$

وبالتالي

$$(p \vee r) \longrightarrow (q \vee s) \equiv \sim(q \vee s) \longrightarrow \sim(p \vee s) \equiv (\sim q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim s)$$

$\square$

تنويه: لعله من المناسب التنويه أنه إذا تم الاتفاق على أن $\wedge$ أو $\vee$ أقوى من $\longrightarrow$ وتنفذ قبلها، يمكن حذف الأقواس، مثال ذلك:

$$p \vee q \longrightarrow q \vee s \equiv \sim(q \vee s) \rightarrow \sim(p \vee s) \equiv \sim q \wedge \sim s \longrightarrow \sim p \wedge \sim s$$

تكتب الأقواس بالحد الأدنى وللضرورة.

Thrm 6: Let p and q be statements. Then:

(a) (Modus Ponens): $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

(b) (Modus Tollens): $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.

(c) (Reductio ad Absurdum): $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow q \wedge \sim q$.

PF: مثل النظرية السابقة، سنكتفي بإثبات فرعية (a) وفرعية (c) من خلال جدول الصواب.

(a) للتسهيل، افرض أن $r \equiv (p \rightarrow q) \wedge p$,

p	q	$p \rightarrow q$	r	$r \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Clearly, $(p \rightarrow q) \wedge p \longrightarrow q$ is a tautology, so $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

(c) Suppose that $r \equiv p \wedge \sim q \longrightarrow q \wedge \sim q$, and $w \equiv (p \rightarrow q) \longleftrightarrow r$.

Again, we need to prove that w is a tautology.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \wedge \sim q$	$p \to q$	r	w
T	T	F	F	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T

So $(p \to q) \Leftrightarrow r$. $\square$

Def: If p and q are two statements. We define $q \to p$ to be the converse of $p \to q$.

تنويه هام: بشكل عام إذا كانت $p \Rightarrow q$ فإنه ليس بالضرورة أن يكون $q \Rightarrow p$ ، ولكن باستخدام الـ contrapositive فإن $\sim q \Rightarrow \sim p$. انظر المثال التالي:

Example:

Suppose that:

p is the statement " A fun $f(x)$ is differentiable at x_0 ",

q is the statement " A fun $f(x)$ is continuous at x_0 ".

Then it is clearly that $p \Rightarrow q$ but $q \not\Rightarrow p$.

Note that $\sim q \Rightarrow \sim p$; that is,

A fun $f(x)$ is discont. at x_0 implies that it is not diff at x_0.

Now, all the following are equivalent to $p \to q$:

1) If p, then q,
2) p is sufficient for q,
3) q is necessary for p,
4) p only if q,
5) q if p,
6) q whenever p,
7 q when p.

And if $p \to q$ is a tautology, we write $p \Rightarrow q$ and we say p implies q.

The following statements are equivalent to $p \leftrightarrow q$:

1) p iff q,
2) p is necessary and sufficient for q,
3) p if but only if q.

And if $p \leftrightarrow q$ is a tautology, then we write $p \Leftrightarrow q$ and we say that p is equivalent to q, in this case, $p \equiv q$.

Examples: Translate the following thrms:

1) "A set S in $\mathbb{R}$ be compact is sufficient for S to be bounded"

<u>sol:</u> S is compact $\Longrightarrow$ S is bounded.

2) "A necessary condition for a group G to be cyclic is that G is Abelian"

<u>sol:</u> G is cyclic $\Longrightarrow$ G is Abelian

3) "A set S is infinite if S has an uncountable subset.

<u>sol:</u> S has an uncountable subset $\Longrightarrow$ S is infinite.

1.4 Contradiction

Def: A statement p is called contradiction if its truth values are all false for each of the logical possibilities.

Illustration: ① For any statement p, the conjunction $p \wedge \sim p$ is a contradiction.

② If t is a tautology, then $\sim t$ is a contradiction.
If c is a contradiction, then $\sim c$ is a tautology.

Thrm 7: Let t, c, and p be a tautology, a contradiction and an arbitrary statement, respectively. Then

(a) $p \wedge t \Longleftrightarrow p$,
$p \vee t \Longleftrightarrow t$.

(b) $p \vee c \Longleftrightarrow p$
$p \wedge c \Longleftrightarrow c$

(c) $c \Rightarrow p$, and $p \Rightarrow t$.

PF في البداية ، يجب الإنتباه أن حالات العبارة t أو c من حيث الصواب والخطاء هي حالة واحدة فقط وليس حالتين ، لذا فإنها لا تحسب في عدد العبارات .

(a)

p	t	$p \wedge t$	$p \vee t$	$p \wedge t \Leftrightarrow p$	$p \vee t \longleftrightarrow t$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T

Since $p \wedge t \Leftrightarrow p$ is a tautology, then $p \wedge t \Longleftrightarrow p$.
Similarly, $p \vee t \Longleftrightarrow t$.

(b) شبيهة لفرعية (a)

(c)

p	c	t	$c \to p$	$p \to t$
T	F	T	T	T
F	F	T	T	T

Thus, $c \Rightarrow p$ and $p \Rightarrow t$.

تنويه: من الآن فصاعداً ، الرمز c (حرف صغير أو كبير) بدون تحديد
سوف يشير إلى عبارة تناقض (A contradiction statement)
والرمز t يشير لعبارة الحقو (A tautology statement).

1.5 Deductive Reasoning (الإستنتاج المسبب)

Note Title 12-Jan-13

القوانين التي تم دراستها و برهانها في النظريات السابقة من 1 إلى 6 وعددها 16 قانون هي قوانين مهمة كأدوات للتحقق المنطقي المتعلق بالإستنتاج المنطقي $p \Rightarrow q$ والتكافؤ بين العبارات $p \equiv q$ ، كما سيتضح من الأمثلة العادية ، لذا تسمى هذه القوانين rules of inference (قوانين الإستدلال) ، حيث يتم اختيار القانون المناسب حسب حالة الإستدلال ، مع الأخذ بعين الإعتبار أن هذه القوانين ليست مستقلة عن بعضها بالضرورة ، ولعل مثال 5 التالي يوضح أن قانون ال contrapositive يمكن إستنتاجه إستدلاليا من قوانين وتعريفات أخرى بدون إثباته باستخدام جدول الصواب .

Example 5: Prove the Contrapositive Law
$$p \to q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$$
using relevent defs and other rules of inference.

PF: We have that

$$\begin{aligned}
p \longrightarrow q &\equiv \sim(p \wedge \sim q) && (\text{Def.})\\
&\equiv \sim(\sim q \wedge p) && (\text{comm.})\\
&\equiv \sim(\sim q \wedge \sim(\sim p)) && (\text{D.N.})\\
&\equiv \sim q \longrightarrow \sim p && (\text{Def.})
\end{aligned}$$

Therefore, $(p \longrightarrow q) \equiv (\sim q \longrightarrow \sim p)$, by Transitive Law.

Def: The method used in Example 5 is called *deductive reasoning* or *deductive method*.

تنويه : الطريقة الجبرية تختلف عن طريقة البرهان باستخدام جدول الصواب ، فهي طريقة تستخدم أي نتائج سابقة من فرضيات وتعريفات و نظريات وقوانين استدلال وغيرها .

Example 6: Prove the Disjunctive Syllogism by deductive reasoning: $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

PF:

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \sim p &\equiv \sim p \wedge (p \vee q) && (\text{comm.})\\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) && (\text{Dist.})\\
&\equiv c \vee (\sim p \wedge q) && (\sim p \wedge p \equiv c)\\
&\equiv \sim p \wedge q && (\text{Thrm } 7(b))\\
&\Rightarrow q && (\text{Simp.}) \quad \square
\end{aligned}$$

Example 7: Prove the following Exportation Law:

$$(p \wedge q \to r) \equiv [p \to (q \to r)]$$

by deductive reasoning.

PF:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \to r &\equiv \sim\big((p\wedge q) \wedge \sim r\big) && (\text{Def})\\ &\equiv \sim\big(p \wedge (q \wedge \sim r)\big) && (\text{Assoc.})\\ &\equiv p \to \sim(q \wedge \sim r) && (\text{Def, D.N.})\\ &\equiv p \to (q \to r) && (\text{Def})\end{aligned}$$

$\square$

Example 8: Prove by deductive reasoning that

$$(p \to r) \vee (q \to s) \equiv (p \wedge q \to r \vee s).$$

PF:

$$\begin{aligned}(p \to r) \vee (q \to s) &\equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim(q \wedge \sim s) && (\text{Def})\\ &\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) && (\text{De M., D.N.})\\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) && (\text{Comm., Asso.})\\ &\equiv \sim[(p \wedge q) \wedge \sim(r \vee s)] && (\text{De M., D.N.})\\ &\equiv (p \wedge q) \to (r \vee s). && (\text{Def}).\end{aligned}$$

1.6 Quantification Rules

مقدمة: في كثير من المواضيع العامة التي يتناولها الناس يكون هناك مجال محدد يحدد نطاق النقاش ومجاله) يسمى domain of discoure أو universe.

مثال ذلك أن نقول " كل من عليها فان " فإن مجال الحديث هنا هو كل ما خلق الله من الكائنات الحية / ومثال آخر قولنا:

"All the students in the IUG are diligent"

" جميع طلبة الجامعة الإسلامية مجتهدون "

يكون مجال الحديث هنا هو " طلبة الجامعة الإسلامية فقط " وهي مجموعة ال universe. ويمكن كتابة العبارة السابقة على الصورة

(*) ----- "For all x in the universe, x is diligent"

اختصاراً / إذا رمزنا للعبارة "x is diligent" بـ $P(x)$ فإنه يمكن إعادة كتابة الجملة (*) بالصورة $(\forall x)(P(x))$.

في المقابل قد يكون الحديث عن جزء من المجال / مثل قولنا " بعض طلبة الجامعة الإسلامية مجتهدون " / من هذه العبارة لا تزال مجموعة ال universe كما في العبارة السابقة " طلبة الجامعة الإسلامية " / ولكن هنا تكون العبارة صحيحة إذا وجدنا على الأقل طالب واحد من طلبة الجامعة مجتهد / ويمكن كتابة العبارة بالصورة

"There exists at least on x in the universe such that x is diligent"

وإذا رمزنا للعبارة "x is diligent" بـ $P(x)$ - كالمثال السابق - يمكن اختصار العبارة السابقة بالرمز

$$(\exists x)(P(x))$$

تسمى العبارة $(\forall x)(P(x))$ بـ universal quantifier والعبارة $(\exists x)(P(x))$ بـ existential quantifier.

Def: A propositional (مسند) predicate "or open sentence" is a sentence containing variables ranging over a particular set U called a domain of discourse or a universe.

ملحوظة : عادةً تتم كتابة الـ propositional predicate التي تحتوي على متغير واحد بـ $p(x)$ و التي تحتوي على متغيرين بـ $p(x,y)$ و يقال إختصاراً predicate . بشكل عام الـ predicate لا تشكل statement لأنها لا تحتمل معنى الصواب و الخطأ إلا إذا تم التعويض بأحد عناصر المجال .
مثال ذلك قولنا :

$$p(x) \text{ is } "x+3<2"$$

واضح أنها لا تحتمل معنى الصواب أو الخطأ / لكن انظر لـ $P(-2)$ و $p(2)$ تلاحظ أن

$p(-2)$ is "$1<2$" which is a true statement,
and $p(2)$ is "$5<2$" which is a false statement.

Examples of predicates:

1) The number x is less than ten.
2) $2x+1=0$.
3) $x+2y<1$.
4) A student in IUG is diligent.
5) $(x+1)(x-1)=x^2-1$.
6) $(x+1)(x-1)=x^2-2$.
7) $x^2-4=0$.

Def: Let U be a universe and $p(x)$ be a predicate, then:

(1) the universal quantifier $(\forall x)(p(x))$ – read for all x, $p(x)$ – becomes a statement asserts that for all x in U, the statement $p(x)$ about x is true.

(2) the existential quantifier $(\exists x)(p(x))$ – read there exists x, $p(x)$ – becomes a statement asserts that there exists at least one x in U such that the statement $p(x)$ about x is true.

(3) A quantifier is either universal or existential quantifier.

Remark: In mathematics, "for every" and "for all" mean the same and both are symbolized by $\forall$; and "for some" means the same as "there exists" and is symbolized by $\exists$.

Example: For the universe of all real numbers, determine the truth value of the following quanifiers:

1) $(\forall x)\left[(x>0) \vee (x=0) \vee (x<0)\right]$. (T)
2) $(\forall x)\left[x+1 > x\right]$. (T)
3) $(\forall x)(x>3)$. (F)
4) $(\forall x)\left[(|x|>0) \vee x=0\right]$ (T)
5) $(\forall x)\left[\frac{x}{x}=1\right]$ (F)
6) $(\forall x)\left[(x-1)(x+1)=x^2-1\right]$ (T)
7) $(\forall x)\left[(x-1)(x+1)=x^2-2\right]$ (F)
8) $(\exists x)\left[(x-1)(x+1)=x^2-2\right]$ (F)
9) $(\forall x)\left[x^2-4=0\right]$ (F)
10) $(\exists x)\left[x^2-4=0\right]$ (T)

Def: Two quantified statements are said to be *equivalent* if they are the same in logic.

Illustration: The quantifier:
"It is not true that all students in IVG are diligent"
is equivalent to
"There exists a student in IVG that is not diligent".
In Mathematics: The first quantifier is symbolized by $\sim(\forall x)(p(x))$, and the second quantifier is symbolize by $(\exists x)(\sim p(x))$.

Rule of Quantifier Negation (Q.N.)

Let $p(x)$ be a predicate with unspecified object x in a given universe. Then

$$\sim\left[(\forall x)(p(x))\right] \equiv (\exists x)(\sim p(x)), \quad \text{and}$$

$$\sim\left[(\exists x)(p(x))\right] \equiv (\forall x)(\sim p(x)).$$

Illustration: Suppose for a specific case, that the universe set is $U = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ and $p(x)$ is a predicate of variable $x \in U$. Then the quantifier $(\forall x)(p(x))$ amounts to $p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$. Similarly, $(\exists x)(p(x))$ means $p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$. Hence

$$\sim (\forall x)(p(x)) \equiv \sim \big(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n) \big)$$

$$\overset{De.M.}{\equiv} \sim p(a_1) \vee \sim p(a_2) \vee \cdots \vee \sim p(a_n)$$

$$\equiv (\exists x)(\sim p(x))$$

which is the rule of Quantifier Negation.

Similarly, $\sim (\exists x)(p(x)) \equiv \sim \big(p(a_1) \vee \cdots \vee p(a_n) \big)$

$$\equiv \sim p(a_1) \wedge \sim p(a_2) \wedge \cdots \wedge \sim p(a_n)$$

$$\equiv (\forall x)(\sim p(x)).$$

هنا حصلنا على قانون Q.N. من خلال قانون De Morg. في حالة خاصة.

Example: What is the negation of the statement

(1) "All snakes are poisonous"?

Sol: If we take U to be the universe of all snakes and $p(x)$ to be the predicate "x is poisonous" then the statement can be symbolized by $(\forall x)(p(x))$, so by Q.N., the negation is $(\exists x)(\sim p(x))$, which represents "Some snakes are not poisonous".

2) "Some mathematicians are not sociable"

Sol: Let U be the universe of all mathematicians, and $p(x)$ be the predicate "x is not sociable". Then

$$\sim (\exists x)(p(x)) \equiv (\forall x)(\sim p(x));$$

That is, all mathematicians are sociable.

1.7 Proof of Validity

Note Title 16-Jan-13

Def: (1) An argument is the assertion (التأكد) that a statement, called the conclusion, follows from other statements, called the hypotheses or premises.

(2) An argument is considered to be valid if the conjunction of the hypotheses implies the conclusion.

Illustration: The following is an argument in which the first four statements are hypotheses, and the last one is the conclusion.

H1: If my son gets a grade over than 90%, I will give him a bicycle

H2: If he studies hard, I will giv him a watch.

H3: If he get a bicycle or a watch, then he is a good student.

H4: He is not good as a student.

C: Therefore, he does not get a grade over than 90%, and he does not study hard.

The argument may be symbolized as:

$$H1: \quad M \rightarrow E$$
$$H2: \quad A \rightarrow L$$
$$H3: \quad (E \vee L) \rightarrow \sim W$$
$$H4: \quad W$$

$$C: \quad \therefore \sim M \wedge \sim A$$

لفحص تحقق صحة الإجراء السابق باستخدام جدول الصواب فإنه يلزمنا
$2^5 = 32$ من الإحتمالات لحالات الصحة والخطأ للجمل المختلفة وهو أمر طويل.

Using the rules of inference, we can prove the validity of this argument in a few steps as follows:

From the hypotheses H3 and H4 $((E \vee L) \to \sim W) \wedge W$ we get by Modus Tollens and De Morgan's Law that $\sim(E \vee L)$ or equivalently $\sim E \wedge \sim L$. By law of Simplification, we validly infer $\sim E$ (and also $\sim L$).

Again by Modus Tollens, $(M \to E) \wedge \sim E \Longrightarrow \sim M$.

$(A \to L) \wedge \sim L \Longrightarrow \sim A$.

Finally, $\sim M$ and $\sim A$ gives the conclusion $\sim M \wedge \sim A$.

$\square$

يمكن التعبير عن البرهان السابق للتحقق من صحة الإجراء بصورة مختلفة من خلال عمودين، الأول هو جملة ناتجة من الجمل السابقة، العمود الثاني هو التبرير لصحة العبارة حيث توضح فاصل / للفصل بين آخر عبارة والنتيجة، انظر التالي:

1)	$M \to E$	(Hyp.)
2)	$A \to L$	(Hyp.)
3)	$(E \vee L) \to \sim W$	(Hyp.)
4)	W / $\therefore$ $\sim M \wedge \sim A$	(Hyp. / Concl.)
5)	$\sim(E \vee L)$	(3, 4, M.T)
6)	$\sim E \wedge \sim L$	(De. M.)
7)	$\sim E$	(6, simp.)
8)	$\sim L$	(6, Simp.)
9)	$\sim M$	(1, 7, M.T.)
10)	$\sim A$	(2, 8, M.T.)
11)	$\sim M \wedge \sim A$	(9, 10, Conj).

لاحظ أن الإجراء (11) تم اشتقاقه بـ Conjunction

$$\begin{array}{l} H_1:\ p \\ H_2:\ q \\ \hline C:\ p \wedge q \end{array}$$

بعد المثال السابق يمكنه الوصول للتعريف التالي :

Def: A formal proof of validity for a given argument is a sequence of statements each of which is either a permise of the argument or follows from preceeding statements by a known valid argument, ending with the conclusion of the argument.

Example: Construct a formal proof of validity for the following argument, using the suggested symb.:

Ali is elected (انتخب) president of the board or both Hosam and Omer are elected vice (نائب) presidents of the board. If Ali is elected president or Hosam is elected vice president of the board, then Hani will file a (احتجاج) protest. Therefore, either Ali is elected president of the board or Hani files a protest.
(W, H, L, D)

PF:

1.	$W \vee (H \wedge L)$	(Hyp.)
2.	$W \vee H \longrightarrow D \;/\therefore W \vee D$	(Hyp./Concl.)
3.	$(W \vee H) \wedge (W \vee L)$	(1, Distr.)
4.	$W \vee H$	(3, Simp.)
5.	D	(2, 4, M.P.)
6.	$D \vee W$	(5, Add)
7.	$W \vee D$	(6, Com.)

Indirect Proof:

طريقة أخرى لبرهان تحقق الإجراء ويسمى أيضاً proof by reductio and absurdum
ويعتمد من فكرته على إضافة فرضية عكس الناتج على الفرضيات المعطاه والوصول
إلى تعارض ما مما يعني أنه ما فرضه خطأ وبالمنطق الرياضي يكون عكسه صحيح

وفي هذه الحالة العكسى يمثل النتائج المطلوب اثباتاً كرمز صحته . إذن المثال.

Example: Give an indirect proof of validity for the following argument:

1. $p \vee q \longrightarrow r$
2. $s \longrightarrow p \wedge u$
3. $p \vee s \;/ \therefore r$

Pf:

4.	$\sim r$	(I. P.) [Indirect proof]
5.	$\sim (p \vee q)$	(1, 4, M.T.)
6.	$\sim p \wedge \sim q$	(5, De. M.)
7.	$\sim p$	(6, Simp.)
8.	$\sim q$	(6, Simp.)
9.	s	(3, 7, D.S.) [Disj. Syllo.]
10.	$p \wedge u$	(2, 9, M.P.)
11.	p	(10, Simp.)
12.	$p \wedge \sim p$	(7, 11, Conj.)

Hence the statement $p \wedge \sim p$ in step 12 is a contradiction. Therefore, the indirect proof of the validity is complete.

في مقابل البرهان الغير مباشر أيضاً يمكن اعتبار البرهان في الأمثلة الأولى هو برهان مباشر (Direct proof) ، ونعتمد اختيار نوع البرهان من حيث كونه مباشر أو غير مباشر على تحليل اجزاءات البرهان.

1.8 Mathematical Induction

الاستنتاج الرياضي هو طريقة أخرى لبرهان التحقق عندما تكون مجموعة الـ universe هي $\mathbb{N}$ ما للتحقق من صحة مستند (predicate) $p(n)$ لكل n في $\mathbb{N}$ ، بمعنى اثبات صحة $(\forall n)(p(n))$ [universal quantifier]

Mathematical Induction. (الاستنتاج الرياضي)

Let $P(n)$ be a predicate involving the natural number n s.t.:

(1) $P(1)$ is true, and

(2) $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ for any arbitrary natural number k,

then $P(n)$ is true for every natural number n.

Remark: The principle of mathematical Induction is a consequence of one of Peano's Axioms for the natural numbers says that:

"If S is a subset of $\mathbb{N}$ such that $1 \in S$ and $(\forall n)\,[n \in S \Rightarrow (n+1) \in S]$, then $S = \mathbb{N}$".

للتوضيح: إذا فرضنا أن $S \subseteq \mathbb{N}$ تمثل مجموعة كل الأرقام الطبيعية n التي تحقق $p(n)$ [تسمى مجموعة الصواب لـ $p(n)$] ، فإنه بناءً معطيات الاستنتاج الرياضي نجد أن $1 \in S$ ، وأن $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$. لذا فمن فرضية بيانو نجد أن $S = \mathbb{N}$ وهي نتيجة الاستنتاج الرياضي.

ملاحظة ①: يتم تطبيق مبدأ الاستنتاج الرياضي لإثبات العبارات $(\forall n)(p(n))$ حيث n عدد طبيعي كالتالي:

١ـ يجب من البداية ملاحظة أن المستند $p(n)$ يتحدث عن الأعداد الطبيعية، وأن النص يشتمل على الرمز الشامل $\forall$ بمعنى universal quantifier.

2ـ التأكد من صحة العبارة $p(1)$ وهي عادة تكون سهلة في الفحص

3ـ اثبات أن $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ وذلك بجعل $p(k)$ لـ hypothesis (معطى) واستخدام نظريات وتعريفات وقوانين الاستدلال لاستنتاج صحة $p(k+1)$ {conclusion} باستخدام أساليب الاستدلال وأساليب التحقق من صحة الإجراء الذي درس في فصول سابقة. تسمى $p(k)$ بـ induction hypothesis.

ح) نسمي المجموعة الجزئية S من مجموعة الأعداد الطبيعية أنها inductive إذا كانت
"$n \in S \Rightarrow n+1 \in S$"، مثال ذلك المجموعات $\{101, 102, 103, \ldots\}$ ، $\{5, 6, 7, \ldots\}$ ،
$\{90, 91, \ldots\}$ هي مجموعات inductive بينما المجموعة $\{5, 7, 8, 9, \ldots\}$ ليست كذلك،

وعليه يمكن إعادة صياغة شروط مبدأ الاستنتاج الرياضي كالآتي:

مجموعة حل المسند $P(n)$ هي مجموعة inductive تحتوي على 1 .

ويمكن أيضاً إعادة صياغة مسلّمة بيانو كالآتي:

لا يوجد مجموعة inductive تحتوي 1 إلا مجموعة واحدة هي N .

من هنا نفهم لماذا يكون مبدأ الاستنتاج الرياضي نتيجة مباشرة لمسلّمة بيانو.

Examples: Prove by Mathematical Induction that:

1) For every natural number n,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PF: Suppose that $P(n)$ represents the predicate

$$\text{“}1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\text{”}$$

So, $P(1)$ represents "$1 = \frac{1*2}{2}$" which is true and this proves condition (1) for math. induction. To prove that condition (2) is satisfied, suppose $P(K)$ is true; that is,

$$\text{“}1+2+3+\cdots+K = K(K+1)/2\text{”} \text{ is true}$$

[يمكن رفع " " وحذف عبارة is true في فرضية $P(K)$]

بإضافة $K+1$ للطرفين نحصل على

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+K+(K+1) &= \frac{K(K+1)}{2} + (K+1) \\ &= (K+1)\left(\frac{K}{2}+1\right) \\ &= (K+1)(K+2)/2 \end{aligned}$$

This proves that $P(K+1)$ is true. So by the principle of mathematical induction, we have that

$(\forall n \in N)$ "$1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$" is true.

2) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

PF: Suppose that $p(n)$ represents that

"$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$",

so $p(1)$ represents "$1=1^2$" which is true.

Suppose that $p(k)$ is true; that is

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

Add $2k+1$ to both sides, we get

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

but $2k+1=2(k+1)-1$, hence

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+2(k+1)-1=(k+1)^2$$

which proves that $p(k+1)$ is true. Thus, by math. indc. $p(n)$ is true for every $n\in\mathbb{N}$.

3) Prove that $\forall n\in\mathbb{N}$, 3 divides n^3-n

PF: Suppose that $p(n)$ represents that

"3 divides n^3-n",

so $p(1)$ represents that "3 divides zero"

This statement is true since $\exists r\in\mathbb{Z}$ s.t.

$0=3*r$ $(r=0)$

Suppose that $p(k)$ is true; that is

3 divides k^3-k

So, there exists integer r s.t.

$$k^3-k=3\cdot r \quad\text{------}\quad (*)$$

Consider $(k+1)^3-(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)$

$$=k^3+3k^2+2k$$
$$=(k^3-k)+(3k^2+3k)$$
$$\overset{(*)}{=}3\cdot r+3(k^2+k)$$
$$=3(r+k^2+k).$$

Thus, 3 divides $(k+1)^3-(k+1)$ and $p(k+1)$ is true.

Therefore $p(n)$ is true $\forall n\in\mathbb{N}$.

Def: Let n be a natural number and r an integer. The symbol $C(n,r)$ (sometimes $\binom{n}{r}$) is defined by

$$C(0,0) = 1, \quad C(0,r) = 0 \quad \forall r \neq 0, \quad \text{and}$$

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1).$$

Illustration:
$$C(0,3) = C(0,2) = C(0,1) = 0$$
$$C(1,0) = C(0,0) + C(0,-1) = 1$$
$$C(1,1) = C(0,1) + C(0,0) = 1$$
$$C(1,2) = C(0,2) + C(0,1) = 0$$
$$C(2,2) = C(1,2) + C(1,1) = 0+1 = 1$$

and so on.

Thrm 8: For a natural number n and integer $r \geq 0$,

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

where $n!$ (read n factorial) is the product
$n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ and $0! = 1$ by convention.

PF: We can prove it by Mathematical induction. (do it

Corollary: For a natural number n and integer $r \geq 0$,

(1) $C(n,0) = C(n,n) = 1$,

(2) $C(n,r) = C(n,n-r)$.

Thrm 9: (The Binomial Thrm)

Let x, y be two fixed real, then for every natural number n,

$$(x+y)^n = C(n,0)\,x^n + C(n,1)\,x^{n-1}y + C(n,2)\,x^{n-2}y^2 + \cdots + C(n,r)\,x^{n-r}y^r + \cdots + C(n,n)\,y^n.$$

PF: Again, we can prove it by math. induc. (prove it)

Note Title 23-Jan-13

Ch2 The Concept of Sets

2.1 Sets and Subsets

مقدمة : " ما هي المجموعة " هو سؤال غاية في الصعوبة / لذا فإننا هنا لن نخوض في أي من الفرضيات والتفاصيل المعقدة التي تناولت تعريف المجموعات / وإنما سنعتمد على تعريف بديهي للعالم Georg Cantor

Def: (Def of a set)
A **set** is any collection into a whole of difinite and distinguishable objects, called **elements of the set.**

Illustration: The following are examples of sets:

1- The set of all students in the IUG.
2- The set of letters a, b, c and d.
3- The set of all rational numbers whose square is 2.
4- The set of all natural numbers
5- The set of all real numbers between 0 and 1.

Def: A set which contains only finitely many elements is called **a finite set**; if the set is not finite, we say it is **infinite set.**

Note that, the sets above in (1), (2) and (3) are finite sets, while the sets in (4) and (5) are infinite. Moreover, and when it is possible to do, the sets can be written by inclosing symbols $\{ \cdot \}$, representing their elements in braces.
For Examples, the set in (2) can be written in the form $\{a, b, c, d\}$, the set in (3) written $\{ \}$ or ϕ, which called **the empty set.**

The set in (4) can be written in the form $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

لاحظ هنا صعوبة كتابة المجموعة في (١) لكثرة عناصرها، واستحالة كتابة المجموعة في (٥) لكونها غير معدودة - كما سنرى لاحقاً.

عادةً نستخدم الأحرف الكبيرة A، B، C، ... للمجموعات والأحرف الصغيرة a، b، c، ... لعناصرها، وإذا كان a عنصر في المجموعة A، نكتب $a \in A$، وإلا فإننا نكتب $a \notin A$.

$a \in A$ read "a is an element of A" or "a belongs to A".
$a \notin A$ read "a is not an element of A".

Def: Two sets A and B are said to be **equal** or **identical** and we write $A = B$ if they contain the same elements; that is,

$$A = B \text{ means } (\forall x)\left[(x \in A) \longleftrightarrow (x \in B)\right].$$

لاحظ بناءً على هذا التعريف أن الترتيب غير مهم، لذا فإن المجموعة $\{a, b, c\}$ هي نفس المجموعة $\{c, b, a\}$.

لاحظ أيضاً أنه في تعريف المجموعة فإن العناصر تكون مختلفة (distinct) لذا فإنه ليس من المعتاد كتابة المجموعة $\{a, a, b, c\}$ بهذه الصورة وإنما تكتب بالصورة $\{a, b, c\}$.

زيادةً على ذلك، إذا كانت a عنصر في مجموعة، فإن a، $\{a\}$ مختلفتان، الأولى مجموعة، والثانية عنصر وعليه فإن $a \neq \{a\}$.

Def: Let A and B be sets. If every element of A is an element of B, then A is called **a subset** of B, in symbols: $A \subseteq B$ or $B \supseteq A$. In this case, B is called **a superset** of A.

Logically, $$A \subseteq B \equiv (\forall x)\left[(x \in A) \longrightarrow (x \in B)\right]$$

Remark: From the defs above, we can prove that

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \quad \text{(prove it)}$$

Note that any set is a subset (and a superset) of itself.

If $A \subseteq B$ and $A \neq B$, we write $A \subset B$ or $A \subsetneq B$, and we say that A is a proper subset of B. So A is a proper subset of B if it is true that

$$(\forall x)\left[(x \in A) \rightarrow (x \in B)\right] \wedge (\exists x)\left[(x \in B) \wedge (x \notin A)\right]$$

[كل عنصر في A موجود في B ، ويوجد أي عناصر B ليس في A]

When A is not a subset of B, we write $A \not\subseteq B$.

In logic

$$\sim (\forall x)\left[(x \in A) \rightarrow (x \in B)\right] \equiv (\exists x)\left[(x \in A) \wedge (x \notin B)\right]$$

لاحظ أنه بناءً على التعريفات السابقة فإننا نحصل على استنتاج مهم وهو

$$(A \subset B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A)$$

Thrm 1: The empty set is a subset of every set.

PF: Let A be any set. We want prove that $(\forall x)\left[x \in \emptyset \rightarrow (x \in A)\right]$ is true. But $(\forall x)$, $x \in \emptyset$ is false statement, while $x \in A$ may be true or false. In either cases, the statement $(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)$ will be true.

Thrm 2: If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$.

PF: Suppose that $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$. Then $\forall x$,

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)$. By transitive law, $x \in A \Rightarrow x \in C$. That is $A \subseteq C$.

$\square$

Example: In each of the following, determine whether the statement is true or false. If it is true prove it, else, disprove it by an example. (Such example is called a counterexample)

1) $(A \subset B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subset C)$ (T)

PF: Suppose that $A \subset B \wedge B \subseteq C$. Then $(\forall x)$ we have that
$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (A \neq B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)$$
(By Simp. rule, and transitive law)
$(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$. Hence $A \subseteq C$. If $A = C$,

then $B \subseteq C = A$ and so $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$. Thus $A = B$ which is a contradiction. Thus $A \neq C$ and therefore $A \subset C$.

2- $\phi = \{\phi\}$ (F)

Since the left hand is an empty set and the right hand is the set contains one element which is ϕ so it is not empty.

3) $x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (F)

Since the elements of the set are also sets, and $x \neq \{x\}$.

4) $\{1, x\} \subseteq \{1, x, \{x\}\}$ (T)

PF: $(\forall y) [y \in \{1, x\} \Rightarrow (y = 1) \vee (y = x)]$. If $y = 1$ or $y = x$ then $y \in \{1, x, \{x\}\}$. $\square$

2.2 Specification of Sets

إحدى طرق تحديد وكتابة المجموعات هي بكتابة وصف لعناصر هذه المجموعات
بأن تكون عناصر المجموعة تحقق خاصية معينة، وبهذه الطريقة يمكن تحديد
مجموعات جزئية من مجموعات أخرى معروفة كما يوضح المثال التالي:

Illustration: Let A be the set of all students in IUG. Note that the predicate "x is female" is true for some elements x of A. The set

$$\{x \in A : x \text{ is female}\}$$

is specify the set of all female students in IUG. Similarly $\{x \in A : x \text{ is not female}\}$ is the set of all male students in IUG.

Thus, as a rule, to every set A and to every predicate $p(x)$ about $x \in A$, there exists a set $\{x \in A : p(x)\}$ whose elements are precisely those elements x of A for which the statement $p(x)$ is true.

في نظرية المجموعات / تسمى القاعدة السابقة **Axiom of Specification**

The symbol $\{x \in A : p(x)\}$ read the set of all x in A such that $p(x)$ is true and is called **the set builder notation.**

Example: Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers. Then

1) $\{x \in \mathbb{R} : x = x + 1\}$ is the empty set.
2) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0\}$ is the set $\{-2, 2\}$.
3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$ is the empty set. In this case, the two sets in (1) and (3) are equal.

سنقوم باستخدام الرموز التالية للتعبير عن المجموعات المقابلة لها :

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ is a real number}\}$$
$$\mathbb{Q} = \{x : x \text{ is a rational number}\}.$$
$$\mathbb{Z} = \{x : x \text{ is an integer}\}.$$
$$\mathbb{N} = \{x : x \text{ is a natural number}\}.$$
$$I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Note that $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ and
$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

لاحظ أنه لا يوجد ما يمنع أن تكون عناصر مجموعة ما هي نفسها مجموعات قائمة بذاتها مثال ذلك المجموعة $A = \{1, \{2,3\}\}$ تحتوي على عنصرين ، الأول 1 ، والثاني $\{2,3\}$ ، ومن الملاحظ أن العنصر الثاني هو مجموعة قائمة بذاتها ، لذا فإنه ليس صحيحاً أن نكتب $2 \in A$ لأنها ليست عنصراً فيها ، وليس صحيحاً أيضاً أن $\{2,3\} \subseteq A$ والصحيح الذي يناسب A هو كتابة $\{2,3\} \in A$. هناك مجموعة مجموعات مشهورة ومرتبطة بمجموعة A . انظر التعريف التالي :

Def: For a given set A, we define the power set of A - denoted by $P(A)$ - to be the set of all subsets of A. That is,

$$B \in P(A) \iff B \subseteq A.$$

Example: Find $P(A)$ if
1) $A = \{a\}$.
2) $A = \{a, b\}$.

Sol: 1) $P(A) = \{\phi, \{a\}\}$

2) $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$

Thrm 3: If A contains n elements, then its power set $\mathcal{P}(A)$ contains exactly 2^n elements.

PF: Suppose that $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ and suppose that $B \subseteq A$. Let a_k be arbitrary for $k = 1, 2, 3, \dots, n$

[هنا سنقوم بحساب عدد احتمالات تشكيل B مجموعة جزئية من A]

There is two possible case;

<u>Case 1;</u> $a_k \in B$ and <u>Case 2:</u> $a_k \notin B$.

Translate this as the problem of filling a linst of n blank spaces $\square\ \square\ \square \cdots \square$ by 0 or 1 as follows: If $a_k \in B$, then we put 1 in the kth-space and if $a_k \notin B$, we put 0. In fact, there is exactly $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ different such fillings, each one of these fillings represents a subset of A. Therefore, $\mathcal{P}(A)$ contains exactly 2^n elements.

<u>للتوضيح</u> If $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, then the filling 00101 represents the subset $B = \{a_3, a_5\}$ as well.

Alternative Proof: Suppose that A has n-elements and $\mathcal{P}(A)$ is its power set. Note that the number of subsets of A contains exactly k-elements is the number $C(n,k)$. [هذه الحقيقة هي من مواضيع الفصل]

So, the number of subsets of A contains zero element is $C(n,0)$,

[المجموعة $\emptyset$ هي ، $C(n,0) = 1$]

and the number of subsets of A contains one element is $C(n,1)$

[هي المجموعات التي تأخذ الشكل $\{a_k\}$ ، $C(n,1) = n$]

and so on, to get the number of subsets of A is

$$C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n)$$

Using the binomial Thrm, we get that

$$2^n = (1+1)^n = C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n)$$

is the number of elements of $\mathcal{P}(A)$ $\square$

2.3 Unions and Intersections

Note Title 26-Jan-13

Def 3: The union of any two sets A and B, denoted by $A \cup B$, is the set of all elements x such that x belongs to at least one of the two sets A and B.

In logic,

$x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ and $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Def 4: The intersection of any two sets A and B, denoted by $A \cap B$, is the set of all elements x such that x belongs to both A and B.

In logic,

$x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$ and

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x \in A : x \in B\}$$

If $A \cap B = \emptyset$, then A and B are said to be disjoint.

Examples: 1) If $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ then

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

2) The set of rational numbers $\mathbb{Q}$ and the set of irrational numbers are two disjoint sets.

3) $I \cap \mathbb{N} = \{1\}$,

$I \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}$,

$\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

$I \cup I = I \cap I = I$,

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$, and

$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Thrm 4: Let X be a set and let A, B, and C be subsets of X. Then we have that:

(a) The unities:

$$A \cup \emptyset = A,$$
$$A \cap X = A.$$

(b) The idempotency law:

$$A \cup A = A,$$
$$A \cap A = A.$$

(c) The commutative laws:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

(d) The associative laws:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(e) The distributive laws:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

PF: براهين فروع النظرية مشابه لبعضه البعض وذلك بالاعتماد على التعريف من خلال الـ logic وباستخدام قوانين rules of inference.

لذا سنقوم ببرهان القانون الأخير وتكون بقية الفروع كـ exercise.

(e) (الجزء الأول)

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)) && \text{(Def)}\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] && \text{(Def)}\\
&\Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] && \text{(dist. law.)}\\
&\Leftrightarrow (x \in (A \cap B)) \vee (x \in (A \cap C))\\
&\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]
\end{aligned}$$

By transitive law, we get that

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Thus,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \square$$

Thrm: (a) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

(b) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

PF: (a) We will prove it by proving that $A \subseteq B$ implies $A \cup B = B$ and $A \cup B = B$ implies $A \subseteq B$.

($\Rightarrow$) Suppose that $A \subseteq B$.

From the def of $A \cup B$, we get that $B \subseteq A \cup B$.

Now,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) &\equiv (x \in A) \vee (x \in B) && \text{(Def of } \cup) \\ &\Longrightarrow (x \in B) \vee (x \in B) && (\text{hyp. } A \subseteq B) \\ &\equiv (x \in B) && (\text{Idemp.}) \end{aligned}$$

That is $A \cup B \subseteq B$ (Def of $\subseteq$)

By previous remark, $(B \subseteq A \cup B) \wedge (A \cup B \subseteq B) \equiv A \cup B = B$.

($\Leftarrow$) Suppose that $A \cup B = B$.

$$\begin{aligned} (x \in A) &\Longrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) && (\text{add law}) \\ &\equiv x \in (A \cup B) && (\text{Def of } \cup) \\ &\equiv (x \in B) && (\text{hyp. } A \cup B = B) \end{aligned}$$

That is $[(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)] \equiv A \subseteq B$ (def).

بالمثل في حالة (b) .

Example: Prove or disprove:

$$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$$

for any two sets?

Sol: In general, the statement is false.

Counter example: $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $A \cup B = \{a, b\}$.

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $P(B) = \{\emptyset, \{b\}\}$, and

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. So, it is clearly

that $P(A \cup B) \neq P(A) \cup P(B)$.

بشكل عام / يحدث التساوي إذا، وفقط إذا، كانت $A \subseteq B$ (أثبت ذلك).

2.4 Complements

Note Title 26-Jan-13

Def 5: If A and B are sets, the *relative complement* of B in A is the set $A-B$ $(A \setminus B)$ defined by

$$A-B=\{x:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}=\{x\in A : x\notin B\}.$$

In this def, it is not assumed that $B \subseteq A$.

Example: Let $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6,7\}$, then

$$A-B=\{1,3,5\} \text{ and } B-A=\{6,7\}.$$

Note that $A\cap B=\{2,4\}$, and

$$A-(A\cap B)=\{1,3,5\}=A-B \text{ and}$$
$$B-(A\cap B)=\{6,7\}=B-A.$$

In general, this is true. See exercise 2.4 (1).

تنويه هام: ① على الرغم من أن المجموعة الشاملة بمفهوم المطلق - والتي تعني مجموعة جميع المجموعات - غير موجودة كما سنرى من خلال Russell Paradox، فإنه لا يوجد ما يمنع (مؤقتاً) من تحديد U لمجموعة شاملة لجميع المجموعات المستخدمة في هذا الكتاب، [يمكن تنفيذ ذلك من خلال أخذ الإتحاد لجميع المجموعات التي ذكرت وستذكر في هذا الكتاب]. بهذا المفهوم المحدد، فإن أي مجموعة A من هذه المادة تحقق $A \subseteq U$.

② يمكن للمجوعة الشاملة U أن تحدد بطريقة تختلف عما أشرنا له في ① في هذه الحالة يجب وصف U بطريقة واضحة، كأن نقول: "المجموعة U تمثل جميع طلبة فلسطين" أو أن نقول: "U هي مجموعة الأعداد النسبية".

③ إذا ذكرت U لمجموعة شاملة ولم يتم تحديد مفهوم لها، نقوم باستخدام المفهوم المشار له في ①.

Def: If U is a universal set, we denote A' – read the complement of A – to be the set

$$A' = U - A = \{x : x \notin A\}$$

[في هذه الحالة، نلاحظ أن $A \subseteq U$]

Thrm: (Example 5)

For any two sets,

$$A - B = A \cap B'$$

PF:

$$\begin{aligned}
x \in A \cap B' &\equiv (x \in A) \wedge (x \in U - B) && (\text{Def of } \cap, ') \\
&\equiv (x \in A) \wedge [(x \in U) \wedge (x \notin B)] && (\text{Def } -) \\
&\equiv [(x \in A) \wedge (x \in U)] \wedge (x \notin B) && (\text{associ.}) \\
&\equiv \big(x \in (A \cap U)\big) \wedge (x \notin B) && (\text{Def } \cap) \\
&\equiv (x \in A) \wedge (x \notin B) && (A \cap U = A) \\
&\equiv x \in (A - B) && (\text{Def of } -)
\end{aligned}$$

Thus, $A \cap B' = A - B$.

Thrm 5: Let A and B be sets. Then

(a) $(A')' = A$.

(b) $\phi' = U$ and $U' = \phi$.

(c) $A \cap A' = \phi$ and $A \cup A' = U$.

(d) $A \subseteq B$ if and only if $B' \subseteq A'$.

PF: قبل البدء من البرهان تذكر معي أنه $p \wedge t \equiv p$ ، ولأنه $x \in U$ هي صحيحة دائماً $\forall x$ ، فإنه يصح استخدام المتكافئة التالية

$$(x \in A') \equiv (x \in U) \wedge (x \notin A) \equiv (x \notin A).$$

a) $x \in (A')' \equiv x \notin A'$ (Def of $'$)

$\equiv \sim (x \in A')$ (Def of $\notin$)

$\equiv \sim (x \notin A)$ (Def of $'$)

$\equiv \sim(\sim (x \in A))$ (Def of $\notin$)

$\equiv x \in A$ (D.N.)

(b) $x \in \phi' \equiv x \in (U - \phi)$ (Def of $'$)

$\equiv x \in U$ ($U - \phi = U$)

From part (a), $\phi = (\phi')' = U'$

(c) $x \in A \cap A' \equiv (x \in A) \wedge (x \in A')$ (Def of $\wedge$)

$\equiv (x \in A) \wedge (x \notin A)$ (Def of $'$)

$\equiv x \in \phi$

Since $\phi = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin A)\}$

(لاحظ أن تعريفات ϕ كثيرة للمجموعة الخالية ، ولعل أحد التعريفات الأشهر هو $\phi = \{x : p(x) \text{ is a contradiction}\}$)

هناك برهان غير مباشر عن طريق فرض أنه يوجد x بحيث $x \in A \cap A'$
والوصول إلى تناقض أن x تحقق صحة $p(x) = (x \in A)$ وصحة $\sim p(x) = (x \notin A)$
لنحصل على تناقض $(\exists x)(p(x) \wedge \sim p(x))$.

$x \in (A \cup A') \equiv (x \in A) \vee (x \in A')$ (Def of $\cup$)

$\equiv (x \in A) \vee [(x \in U) \wedge (x \notin A)]$ (Def of $'$)

$\equiv [(x \in A) \vee (x \in U)] \wedge [(x \in A) \vee (x \notin A)]$ (Dist)

$\equiv [x \in (A \cup U)] \wedge t$ (Def of t) ($p \vee \sim p \equiv t$)

$\equiv x \in A \cup U$ ($p \wedge t \equiv p$)

$\equiv x \in U$. ($A \subseteq U$)

لاحظ أنه إذا قمنا بتعريف المجموعة الشاملة بطريقة مشابهة لـ $\emptyset$ كالتالي:

لأي predicate نرمز $p(x)$ ، نعرف

$$\mathcal{U} = \{ x : p(x) \vee \sim p(x) \}$$

وأصل هذا التعريف أن $t \equiv p(x) \vee \sim p(x)$ صحيحة لأي x.

يمكننا إثبات $A \cup A' = \mathcal{U}$ بصورة أسرع كالتالي

$$\begin{aligned}
x \in A \cup A' &\equiv (x \in A) \vee (x \in A') && (\text{Def of } \mathcal{U}) \\
&\equiv (x \in A) \vee (x \notin A) && (\text{Def of } ') \\
&\equiv x \in \mathcal{U} && (\text{Def of } \mathcal{U})
\end{aligned}$$

$\square$

(d)
$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\equiv [(x \in A) \rightarrow (x \in B)] && (\text{Def. } \subseteq) \\
&\equiv [(x \notin B) \rightarrow (x \notin A)] && (\text{Contrap.}) \\
&\equiv [(x \in B') \rightarrow (x \in A')] && (\text{Def. } ') \\
&\equiv B' \subseteq A' && (\text{Def of } \subseteq)
\end{aligned}$$

Thus, by transitivity, $A \subseteq B \equiv B' \subseteq A'$.

Thrm 6: (De Morgan's Thrm)

For any sets A and B,

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

PF: (a) $x \in (A \cup B)' \equiv x \notin (A \cup B)$ (Def of $'$)

$\equiv \sim \{ x \in (A \cup B) \}$ (Def of $\notin$)

$\equiv \sim [(x \in A) \vee (x \in B)]$ (Def. $\cup$)

$\equiv \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B)$ (De. Morg. of Logic)

$\equiv (x \notin A) \wedge (x \notin B)$ (Def of $\notin$)

$\equiv (x \in A') \wedge (x \in B')$ (Def of $'$)

$\equiv x \in (A' \cap B')$ (Def of $\cap$)

$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

بالمثل إثبات (b) .

Examples: Prove the following:

1) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

PF: $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$ (Thrm)

$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$ (De. Morg.)

$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$ (Disl.)

$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$ (assoc.)

$= \phi \cup [A \cap (B - C)]$ ($A \cap A' = \phi$)

$= A \cap (B - C)$ ($\phi \cup A = A$)

2) $A - B = A - (B \cap A)$

PF: $A - (B \cap A) = A \cap (B \cap A)'$ (Thrm)

$= A \cap (B' \cup A')$ (De Morg.)

$= (A \cap B') \cup (A \cap A')$ (Dist.)

$= (A \cap B') \cup \phi$

$= A \cap B'$

$= A - B$

3) $A \cap B = \phi$ iff $A \subseteq B'$ $(\equiv B \subseteq A')$

PF: $(\Rightarrow)$ Suppose that

a) $A \cap B = \phi$ and $(x \in A)$ / $\therefore (x \in B')$ (hyp. / concl.)

b) Suppose to contrary $x \notin B'$ (I. P.)

c) $x \in B$ (b, def of $'$)

d) $x \in A \cap B$ (a, c, def of $\cap$)

(e) $x \in \phi$ (d, a)

This is a contradiction.

(indirect proof of validity [لاحظ هنا أننا قمنا باستخدام البرهان الغير مباشر
مع زيادة من التفاصيل]

$(\Leftarrow)$ a) $A \subseteq B'$ \ $\therefore A \cap B = \phi$ (hyp. / $\therefore$ concl)

b) $A \cap B \neq \phi$ (I. P.)

c) $(\exists x)\ (x \in A) \wedge (x \in B)$ (b)

d) $(\exists x)\ (x \in B') \wedge (x \in B)$ (a, c)

e) $(\exists x)\ [x \in (B \cap B')]$ (d, def of $\cap$)

This is a contradiction.

2.5 Venn Diagrams

للمساعدة في فهم المجموعات بالعمليات عليها، والنتائج التي حصلنا عليها
سنقوم بتقديم أشكال (رسومات) توضيحية تسمى Venn diagrams.

في هذه الأشكال يتم تمثيل المجموعات كما يلي:

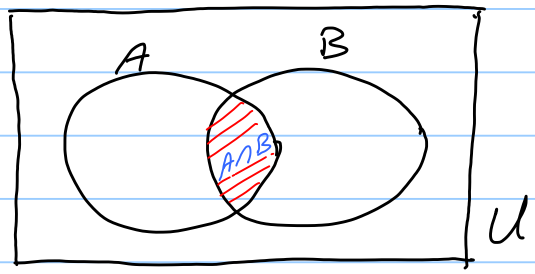
① المجموعة الشاملة U : تمثل بمستطيل يشتمل على جميع المجموعات والعناصر.

② المجموعات العادية $A / B / \ldots$: تمثل بدوائر داخل المستطيل.

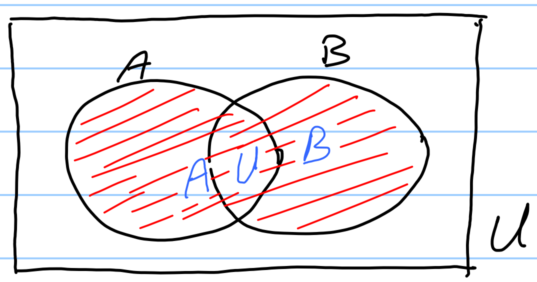
③ العناصر $a / b / \ldots$: تمثل بنقاط "." أو إشارات "x" أو دوائر صغيرة "o" تكون داخل الدوائر أو داخل المستطيل حسب انتمائها للمجموعات.

④ يتم تمثيل المجموعتين A, B بدائرتين كالتالي:

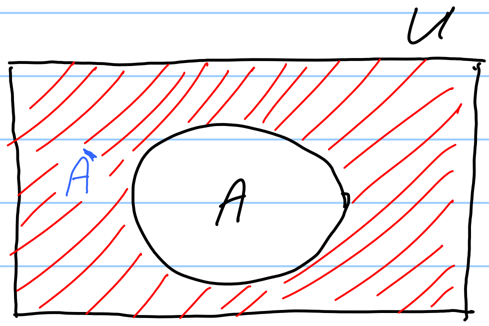
(أ) تمثل المنطقة المشتركة للدائرتين $A \cap B$ ،



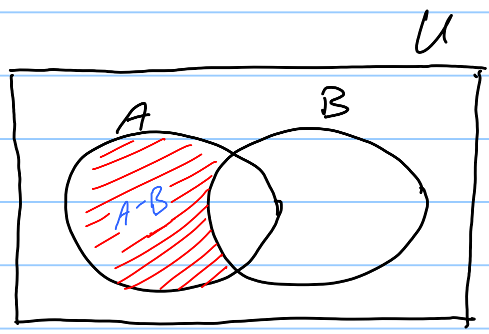
(ب) تمثل المنطقة الكلية للدائرتين $A \cup B$ ،



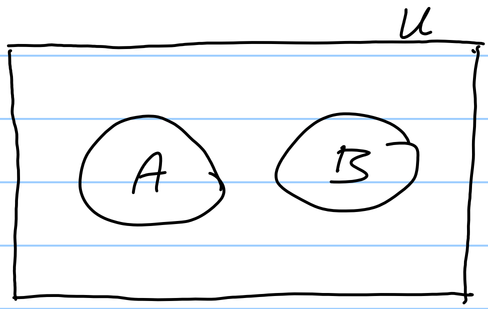
ⓓ تمثل المنطقة خارج الدائرة A بالمكملة لـ A' ،



ⓔ تمثل المنطقة من الدائرة A بعد حذف المنطقة المشتركة $A \cap B$ بـ $\underline{A-B}$.



ⓕ في حال كانت A و B منفصلتين (disjoint) عندما
$A \cap B = \emptyset$ ، يتم رسم A و B بشكل متباعد بدون مناطق مشتركة



Example : ① Suppose that $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

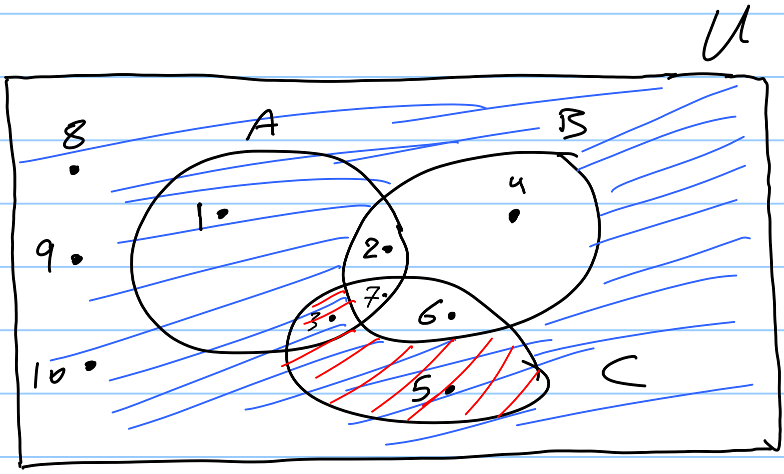
$A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$, and

$C = \{3, 5, 6, 7\}$, then we have that

$A \cap B = \{2, 7\}$, $A \cap C = \{3, 7\}$, $B \cap C = \{6, 7\}$

$A - B = \{1, 3\}$, $A - C = \{1, 2\}$ and so on.

A typical Venn diagram may be drawn as follows:



Note that $(A \cap B) \cap C = \{2, 7\} \cap C = \{7\}$

$A \cap (B \cap C) = A \cap \{7, 6\} = \{7\}$

So, $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

From Venn diagram,

$$C - B = \{3, 5\} = C - (B \cap C)$$

and

$$C \cap B' = \{3, 5\} = C - B.$$

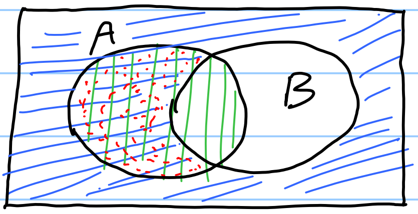
بهذه الطريقة يمكن التحقق من صحة كثير من القوانين من أمثال التوزيع

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

وغيرها.

2) Draw a Venn diagram for $A \cap B'$ and $A \cup (B - A)$

الحل: (a)



$A \cap B'$

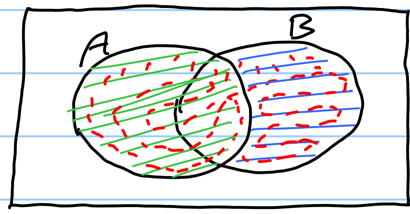
منطقة الخطوط الزرقاء هي B'

منطقة الخطوط الخضراء هي A

منطقة النقط الحمراء (وجود خطوط زرقاء وخضراء)

هي المنطقة المطلوبة $A \cap B'$

(b)



$A \cup (B - A)$

منطقة الخطوط الزرقاء هي $B - A$

منطقة الخطوط الخضراء هي A

منطقة النقط الحمراء هي اتحاد المنطقتين

هي $A \cup (B - A)$.

لاحظ من خلال أشكال Venn أن $A \cap B' = A - B$ وهي مثبتة سابقاً

وأن $A \cup (B - A) = A \cup B$

تمرين: مطلوب اثبات صحة ما حصلنا عليه من خلال أشكال Venn

السابقة أن $A \cup (B - A) = A \cup B$

2.6 Indexed Families of Sets

Note Title — 03-Feb-13

تذكر معي من البداية أن المجموعة هي تجميع لأشياء محددة ومختلفة، ولكن عندما لا نشترط أن هذه العناصر المجموعة أن تكون مختلفة، نطلق عليها اسم family بدل مجموعة، ونطلق على عناصرها members.

For Example: $\{a, a, a, b\}$ is a family with four members $a, a, a,$ and b. But this family considered as a set is the set $\{a, b\}$ with two elements a and b.

Def: Let Γ be a set, and assume that $\forall \gamma \in \Gamma$, there is corresponding set A_γ. The family of all such sets A_γ is called an indexed family of sets indexed by the set Γ. We denoted it by:

$$\mathcal{F} = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

ملحوظات: ① في التعريف السابق لم نشترط أن تكون A_γ مختلفات لعناصر γ المختلفة في Γ ولذلك سميت $\mathcal{F}$ بأنها family وليست مجموعة.
② من التعريف لكل $\gamma \in \Gamma$، موجود A_γ مقابلة لـ γ، لذا فإن عملية الترقيم (indexed family) هي حالة خاصة من الدوال يمكن كتابتها بالصورة التفصيلية

$$A : \Gamma \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$A(\gamma) = A_\gamma$$

③ حسب التعريف يمكن لأي مجموعة أن تمثل مجموعة عن نفسها.

Any family of sets can be indexed by itself as follows: Given a family $\mathcal{F}$. Take $\Gamma = \mathcal{F}$ and for each $\gamma \in \Gamma$, take $A_\gamma = \gamma$. Then

$$\mathcal{F} = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\} = \{\gamma : \gamma \in \mathcal{F}\}.$$

In general, we write $\mathcal{F} = \{A : A \in \mathcal{F}\}$.

Examples: ① The family of sets:

$$\{1,2\},\ \{2,3\},\ \{3,4\},\ \{4,5\},\ \dots,\ \{n,n+1\}$$

can be indexed by many sets Γ as follows:

(a) Take $\Gamma_1 = \{1,2,3,\dots,n\}$, and $\forall i \in \Gamma_1$, $A_i = \{i, i+1\}$ then this indexed family of sets denoted by.

$$\{A_i : i \in \Gamma_1\} = \{\{i, i+1\} : i \in \Gamma_1\} = \{\{i, i+1\} : i = 1,2,\dots,n\}$$

(b) Take $\Gamma_2 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}$ and $\forall i \in \Gamma_2$,

$B_i = \{\frac{1}{i}, \frac{1}{i}+1\}$. Then the indexed family is denoted as

$$\{B_i : i \in \Gamma_2\} = \{\{\tfrac{1}{i}, \tfrac{1}{i}+1\},\ i \in \Gamma_2\}$$

c) Take $\Gamma_3 = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$, and for each $\gamma = 2i-1$, let $A_\gamma = \{i, i+1\}$.

d) Take Γ_4 = The family itself. So for each $\gamma \in \Gamma_4$, take $A_\gamma = \gamma$. And so on.

2) The family of sets:

$$\{1,2\},\ \{2,4\},\ \{3,6\},\ \dots,\ \{n, 2n\},\ \dots$$

may be indexed by the set N of natural numbers

where $A_n = \{n, 2n\}$ $\forall n \in N$. So the family can be denoted as

$$\mathcal{F} = \{\{n, 2n\} : n \in N\} = \{\{n, 2n\} : n = 1,2,3,\dots\}$$

3) Index the family $\mathcal{F}$ of sets $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$.

<u>Sol:</u> The family $\mathcal{F}$ contains exactly 6 members, we choose $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Let

$A_1 = \emptyset$, $A_2 = \mathbb{N}$, $A_3 = \mathbb{Z}$, $A_4 = \mathbb{Q}$, $A_5 = \mathbb{R}$, $A_6 = \mathbb{R}$.

So,
$$\mathcal{F} = \{A_i : i \in \Gamma\} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}$$

تنويه هام: لأن الإختلاف الأساسي بين المجموعات وبين العائلات (families) هو عدم اشتراط اختلاف عناصر العائلات فإنه من الناحية العملية، جميع المفاهيم والعمليات والرموز التي تم تعريفها واستخدامها من المجموعات يتم استخدامها أيضاً في العائلات.

مثال ذلك: في المثال ③ الأخير / عليك بدون إشكاليات رياضية أو منطقية كتابة التالي:

$$\emptyset \in \mathcal{F}, \qquad \mathbb{R}_+ \notin \mathcal{F}.$$

$$\{\emptyset, \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{F}, \text{ and } \{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}\} = \mathcal{F}.$$

سنقوم في التعريفات التالية بتعميم مفاهيم الإتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ على أي عائلات من المجموعات.

Def: Let $\mathcal{F}$ be an arbitrary family of sets. The union of the sets in $\mathcal{F}$, denoted by $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ or $\bigcup \mathcal{F}$, is the set of all elements that are in A for some $A \in \mathcal{F}$. That is,

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ for some } A \in \mathcal{F}\}$$

If the family $\mathcal{F}$ is indexed by the set Γ, we may use the notation

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x\in U : x\in A_\gamma \text{ for some } \gamma\in\Gamma\}$$

Moreover, "$x\in \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$" iff "$\exists A\in\mathcal{F}$ s.t. $x\in A$"

ملحوظة: حسب تعريف الإتحاد $\bigcup$ على العائلات وحسب ملحوظة سابقة،

إذا كان Γ محدد كأن يكون $\Gamma=\{1,2,3,\dots,n\}$ فإنه يمكن كتابة

$$\bigcup_{i\in\Gamma} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x\in A_i \text{ for some } i=1,\dots,n\}$$

وهو يساوي $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\dots\cup A_n$.

Example: Find the union of the family of sets

$\{1\}, \{2,3\}, \{3,4,5\}, \{4,5,6,7\}, \dots, \{n, n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$.

sol: Set $\Gamma=\{1,2,\dots,n\}$ and for each $i\in\Gamma$, set $A_i=\{i, i+1, \dots, 2i-1\}$. So, the family $\mathcal{F}=\{A_i : i\in\Gamma\}$

We want find the union

$$\bigcup_{i\in\Gamma} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

لاحظ من طبيعة تكوين المجموعات أن A_i أن $i\in A_i$ لكل $i\in\Gamma$، وأن العناصر $n+1,\dots,2n-1$ هي عناصر في A_n وعليه يمكن توقع أن الإتحاد الذي يشمل جميع عناصر المجموعات هو

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1,2,3,\dots,n,n+1,\dots,2n-1\}$$

ولإثبات ذلك

let $k\in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, so $\exists i\in\Gamma$ s.t. $k\in A_i=\{i, i+1, \dots, 2i-1\}$

Note that $1 \leq i \leq n$, $i \leq K \leq 2i-1$, so

$\Rightarrow$ $2i \leq 2n$ and hence $2i-1 \leq 2n-1$

So we have that $1 \leq i \leq K \leq 2i-1 \leq 2n-1$

Therefore $K \in \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1\}$.

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1\} \quad \text{----} \; (1)$$

For the other inclusion, let $m \in \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1\}$.
Then either $m < n$ or $m \geq n$.

If $m < n \Rightarrow m \in \Gamma$ and so $m \in A_m$.

If $m \geq n \Rightarrow m \notin \Gamma$. But $n \leq m \leq 2n-1$, so $m \in A_n$. In both cases, $\exists$ at least $i \in \Gamma$ s.t. $x \in A_i$, so $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. That is

$$\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{----} \; (2)$$

From (1) and (2), we get that

$$\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n-1\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Def: Let $\mathcal{F}$ be an arbitrary family of sets. The intersection of sets in $\mathcal{F}$, denoted by $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ or $\bigcap \mathcal{F}$, is the set of all elements that are in A for all $A \in \mathcal{F}$. That is,

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in U : x \in A \text{ for all } A \in \mathcal{F}\}$$

If the family $\mathcal{F}$ indexed by Γ, we write

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_\gamma \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

When $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ is finite, we usually write

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \ \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

ملحوظة: العبارة "$x \in A \quad \forall A \in \mathcal{F}$" يمكن أن تصاغ منطقياً (Logically)
بالعبارة "$A \in \mathcal{F} \longrightarrow x \in A$" والتي تمثل أخذ مجموعة عشوائية
A من $\mathcal{F}$ (تمثل جميع عناصر $\mathcal{F}$ لعدم وجود شروط عليها) فنحصل على النتيجة
أن $x \in A$ وهذا يعني أن $x \in A \ \forall A \in \mathcal{F}$ بسبب أن ما عملناه مع A يحصل
مع جميع عناصر $\mathcal{F}$ بدون استثناء.
هذه الملحوظة لها فائدة مميزة في البراهين كما سنرى لاحقاً في
كثير من البراهين.

Example: Let $\mathcal{F} = \{\{1,2,3,4,5\}, \{3,6,7,8\}, \{2,6,7,9\}\}$ then

$$\bigcap \mathcal{F} = \emptyset \quad \text{and} \quad \bigcup \mathcal{F} = \{1, 2, \dots, 9\}.$$

Def: Let a and b be any two real numbers. We define that:

1) an open interval: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
2) a closed interval: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
3) a half open (or a half closed) interval

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad \text{and}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

لاحظ أنه: إذا كان $a > b$ فإن $(a,b) = [a,b] = (a,b] = [a,b) = \emptyset$

وإذا كانت $a = b$ فإن $[a,a] = \{a\}$ و $(a,b) = (a,b] = [a,b) = \emptyset$

Examples: Find the union and the intersection of the following families:

1) $(0,1)\,,\ (0,\tfrac{1}{2})\,,\ (0,\tfrac{1}{3})\,,\ \ldots,\ (0,\tfrac{1}{n})\,,\ \ldots$

<u>sol:</u> Index this family as $A_n = (0,\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, so we are to find the set $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, and $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Note that $x \in A_n$ iff $0 < x < \frac{1}{n}$ and hence $\frac{1}{x} > n$. So if $\exists\, x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, then

$\frac{1}{x} > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ which is impossible. Therefore

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\tfrac{1}{n}) = \emptyset$$

Now, it is clearly that $A_n \subseteq (0,1) = A_1$ $\forall n$, so

if $x \in A_n$ then $x \in (0,1)$. Hence

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_1 = (0,1).$$ On the other hand,

if $x \in A_1$, then $x \in A_n$ for some $n \in \mathbb{N}$. and so, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ which implies that

$$A_1 = (0,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Thus $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,1).$$

2) $\mathcal{F} = \{ [a, a+\frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N} \}$. Set $A_n = [a, a+\frac{1}{n}]$,

so, if $x \in A_n$, then $a \leq x \leq a + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ and so, $0 \leq x - a \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. This implies that $x - a = 0$ and hence $x = a$. That is

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies x = a.$$ So, we get that

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a, a+\tfrac{1}{n}] \subseteq \{a\}.$$

On the other hand, $a \in A_n$ $\forall n$ and so

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies \{a\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a, a+\tfrac{1}{n}].$$

$$\implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a, a+\tfrac{1}{n}] = \{a\}.$$

As in part (1), $A_n \subseteq A_1$ $\forall n$ so in similar proof, we get that

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a, a+\tfrac{1}{n}] = [a, a+1].$$

Thrm 7: Let $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ be the empty family of sets; that is, $\Gamma = \phi$. Then

(a) $\bigcup_{\gamma \in \phi} A_\gamma = \phi$.

(b) $\bigcap_{\gamma \in \phi} A_\gamma = \mathcal{U}$.

PF: 1st

(a) Note that "$\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$" $\equiv (\forall x)\left(x \notin \bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma\right)$;

$$x \notin \bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma \equiv \sim\left(x \in \bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma\right)$$
$$\equiv \sim (x \in A_\gamma \text{ for some } \gamma \in \phi)$$
$$\equiv (x \notin A_\gamma \text{ for all } \gamma \in \phi)$$
$$\equiv (\gamma \in \phi \rightarrow x \in A_\gamma)$$

Since $\gamma \in \phi$ is always false statement, then the last predicate is true $\forall x$. Hence $\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \phi$

(b) $x \in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma \equiv x \in A_\gamma \quad \forall \gamma \in \phi$
$$\equiv \gamma \in \phi \longrightarrow x \in A_\gamma$$

Again, $\gamma \in \phi$ is always false statement and so the last predicate is true $\forall x$. Therefore $(\forall x)\left(x \in \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma\right)$ and so $\bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma = \mathcal{U}$.

2nd (I.P.)

(a) Suppose to contrary that $\bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma \neq \phi$.
This implies that $\exists\, x \in \bigcup_{\gamma\in\phi} A_\gamma \Longrightarrow x \in A_\gamma$ for some $\gamma \in \phi$. But $\gamma \notin \phi \;\; \forall \gamma$, which is a contradiction.

(b) Suppose to contrary that $\exists\, x \notin \bigcap_{\gamma\in\phi} A_\gamma \xRightarrow{(\text{def})}$ $\sim (x \in A_\gamma \;\; \forall \gamma \in \phi)$. Hence $x \notin A_\gamma$ for some $\gamma \in \phi$. Again $\gamma \notin \phi \;\; \forall \gamma$ which is a contradiction.

Thrm 8: (The generalized De Morgan Thrm)
Let $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ be an arbitrary family of sets. Then
(a) $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma'$.

(b) $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma'$.

PF: (a) $x \in \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' \equiv \sim \left(x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)$ (Def ')

$$\equiv \sim \left[(\exists \gamma \in \Gamma)\,(x \in A_\gamma)\right]$$

$$\equiv (\forall \gamma \in \Gamma)\,(x \notin A_\gamma)$$

$$\equiv (\forall \gamma \in \Gamma)\,(x \in A_\gamma')$$

$$\equiv x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma'$$

(b) Similarly to (a) (prove it)

Thrm 9: (Generalized Distributive Laws)
Let A be a set and let $\mathcal{F} = \{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ be an arbitrary family of sets. Then

(a) $A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A \cap B_\gamma)$

(b) $A \cup \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (A \cup B_\gamma)$

PF: $x \in A \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right)$

$\Longleftrightarrow (x \in A) \wedge x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$ (Def of $\cap$)

$\Longleftrightarrow (x \in A) \wedge (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in B_\gamma)$ (Def of $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}$)

$\Longleftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)\left((x \in A) \wedge (x \in B_\gamma)\right)$

$\Longleftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)\left(x \in (A \cap B_\gamma)\right)$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A \cap B_\gamma)$

(b) Again, the proof of part (b) is similar to (a).

2.7 The Russell Paradox

Note Title 06-Feb-13

يعتقد كثير منا أنه قد فهم ماذا تعني المجموعة / على الأقل بمفهومها البديهي
ولعل كثير منا لا يستطيع أنه يدرك الخطأ في عبارة "مجموعة كل المجموعات"
أي بمعنى مجموعة الـ Universal بمفهومها المطلق ، و لوقت طويل من
الزمن كان افتراض وجود مثل هذه المجموعة محل توافق ضمني بين علماء الرياضيات
حتى جاء عالم الرياضيات Bertrand Russell (1872 – 1970) حينها
أحدث صدمة بين علماء الرياضيات عندما أثبت أنه وجود مجموعة تشتمل
على كل المجموعات يؤدي لتعارضا وقد اشتهرت هذه التناقضية
باسم "Russell Paradox".

Lemma 1. Suppose that there is a set $\mathcal{U}$ of all sets. Let $R = \{S \in \mathcal{U} : S \notin S\}$. Then $R \notin R$.

PF: Suppose to contrary that $R \in R$. Then by the specification of R, we must have that $R \notin R$. This contradicts the assumption that $R \in R$, so we must have $R \notin R$

Lemma 2. Suppose that there is a set $\mathcal{U}$ of all sets, and $R = \{S \in \mathcal{U} : S \notin S\}$. Then $R \in R$.

PF: Suppose to contrary that $R \notin R$. By the specification of the set R, we must have that $R \in R$ and this contradicts the assumption.

Thrm 10: There does not exist a set of all sets.

PF: Suppose to contrary that $\mathcal{U}$ exists. Let R be as in Lemmas 1 and 2. Then by the two Lemmas, we have the contradiction "$R \in R \wedge R \notin R$" Thus, there is no such sets.

Ch3: Relations and Functions

3.1 Cartesian Product of two Sets

Def: Given any two objects a and b, we may form a new object (a,b), called the order pair a, b, where the order here emphasizes.

ملحوظات : ① الترتيب (order) هنا مهم / لذا فإن التعريفين (a,b) / (b,a) مختلفان / وعليه فإن $(a,b) \neq \{a,b\}$.

② هناك طريقة فعالة لتعريف الزوج المرتب (a,b) كالتالي :

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

لكنها طريقة معقدة إلى حد ما في التعاملات الرياضية.

③ بناءً على الملحوظة ② ، فإن $(a,b)=(c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a = c$ و $b = d$. مثال ذلك $(x,y)=(7,8)$ إذا وفقط إذا كان $x = 7$ و $y = 8$.

④ تم سابقاً استخدام الرمز (a,b) للتعبير عن الفترات المفتوحة / ورغم ذلك فإنه غالباً لا يوجد لبس بين المفهومين لأن القارئ عادةً يعرف عما يتحدث عنه.

Def: ① Let A and B be two sets. The set of all order pairs (x,y), with $x \in A$ and $y \in B$ is called the Cartesian product (cross product) of A and B, and is denoted by $A \times B$. That is,

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \land y \in B\}$$

② For the order pair (a,b), a is called the first coordinate and b is called the second coordinate.

في الهندسة التحليلية / يمكن اعتبار المستوى الديكارتي المعروف على أنه مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

نلاحظ من التعريف أن $(a,b) \in A \times B$ إذا وفقط إذا
كان $a \in A \wedge b \in B$ ، وبالتالي فإن
$(a,b) \notin A \times B$ iff either $(a \notin A) \vee (b \notin B)$.

Examples: ① Let $A = \{a,b\}$ and $B = \{1,2,3\}$, then

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$, and
$B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$.
Note that $(a,1) \in A \times B$ and $(a,1) \notin B \times A$,
so in general $A \times B \neq B \times A$.

2) If $C = \{a, \{x\}, z\}$ and $D = \{\{a\}, 1\}$, then

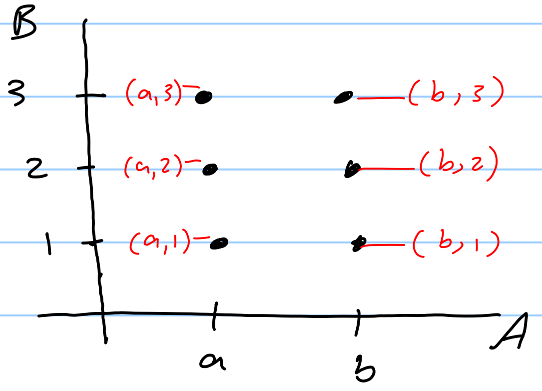
$$C \times D = \{(a,\{a\}), (a,1), (\{x\},\{a\}), (\{x\},1), (z,\{a\}), (z,1)\}.$$

Graph of Cartesian Product

We may picture the Cartesian product $A \times B$ as the set of dots where the elements of A putting in a horizontal line and elements of B putting in a vertical line. An order pair (a,b) is represented as a dot • where a is its horizontal projection on A and b is its vertical projection on B.

Example: Graph the Cartesian product $A \times B$ where $A = \{a,b\}$ and $B = \{1,2,3\}$.

Sol:



Example: Let A be any set. Find $A\times\emptyset$ and $\emptyset\times A$.

Sol: $A\times\emptyset$ is the set of all ordered pairs (a,b) such that $a\in A \wedge b\in\emptyset$. But there is no such b in $\emptyset$, we get $A\times\emptyset=\emptyset$.

Similarly, $\emptyset\times A=\emptyset$.

Thrm 1: Let A, B, and C be any three sets. Then

(a) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(b) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

PF: (a) $(a,x)\in A\times(B\cap C)$

$$\begin{aligned}
&\equiv (a\in A)\wedge(x\in(B\cap C)) && (\text{Def of } \times)\\
&\equiv (a\in A)\wedge((x\in B)\wedge(x\in C)) && (\text{Def of } \cap)\\
&\equiv [(a\in A)\wedge(x\in B)]\wedge[(a\in A)\wedge(x\in C)] \\
& \qquad (\text{Idemp., Assoc., Comm.})\\
&\equiv [(a,x)\in A\times B]\wedge[(a,x)\in A\times C] && (\text{Def of } \times)\\
&\equiv (a,x)\in[(A\times B)\cap(A\times C)] && (\text{Def of } \cap)
\end{aligned}$$

Therefore $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(b) $(a,x)\in A\times(B\cup C)$

$$\begin{aligned}
&\equiv (a\in A)\wedge[x\in B\cup C] && (\text{Def of } \times)\\
&\equiv (a\in A)\wedge[(x\in B)\vee(x\in C)] && (\text{Def of } \cup)\\
&\equiv [(a\in A)\wedge(x\in B)]\vee[(a\in A)\wedge(x\in C)] && (\text{Distr.})\\
&\equiv [(a,x)\in A\times B]\vee[(a,x)\in A\times C] && (\text{Def of } \times)\\
&\equiv (a,x)\in[(A\times B)\cup(A\times C)] && (\text{Def of } \cup)
\end{aligned}$$

Therefore $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

Thus, the Cartesian product distributes over intersection and Union.

Thrm 2: Let A, B, and C be sets. Then

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

Thus, the Cartesian product distributes over complementation.

PF: $(a,b)\in A\times(B-C)$

$\Leftrightarrow (a\in A)\wedge(x\in B-C)$ (Def of $\times$)

$\Leftrightarrow (a\in A)\wedge[(x\in B)\wedge(x\notin C)]$ (Def of $-$)

$\Leftrightarrow (a\in A)\wedge(a\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin C)$

(Idemp. and Associ.)

$\Leftrightarrow [(a\in A)\wedge(x\in B)]\wedge[(a\in A)\wedge(x\notin C)]$

$\Leftrightarrow [(a,x)\in A\times B]\wedge[(a,x)\notin A\times C]$

(Comm. and Associ)

$\Leftrightarrow (a,x)\in(A\times B)-(A\times C)$ (Def of $-$)

Therefore

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

Examples: For any sets A, B, C, and D, prove that

1) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$
2) $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$
3) Give an example to show that the inclusion in (2) is proper.

PF: 1) $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$

$\equiv [(x,y)\in(A\times B)]\wedge[(x,y)\in C\times D]$ (Def of $\cap$)

$\equiv [(x\in A)\wedge(y\in B)]\wedge[(x\in C)\wedge(y\in D)]$ (Def of $\times$)

$\equiv [x\in(A\cap C)]\wedge[y\in(B\cap D)]$

(Associ, Comm., Def of $\cap$)

$\equiv (x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$

$\Rightarrow (A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

2) $(x,y) \in (A\times B) \cup (C\times D)$

$\equiv [(x,y) \in (A\times B)] \vee [(x,y) \in (C\times D)]$ (Def of $\cup$)

$\equiv [(x\in A) \wedge (y\in B)] \vee [(x\in C) \wedge (y\in D)]$ (Def of $\times$)

$\equiv [(x\in A \wedge y\in B) \vee x\in C] \wedge [(x\in A \wedge y\in B) \vee y\in D]$ (Dist.)

$\equiv [(x\in A \vee x\in C) \wedge (y\in B \vee x\in C)] \wedge$
$[(x\in A \vee y\in D) \wedge (y\in B \vee y\in D)]$ (Distr.)

$\equiv [x\in (A\cup C) \wedge (y\in B \vee x\in C)] \wedge$
$[(x\in A \vee y\in D) \wedge y\in (B\cup D)]$ (Def of $\cup$)

$\Longrightarrow (x\in A\cup C) \wedge (y\in B\cup D)$ (Simpl.)

$\equiv (x,y) \in (A\cup C)\times(B\cup D)$

This proves that $(A\times B)\cup(C\times D) \subseteq (A\cup C)\times(B\cup D)$.

3) Let $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{3\}$, $D=\{4\}$. Then
$A\times B = \{(1,2)\}$, $C\times D = \{(3,4)\}$. So

$(A\times B)\cup(C\times D) = \{(1,2),(3,4)\}$. While
$A\cup C = \{1,3\}$, $B\cup D = \{2,4\}$. So
$(A\cup C)\times(B\cup D) = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$.

Hence $(A\times B)\cup(C\times D) \subsetneq (A\cup C)\times(B\cup D)$
(proper subset)

$\Box$

Note Title 12-Feb-13

3.2 Relations

Def: Let A and B be two sets, not necessarily distinct. A *relation* $\mathcal{R}$ from A to B is a subset of $A \times B$ ($\mathcal{R} \subseteq A \times B$). If $(a,b) \in \mathcal{R}$, we write $a \mathcal{R} b$ and we say that *a is $\mathcal{R}$-related* (or simply related) *to b*. If $(a,b) \notin \mathcal{R}$, we write $a \not\mathcal{R} b$. A relation from A to A is called *a relation in A* instead of "from A to A".

Examples:

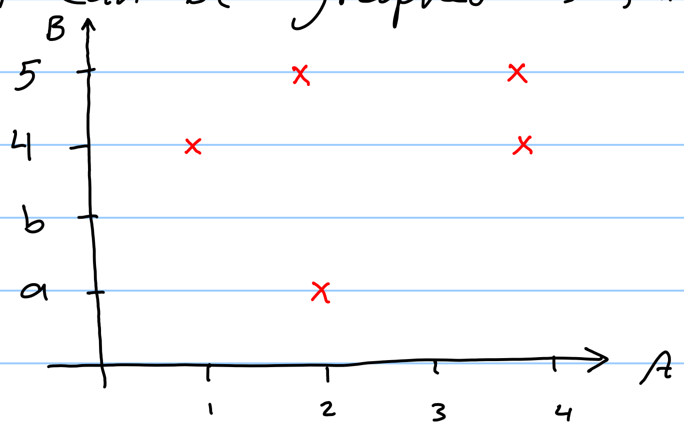
1) Let $A = \{1,2,3,4\}$ and $B = \{a, b, 4, 5\}$. Then

$$\mathcal{R} = \{(1,4), (2,a), (2,5), (4,5), (4,4)\}$$

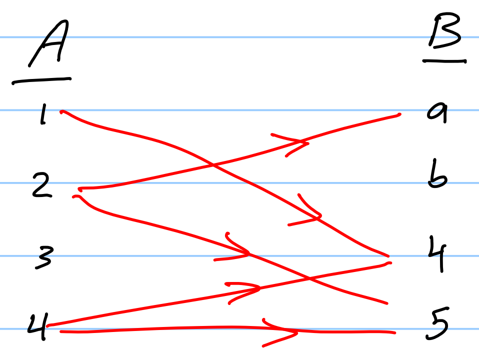
is a relation from A to B. For this relation, note that:

$$2 \mathcal{R} a, \quad 2 \mathcal{R} 5, \quad 1 \mathcal{R} 4, \quad \ldots . \quad \text{But } 1 \not\mathcal{R} 5.$$

This relation can be graphed as follows:



or



2) Suppose that A is a set of some human family, and let $\mathcal{R}$ be the relation "... of being the father of ...". Then a (for Ali) is $\mathcal{R}$-related to b (for Taha) means that Ali is the father of Taha, and we write $(a,b) \in \mathcal{R}$.

Note that, in this case, Taha is the son of Ali, so $(b,a) \notin \mathcal{R}$. Note that the relation "... of being the son of ..." is the inverse of the relation $\mathcal{R}$.

Def: Let A and B be two sets, not necessarily distinct, and let $\mathcal{R}$ be a relation from A to B. Then the inverse $\mathcal{R}^{-1}$ of the relation $\mathcal{R}$ is the relation from B to A such that $(b,a) \in \mathcal{R}^{-1}$ iff $(a,b) \in \mathcal{R}$.

That is, $$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in \mathcal{R}\}.$$

Examples:

1) Let $A = \{1,2,3,4\}$ and $B = \{a, b, 4, 5\}$, and let
$$\mathcal{R} = \{(1,4), (2,a), (2,5), (4,5), (4,4)\}.$$
Then the inverse relation of $\mathcal{R}$ is
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(4,1), (a,2), (5,2), (5,4), (4,4)\}.$$

2) Previously, in Example (2) above, when $\mathcal{R}$ is the relation "... of being the father of ...", the inverse relation $\mathcal{R}^{-1}$ is the relation "... of being the son of ..."

In this case, when Ali $\mathcal{R}$ Taha, we must have Taha $\mathcal{R}^{-1}$ Ali; that is Taha is the son of Ali.

3) Let $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \text{ divides } y\}$, then

$$\mathcal{H}^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \text{ is a multiple of } x\}.$$

Note that $(3,6) \in \mathcal{H}$ and $(12,3) \in \mathcal{H}^{-1}$.

Def: Let $\mathcal{R}$ be a relation from A to B. The **domain** of the relation $\mathcal{R}$, denoted by $\mathrm{Dom}(\mathcal{R})$, is the set of all those $a \in A$ such that $a \mathcal{R} b$ for some $b \in B$. The **image** of $\mathcal{R}$, denoted by $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$, is the set of all those $b \in B$ such that $a \mathcal{R} b$ for some $a \in A$.

In symbols,

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{a \in A : (a,b) \in \mathcal{R} \text{ for som } b \in B\},$$

and

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{b \in B : (a,b) \in \mathcal{R} \text{ for some } a \in A\}.$$

(المجال هو مجموعة الإحداثيات الأولى من عناصر $\mathcal{R}$، والمدى هو مجموعة الإحداثيات الثانية)

Examples:

1) Again, let $A = \{1,2,3,4\}$ and $B = \{a, b, 4, 5\}$, and let

$$\mathcal{R} = \{(1,4), (2,a), (2,5), (4,5), (4,4)\},$$
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(4,1), (a,2), (5,2), (5,4), (4,4)\}.$$

Then $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) = \{1,2,4\}$ and $\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{a,4,5\}$.

Note that

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \{a,4,5\} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}), \text{ and}$$
$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}^{-1}) = \{1,2,4\} = \mathrm{Dom}(\mathcal{R}).$$

In general, and for any relation $\mathcal{R}$, it is true that

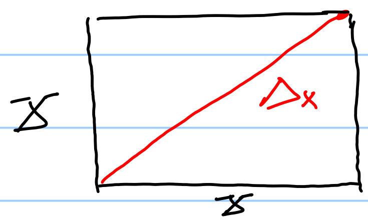
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Dom}(\mathcal{R}) &= \mathrm{Im}(\mathcal{R}^{-1}) \\ \text{and} \quad \mathrm{Im}(\mathcal{R}) &= \mathrm{Dom}(\mathcal{R}^{-1}). \end{aligned}\right\} \text{ prove it?!}$$

2) Let A be the set of all peoples on some country. Let $\mathcal{H}$ be the relation in A "... being the husband of ...". Then $\mathcal{H}^{-1}$ is the relation "... being the wife of ...". Moreover, $\mathrm{Dom}(\mathcal{H}) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}^{-1}) =$ the set of all men in A who are married, and

$Im(\mathcal{H}) = Dom(\mathcal{H}^{-1})$ = the set of all women in A who are married.

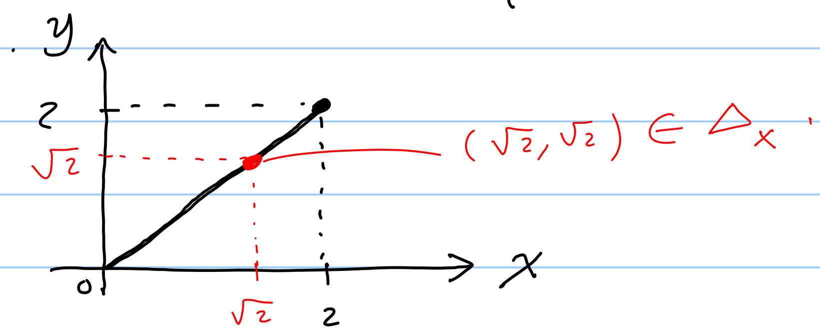
Def: For any set X, the relation Δ_X in A called the diagonal relation or the identity relation, defined by
$$\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$$
which relates every element in X with itself.

Graphically, if X is represented as a line interval, then $X \times X$ is a square and Δ_X is the main diagonal of the square.



Note that $Dom(\Delta_X) = Im(\Delta_X) = X$.

Example: Let $X = [0,2]$. Then $\Delta_X = \{(x,x) : 0 \leq x \leq 2\}$



Def: Let $\mathcal{R}$ be a relation in a set X. Then we say that:

(a) $\mathcal{R}$ is reflexive iff $\forall x \in X$, $(x,x) \in \mathcal{R}$.

(b) $\mathcal{R}$ is symmetric iff $(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$.

(c) $\mathcal{R}$ is transitive iff $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$.

(d) $\mathcal{R}$ is an equivalence relation iff $\mathcal{R}$ is reflexive, symmetric, and transitive.

ملحوظة: يتضح من التعريف أنه لإثبات أن علاقة ما $\mathcal{R}$:

(a) ليست reflexive، يجب إيجاد $x \in X$ بحيث $(x,x) \notin \mathcal{R}$.

(b) ليست symmetric، يجب إيجاد $x, y \in X$ بحيث $(x,y) \in \mathcal{R}$ و $(y,x) \notin \mathcal{R}$.

(c) ليست transitive، يجب إيجاد $x, y, z \in X$ بحيث $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R}$، لكن $(x,z) \notin \mathcal{R}$.

Examples: 1) Let $X = \mathbb{R}$ the set of real numbers. Then the equals relation "$=$" in $\mathbb{R}$ is clearly an equivalence relation. To see this, note that:

(a) for any $x \in \mathbb{R}$, $x = x$, so "$=$" is reflexive.

(b) Suppose that $x = y$. Then $y = x$. So "$=$" is symmetric relation.

(c) Suppose that $(x = y) \wedge (y = z)$. Then $x = z$. So "$=$" is transitive relation.

2) If $X = \emptyset$, then $X \times X = \emptyset$, and the only relation in X is $\mathcal{R} = \emptyset$. In this case,

(a) $\mathcal{R}$ is reflexive, since $\nexists\, x \in X$ s.t. $(x,x) \notin \mathcal{R}$.

(b) $\mathcal{R}$ is symmetric, since $(x,y) \in \mathcal{R}$ is always false, so $(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$.

(c) $\mathcal{R}$ is transitive, since $(x,y) \in \mathcal{R}$ and $(y,z) \in \mathcal{R}$ is always false statements, so we have that $(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$. Hence $\mathcal{R} = \emptyset$ is E.R.

3) Suppose that $X \neq \emptyset$ and $\mathcal{R} = \emptyset$ is the empty relation. Then $\mathcal{R}$ is always symmetric and transitive, and the proof is similar to part (2) above. But $\mathcal{R}$ is not reflexive, since $\exists\, x \in X$ such that $(x,x) \notin \mathcal{R}$. So, $\mathcal{R}$ is not E.R. $\Rightarrow$ (إختصار علاقة التكافؤ)

(بشكل عام العلاقة الخالية لا تكون reflexive إلا في حالة واحدة أن تكون $X = \emptyset$)

4) For any set X, the diagonal relation Δ_X is E.R.

PF: If $X = \phi$, then $\Delta_X = \phi$ and so it is an equivalence relation as we prove in (2). So, Suppose $X \neq \phi$. Let $x \in X$, then $(x,x) \in \Delta_X$ (by its definition), so Δ_X is reflexive.

Now, let $(x,y) \in \Delta_X$, then by def. of Δ_X, we get that $y = x$ and hence $(y,x) \in \Delta_X \Rightarrow \Delta_X$ is symmetric.

Finally, let $(x,y) \wedge (y,z)$ be in Δ_X. Then $(x=y) \wedge (y=z)$ and hence, $x = z$. So, $(x,z) \in \Delta_X$, which proves that Δ_X is transitive.

5) For any set X, it is obviously that the relation $\mathcal{R} = X \times X$ is E.R. In fact, Δ_X is the smallest equivalence relation in X and $X \times X$ is the largest equivalence relation in X.

To see this, suppose $\mathcal{R}$ be any equivalence relation in X. Then $\mathcal{R} \subseteq X \times X$, and by reflexivety of $\mathcal{R}$, $\forall x \in X$, $(x,x) \in \mathcal{R}$, so $\Delta_X \subseteq \mathcal{R}$.

6) Let $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and Consider the relations

$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$,

$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,

$\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, and

$\mathcal{R}_4 = \{(3,4)\}$.

$\mathcal{R}_5 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (4,4)\}$

Which of these relations is E.R.?

Sol: <u>Consider $\mathcal{R}_1$ relation:</u>

(a) Not reflexive, since $(3,3) \notin \mathcal{R}_1$.

(b) Not symmetric, since $(3,4) \in \mathcal{R}_1$ but $(4,3) \notin \mathcal{R}_1$.

$\left((3,4) \in \mathcal{R}_1 \not\Rightarrow (4,3) \in \mathcal{R} \;\equiv\; (3,4) \in \mathcal{R}_1 \wedge (4,3) \notin \mathcal{R}_1 \right)$

(c) Not transitive, since $(3,4) \in \mathcal{R}_1 \wedge (4,1) \in \mathcal{R}_1$ but $(3,1) \notin \mathcal{R}_1$.

<u>Consider $\mathcal{R}_2$:</u>

(a) Note reflexive, since $(2,2) \notin \mathcal{R}_2$.

(b) <u>Symmetric:</u> Note that $(x,y) \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}_2$
$\forall (x,y) = (1,1), (1,2), (2,1)$.

(لاحظ أننا لم نأخذ بقية النقاط على سبيل المثال $(3,4)$ لأن $(3,4) \notin \mathcal{R}_2$
وبالتالي فإن العبارة $(3,4) \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow (4,3) \in \mathcal{R}_2$ تبقى صحيح لأن $(3,4) \in \mathcal{R}_2$ خاطئة)

(c) Not transitive: since $(2,1) \in \mathcal{R}_2 \wedge (1,2) \in \mathcal{R}_2$ but $(2,2) \notin \mathcal{R}_2$.

<u>Consider $\mathcal{R}_3$:</u>

(a) Reflexive, since $\forall x \in A$, $(x,x) \in \mathcal{R}_3$.

(b) Not symmetric, since $(2,3) \in \mathcal{R}_3$ but $(3,2) \notin \mathcal{R}_3$

(c) Transitive, since, when $(x,y) \in \mathcal{R}_3 \wedge (y,z) \in \mathcal{R}_3$, then it is true that $(x,z) \in \mathcal{R}_3$.

To see this, note that

$$[(1,2) \wedge (2,3)] \in \mathcal{R}_3 \Rightarrow (1,3) \in \mathcal{R}_3,$$
$$[(1,3) \wedge (3,4)] \in \mathcal{R}_3 \Rightarrow (1,4) \in \mathcal{R}_3,$$
$$[(2,3) \wedge (3,4)] \in \mathcal{R}_3 \Rightarrow (2,4) \in \mathcal{R}_3.$$

لاحظ أننا في فحص التعدي قد أهملنا حالة (x,x) لأنها لا تسبب خلل في فحص التعدي لأي علاقة كانت كما يلي:

When $(x,\cancel{x}) \in \mathcal{R} \wedge (\cancel{x},y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{R}$, and

$(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{R}$.

Consider $\mathcal{R}_4$:

a) Not reflexive: since $(1,1) \in \mathcal{R}_4$.

b) Not symmetric: since $(3,4) \in \mathcal{R}_4$ but $(4,3) \notin \mathcal{R}_4$

(c) Transitive: Since $(x,y) \wedge (y,z) \in \mathcal{R}_4$ is false statement $\forall\, x,y \in A$. This implies that

$$\big((x,y) \wedge (y,z)\big) \in \mathcal{R}_4 \implies (x,z) \in \mathcal{R}_4.$$

Consider $\mathcal{R}_5$:

(a) Reflexive, since $(x,x) \in \mathcal{R}_5 \quad \forall x \in A$.

(b) Symmetric: since $(2,3) \in \mathcal{R}_5 \implies (3,2) \in \mathcal{R}_5$.

(لاحظ أننا لا نفحص بقية النقاط) لأنه النقاط على شاكلة (x,x) تحقق التعريف
بلا مشاكل / وبقية النقاط لا تحقق $((x,y) \in \mathcal{R}_5)$

(c) Transitive: هنا الحالات التي يجب أن تفحص هي
فقط حالتان (لماذا ؟؟)

$$\big((2,3) \wedge (3,2)\big) \in \mathcal{R}_5 \implies (2,2) \in \mathcal{R}_5, \text{ and}$$
$$\big((3,2) \wedge (2,3)\big) \in \mathcal{R}_5 \implies (3,3) \in \mathcal{R}_5.$$

Def: Let m be an arbitrary fixed positive integer. The congruence relation $\equiv \pmod{m}$ on the set $\mathbb{Z}$ of integers is defined by $x \equiv y$ (modulo m) iff $x - y = km$ for some $k \in \mathbb{Z}$.

Illustration: Let $m = 3$ and let $x = 1$. Then the elements y in $\mathbb{Z}$ that congruence-related (mod 3) to x are

$$y \equiv 1 \pmod 3 \iff$$
$$(y-1) = 3k \iff$$
$$y - 1 \in \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$
$$\iff y \in \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

Thrm: Any congurance relation is E.R. on $\mathbb{Z}$.

PF: Let m be fixed positive integer.

(a) <u>Reflexivty:</u> For $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0 * m$

$\Rightarrow x \equiv x \pmod{n}$.

(b) <u>Symmetric:</u> Suppose that $x \equiv y \pmod{m}$. Then

$(x - y) = k \cdot m$ for some $k \in \mathbb{Z}$.

So, $y - x = (-k) \cdot m = k' \cdot m$ for some $k' \in \mathbb{Z}$.

Therefore $y \equiv x \pmod{m}$.

(c) <u>Transitive:</u> Suppose that

$[x \equiv y \pmod{m}] \wedge [y \equiv z \pmod{m}]$. Then

$\exists k_1 \in \mathbb{Z} \wedge k_2 \in \mathbb{Z}$ s.t. $x - y = k_1 m$ and $y - z = k_2 m$

Consider

$$x - z = (x - y) + (y - z) = k_1 \cdot m + k_2 \cdot m$$
$$= (k_1 + k_2) m = k' m$$

Thus, $x \equiv z \pmod{m}$.

This proves that the congruence relation (modulo m) is an equivalence relation.

Example: Prove that for any two relations $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$, $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$.

PF: $(x, y) \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} \equiv (y, x) \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})$ (Def of $^{-1}$)

$\equiv ((y, x) \in \mathcal{R}) \vee ((y, x) \in \mathcal{S})$ (Def of $\cup$)

$\equiv ((x, y) \in \mathcal{R}^{-1}) \vee ((x, y) \in \mathcal{S}^{-1})$ (Def of -1)

$\equiv (x, y) \in (\mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1})$ (Def of $\cup$)

That is, $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$.

3.3 Partitions and Equivalence Relations

Equivalence relations are important in modern mathematics. For instance, factor groups in algebra, quotient spaces in topology, and modular systems in number theory are all involve certain kinds of E.R.

Def: Let X be a nonempty set. A collection $\mathcal{J}$ of subsets of X is called a partition of X iff

(a) $\phi \notin \mathcal{J}$ (This equivalent to saying, $A \in \mathcal{J} \Rightarrow A \neq \phi$)

(b) If $A, B \in \mathcal{J}$, then either $A = B$ or $A \cap B = \phi$
(The members of $\mathcal{J}$ are pairwise disjoint sets)

(c) $X = \bigcup_{C \in \mathcal{J}} C$.

المعنى البديهي للتجزئة على X هو "تقطيع" X الى قطع منفصلة غير خالية".

Example: Let $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Which of the following is a partion of X:

$$\mathcal{J}_1 = \{\{1,3,5\}, \{2,4,6,8\}, \{7\}, \{9,10\}\}.$$
$$\mathcal{J}_2 = \{\{1,2,3,4\}, \{5,9,10\}, \{6,7\}\}.$$
$$\mathcal{J}_3 = \{\{1,2,3,4\}, \{7,8\}, \{4,5,6\}, \{9,10\}\}.$$
$$\mathcal{J}_4 = \{\phi, \{1,3,5,7\}, \{2,4,6,8\}, \{9,10\}\}.$$

Sol: $\mathcal{J}_1$ is a partition of X since the members of $\mathcal{J}_1$ are pairwise disjoint non-empty subsets of X s.t. $X = \bigcup_{C \in \mathcal{J}_1} C$.

$\mathcal{J}_2$ is not a partition of X, since $8 \notin C$ for any $C \in \mathcal{J}_2$, so $X \neq \bigcup_{C \in \mathcal{J}_2} C$.

$\mathcal{J}_3$ is not a partition, since $\{1,2,3,4\} \cap \{4,5,6\} \neq \phi$

Finally, $\mathcal{J}_4$ is not a partition since $\phi \in \mathcal{J}_4$.

Example: Let m be any fixed positive integer. For any j, $0 \leq j < m$, define

$$\mathbb{Z}_j = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv j \pmod{m}\}.$$

Then the set $\mathcal{A} = \{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_{m-1}\}$ forms a partition of $\mathbb{Z}$.

للتوضيح (a) Take $m = 2$. For $j = 0, 1$, note that

$$\mathbb{Z}_0 = \{x \in \mathbb{Z} : x - 0 = x \text{ is even}\} = \{\ldots, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x - 1 \text{ is even}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ is odd}\}$$
$$= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}.$$

Clearly, $\{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1\}$ is a partion of $\mathbb{Z}$.

(b) Take $m = 3$, and for $j = 0, 1, 2$,

$$\mathbb{Z}_0 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3k, \text{ for some } k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x - 1 = 3k, \text{ for some } k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x - 2 = 3k, \text{ for some } k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

Clearly, the collection $\{\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2\}$ forms a partition of $\mathbb{Z}$.

(من الممكن إثبات المثال السابق في الحالة العامة m بنوع من التفصيل / ولكنه وبشكل أسهل يثبت من خلال علاقة التكافؤ بإثبات أن $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_1, \ldots, \mathbb{Z}_{m-1}$ هم فقط equivalence classes (تعرف لاحقاً).

Def 6: Let $\mathcal{E}$ be an equivalence relation on a nonempty set X. For each $x \in X$, we define

$$x/\mathcal{E} = \{y \in X : x \,\mathcal{E}\, y\}$$

which called the equivalence class determined by x. The set of all equivalence classes in X is denoted by $X/\mathcal{E}$ - read "X modulo $\mathcal{E}$" or simply "X mod $\mathcal{E}$"

That is $X/\mathcal{E} = \{x/\mathcal{E} : x \in X\}$.

Remark: Sometimes, we write $[x]$ rather than $x/\mathcal{E}$.

Thrm 3: Let $\mathcal{E}$ be an equivalence relation on a nonempty set X. Then

(a) $x/\mathcal{E} \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

(b) $x \mathcal{E} y$ iff $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$.

(c) $x \not\mathcal{E} y$ iff $x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} = \emptyset$

(d) $X = \bigcup_{x\in X} (x/\mathcal{E})$.

PF: (a) $\mathcal{E}$ is an equivalence relation and $X \neq \emptyset$, so $\exists\, x \in X$ and by reflexivity of $\mathcal{E}$, $x \mathcal{E} x$. By def. of the equivalence classes, $x \in x/\mathcal{E}$. Thus, $x/\mathcal{E} \neq \emptyset$.

(b) ($\Rightarrow$) Suppose that $x \mathcal{E} y$. Let $z \in x/\mathcal{E}$, then $z \mathcal{E} x$. Now, we have that

$(z \mathcal{E} x) \wedge (x \mathcal{E} y)$ then by transitive of $\mathcal{E}$ we get $z \mathcal{E} y$. Thus $z \in y/\mathcal{E}$.

$$x/\mathcal{E} \subseteq y/\mathcal{E}. \quad ---- \quad (1).$$

Let $w \in y/\mathcal{E}$. Then $y \mathcal{E} w$. So we have that $(x \mathcal{E} y) \wedge (y \mathcal{E} w) \Longrightarrow$ by transitive of $\mathcal{E}$, we have that $x \mathcal{E} w \Rightarrow w \in x/\mathcal{E} \Longrightarrow$

$$y/\mathcal{E} \subseteq x/\mathcal{E} \quad ----- \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} \quad x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}.$$

($\Leftarrow$) Suppose that $x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E}$. by part (a)

$$x \in x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \Rightarrow x \mathcal{E} y.$$

(c) This part is equivalent to $x \mathcal{E} y$ iff $x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} \neq \emptyset$.

($\Rightarrow$) Suppose that $x \mathcal{E} y$, then by part (b) above,

$$x/\mathcal{E} = y/\mathcal{E} \Rightarrow x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} = x/\mathcal{E} \neq \emptyset.$$

($\Leftarrow$) Suppose that $w \in x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E}$. Then $(x \mathcal{E} w) \wedge (y \mathcal{E} w)$. By symmetric of $\mathcal{E}$, we have that $(x \mathcal{E} w) \wedge (w \mathcal{E} y)$. By transitive of $\mathcal{E}$ we get that $x \mathcal{E} y$.

(d) $\forall x \in X$, $x/\mathcal{E} \subseteq X$ (by its def.)

So, if $z \in \bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E}$ then $\exists x_0 \in X$ s.t.

$z \in x_0/\mathcal{E} \subseteq X$. that is $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} \subseteq X$ --- ③

For the other inclusion, let $y \in X$. By part (a), we see that $y \in y/\mathcal{E} \subseteq \bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E}$. ---- ④.

$\overset{③,④}{\Longrightarrow}$ $X = \bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E}$.

Thrm 4: Let $\mathcal{E}$ be an equivalence relation on a nonempty set X. Then $X/\mathcal{E}$ is a partition of X.

PF: From Thrm (3), we have that:

(a) $\forall x/\mathcal{E} \in X/\mathcal{E}$, $x/\mathcal{E} \neq \phi$,

(b) If $x/\mathcal{E} \neq y/\mathcal{E}$ in $X/\mathcal{E}$, then $x \not\mathcal{E} y$ and so $x/\mathcal{E} \cap y/\mathcal{E} = \phi$.

(c) $\bigcup_{x \in X} x/\mathcal{E} = X$.

This proves that $X/\mathcal{E}$ is a partition of X.

Example: Let $X = \mathbb{Z}$, the set of integers, and m be positive integer. We prove that the relation $\mathcal{E}$ = congruence mod m is E.R. Prove that the only equivalence classes of $\mathcal{E}$ are $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, where for $0 \leq i < m$,

$$\mathbb{Z}_i = \{ j \in \mathbb{Z} : j \equiv i \mod m \}$$
$$= \{ j \in \mathbb{Z} : i - j = km \text{ for some } k \in \mathbb{Z} \}$$

PF: For $0 \le i < m$, and by def of $\mathbb{Z}_i$, we have

$$i/\varepsilon = \{ j \in \mathbb{Z} : j \equiv i \mod n \} = \mathbb{Z}_i$$

Now, let $q \ge m$ in $\mathbb{Z}$. By divison algorithm, $\exists\, k, r$ integers s.t. $q = k * m + r \quad 0 \le r < m$

$$\Rightarrow q - r = k * m.$$

This proves that $q \equiv r \mod m \Rightarrow q \varepsilon r$ and so, $q/\varepsilon = r/\varepsilon = \mathbb{Z}_r$ for $0 \le r < m$, and this proves that the only equivalence classes of the congruence relation is $\mathbb{Z}_0, \dots, \mathbb{Z}_{m-1}$.

مما سبق يتضح أن أي علاقة تكافؤ على X تنتج بالتأكيد تجزئة لـ X ، وهذه التجزئة هي مجموعة كل equivalence classes.
السؤال هنا ، هل العكس صحيح ؟ ، بمعنى إذا كان لـ X تجزئة ما ، هل يمكن لهذه التجزئة أن تنتج علاقة تكافؤ تكون مجموعة كل الـ equivalence classes لها هي التجزئة نفسها ؟.
النظريات التالية تثبت أن العكس صحيح.

Def 7: Let $\mathcal{J}$ be a partition of a nonempty set X. Define a relation $(X/\mathcal{J})$ on X as follows:

$$x\,(X/\mathcal{J})\,y \text{ iff there exists } A \in \mathcal{J} \text{ such that } x, y \in A.$$

تنويه : يجب الإنتباه أن $(X/\mathcal{J})$ هي علاقة معرفة حسب Def 7 وليست مجموعة الـ equivalence classes فهي لا تعني X/ε المعرفة حسب تعريف 6 الذي يعتمد على كون ε علاقة تكافؤ.

Thrm5: Let $\mathcal{J}$ be a partition of a nonempty set X. Then the relation $(X/\mathcal{J})$ is an equivalent relation on X. Moreover, the equivalence classes induced by $(X/\mathcal{J})$ are precisely the sets in $\mathcal{J}$. That is, $X/(X/\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

PF:(a) Since $X = \bigcup_{A \in \mathcal{J}} A$, then $\forall x \in X$, $\exists A \in \mathcal{J}$ s.t $x \in A$. By idemp., $x \in A$ and $x \in A \Rightarrow$

$x\,(\mathbb{X}/\mathcal{S})\,x$ and hence $(\mathbb{X}/\mathcal{S})$ is reflexive.

(b) Suppose that $(x,y) \in (\mathbb{X}/\mathcal{S})$. Then by its defn., there exists $B \in \mathcal{S}$ s.t. both x and y in B. Hence $y \in B \wedge x \in B$ (Comm.) $\Longrightarrow (y,x) \in (\mathbb{X}/\mathcal{S})$ $\Longrightarrow \mathbb{X}/\mathcal{S}$ is symmetric.

(c) If $(x,y) \wedge (y,z) \in \mathbb{X}/\mathcal{S}$, then $\exists B_1$ and B_2 in $\mathcal{S}$ s.t. both x, y in B_1 and both y, z in B_2. This implies that $y \in B_1 \cap B_2$. Since $\mathcal{S}$ is a partition of $\mathbb{X}$, $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, then either $B_1 = B_2$ or $B_1 \cap B_2 = \phi$. But $B_1 \cap B_2 \neq \phi$ $(y \in B_1 \cap B_2) \Longrightarrow B_1 = B_2$.
This implies that both x and $z \in B_1$ $(=B_2)$ so $(x,z) \in (\mathbb{X}/\mathcal{S})$, and hence $\mathbb{X}/\mathcal{S}$ is transitive.
This proves that $(\mathbb{X}/\mathcal{S})$ is E.R.

Claim: (a) $\mathbb{X}/(\mathbb{X}/\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$:

Let $x/(\mathbb{X}/\mathcal{S}) \in \mathbb{X}/(\mathbb{X}/\mathcal{S})$ be arbitrary equivalence class of $\mathbb{X}$, for some $x \in \mathbb{X}$. Since $\mathcal{S}$ is a partition of $\mathbb{X}$, there is exactly one set A of $\mathcal{S}$ s.t. $x \in A$. (This because $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{X}$ and $A \cap B = \phi$ $\forall\, A \neq B$ in $\mathcal{S}$) — — — — — $(*)$

Our Claim is $x/(\mathbb{X}/\mathcal{S}) = A$.
to see this, if $y \in A \Rightarrow x, y \in A \Longrightarrow$ $x\,(\mathbb{X}/\mathcal{S})\,y \Longrightarrow y \in x/(\mathbb{X}/\mathcal{S})$. So

$$A \subseteq x/(\mathbb{X}/\mathcal{S})$$

Now, if $y \in x/(\mathbb{X}/\mathcal{S}) \Rightarrow x\,(\mathbb{X}/\mathcal{S})\,y$. So there is a set B in $\mathcal{S}$ s.t. both $x, y \in B$. From $(*)$, $B = A \in \mathcal{S}$ so $y \in A \Rightarrow x/(\mathbb{X}/\mathcal{S}) \subseteq A$. Hence $A = x/(\mathbb{X}/\mathcal{S})$.

Therefore $(\mathcal{X}/\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$.

(b) $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J})$

Let $A \in \mathcal{J}$ and let $x \in A$. Similar as above we can prove that $A = x/(\mathcal{X}/\mathcal{J}) \in \mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J})$ and this proves that $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J})$.

Now, from Claim (a) and (b), we have that

$$\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J}) = \mathcal{J}. \qquad \square.$$

تنويه: نلاحظ أنه إذا كان لدينا علاقة تكافؤ $\mathcal{R}$ على $\mathcal{X}$، فإن هذه العلاقة تولد تجزئة لـ $\mathcal{X}$ هي $\mathcal{X}/\mathcal{R}$. بدورها هذه التجزئة يمكنها توليد علاقة $\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{R})$، وحسب تعريفها سنجد أنها هي نفس العلاقة الأصلية، بمعنى $\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

وبالعكس، إذا كان لدينا تجزئة $\mathcal{J}$ لـ $\mathcal{X}$، فإن هذه التجزئة ستولد علاقة تكافؤ على $\mathcal{X}$ هي $(\mathcal{X}/\mathcal{J})$. هذه العلاقة بدورها ستولد تجزئة $\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J})$ وبالنظرية السابقة تكون $\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

يجب التنويه هنا أنه في الحالة الأولى، فإن $\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{R})$ تمثل علاقة بينما في الحالة الثانية فإن $\mathcal{X}/(\mathcal{X}/\mathcal{J})$ تمثل تجزئة، رغم التشابه الظاهر بينهما.

Examples:

1) Let $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ and let

$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3)\}$ be an E.R. on $\mathcal{X}$. (Prove it)

Then the equivalence classes of $\mathcal{R}$ are:

$1/\mathcal{R} = \{1\}$,

$2/\mathcal{R} = 3/\mathcal{R} = 4/\mathcal{R} = \{2, 3, 4\}$. So

$$\mathcal{X}/\mathcal{R} = \{\{1\},\{2,3,4\}\}$$

وبالعكس: إذا كانت $\mathcal{X}=\{1,2,3,4\}$ وكانت
$\mathcal{S}=\{\{1\},\{2,3,4\}\}$ هي تجزئة لـ $\mathcal{X}$ فإن هذه التجزئة
ستولد علاقة تكافؤ $(\mathcal{X}/\mathcal{S})$ معرفة كالتالي:

$x\,(\mathcal{X}/\mathcal{S})\,y$ iff $x,y\in A$ for some $A\in\mathcal{S}$.

$$\Longrightarrow \mathcal{X}/\mathcal{S} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}.$$

(قارن بين الحالة الأولى والعكس ستلاحظ أن التجزئة المولدة من علاقة التكافؤ ولدت نفس علاقة التكافؤ الأولى والعكس بالعكس).

لاحظ أيضاً أنه يمكن الحصول على علاقة التكافؤ من التجزئة ما بأن نقوم بعملية ضرب ديكارتي داخل لمجموعات التجزئة كل مجموعة مع نفسها.

في المثال السابق سنجد أن

$$\mathcal{X}/\mathcal{S} = (\{1\}\times\{1\}) \cup (\{2,3,4\}\times\{2,3,4\})$$

تأكد من ذلك.

2) Let $\mathcal{X}=\mathbb{Z}$ and define for $i=0,1$,

$$Z_0 = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$$
$$Z_1 = \{\ldots,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$$

Then clearly $\mathcal{S}=\{Z_0,Z_1\}$ is a partion of $\mathbb{Z}$, We can introduce a relation $\mathbb{Z}/\mathcal{S}$ as follows:

$x\,(\mathbb{Z}/\mathcal{S})\,y$ iff both x and y in Z_0 or in Z_1

That is either $(x=2k_1 \wedge y=2k_2)$ or $(x=2k_1+1 \wedge y=2k_2+1)$.

iff in both cases, $x-y = 2(k_1-k_2) = 2k'$

iff $x\equiv y \pmod 2$.

That is $(\mathbb{Z}/\mathcal{S})$ is just the congruence relation mod 2 on $\mathbb{Z}$.

3.4 Functions

من المعلوم أن الإقترانات / هي واحدة من أهم المفاهيم الرياضية التي تستخدم في كل فروع الرياضيات المختلفة، حيث يعرف الإقتران على أنه أداة ربط يربط كل عنصر من عناصر مجموعة ما - تسمى المجال - بعنصر وحيد من عناصر مجموعة مقابلة - تسمى المجال المقابل. و الحقيقة أن هذا التعريف غير واضح / وغير مفهوم ماذا نعني بأداة ربط. التعريف التالي يقدم تعريف رسمي للإقترانات باستخدام مفاهيم المجموعات و العلاقات علماً حيث يعتبر أن المقصود من أداة الربط هو علاقة خاصة تحقق شروط خاصة / حسب مفهوم العلاقة التي درست سابقاً.

Def 8: Let X and Y be sets. A **function** from X to Y is a triple (f, X, Y), where f is a relation from X to Y satisfying:

(a) $\text{Dom}(f) = X$.

(b) If $(x, y) \in f$ and $(x, z) \in f$, then $y = z$.

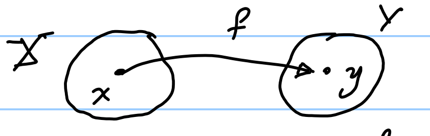
If (f, X, Y) is a fun, then we write:

$f : X \longrightarrow Y$ instead of (f, X, Y) and

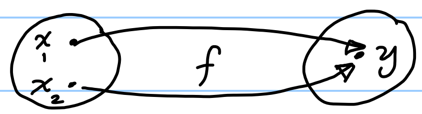
$y = f(x)$ instead of $(x, y) \in f$.

تنويه: السبب أنه يمكن كتابة $y = f(x)$ بدل $(x,y) \in f$ في حالة الدوال هو أنه في الدوال، كل x في X تحدد عنصر وحيد y في Y، وبالتالي لا يصح في العلاقات بشكل عام كتابة $y = R(x)$ عندما تكون $(x,y) \in R$.

Def: Let $f : X \longrightarrow Y$ be a fun. If $y = f(x)$, we say that y is the **image** of x under f and that x is a **preimage** of y under f. The set Y is called the **range** of the fun. You should notice that the range of f need not be the same as the image of f.



y is the image of x



x_1 and x_2 are preimages of y.

Examples: ① Let $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{4, 5, 6\}$. Which of the following relations from A to B is a fun? Graph the relation.

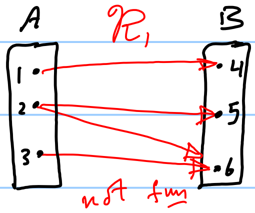
$\mathcal{R}_1 = \{(1,4), (2,5), (3,6), (2,6)\}$.

$\mathcal{R}_2 = \{(1,4), (2,6), (3,5)\}$.

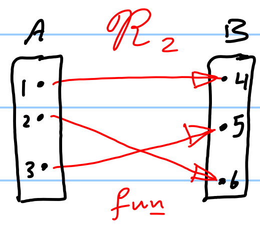
$\mathcal{R}_3 = \{(1,5), (2,5), (3,5)\}$.

$\mathcal{R}_4 = \{(1,4), (3,6)\}$.

Sol: a) $\mathcal{R}_1$ is not a fun, since $(2,5) \in \mathcal{R}_1 \wedge (2,6) \in \mathcal{R}_1$ but $5 \neq 6$.

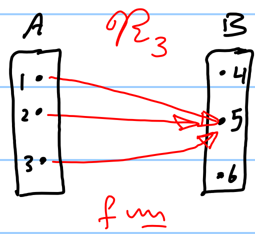


b) $\mathcal{R}_2$ is a fun since $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_2) = A$, and $\forall x \in A$ $\exists!\ y \in B$ s.t. $(x, y) \in \mathcal{R}_2$.



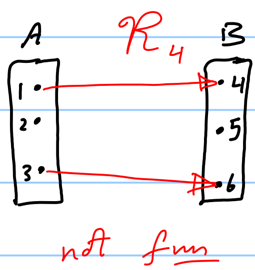
Note that B is the range and Image of the fun is also B.

(c) $\mathcal{R}_3$ is a fun, again $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_3) = A$ and when $(x,y) \wedge (x, z) \in \mathcal{R}_3 \Rightarrow y = z$.

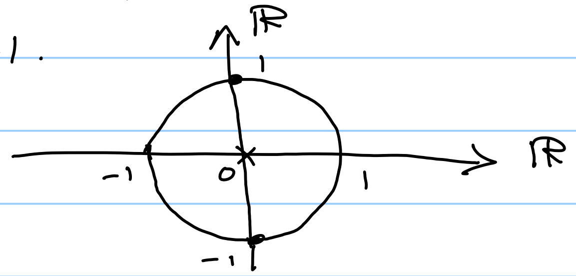


Note that B is the range, but Image of the fun is the set $\{5\}$ which is a subset of B.

(d) $\mathcal{R}_4$ is not a fun since $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_4) \neq A$.



2) Let $H = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Then $\mathrm{Dom}(H) = [-1, 1] = \mathrm{Im}(H)$. H is <u>not</u> a fun since $(0,1) \in H$, and $(0, -1) \in H$, but $1 \neq -1$.



3) Let $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = [x]$ for all $x \in \mathbb{R}$, where $[x]$ equals the greatest integer $\leq x$.
[for example: $[\sqrt{2}] = 1$, $[0.5] = 0$, $[-0.5] = -1$]
Note that $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ and the range of $f = \mathbb{R}$. But the image of f is $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ran}(f)$.

تنويه: إذا كانت لدينا علاقة دالة فإن سيبقى أيضاً علاقة دالة إذا قمنا بأخذ مجموعة جزئية من المجال المقابل بشرط احتوائه على المدى / مثال ذلك، المثال السابق / سيبقى $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ و $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ معرفة بـ $f(x) = [x]$ علاقات دوال. ((التمرينة التالية توضح هذا التنويه)

Thrm 6: Let $f : X \longrightarrow Y$ be a fun and let W be a set such that $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$, then $f : X \longrightarrow W$ is a fun.

PF: First: $\underbrace{f \text{ is a relation from } X \text{ to } W \text{ ??}}$

(يتم اثبات ذلك باثبات انه $f \subseteq X \times W$)

$$(x, y) \in f \implies (x \in X) \wedge y \in (\mathrm{Im}\, f) \quad (\text{Def of Im})$$
$$\implies (x \in X) \wedge (y \in W) \quad (\mathrm{Im}\, f \subseteq W)$$
$$\implies (x, y) \in X \times W.$$

That is $f \subseteq X \times W$.

Second: since $f : X \longrightarrow Y$ is a fun, we have $\mathrm{Dom}(f) = X$, and if $(x, y) \in f$ and $(x, z) \in f$ then $y = z$. $\square$

Thm 7: Let $f : X \to Y$ and $g : X \to Y$ be funs.
Then $f = g$ iff $f(x) = g(x) \ \forall x \in X$.

$(\Rightarrow)$ Suppose that $f = g$ (هذا التساوي هو تساوي مجموعات)

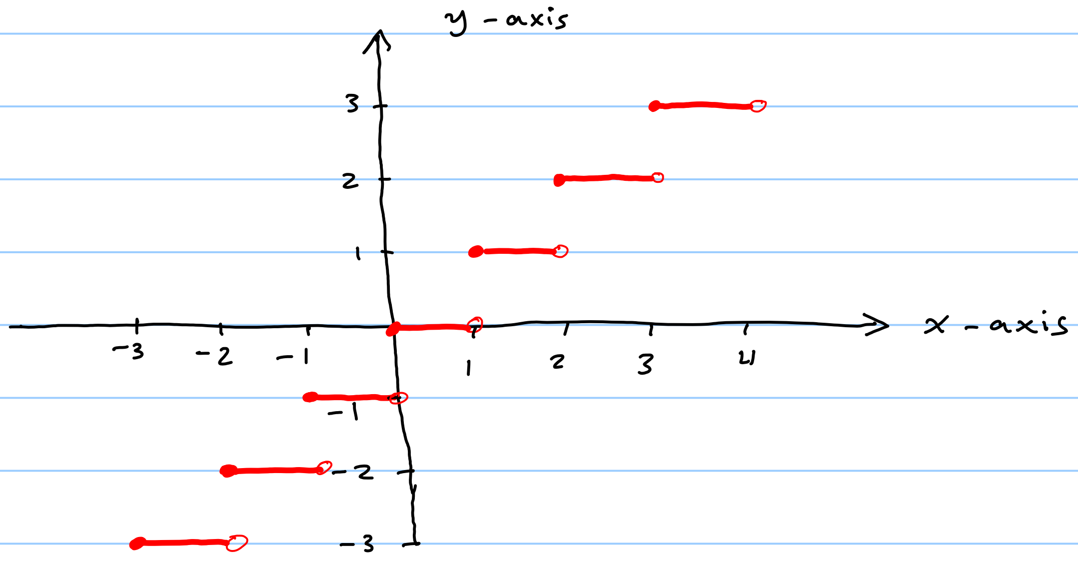
For $x \in X$, $y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$
$\Leftrightarrow (x,y) \in g \quad (f = g)$
$\Leftrightarrow y = g(x)$

$\Rightarrow \quad f(x) = g(x)$.

$(\Leftarrow)$ Suppose that $f(x) = g(x) \ \forall x \in X$. Then
$(x,y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$
$\Leftrightarrow y = g(x) \quad (f(x) = g(x))$
$\Leftrightarrow (x,y) \in g$

Thus, $f = g$.

Remark: If the domain and the range of a fun are subsets of $\mathbb{R}$, then the graph of f may be sketched on the Cartesian plane. For example, the integer fun $y = [x]$ has the following graph:



$y = [x]$

تنويه : عليك الإشارة للدالة $f : X \to Y$ بالرمز مختصر f عندما يكون المجال X والمجال المقابل Y واضحة ولا يكون هناك لبس.

Some of Special funs:

Examples: 1) Let A be a subset of a nonempty set X. The relation from X to $\{0,1\}$ defined by
$$\{(x,y) : y=1 \text{ if } x\in A,\ y=0 \text{ if } x\notin A\}$$
gives rise to a fun from X to $\{0,1\}$. This fun is called **characteristic fun of A in X.**

عادةً نعبر عن هذه الدالة بالصورة التالية:

$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ is defined by
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A, \\ 0, & x\notin A. \end{cases}$$

[Clearly χ_A is a fun since $\mathrm{Dom}(\chi_A) = X$
[$\forall x\in X$, either $x\in A$ or $x\notin A \Rightarrow$ either $\chi_A(x)=1$ or $\chi_A(x)=0$]
Moreover, if $(x,y) \wedge (x,z) \in \chi_A$, then:
$x\in A \Longrightarrow y=1 \wedge z=1 \Longrightarrow y=z$,
$x\notin A \Longrightarrow y=0 \wedge z=0 \Longrightarrow y=z$. This proves that χ_A is a fun from X to $\{0,1\}$].

For Example: Let $X=\{1,2,---,10\}$ and $A=\{3,4,7\}$. Then $\chi_A(2)=0$, $\chi_A(7)=1$, $\chi_A(1)=0$, $\chi_A(3)=1$ and so on.

2) Let X be a set. The diagonal relation $\Delta_x = \{(x,x) : x\in X\}$ is a fun from X to X.

PF: $\mathrm{Dom}(\Delta_x) = X$. And if $(x,y) \wedge (x,z)$ in Δ_x, then $x=y \wedge x=z \Longrightarrow y=z$.

We use the alternative notation $I_X : X \longrightarrow X$ where $I_X(x)=x \quad \forall x\in X$. I_X is called the **identity fun on X.**

(3) (Constant fun):

Let $\mathbb{X}$ and Y be two nonempty sets and let $b \in Y$ be a fixed element in Y. The relation

$$C_b = \{(x, b) : x \in \mathbb{X}\}$$

is a fun from $\mathbb{X}$ to Y denoted by

$$C_b : \mathbb{X} \longrightarrow Y$$

given by $C_b(x) = b \quad \forall x \in \mathbb{X}$. This fun is called a **constant fun**.

(4) (Piecewise def. fun).

In calculus, we have seen a fun defined by two or more rules: for example $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

This fun can be expressed as the union of the following two funs:

1) $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 1 - 2x$
2) $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^2 + 1$.

Note that $Dom(f) \cap Dom(g) = \{0\}$ and

$$f(0) = 1 = g(0), \text{ and } h = f \cup g.$$

(النظرية التالية تعمم وتثبت هذه الحالة)

Thrm 8: Let $f : A \longrightarrow C$ and $g : B \longrightarrow D$ be two funs such that $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A \cap B$. Then the **union** h of f and g defines the fun

$$h = f \cup g : A \cup B \longrightarrow C \cup D$$ where

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B. \end{cases}$$

PF: $f \subseteq A \times C$ and $g \subseteq B \times D$, so the relation

$$h = f \cup g \subseteq (A \times C) \cup (B \times D)$$
$$\subseteq (A \cup B) \times (C \cup D).$$

Thus, h is a relation from $A \cup B$ to $C \cup D$.

Claim: $Dom(h) = Dom(f) \cup Dom(g) = A \cup B$. ($f$ and g are funs)

To prove this claim, note that if $x \in Dom(h)$, then $\exists y \in C \cup D$ s.t. $(x,y) \in h = f \cup g$. Then either $(x,y) \in f$ or $(x,y) \in g$. So, either $x \in Dom(f)$ $x \in Dom(g)$. Thus, $x \in Dom(f) \cup Dom(g)$, and

$$Dom(h) \subseteq Dom(f) \cup Dom(g) \quad ---- \quad (1)$$

On the other hand, if $x \in Dom(f) \cup Dom(g)$, then either $x \in Dom(f)$ or $x \in Dom(g)$.

If $x \in Dom(f)$, then $\exists y \in B$ s.t. $(x,y) \in f \subseteq h$.

So $x \in Dom(h)$.

If $x \in Dom(g)$, then $\exists z \in D$ s.t. $(x,z) \in g \subseteq h$

So $x \in Dom(h)$.

In both cases, $x \in Dom(h)$ and hence, we get that

$$Dom(f) \cup Dom(g) \subseteq Dom(h) \ldots\ldots --- \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} Dom(h) = Dom(f) \cup Dom(g) = A \cup B$$

Finally, If (x,y) and $(x,z) \in h = f \cup g$, then, there is three cases.

Case 1: Both $(x,y) \wedge (x,z) \in f \Longrightarrow y = z$ (f is a fun)

Case 2: Both $(x,y) \wedge (x,z) \in g \Longrightarrow y = z$ (g is a fun)

Case 3: $(x,y) \in f \wedge (x,z) \in g$

[Similarly if $(x,y) \in g \wedge (x,z) \in h$].

In this case, we have that $y = f(x) \wedge z = g(x)$ and $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$. By given $f(x) = g(x)$, so we get that $y = z$.

Thus, in all cases, we get that $y = z$ and so h is a fun from $A \cup B$ to $C \cup D$.

[إقرأ في أمثلة الكتاب أنواع أخرى من الدوال الخاصة مثل [restricted fun / inclusion fun

لاحظ أنه في حال كان $Dom f \cap Dom g = \phi$ فإن الإتحاد يكون دالة دائماً بدون شروط.

Example: (1) Suppose that $f : X \longrightarrow X$ be a fun in X. Prove that f is reflexive iff $f = I_X$.

PF: $(\Longrightarrow)$ Suppose that f is reflexive. Then $\forall x \in X$, $(x, x) \in f \Longrightarrow I_X \subseteq f$.

Now, if $(x, y) \in f$, then, both $(x, y) \wedge (x, x)$ in f. Since f is a fun, we get that $y = x$ and so $(x, y) = (x, x) \in I_X \Longrightarrow f \subseteq I_X$. That is, $f = I_X$.

$(\Longleftarrow)$ Trivial, since I_X is an equivelance relation.

2) Let the fun $f : X \longrightarrow Y$ be defined by

$$f = \{(x, e), (y, d), (z, a), (v, b), (w, b)\}$$

where $X = \{x, y, z, v, w\}$ and $Y = \{a, b, c, d, e\}$.

Find f^{-1}, $Dom(f)$, $Im(f)$, $Dom(f^{-1})$, and Draw f, f^{-1}. Is f^{-1} a fun? Why?

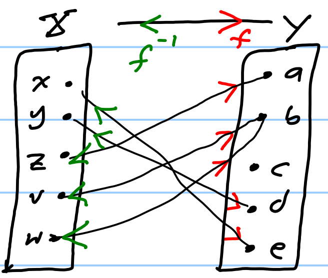
sol: $f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$

$$= \{(e, x), (d, y), (z, a), (b, v), (b, w)\}$$

$Dom(f) = X$ (f is fun)

$Im(f) = \{a, b, d, e\} = Y - \{c\}$

$Dom f^{-1} = Im(f) = \{a, b, d, e\}$ and f^{-1} is not a fun since $Dom(f^{-1}) \neq Y$.



1 السهم من اليسار لليمين هو الدالة f

2 السهم من اليمين لليسار هو f^{-1}

3.5 Images and Inverse Images of Sets

Def 9: Let $f : X \longrightarrow Y$ be a fun, and let $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

a) The image of A under f - denoted by $f(A)$ - is the set of all images $f(x)$ of elements x in A.
That is, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

b) The inverse image of B under f - denoted by $f^{-1}(B)$ - is the set of all preimages of y in B.
That is, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

Thrm 9: Let $f : X \longrightarrow Y$ be a fun. Then

a) $f(\phi) = \phi$.

b) $f(\{x\}) = \{f(x)\} \quad \forall x \in X$.

c) If $A \subseteq B \subseteq X$, then $f(A) \subseteq f(B)$.

d) If $C \subseteq D \subseteq Y$, then $f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

PF: a) If $f(\emptyset) \neq \phi$, then $\exists\, y \in f(\emptyset)$. So, $\exists\, x \in \phi$ s.t. $f(x) = y$ which is a contradiction.

b) $f(\{x\}) = \{f(a) : a \in \{x\}\} = \{f(a) : a = x\}$
$= \{f(x)\}$.

c) Suppose that $A \subseteq B$. Let $y \in f(A)$, then $\exists\, x \in A$ s.t. $f(x) = y$. Since $A \subseteq B$, we get $x \in B$ and $y = f(x) \in f(B)$. (Def of $f(B)$)
Therefore $f(A) \subseteq f(B)$.

d) Suppose that $C \subseteq D$. Let $x \in f^{-1}(C)$, then by the def of f^{-1}, we get $f(x) \in C \subseteq D$.
Hence $x \in f^{-1}(D)$. (Since $f(x) \in D$) $\square$

Thrm 10: Let $f: X \to Y$ be a fun and let $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ be an indexed family of subsets of X. Then

(a) $f\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} f(A_\alpha)$

(b) $f\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Delta} f(A_\alpha)$

PF: (a) $y \in f\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$

$$\equiv \left(\exists x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)\left(y = f(x)\right) \qquad \text{(Def of } f(U)\text{)}$$

$$\equiv \left(\exists \alpha_0 \in \Delta\right)\left(\exists x \in A_{\alpha_0}\right)\left(y = f(x)\right) \qquad \text{(Def of } \bigcup\text{)}$$

$$\equiv \left(\exists \alpha_0 \in \Delta\right)\left(y \in f(A_{\alpha_0})\right) \qquad \text{(Def of } f(A_{\alpha_0})\text{)}$$

$$\equiv y \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} f(A_\alpha).$$

Therefore, $f\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} f(A_\alpha)$.

b) Previously, we prove that $\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subseteq A_\gamma \quad \forall \gamma \in \Delta$

By Thrm 9 part (c) above, we have that:

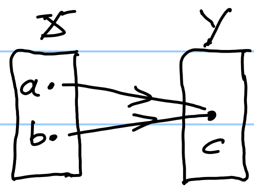
$$f\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \subseteq f(A_\gamma) \quad \forall \gamma \in \Delta$$

Hence,

$$f\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Delta} f(A_\alpha). \qquad \square$$

Remark: The converse of Thrm 10 is not true, and the following is a counter example.

Example: Let the fun $f: X \to Y$ be defined by the diagram



Consider $\Delta = \{1,2\}$ and $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$.

Then $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, while

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{c\}$. Hence we fined that

$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Thrm 11: Let $f : X \longrightarrow Y$ be a fun and let $\{B_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ be an indexed family of subsets of Y. Then

(a) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(B_\alpha)$.

(b) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(B_\alpha)$.

PF: a) $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) \equiv f(x) \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha$ (Def of f^{-1})

$\equiv (\exists \alpha \in \Delta)\ (f(x) \in B_\alpha)$ (Def of $\bigcup_\alpha$)

$\equiv (\exists \alpha \in \Delta)\ (x \in f^{-1}(B_\alpha))$ (Def of f^{-1})

$\equiv x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(B_\alpha)$. (Def of $\bigcup_\alpha$)

Therefore $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(B_\alpha)$.

b) $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) \equiv f(x) \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} B_\alpha$ (Def of f^{-1})

$\equiv (\forall \alpha \in \Delta)\ (f(x) \in B_\alpha)$ (Def of $\bigcap_\alpha$)

$\equiv (\forall \alpha \in \Delta)\ (x \in f^{-1}(B_\alpha))$ (Def of f^{-1})

$\equiv x \in \bigcap_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(B_\alpha)$. (Def of $\bigcap_\alpha$)

Therefore $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Delta} f^{-1}(B_\alpha)$. $\square$

Thrm 12: Let $f : X \longrightarrow Y$ be a fun and let B and C be any subsets of Y. Then $f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$

PF: $x \in f^{-1}(B - C) \iff f(x) \in B - C$ (Def of f^{-1})

$\iff (f(x) \in B) \wedge f(x) \notin C$ (Def of $-$)

$\iff x \in f^{-1}(B) \wedge x \notin f^{-1}(C)$ (Def of f^{-1})

$\iff x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$ (Def of $-$)

Therefore

$$f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$$ $\square$

Examples: 1) Let $f: X \to Y$ be a fun, and let $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

a) Prove that $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, and $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

b) Give examples to show that the inclusions in part (a) may be proper.

Sol: a) Let $x \in A$, then $f(x) \in f(A)$. (Def of $f(A)$)

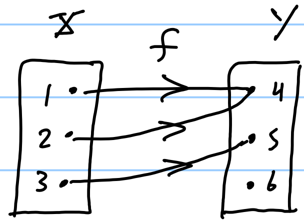
So, $x \in f^{-1}(f(A))$ (Def of $f^{-1}(C)$, $C = f(A)$).

Thus $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Let $y \in f(f^{-1}(B))$, then $\exists\, x \in f^{-1}(B)$ s.t. $y = f(x)$. By def of $f^{-1}(B)$, we must have $f(x) \in B$. But $y = f(x)$, so $y \in B$.

That is $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

b) Let $f: X \to Y$ be defined as in the graph:



Let $A = \{1\}$, $B = \{4, 6\}$. Then $f(A) = 4$ and $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$. So $A \subset f^{-1}(f(A))$

Moreover, $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ and $f(f^{-1}(B)) = \{4\} \subset B$.

2) Let $f: X \to Y$ be a fun, and let $B \subseteq Y$. Prove that

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B).$$

PF: $x \in f^{-1}(Y-B) \overset{(\text{def of } f^{-1})}{\iff} f(x) \in Y - B \overset{(\text{Def of } -)}{\iff} (f(x) \in Y) \wedge (f(x) \notin B)$

$\iff x \in f^{-1}(Y) \wedge x \notin f^{-1}(B)$ (Def of f^{-1})

$\iff x \in X \wedge x \notin f^{-1}(B)$ (f is fun, so $f^{-1}(Y) = X$)

$\iff x \in X - f^{-1}(B)$.

Therefore $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

3·6 Injective, Surjective, and Bijective Functions

Note Title 26-Feb-13

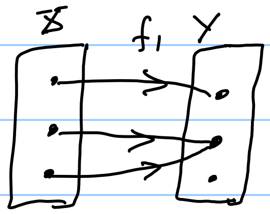
في هذا الفصل سنقوم بالتعرف على ثلاث أنواع من الدوال المميزة، وهي

injective funs , surjective funs , bijective funs .

Def 10: ① A fun $f: X \longrightarrow Y$ is said to be injective (or one-to-one, 1-1), if $\forall x_1, x_2 \in X$, whenever $f(x_1) = f(x_2)$, we get $x_1 = x_2$. Equivalently, (by contrapositive) f is injective fun if $x_1 \neq x_2$, then $f(x_1) \neq f(x_2)$. An injective fun is called injection.

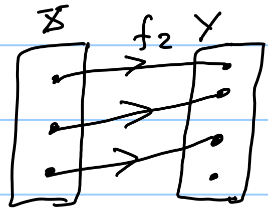
② A fun $f: X \longrightarrow Y$ is said to be surjective (or onto) if whenever $y \in Y$, then there exists at least one $x \in X$ such that $y = f(x)$. Equivalently, f is surjective if $f(X) = Y$ $(Im(f) = Y)$. A surjective fun is called surjection.

3) A fun $f: X \longrightarrow Y$ is bijective if it is both injective and surjective. A bijective fun is called a bijection or a 1-1 correspondence.



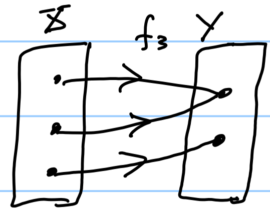
f_1 is not 1-1

f_1 is not onto



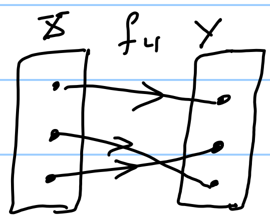
f_2 is 1-1

f_2 is not onto



f_3 is not 1-1

f_3 is onto.



$\left.\begin{array}{l} f_4 \text{ is } 1\text{-}1 \\ f_4 \text{ is onto} \end{array}\right\} \Longrightarrow f_4$ is 1-1 and onto fun

Examples: 1) The fun $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

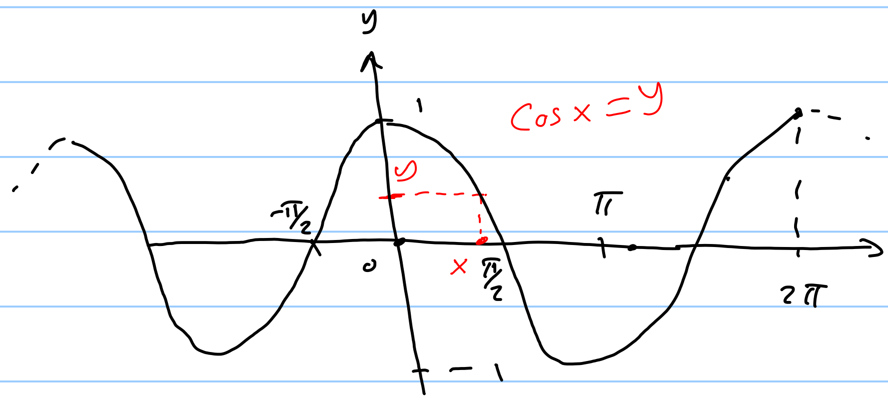
$$f(x) = \cos x$$

f is not 1-1, since $0 \neq 2\pi$ but $\cos 0 = 1 = \cos 2\pi$.

f is not onto, since $y = 2 \in \mathbb{R}$ and $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ s.t. $\cos x = 2$. $[\,|\cos x| \leq 1\,]$

2) If we replace the range of part (1) by the set $[-1,1]$, we get a fun $f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ defined by $f(x) = \cos x$.

f is still not 1-1, but f is onto, since $\forall y \in [-1,1]$, $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $\cos x = y$.



3) If $f: [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ defined by $f(x) = \cos x$ then it is clearly that f is 1-1 correspondence.

4) The identity fun I_X on any set is a bijective fun.

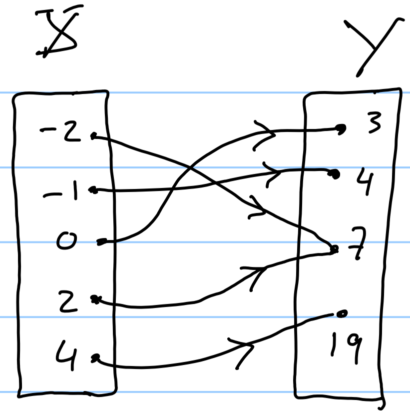
PF: easy.

5) Let $X = \{-2,-1,0,2,4\}$ and $Y = \{3,4,7,19\}$.

Define $f: X \longrightarrow Y$ by $f(x) = x^2+3$ $\forall x \in X$.

check if f is 1-1? onto?. Explain.

Sol: Graph the fun



f is not 1-1, since $-2 \neq 2$ and $f(-2) = 7 = f(2)$

f is onto, since $\forall y \in \{3, 4, 7, 19\}$, $\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$. $\left(f(X) = Y \right)$.

6) Prove that the fun $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 3x^3 - 8$ is a bijection.

PF: f is 1-1: Suppose that $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$3x_1^3 - 8 = 3x_2^3 - 8 \Rightarrow 3x_1^3 = 3x_2^3 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$.

since $g = \sqrt[3]{x}$ is a fun, $g(x_1^3) = g(x_2^3) \Rightarrow x_1 = x_2$.

f is onto: Let $y \in \mathbb{R}$, $\frac{y+8}{3} \in \mathbb{R}$ and

$\sqrt[3]{\frac{y+8}{3}} \in \mathbb{R}$. Take $x = \sqrt[3]{\frac{y+8}{3}} \Rightarrow$

$f(x) = y$.

Hence f is onto and so it is bijection.

ملحوظات: (1) يمكن التعبير عن الدوال التي تكون 1-1 أو onto بالطريقة التالية

$f: X \xrightarrow{1-1} Y$, $g: X \xrightarrow{\text{onto}} Y$, $h: X \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} Y$.

(2) قد تكون هناك دالتين متساويتين مجموعات ولكن احداها تكون onto والأخرى لا تكون كذلك، للتوضيح، افرض ان $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

عرف الدالتين f، g كما يلي:

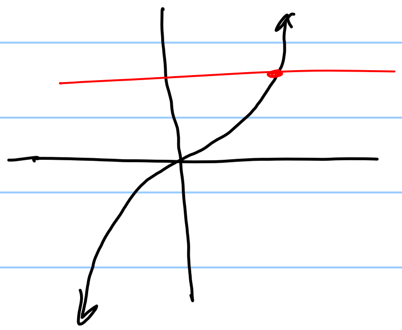
$f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ defined by $f(n) = 2n$.

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ defined by $g(n) = 2n$.

As set $f \subseteq \mathbb{N} \times E$ and $g \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Moreover $f = g$ as a set. But $f(\mathbb{N}) = g(\mathbb{N}) = E$. Hence f is onto, but g is not onto.

③ هندسياً / عندما يتم رسم $f : X \longrightarrow Y$ على المستوى الديكارتي / فانه الخط الافقي يمثل اختبار لفحص كون الدالة 1-1 / فاذا وجد خط أفقي واحد على الأقل يقطع f في نقطتين / تكون f ليست 1-1 .

مثال ذلك $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f = x^3$ لها الرسمة التالية



باستخدام فحص الخط الأفقي / تكون f هي دالة 1-1 .

Thrm 13: Let $f : X \longrightarrow Y$ be an injective and let $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ be an indexed family of subsets of X. Then

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Delta} f(A_\alpha).$$

PF: In general, we prove that $f\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} f(A_\alpha)$.

(بشكل عام العكس غير صحيح / لكن إذا كانت f دالة 1-1 يكون العكس صحيحاً)

Let $y \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} f(A_\alpha) \Longrightarrow y \in f(A_\alpha) \quad \forall \alpha \in \Delta$.

$\Longrightarrow (\forall \alpha \in \Delta)\left[(\exists x_\alpha \in A_\alpha)\ y = f(x_\alpha)\right]$ (Def of $f(A_\alpha)$)

Since f is injective fun, all these x_α's are the same. This implies that $\exists x \in A_\alpha \ \forall \alpha \in \Delta$ s.t. $y = f(x) \Longrightarrow \exists x \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ s.t. $y = f(x)$.

$\Longrightarrow y \in f\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right)$. Hence $f\left(\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \Delta} f(A_\alpha)$ ☐

Note that if $f: X \longrightarrow Y$, then f^{-1} is a relation from Y to X defined by

$$f^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : y = f(x)\}.$$

And in general f^{-1} need not be a fun.

For illustration: Let $f: \{1,2\} \longrightarrow \{3\}$ be defined by $f = \{(1,3),(2,3)\}$. This fun is not 1-1, and $f^{-1} = \{(3,1),(3,2)\}$ is a relation from $\{3\}$ to $\{1,2\}$. This relation is not fun since $(3,1),(3,2)$ two elements in f^{-1} and $1 \neq 2$.

Thrm 14: If a fun $f: X \longrightarrow Y$ is a bijection, then f^{-1} is a bijective fun from Y to X. Moreover, $(f^{-1})^{-1} = f$.

PF: $Dom(f^{-1}) = Im(f) = Y$ ($f(X) = Y$ since f is onto)

If $(y,x_1) \in f^{-1}$ and $(y,x_2) \in f^{-1}$, then $y = f(x_1) = f(x_2)$. Since f is 1-1, then $x_1 = x_2$. This proves that f^{-1} is a fun from Y to X.

f^{-1} is 1-1: Suppose that $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x \in X$.

$\Longrightarrow$ $y_1 = f(x)$ and $y_2 = f(x)$. Hence $y_1 = y_2$ and f^{-1} is 1-1.

f^{-1} is onto: Let $x \in X$ be arbitrary, so $\exists y \in Y$ s.t. $y = f(x)$ (since f is fun, $Dom(f) = X$)

Hence $x = f^{-1}(y)$. This proves that f^{-1} is a bijection.

Finally,
$$(x,y) \in f \equiv (y,x) \in f^{-1}$$
$$\equiv (x,y) \in (f^{-1})^{-1}$$

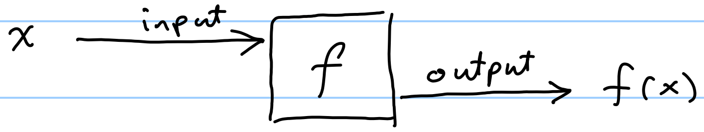
Hence $f = (f^{-1})^{-1}$. $\square$.

Def: If $f: X \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} Y$, then the fun

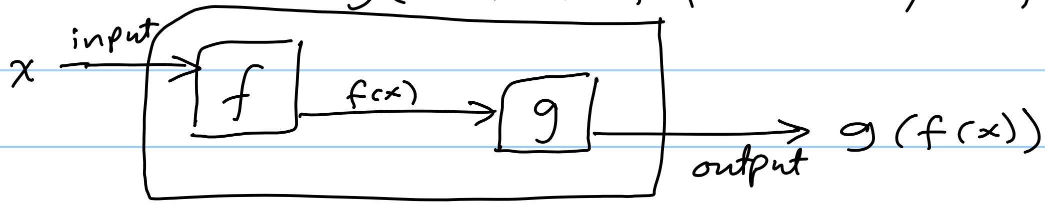
$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$ is called the inverse fun of f.

3.7 Composition of Functions

مقدمة: من الممكن تخيل الدالة f على أنها آلة تصنيع / إنتاج لمواد خام مدخلة (input) هي x لتصنع منتج (output) هو $f(x)$،



وقد يحدث أن نقوم بإدخال المنتج $f(x)$ لآلة أخرى g مدخلاتها هي منتجات الماكنة الأولى نقوم بإنتاج $g(f(x))$.



للتوضيح قد يكون لدينا آلة غسيل لغسل الملابس القذرة لتنتج ملابس نظيفة لكنها مبللة، ويمكن ادخال هذه الملابس المبللة لآلة تجفيف لتنتج ملابس نظيفة وجافة. هنا يمكن اعتبار الآلتين معاً آلة واحدة مدخلاتها ملابس جافة قذرة ومخرجاتها هي ملابس نظيفة جافة.

Def 13: Let $f: X \longrightarrow Y$ and $g: Y \longrightarrow Z$ be two funs. The composition of these two funs is the fun $g \circ f: X \longrightarrow Z$ defined by

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

That is

$$g \circ f = \{(x,z) \in X \times Z : \exists y \in Y \text{ such that } (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g\}$$

Example: Let $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ and $g: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ be two funs given respectively by

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{and} \quad g(x) = \sqrt{x+1}.$$

Find the composition $f \circ g(x)$ and $g \circ f(x)$.

Sol: Note that $f(\mathbb{R}) \subseteq [0,\infty)$, so $f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

is defined. Similarly $g([0,\infty)) \subseteq \mathbb{R}$, so $g \circ f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ is also defined.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = f(g(x))$$
$$= (g(x))^2 + 1$$
$$= (\sqrt{x+1})^2 + 1$$
$$= x + 2,$$

and $\forall x \in [0,\infty)$,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$
$$= \sqrt{f(x)+1}$$
$$= \sqrt{x^2+2}$$

This example shows that in general $f \circ g \neq g \circ f$, and the composition of funs is not commutative.

Thrm 15. The composition of funs is associative; that is if $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, and $h: Z \to W$, then

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

PF: As a fun: $h \circ g : Y \longrightarrow W$, so

$(h \circ g) \circ f : X \longrightarrow W$, and

$(g \circ f) : X \longrightarrow Z$, and

$h \circ (g \circ f) : X \longrightarrow W$

So, both $(h \circ g) \circ f$ and $h \circ (g \circ f)$ are funs from X to W.

Now, for $x \in X$,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

and $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$

Hence $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

حل 2

يمكن اثبات التساوى بحل آخر باعتبار أن الدوال مجموعات جزئية من $\mathcal{X} \times W$ وهو حل طويل ولكنه مفيد.

$(x,w) \in h\circ(g\circ f) \equiv \exists z \in Z \,[\text{s.t. } (x,z) \in g\circ f \wedge (z,w) \in h]$ (by def of $g\circ f$)

$\equiv (\exists z \in Z)\left[(\exists y \in Y)\left[(x,y)\in f \wedge (y,z) \in g\right] \wedge (z,w) \in h\right]$

$\equiv (\exists z \in Z)(\exists y \in Y)\left[(x,y) \in f \wedge \left((y,z)\in g \wedge (z,w) \in h\right)\right]$

(by associative $(p\wedge q)\wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$)

$\equiv (\exists y \in Y)\ (x,y) \in f \wedge (y,w) \in (h\circ g)$ (Def of $h\circ g$)

$\equiv (x,w) \in (h\circ g)\circ f.$

Therefore $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$. $\square$

Thrm 16: Let $f: \mathcal{X} \longrightarrow Y$ be a fun. Then

a) If there exists a fun $g: Y \longrightarrow \mathcal{X}$ such that $g\circ f = I_{\mathcal{X}}$ ($I_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $I_x(x) = x$), then f is injective.

b) If there exists a fun $h: Y \longrightarrow \mathcal{X}$ such that $f\circ h = I_Y$, then f is surjective.

PF: a) Suppose that $f(x_1) = f(x_2)$. Then

$x_1 = I_{\mathcal{X}}(x_1) = g\circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g\circ f(x_2) = I_{\mathcal{X}}(x_2)$.

Hence f is 1-1.

b) Let $y \in Y$ be arbitrary. Then

$y = I_Y(y) = f\circ h(y) = f(h(y))$

Set $h(y) = x \in \mathcal{X}$, then we have

$y = f(x)$ and so f is onto.

Examples: Let $f: X \to Y$ and $g: Y \to Z$.

a) If f and g are surjective funs, then so $g \circ f$

b) If f and g are injective funs, then so $g \circ f$.

c) If $g \circ f$ is surjective then g is surjective.

d) If $g \circ f$ is injective then f is injective.

PF: The fun $g \circ f$ is from X to Z.

a) Let $z \in Z$ be arbitrary. Since g is onto, $\exists y \in Y$ s.t. $g(y) = z$. But $y \in Y$ and f is onto, so $\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$. Hence

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

That is $\exists x \in X$ s.t. $g \circ f(x) = z$ and so $g \circ f$ is onto.

b) Suppose that $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Then

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

Since g is 1-1, we get $f(x_1) = f(x_2)$.

Since f is 1-1, $x_1 = x_2$. Hence $g \circ f$ is 1-1.

c) $g \circ f: X \xrightarrow{\text{onto}} Z$ and $g: Y \to Z$. Let $z \in Z$ be arbitrary. $\exists x \in X$ s.t. $g \circ f(x) = z$ or $g(f(x)) = z$.

Now, set $y = f(x) \in Y$, then $g(y) = g(f(x)) = z$.

That is g is onto.

d) Suppose that $f(x_1) = f(x_2)$. Since g is fun, we get $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ or

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2).$$

Since $g \circ f$ is 1-1, so $x_1 = x_2$ and hence f is 1-1.

Ch 5: Denumerable Sets and Nondenumerable Sets

Note Title 05-Apr-13

5.1 Finite and Infinite Sets

سابقاً في sec 2.1 تم تعريف المجموعات المنتهية (finite set) على أنها مجموعات تحتوي على عدد منتهٍ من العناصر، وفي sec 2.1 نفسه تمت الإشارة لـ $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية على أنها مجموعة غير منتهية .
هذه التعريفات تطورت رياضياً / ولتوضيح ذلك ، ادرس المثال التالي:

Example: Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers and $\mathbb{N}_e = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ the set of even natural numbers. Then $\mathbb{N}_e \subseteq \mathbb{N}$. Moreover the fun

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_e \quad \text{defined by}$$

$f(n) = 2n$ is 1-1 correspondence between $\mathbb{N}$ and $\mathbb{N}_e$. In other words, $\mathbb{N}$ satisfies the strange property:

"A part is as numerous as the whole"

(لاحظ أننا قلنا خاصية غريبة لأنها تختلف عن الفرضية الإقليدية "Euclid's axiom :

("The whole is greater than any of its parts")

Def 1: A set X is infinite if X has a proper subset $Y \subset X$ such that there exists a 1-1 correspondence between X and Y. A set is finite if it is not infinite.

Remark: It is not difficult to show that X is infinite iff $\exists\ f : X \xrightarrow{1-1} X$ such that $f(X) \subset X$

Example: The empty set ϕ and the singleton sets are finite.

PF: a) ϕ has no proper subset since $P(\phi) = \{\phi\}$; so there is no fun $f : \phi \to Y$ 1-1 correspondence such that $Y \subset \phi$.

b) Suppose that $A = \{a\}$ be a singleton set.

Suppose to contrary that $\exists\ f: A \to Y$ 1-1 and onto where $Y \subset A$. Since $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, the only proper subset of A is $\emptyset$. Hence.

$$f: A \to \emptyset \quad \text{and} \quad f(a) \in \emptyset$$

which is a contradiction.

Thrm 1:

a) Every superset of an infinite set is infinite.

b) Every subset of a finite set is finite.

PF: a) Let X be an infinite set and $X \subseteq Y$. Then there exist a 1-1 fun $f: X \to X$ such that $f(X) \neq X$. Now define a fun

$g: Y \to Y$ as follows:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ x, & x \in Y - X. \end{cases}$$

Claim: g is 1-1:

Suppose that $g(x_1) = g(x_2)$. $\exists$ 3 cases:

Case 1: $x_1, x_2 \in X \Rightarrow g(x_1) = f(x_1)$ and $g(x_2) = f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (f is 1-1)

Case 2: $x_1, x_2 \in Y - X \Rightarrow g(x_1) = x_1$ & $g(x_2) = x_2$

Thus, $x_1 = x_2$.

Case 3: One in X and the other in $Y - X$.

Say $x_1 \in X$, $x_2 \in Y - X$. Then.

$$x_2 = g(x_2) \quad (x_2 \in Y - X)$$
$$= g(x_1) \quad (\text{given})$$
$$= f(x_1) \quad (x_1 \in X)$$
$$\in X \quad (f : X \to X).$$

Thus, $x_2 \in Y - X \wedge x_2 \in X$, which is a contradiction. So, this case is impossible.

Therefore g is 1-1.

Claim: $g(Y) = f(X) \cup (Y - X) \subset X \cup (Y - X)$
$= Y$.

To see this, Let $y \in Y$.

If $y \in X$, then $g(y) = f(y) \in f(X)$,

if $y \in Y - X$, then $g(y) = y \in Y - X$

So, $g(y) \in f(X) \cup (Y - X)$

Thus $g(Y) \subseteq f(X) \cup (Y - X)$ ---- ①

Since both X and $Y - X \subseteq Y$, then.

$$f(X) = g(X) \subseteq g(Y) \quad \text{and}$$
$$Y - X = f(Y - X) \subseteq g(Y).$$

Hence $f(X) \cup Y - X \subseteq g(Y)$ ----- ②

From ① and ②, we get that

$$g(Y) = f(X) \cup Y - X.$$

Since $f(X) \subset X \wedge X \cap Y - X = \emptyset$, then

$$g(Y) \subset X \cup Y - X = Y.$$

b) Let $A \subseteq X$ where X is a finite set.

Suppose to contrary that A is infinite and there is a fun $f : A \xrightarrow{1-1} A$ and $f(A) \neq A$.

Then by part (a), the super set X of A must be infinite and this is a contradiction. Therefore the set A is finite

Thrm 2: Let $g: X \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} Y$. Then X is infinite iff Y is infinite.

PF: $(\Rightarrow)$ Suppose that X is infinite. Then $\exists$ a 1-1 fun $f: X \longrightarrow X$ s.t. $f(X) \neq X$.

Since $g: X \longrightarrow Y$ is 1-1 correspondence then so $g^{-1}: Y \longrightarrow X$ is 1-1 corresp.

Consider $h = (g \circ f) \circ g^{-1}: Y \longrightarrow Y$.

h is 1-1 since g, f and g^{-1} are 1-1. Moreover

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(g^{-1}(Y)) &= g \circ f(X) && (\text{since } g^{-1} \text{ is onto}) \\
&= g(f(X)) \\
&\neq g(X) && (\text{since } f(X) \neq X \text{ and } g \text{ is 1-1 corresp.}) \\
&= Y. && (g \text{ is onto}).
\end{aligned}
$$

Therefore Y is infinite set.

$(\Leftarrow)$ If Y is infinite. Take $h = g^{-1}: Y \longrightarrow X$.

Then h is 1-1 correspondence, and by $(\Rightarrow)$ direction, X must be infinite.

Corollary: If $f: X \longrightarrow Y$ is 1-1 correspondence Then X is finite iff Y is finite.

PF: Contrapositive of both direction of Thrm 2.

Thrm 3: Let X be an infinite set and let $x_0 \in X$. Then $X - \{x_0\}$ is infinite.

PF: Since X is infinite, $\exists$ a 1-1 fun $f: X \longrightarrow X$

such that $f(X) \neq X$. There is 2 cases:

Case 1: $x_0 \in Im(f) = f(X)$. In this case, $\exists x_1 \in X$ such that $f(x_1) = x_0$. Choose $x_2 \in X - f(X)$, and define a fun $g : X - \{x_0\} \longrightarrow X - \{x_0\}$ by

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_1 \\ x_2, & x = x_1. \end{cases}$$

Then $g(X - \{x_0\}) = f(X - \{x_0, x_1\}) \cup \{x_2\} \neq X - \{x_0\}$.

[لاحظ هنا أن $y_0 = f(x_0)$ موجودة في $f(X)$ وبالتالي y_0 موجودة في $X - \{x_0\}$ ولكنها غير موجودة في $g(X - \{x_0\})$]

Moreover, g is 1-1, to see this, let $g(z_1) = g(z_2)$

If $g(z_1) = g(z_2) = x_2 \implies z_1 = z_2 = x_1$

If $g(z_1) = g(z_2) \neq x_2 \implies z_1, z_2 \neq x_1$ and

$g(z_1) = f(z_1) \wedge g(z_2) = f(z_2)$. That is

$$f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2.$$

Case 2: $x_0 \notin Im(f) = f(X)$. In this case, define $g : X - \{x_0\} \longrightarrow X - \{x_0\}$ by

$$g(x) = f(x).$$

$\implies g(X - \{x_0\}) = f(X - \{x_0\}) \subset f(X) = f(X) - \{x_0\}$

(since $x_0 \notin f(X)$, $f(X) = f(X) - \{x_0\}$)

$\neq X - \{x_0\}$.

And since f is 1-1, then so g is 1-1. $\square$

Def: For $k \in \mathbb{N}$, define the set N_k to be

$$N_k = \{1, 2, 3, 4, \cdots, k\}.$$

Example: Prove that N_k is finite $\forall k \in \mathbb{N}$

PF: Using principle of mathematical induction. Let

$P(n)$ represents the predicate "$\mathbb{N}_n$ is finite". Then $P(1)$ represents "$\mathbb{N}_1 = \{1\}$ is finite" which is singleton set is finite and by previous example $P(1)$ is true.

Suppose $P(K)$ is true. So, the set $\mathbb{N}_K$ is finite.

Consider $\mathbb{N}_{K+1} = \{1, 2, 3, \ldots, K, K+1\}$

$$= \mathbb{N}_K \cup \{K+1\}.$$

Hence, $\mathbb{N}_K = \mathbb{N}_{K+1} - \{K+1\}$.

Suppose to contrary that $\mathbb{N}_{K+1}$ is infinite set. Then by Thrm 3 above, the set $\mathbb{N}_K = \mathbb{N}_{K+1} - \{K+1\}$ is also infinite which is a contradiction.

Thus, $\mathbb{N}_{K+1}$ is finite. This prove that the set $\mathbb{N}_n$ is finite $\forall n \in \mathbb{N}$ $\square$.

Thrm 4: A set X is finite iff either $X = \emptyset$ or X is in 1-1 correspondence with some $\mathbb{N}_K$.

PF: If $X = \emptyset$ then X is finite. If X is in 1-1 correspondence with some $\mathbb{N}_K$. Then by corollary of Thrm 2 X is finite.

For the converse, suppose by contrapositive that $X \neq \emptyset$ and no 1-1 and onto map from X to $\mathbb{N}_K$ $\forall K \in \mathbb{N}$.

We must prove that X is infinite.

Pick $x_1 \in X$. If $X - \{x_1\} = \emptyset$, then $X = \{x_1\}$ & $\exists$ 1-1 correspondence between X and $\mathbb{N}_1$, which contradicts our assumption.

So $X - \{x_1\} \neq \emptyset$. Pick $x_2 \in X - \{x_1\}$.

If $X - \{x_1, x_2\} = \emptyset$, then $X = \{x_1, x_2\}$ which is in 1-1 correspondence with N_2, and this contradicts the assumption. So $X - \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$.

Continue this process, to get that

$X - \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \neq \emptyset$, and $x_i \in X$, $x_i \neq x_j$

Set $Y = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, so Y is proper subset of X. Moreover, $f: N \to Y$ defined by

$f(k) = x_k$ is a 1-1 correspondence fun.

Since N is infinite, then Y is infinite and by Thrm 1 part (a), X is infinite.

Note Title 11-Apr-13

5.2 Equipotence of Sets

Def: Two finite sets X and Y have the same number of elements iff $\exists$ a 1-1 correspondence $f: X \to Y$. In this case, either $X = Y = \phi$ and we say X (and Y) has zero element, or X, Y are in 1-1 correspondence with some N_k, and we say X (and Y) has k elements.

Remark: The phrase "the same number of elements" does not apply here if X and Y are infinite.

Def: Two sets X and Y are said to be equipotent, and we write $X \sim Y$ if there exists a 1-1 correspondence $f: X \to Y$. In this case, we write $f: X \sim Y$.

Remark: Obviously, two finite sets are equipotent iff they have the same number of elements

Thrm 5: Let $\mathcal{S}$ be a set of sets and let $\mathcal{R}$ be a relation on $\mathcal{S}$ given by $X \mathcal{R} Y$ iff $X, Y \in \mathcal{S}$ and $X \sim Y$. Then $\mathcal{R}$ is an equivalence relation on $\mathcal{S}$.

PF: (a) $\forall X \in \mathcal{S}$, the identity $I_X : X \to X$ is 1-1 correspondence, so $X \sim X$ and hence $\mathcal{R}$ is reflexive relation.

(b) Suppose that $X \mathcal{R} Y$, then $X, Y \in \mathcal{S}$ and $\exists$ 1-1 correspondence $f: X \to Y$. Hence its inverse $f^{-1}: Y \to X$ is a 1-1 correspondence from Y to X and so, $Y \sim X$. Thus $Y \mathcal{R} X$ and $\mathcal{R}$ is symmetric relation.

c) If $X \mathcal{R} Y \wedge Y \mathcal{R} Z$, then $X, Y, Z \in \mathcal{J}$ and $\exists$ $f: X \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} Y \wedge g: Y \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} Z$. Then the composite $g \circ f: X \longrightarrow Z$ is 1-1 and onto fun and hence $X \sim Z$. That is, $X \mathcal{R} Z$ and $\mathcal{R}$ is transitive relation.

في المثال التالي ، الرمز $(0,1)$ ، $(-1,1)$ يستخدم للتعبير عن الفترات وليس كزوج مرتب في $\mathbb{R}^2$.

Example 3: Prove that

1) $(0,1) \sim (-1,1)$, and
2) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$. Deduce that $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

PF: نقوم بإثبات المثال بإيجاد دوال 1-1 و onto وذلك باستخدام مفاهيم السحب ومفاهيم الضغط والإزاحة في التفاضل والتكامل.

a) Let $f: (0,1) \longrightarrow (-1,1)$ defined by

$$f(x) = 2x - 1$$

[بمفاهيم السحب ، $f(x)=2x$ تمدد مدى الدالة $f(x)=x$ على المجال $(0,1)$ من $(0,1)$ إلى $(0,2)$ ومفهوم الإزاحة على y ، الدالة $f(x)=2x-1$ على المجال $(0,1)$ تقوم بإزاحة المدى من $(0,2)$ إلى $(-1,1)$].

Then f is 1-1 and onto (prove it). Hence $(0,1) \sim (-1,1)$.

b) The fun $g: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$g(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

is 1-1 correspondence.

[باستخدام نفس الأسلوب ، $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ونعمل ضغط للمجال بضرب x بـ $\frac{\pi}{2}$ نحصل على الدالة]

Therefor, $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

Now, by transitivity of $\sim$, $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

Thrm 6: Let X, Y, Z and W be sets such that $X \cap Z = \emptyset = Y \cap W$, and let $f: X \sim Y$ and $g: Z \sim W$. Then $f \cup g : X \cup Z \sim Y \cup W$.

PF: لأنه $X \cap Z = \emptyset$ ، فإنه باستخدام الملاحظة بعد نظرية 8 في sec 3.4
فإنه $f \cup g$ تكون بالتأكيد دالة.

$f \cup g$ is 1-1: Suppose that $f \cup g(x_1) = f \cup g(x_2) = y$. Then $x_1, x_2 \in X \cup Z$ and so both $x_1, x_2 \in X$ or $x_1, x_2 \in Z$ (If $x_1 \in X \wedge x_2 \in Z$ then $y = f(x_1) \in Y$ and $y = f(x_2) \in W$, so $Y \cap W \neq \emptyset$). In both case either $f \cup g(x_i) = f(x_i)$ or $f \cup g(x_i) = g(x_i)$. That is, either $f(x_1) = f(x_2)$ or $g(x_1) = g(x_2)$. in both cases, and since f, g are 1-1, we get $x_1 = x_2$.

$f \cup g$ is onto: Let $y \in Y \cup W$. Then either $y \in Y \vee y \in W$. If $y \in Y$, $\exists\, x \in X$ s.t. $f(x) = y$, so $(x, y) \in f \subseteq f \cup g$.
If $y \in W$, $\exists\, x \in Z$ s.t. $f(x) = y$ and $(x, y) \in g \subseteq f \cup g$.
In both cases, $y \in Im(f \cup g)$ and so $f \cup g$ is onto.

Thrm 7: If $X \sim Y$ and $Z \sim W$, then
$$X \times Z \sim Y \times W.$$

PF: Let $f: X \sim Y$ and $g: Z \sim W$. Define.
$$f \times g : X \times Z \longrightarrow Y \times W \text{ by}$$
$$(f \times g)(x, z) = (f(x), g(z)). \text{ Then.}$$

$f \times g$ is 1-1: Suppose that $(f \times g)(x_1, z_1) = (f \times g)(x_2, z_2)$. Then $(f(x_1), g(z_1)) = (f(x_2), g(z_2))$ and so $f(x_1) = f(x_2)$ $\wedge$ $g(z_1) = g(z_2)$. f, g are 1-1, so $x_1 = x_2 \wedge z_1 = z_2$.
Thus $(x_1, z_1) = (x_2, z_2)$.

$f\times g$ is onto: Let $(y,w)\in Y\times W$. So, $y\in Y$ and $w\in W$. Since f, g are onto fns, $\exists\, x, z \in X, Z$ resp. such that $f(x)=y \wedge g(z)=w$. Hence, $(x,z)\in X\times Z$ and $(f\times g)(x,z) = (f(x), g(z)) = (y,w)$. Thus $(y,w)\in Im(f\times g)$ and so $f\times g$ is onto.

Def: A set X is said to be *denumerable* if $X\sim \mathbb{N}$. A *Countable* set is a set which is either finite or denumerable.

Remark: If X is denumerable, then $\exists$ 1-1 corresp. $f:\mathbb{N}\longrightarrow X$. If we denote $f(1)=x_1$, $f(2)=x_2$, ---, $f(n)=x_n$, ---, then X may be alternatively denoted as

$$X=\{x_1, x_2, x_3, ---, x_n, ----\}.$$

If X is finite, by Thrm 4, either $X=\emptyset$ or $X\sim \mathbb{N}_K$ for some $K\in\mathbb{N}$. Similar to above, X can be alternatively denoted as

$$X=\{x_1, x_2, ---, x_K\}.$$

Therefor, X can not be finite $\wedge$ denumerable at the same time.

Thrm 8: Every infinite subset of a denumerable set is denumerable.

PF: Suppose that Y is an infinite subset of a denumerable $X=\{x_1, x_2, x_3, ---\}$.

Let n_1 be the smallest subscript for which $x_{n_1}\in Y$.

Since Y is infinite, then $Y - \{x_{n_1}\} \neq \emptyset$. Let n_2 be the smallest subscript for which $x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}\}$. Again $Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}\} \neq \emptyset$ and we take n_3 to be the smallest subscript for which $x_{n_3} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$. Continue this process, we can find $\forall k \in \mathbb{N}$

$$x_{n_k} \in Y - \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}\}.$$

[للتوضيح بمثال، إذا كانت Y مجموعة جزئية من $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ هي

$$Y = \{x_8, x_{10}, x_{30}, x_7, x_{35}, x_{41}, \dots\}$$

فإن $n_1 = 7$ ، $n_2 = 8$ ، $n_3 = 10$ ، $n_4 = 30$ ، ... وهكذا.]

Thus, we construct a 1-1 and onto fun

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow Y, \quad \text{defined by}$$

$$f(k) = x_{n_k}.$$

[إثبات أن f هي 1-1 وشاملة هو أمر سهل نتركه للطالب]

Corollary: Every subset of a countable set is countable.

PF: If X is countable, then X is either finite or denumerable.

If X is finite then any subset is finite and hence countable.

If X is denumerable, then every subset of X is either finite or infinite. If it is infinite then it is denumerable by above therm and hence countable.

Note Title 12-Apr-13

5.3 Examples and Properties of Denumerable Sets

Let $\mathcal{N}_e$, $\mathcal{N}_o$ be the set of even and odd natural number respectively. The two funs

$$f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}_e \quad \text{and} \quad g : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}_o$$

defined by $f(n) = 2n$ and $g(n) = 2n-1$ are 1-1 correspondence funs. So the sets $\mathcal{N}_e$ and $\mathcal{N}_o$ are denumerable sets. Moreover, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_e \cup \mathcal{N}_o$, the union is denumerable.

Lemma: If A is finite and B is denumerable, then $A \cup B$ is denumerable.

PF: Suppose WLOG that $A \cap B = \emptyset$. [If $A \cap B \neq \emptyset$, take $\grave{A} = A - B$, so $\grave{A}$ is finite & $\grave{A} \cap B = \emptyset$]

If $A = \emptyset$, then $A \cup B = B$ is denumerable. If $A \neq \emptyset$, set $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots\}$

Defined $f : \mathcal{N} \longrightarrow A \cup B$ by

$$f(1) = a_1, \ f(2) = a_2, \dots, f(k) = a_k, \ f(k+i) = b_i$$

$i = 1, 2, \dots$. Then we have that 1-1 fun, since $\forall a_i, b_j$, $a_i \neq b_j$, and f is onto, since $\forall a_i, b_j$, $\exists k = i$ or $k+j$, s.t. $f(k) = a_i$ or b_j. That is $\forall y \in A \cup B$, $\exists k \in \mathcal{N}$ s.t. $f(k) = y$. Thus f is 1-1 corresp.

Thrm 9: The union of two denumerable sets is denumerable

PF: Let A and B be two denumerable sets. Take the two cases:

Case 1: $A \cap B = \emptyset$. Since $A \sim \mathcal{N}$ and $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}_o$, then by composite funs, $A \sim \mathcal{N}_o$. Similarly $B \sim \mathcal{N}_e$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_e$, then $B \sim \mathbb{N}_e$. Since $A \cap B = \phi$, By Thrm 6 of sec 5.2, $A \cup B \sim \mathbb{N}_e \cup \mathbb{N}_o = \mathbb{N}$, which proves that $A \cup B$ is denumerable.

Case 2: If $A \cap B \neq \phi$. Set $C = A - B$. Then $C \cap B = \phi$, and $C \cup B = A \cup B$.

If C is finite, then by above Lemma, $C \cup B$ is denumerable.

If C is infinite, then by case 1, $C \cup B$ is denumerable. In both cases, $A \cup B = C \cup B$ is denumerable.

Corollary. Let $A_1, A_2, \cdots, A_n$ be denumerable sets. Then $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ is denumerable.

PF: Easy by using Thrm 9 and principle of mathematical induction.

Example 4: The set $\mathbb{Z}$ of all integers is denumerable.

PF: Take $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \cdots\}$.

Clearly both $\mathbb{Z}_+$ and $\mathbb{Z}_-$ are denumerable, so the set $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$ is denumerable.

[تمرين للطالب: أوجد مباشرة دالة ١-١، شاملة بين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$]

Thrm 10: The set $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is denumerable.

[Note that $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (2,1), (2,2), (2,3), \cdots, (3,1), (3,2), (3,3), \cdots, (4,1), \cdots\}$].

Consider the fun $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ given by $f(i,j) = 2^i 3^j$, $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

Claim: f is 1-1: To see this, suppose that $(i,j) \neq (k,s)$. Then either $i \neq k$ or $j \neq s$. Let $i \neq k$ (and similarly if $j \neq s$) say $i < k$. Then $k-i$ is natural number and so $2^{k-i} 3^s$ is even number. $(k-i > 0.)$

Thus $3^j \neq 2^{k-i}\, 3^s$ (3^j is not even).

Therefore $2^i 3^j \neq 2^k 3^s$. That is

$f(i,j) \neq f(k,s)$ and hence f is 1-1.

In this case, we prove that $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ and since $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ and infinite. By Thm 8 $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ is denumerable, and hence $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is denumerable.

[والمطلوب إثبات أن $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ مجموعة لانهائية]

Corollary: For each $k\in\mathbb{N}$, let A_k be a denumerable set satisfying $A_i \cap A_j = \phi$. Then $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ is denumerable.

PF: Note that

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{k\} \quad \text{------- (1)}$$

and

$f_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\{k\}$ defined by $f_k(n) = (n,k)$ is 1-1 correspondence fun. So, we have that

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}\times\{k\} \quad \text{----- (2)}$$

By given, $A_k \sim \mathbb{N}$, so by transitive of $\sim$ and from (2), we have that

$$A_k \sim \mathbb{N}\times\{k\}. \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$$

Let $g_k : A_k \sim \mathbb{N}\times\{k\}$, then the fun

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} g_k : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \longrightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\{k\}$$

is 1-1 correspondence fun. Thus $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \overset{(1)}{\sim} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

So it is denumerable.

Example: The set $\mathbb{Q}$ of all rational numbers is denumerable.

pf: $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ and } \gcd(p,q) = 1 \}$. Set $\mathbb{Q}_+ = \{ p/q \in \mathbb{Q} : p/q > 0 \}$ and $\mathbb{Q}_- = \{ -p/q : p/q > 0 \}$.

Clearly $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$ and $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$.
For this end, $\mathbb{Q}$ is denumerable if $\mathbb{Q}_+$ is denumerable.
Now, consider the fun $f : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ defined by $f(p/q) = (p,q)$ is 1-1 (easy to proved).
Then $\mathbb{Q}_+ \sim f(\mathbb{Q}_+) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Since $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_+$, then $\mathbb{Q}_+$ is infinite and so, $f(\mathbb{Q}_+)$ is infinite. So $f(\mathbb{Q}_+)$ is infinite subset of denumerable set $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, it is denumerable.

Hence $\mathbb{Q}_+$ is denumerable set. Threfor, the set of rational number $\mathbb{Q}$ is denumerable.

Thrm 11: Every infinite set contains a denumerable subset.

pf: Suppose X is an infinite set. Then $X \neq \emptyset$. Pick $x_1 \in X$. Then $X - \{x_1\}$ is infinite and so it is not empty. Pick $x_2 \in X - \{x_1\}$, then $x_1 \neq x_2$ and $X - \{x_1, x_2\}$ is infinite and $X - \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$.
Continue this process, we can find for each $k \in \mathbb{N}$, an element $x_k \neq x_i$ for $i = 1, 2, \ldots, k-1$ and $X - \{x_1, \ldots, x_k\} \neq \emptyset$. Thus the set $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ a denumerable subset of X. $\square$

Note Title 18-Apr-13

5.4 Nondenumerable Sets

أثبتنا سابقاً أنه كل مجموعة لا نهائية تحتوى بالتأكيد مجموعة جزئية تكون denumerable، وهذا بالتأكيد سيقود لتساؤل: هل جميع المجموعات الغير منتهية تكون denumerable ؟! لقد حاول العالم جورج كانتور إثبات ذلك عندما بدأ تطوير علم نظرية المجموعات عندها فاجأ نفسه بإثبات وجود مجموعات nondenumerable.

Thrm 12: The open interval $(0,1)$ of real numbers is a nondenumerable set.

PF:

مقدمة البرهان:

تعتمد فكرة البرهان على كتابة كل عدد حقيقي في الفترة $(0,1)$ بالصورة العشرية اللانهائية $x = .x_1x_2x_3x_4\ldots$ ويكون الأرقام العشرية x_i مكونة من الأعداد $0,1,2,3,4,\ldots,9$ فقط وبذلك يكون لأي عدد حقيقي تمثيل عشري وحيد. لاحظ أيضاً أنه الأرقام المعروفة بأنها مكونة من عدد محدود من الأعداد العشرية تكتب بالصورة اللانهائية الصحيحة مثل $\frac{1}{4} = 0.249999\ldots$ وليس $\frac{1}{4} = 0.25$.

وبالتالي فإنه $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$ و $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\ldots$ و $\frac{1}{5} = 0.19999\ldots$.

وعليه فإنه $x \neq y$ في $(0,1)$ حيث $x = .x_1x_2x_3\ldots$ و $y = .y_1y_2y_3\ldots$ يكونه إذا وجد رقم عشري في الموقع k (kth decimal) بحيث $x_k \neq y_k$ وهذه الحقيقة هي الركيزة الأساسية للبرهان.

بداية البرهان

Suppose to contrary that $(0,1)$ is denumerable and $f: \mathbb{N} \sim (0,1)$. So we may list all elements of $(0,1)$ as follows:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= .\,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots \\
f(2) &= .\,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \ldots \\
f(3) &= .\,a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \ldots \\
&\ \ \vdots \\
f(k) &= .\,a_{k1}\ a_{k2}\ a_{k3}\ a_{k4}\ \ldots a_{kk} \ldots \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

where $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$.

[سنقوم ببناء (إيجاد) عنصر z بالتأكيد موجود في $(0,1)$ ولكنه لا يساوي
أي من العناصر $\cdot a_{i1} a_{i2} a_{i3} \dots$ (المكونة لجميع عناصر $(0,1)$ مما يولد تعارض]

Consider $z = 0.z_1 z_2 z_3 z_4 \dots$ where $z_i = 1$ or 3

where:

$$z_i = \begin{cases} 1, & a_{ii} = 3 \\ 3, & a_{ii} \neq 3 \end{cases}$$

Clearly $z \in (0,1)$ since $z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Moreover, if $a_{11} = 3$, then $z_1 = 1$ and if $a_{11} \neq 3$, then $z_1 = 3$. In both cases, $z_1 \neq a_{11}$. Then we have $z = \cdot z_1 z_2 z_3 \dots \neq \cdot a_{11} a_{12} a_{13} \dots$

(إختلاف في رقم عشري واحد على الأقل ، هنا الرقم العشري الأول)

Similarly, if $a_{22} = 3$, then $z_2 = 1$ and if $a_{22} \neq 3$, then $z_2 = 3$. In both cases, $z_2 \neq a_{22}$.

Then $z = \cdot z_1 z_2 z_3 \dots \neq \cdot a_{11} a_{12} a_{13} \dots$

(إختلاف في رقم عشري واحد على الأقل ، هنا الإختلاف كان في الرقم العشري الثاني)

And so on, to get $z_k \neq a_{kk} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ and

so $z \neq \cdot a_{k1} a_{k2} \dots a_{kk} \dots$.

This proves that $z \neq f(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ and

so $z \notin f(\mathbb{N}) = (0,1)$ which is a contradiction

Corollary: The set $\mathbb{R}$ of all real numbers is nondenumerable.

PF: If $\mathbb{R}$ is denumerable, then $(0,1)$ is infinite subset of denumerable set $\mathbb{R}$, by Thrm 8 it must be denumerable which contradicts the above Thrm.

[هناك حل آخر في الكتاب مطلوب قراءته وفهمه ومراجعته]

Example: The set $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ of all irrational numbers is nondenumerable set.

PF: Previously, we prove that $\mathbb{Q}$ is denumerable. Suppose to contrary that $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ is denumerable. Then $\mathbb{R} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ is a union of two denumerable sets and by Thrm 9 it must be denumerable. This contradicts the above corollary.

ملاحظة : وجود مجموعات nondenumerable أثبت أن المجموعات اللانهائية ليست واحدة ، وأنه يوجد منها أنواع مختلفة ، وهو ما سندرسه لاحقاً في Ch 6 .

Ch 6: Cardinal Numbers and Cardinal Arithmetic

Note Title 18-Apr-13

6.1 The Concept of Cardinal Numbers

مقدمة: بشكل عفوي، مفهوم الأعداد يدخل إلى حياتنا مبكراً، حيث أننا نكون - على سبيل المثال - قادرين على الحكم بتساوي أعداد ثلاث تفاحات مع ثلاث برتقالات، و التفريق بين قلمين وأربعة أقلام، و الأعداد هي ولكن نشأت من مفاهيم التجارة المتبادلة بين الناس، ورغم أن مفهوم الأعداد موجود لدينا بالفطرة، إلا أن معظمنا ليس لديه تعريف دقيق ومحدد لماهية العدد. نحن نعلم أن $2+3=5$، وأن $3<4$ و $6\times7=42$، إلخ، لذا يسود الاعتقاد أننا في حقيقة الأمر لسنا بحاجة لتحديد تعريف للأعداد، وما يجب علينا معرفته هو مفاهيم التساوي بين الأعداد وترتيبها وكيفية استخدامها في العمليات الحسابية تماماً كلاعب الشطرنج، لا يركز على ماهية القطعة التي يحركها، وإنما يركز على كيفية أدائه في اللعبة.

وعليه، فإننا هنا لا نعرف مفهوم (Cardinal number)، وإنما نوجده كمفهوم ابتدائي يرتبط بحجم المجموعات وما تحتويه من أعداد.

[لاحقاً، يمكننا تعريف Cardinal numbers على أنها initial ordinals (Ch 8)]

Rules of Cardinality:

(C1) Each set is associated with a cardinal number, denoted by Card A, and for each cardinal number a, there is a set A with Card $A = a$.

(C2) Card $A = 0$ iff $A = \emptyset$.

(C3) If A is a nonempty finite set, i.e., $A \sim \mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ for some $k \in \mathbb{N}$, then Card $A = k$.

(C4) For any two sets A and B, Card A = Card B iff $A \sim B$.

ملاحظات : ١- نلاحظ أن القاعدتين C_2, C_3 تعرفان الـ Cardinal numbers
للمجموعات المنتهية على أنها عدد عناصر هذه المجموعات.

2- القاعدتان C_1, C_4 هما مسلمتان تسمى axiom of cardinality.

3- في البداية، قد نجد صعوبة في تقبل وفهم القاعدتين C_1 ، C_4
لأنهما لا تمدنا بالكثير عن card A عندما A تكون مجموعة غير منتهية،
لكن هذه الصعوبة ستتلاشى كلما تقدمنا في دراسة هذا المفهوم.

4- في هذه المرحلة يمكننا القول أن cardinal number للمجموعة هي خاصية
مشتركة بين المجموعة وبين جميع المجموعات الأخرى التي تكون equipotent معها.

Examples:

1) Give three different cardinal numbers which are not natural numbers.

2) Let A be a set and $a \notin A$. If $\text{Card}(A \cup \{x\}) = \text{Card}\, A$, prove that A is infinite.

3) Prove that if $\text{card}(A) = \text{card}(B) = \text{card}(\mathbb{N})$, then $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, B$.

6.2 Ordering of the Cardinal Numbers

Note Title 24-Apr-13

(The Schröder – Bernstein Thrm)

Def: The cardinal number of a finite set is called a finite cardinal number. The cardinal number of an infinite set is called a transfinite cardinal number.

ملحوظة: ① نلاحظ أنه حسب (C2) و (C3) فإن finite cardinal numbers هي بالتحديد الأعداد الصحيحة الغير سالبة. لذا فإن هذه الأعداد يوجد عليها ترتيب (order) هو الترتيب الطبيعي المعروف:

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < k < k+1 < \cdots$$

② في حالة الـ transfinite cardinal numb. فإن الفرضية (C4) أخبرتنا متى تكون هذه الأرقام متساوية ومتى تكون غير متساوية. هنا وفي حالة عدم التساوي، سنعرف ماذا يعني أن يكون أحدهما أقل من الآخر.

Def: Let A and B be sets. Then Card A is said to be less than or equal to Card B, denoted by card $A \leq$ Card B, if the set A is equipotent to a subset of B. If Card $A \leq$ Card B and Card $A \neq$ Card B, then we write Card $A <$ Card B.

ملحوظات: ① من التعريف السابق يمكننا اثبات الحقيقة التالية

$$(\forall A, B \text{ sets})(\text{Card } A \leq \text{Card } B \text{ iff } \exists \text{ a fun } f: A \xrightarrow{1-1} B)$$

[To see this, if Card $A \leq$ Card B, then $\exists\, C \subseteq B$ and fun f s.t. $f: A \underset{\text{onto}}{\xrightarrow{1-1}} C \Rightarrow f: A \xrightarrow{1-1} B$. On the other hand, if $\exists\, f: A \xrightarrow{1-1} B$, then take $C = \text{Im}(f)$. Hence the fun $f: A \underset{\text{onto}}{\xrightarrow{1-1}} C$ and so $A \sim C \subseteq B \Rightarrow$ Card $A \leq$ Card B]

② لاحظ أنه إذا طبقنا التعريف السابق على المجموعات المنتهية ،
فإن الترتيب الناتج سيكون مطابقاً لما تم الحديث عنه في الملاحظة السابقة
النقطة ① والترتيب سيكون هو الترتيب الطبيعي (Do it) .

[A, B are finite $\Longrightarrow A \sim \mathbb{N}_k$, $B \sim \mathbb{N}_n$. If $\exists f: A \xrightarrow{1-1} B$
then $k \leq n$ and $\text{card } A = k \leq n = \text{card } B$.].

Example: $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{R})$

Pf: Since $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow \text{Card } \mathbb{N} \leq \text{card } \mathbb{R}$.

Now, $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$, so

$\text{Card } \mathbb{N} \neq \text{card } \mathbb{R}$. Hence $\text{Card } \mathbb{N} \leq \text{card } \mathbb{R}$.

ملاحظة: عندما تكون $A \sim B_1 \subseteq B$ و $B \sim A_1 \subseteq A$. في هذه الحالة
تكون $\text{Card } A \leq \text{card } B$ و $\text{Card } B \leq \text{card } A$. رغم ذلك ، فإنه ليس واضحاً
لنا كيف يمكن مقارنة $\text{card}(A)$ و $\text{Card}(B)$ ، لقد كان لدى جورج كانتور قناعة
أنه في هذه الحالة يكون $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ وأنه يوجد دالة $f: A \sim B$.
واضحاً وفي عام 1890 م هذه القناعة تم إثباتها بشكل منفصل من قبل عالمين
هما Bernstein و Schröder في نظرية مشهورة سميت باسمهما .

Thrm 1: (Schröder-Bernstein Thrm)

If A and B are sets such that A is equipotent to a subset of B, and B is equipotent to a subset of A, then A and B are equipotent.

[يمكن إعادة صياغة النظرية السابقة بالصورة المكافئة التالية :
إذا : وجدت دالة $f: A \xrightarrow{1-1} B$ و دالة $g: B \xrightarrow{1-1} A$)
فإنه بالتأكيد توجد دالة $f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$.

وصورة ثالثة مكافئة هي : إذا كان $\text{Card } A \le \text{card } B$ و $\text{Card } B \le \text{Card } A$
فإن $\text{Card } A = \text{Card } B$] .

قبل البدء في برهان نظرية 1) سنقوم أولاً بسرد النظرية التالية:

Lemma: If $B \subseteq A$ and $\exists\, f : A \xrightarrow{1-1} B$, then there is a bijection $h : A \sim B$.

Proof (of Thrm 1): Suppose that $A_0 \subseteq A$ and $B_0 \subseteq B$ s.t. $f : A \sim B_0$ and $g : B \sim A_0$. Then the restrected fun $g|_{B_0} : B_0 \longrightarrow A_0$ is 1-1 fun. So the composition fun $(g|_{B_0}) \circ f : A \longrightarrow A_0$ is 1-1 fun. By above Lemma, $\exists$ a bijection $h : A \sim A_0$. Since $g^{-1} : A_0 \sim B$, then the composition fun $g^{-1} \circ h : A \longrightarrow B$ is 1-1 and onto fun. Hence $A \sim B$ $\square$.

Corollary: If A and B are sets s.t. $\text{card}(A) \le \text{card}(B)$ and $\text{Card}(B) \le \text{card}(A)$, then $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

من الواضح جداً أنه لدينا القليل عن (transfinite card. num. حتى اللحظة / نعرف منهم فقط عددين مختلفين هما $\text{card } \mathbb{R}$, $\text{Card } \mathbb{N}$) و السؤال هنا هل هنالك أعداد transfinite card. num. غيرهما؟ بمعنى هل توجد مجموعات لا نهائية A بحيث $A \nsim \mathbb{N}$ و $A \nsim \mathbb{R}$ ؟ في الفصل القادم سنوجد عدد لا نهائي من هذه الأعداد.

سؤال آخر / في حالة finite card. num.: إذا كان $n \neq k$ يكون إما $n < k$ أو $k < n$. هل هذا يبقى صحيحاً في حالة transfinite card. num. ؟ فإذا كان a, b عددين transfinite card. num. ، هل بالضرورة $a < b$ أو $b < a$ ؟ بمعنى لأي مجموعتين A / B ، هل دائماً توجد دالة $f : A \xrightarrow{1-1} B$ أو $f : B \xrightarrow{1-1} A$. الإجابة هو نعم صحيح / ولكن البرهان في Ch 7 وهو غير مطلوب في هذا المساق.

6.3 Cardinal Number of a Power Set (Cantor's Thrm)

Recall that $\mathcal{P}(X)$ the power set of X is the set of all subsets of X; that is, $A \in \mathcal{P}(X) \equiv A \subseteq X$.
If $X = \phi$, then $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$.

للتسهيل ، سنرمز لـ Card A بالرمز $|A|$.

Thrm 2: (Cantor's Thrm)
If X is a set, then $\text{Card } X < \text{card}(\mathcal{P}(X))$.

PF: If $X = \phi$, then $\mathcal{P}(X) = \{\phi\}$. So, we have that $|X| = 0$ and $|\mathcal{P}(X)| = 1$, and so $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Now, suppose that $X \neq \phi$.
Consider the fun $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ defined by $f(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Clearly, if $x_1 \neq x_2$, the two sets $\{x_1\} \neq \{x_2\}$ and hence f is 1-1 fun. So

$|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ ------- (1)

Claim: $X \not\sim \mathcal{P}(X)$.

To see this, suppose to contrary that there is a bijection $g: X \sim \mathcal{P}(X)$. Consider the set $S = \{x \in X : x \notin g(x)\}$. Since $S \in \mathcal{P}(X)$ and g is onto, $\exists\, e \in X$ s.t. $g(e) = S$.

We have two cases:

Case 1: $e \in S$. In this case, and by the definition of S, $e \notin g(e) = S$ which is a contradiction.

Case 2: $e \notin S$. So, $e \notin S = g(e)$. Again, by def. of S, we have that $e \in S$ which is a contradiction.

In both cases, we have a contradiction and the claim is true. Thus, $X \not\sim P(X)$ ---- ②

① and ② $\Longrightarrow$ $|X| < |P(X)|$ $\square$.

ملاحظة: من خلال نظرية كانتور (النظرية السابقة) وبعد إثبات أنه لأي مجموعة X، فإنه $|X| < |P(X)|$، فإنه من الطبيعي أن نسأل ما إذا كان هناك x، card. num. بحيث المجموعة الجزئية $X = \mathbb{N}$،

$$|\mathbb{N}| < x < |P(\mathbb{N})| \; ?$$

هذه المسألة تسمى Continuum problem وسيتم الحديث عنها في sec 8 .

نلاحظ أيضاً أن النظرية (2) توضح أنه هناك عدد لا نهائي من الـ transfinite card. num. غير $|\mathbb{N}|$ و $|\mathbb{R}|$، وهي المتتابعة اللانهائية التالية:

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) < \operatorname{card}(P(\mathbb{N})) < \operatorname{card}(P(P(\mathbb{N}))) < \cdots$$

Examples: Let A be a denumerable set. Prove that $P(A)$ is nondenumerable.

PF: A is denumerable, so $A \sim \mathbb{N}$. This implies that $|A| = |\mathbb{N}|$. By Thrm (2) $|A| < |P(A)|$. So $|\mathbb{N}| < |P(A)|$. Hence $\operatorname{card} \mathbb{N} \neq \operatorname{card} P(A)$. That is $\mathbb{N} \not\sim P(A)$. Therefore $P(A)$ is nondenumerable set.

6.4 Addition of Cardinal Numbers

إذا كان لدينا k, l two finite card. num.، فإن العمليات $k+l$ و kl لها معنى. لذا فإننا سنحاول هنا توليد مفهوم (الجمع) لـ card. num. بحيث يشمل transfinite مدرجة، و تتطابق مع المعنى الموجود لـ finite card. num.

Def: Let a, b be cardinal numbers, and let A and B be two disjoint sets s.t. card $A = a$ and card $B = b$. The **cardinal sum** $a+b$ is the cardinal number of the set $A \cup B$; That is $a+b = |A \cup B|$.

ملاحظة هامة: التعريف السابق يلزمه إثبات أنه تعريف جيد (well-defined)، بأن نثبت أنه لأي عددين a, b (cardinal) هناك مجموعتين A و B disjoint بحيث card $A = a$ و card $B = b$، وإثبات أنه إذا كان هناك أكثر من خيار، كأن يكون هناك card $A' = a$، card $B' = b$ لمجموعتين أخريين فإن card$(A \cup B) =$ card$(A' \cup B')$، وبالتالي $a+b$ هو مفهوم لا يعتمد على اختيار المجموعات وبالتالي يكون معرف تعريفاً "جيداً"، لذا فإننا بحاجة لإثبات النظرية التالية:

Thrm 3: Let a and b be cardinal numbers. Then

(a) There exist disjoint sets A and B such that card $A = a$ and card $B = b$.

(b) If A, B, A' and B' are sets such that card $A =$ card A' and card $B =$ card B', and if $A \cap B = A' \cap B' = \phi$, then $|A \cup B| = |A' \cup B'|$

PF: (a) By (C1); the rule 1 of cardinality, there exist two sets A and B (need not be disjoint) such that card $A = a$, and card $B = b$. Define the new sets $\mathcal{X} = A \times \{0\} = \{(x,0) : x \in A\}$ and $Y = B \times \{1\} = \{(y,1) : y \in B\}$. Then $\mathcal{X} \cap Y = \phi$ and so $\mathcal{X}, Y$ are disjoint. Moreover, $\mathcal{X} \sim A$ and $Y \sim B$, so $|\mathcal{X}| = |A| = a$ and $|Y| = |B| = b$.

b) Since $A \sim A'$ and $B \sim B'$, and $A \cap B = \phi$, $A' \cap B' = \phi$, by Thrm 6 of ch 5, we have that $A \cup B \sim A' \cup B'$. Equivalently, $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

[بعد إثبات هذه النظرية تكون عملية الجمع لـ card. num. معرفة تعريفاً جيداً
وهو تعريف يتوافق مع الجمع العادي المعروف في حالة finite card. num. ويعطي
مفهوم جديد لعملية الجمع في transfinite card. num.]

Thrm 4: Let x, y, z be arbitrary cardinal numbers. Then

(a) $x + y = y + x$ (Commutativity)

(b) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (Associativity)

PF: Let A, B and C are disjoint sets s.t. $|A| = x$, $|B| = y$ and $|C| = z$. Since $A \cup B = B \cup A$, and $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, we have both (a) and (b). □

Def: The symbol $\aleph_0$ (read aleph-null) is used to be the cardinal number of the denumerable sets. And the symbol $\mathbb{C}$ is used to be the cardinal number of the set $\mathbb{R}$. That is $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ and $|\mathbb{R}| = \mathbb{C}$.

Example: Find the cardinal sum of the following:

1) $4+3$

2) $\aleph_0 + \aleph_0$

3) $\aleph_0 + K$ for some finite cardinal K.

4) $\aleph_0 + \mathfrak{c}$.

5) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c}$

<u>Sol</u>: يتم حل مثل هذه الأسئلة بالبحث عن مجموعتين منفصلتين A ، B لهما card. numbers المراد جمعها ، ويكون الجمع هو $\text{Card}(A \cup B)$. لذا فإنه يمكن تنفيذ الحل بأكثر من طريقة حسب اختيارك للمجموعات ولكن النتيجة واحدة .

1) Take $A = \mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ and Let $B = \{5, 6, 7\}$.
So $|A| = 4$ and $|B| = 3$, and $A \cap B = \emptyset$.
so $4 + 3 = |A \cup B| = |\{1, 2, \ldots, 7\}| = |\mathbb{N}_7| = 7$.

2) Take $A = \mathbb{N}_e$ and $B = \mathbb{N}_o$. Since A and B are denumerable, $|A| = |B| = \aleph_0$. Moreover $A \cap B = \emptyset$. Hence $\aleph_0 + \aleph_0 = |A \cup B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

3) Let $A = \mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, and take the set $B = \{k+1, k+2, k+3, \ldots\}$. Clearly B is infinite subset of the denumerable set $\mathbb{N}$, so it is denumerable.
$|A| = k$, $|B| = \aleph_0$, and $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$
$$\aleph_0 + k = |A \cup B| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

4) Take $A = (0,1)$ and $B = \mathbb{N}$. Since $(0,1) \sim \mathbb{R}$, $|A| = \mathfrak{c}$. Moreover $|B| = \aleph_0$ and $A \cap B = \emptyset$.
Set $S = (0,1) \cup \mathbb{N}$, so by the def. we have that $\aleph_0 + \mathfrak{c} = |A \cup B| = |S|$.
Since $\mathbb{R} \sim (0,1) \subseteq S$, and $S \sim S \subseteq \mathbb{R}$, by Schröder-Bernstein Thrm, $\mathbb{R} \sim S$ and $|S| = \mathfrak{c}$
Thus, $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

5) The fun $f : (0,1) \longrightarrow (1,2)$ defined by

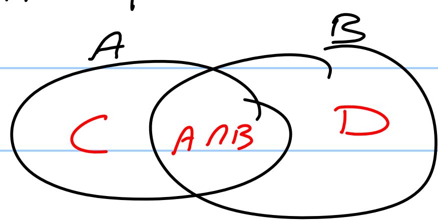
$f(x) = x+1$ is 1-1 and onto, so $(0,1) \sim (1,2)$.
and $|(0,1)| = |(1,2)| = \mathbb{C}$.
Take $A = (0,1)$ and $B = (1,2)$. So $A \cap B = \phi$
and $|A| = |B| = \mathbb{C}$. Let $S = A \cup B$. Clearly
(as part (4) above), $\mathbb{R} \sim S$ and $|S| = \mathbb{C}$. Now,

$$\mathbb{C} + \mathbb{C} = |A \cup B| = |S| = \mathbb{C}.$$

Example: Prove that $\forall A, B$ sets,

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

PF: بالإستعانة بأشكال Ven .



Take

$$C = A - (A \cap B) \quad \text{and} \quad D = B - (A \cap B).$$

So $A = C \cup (A \cap B)$, and $B = D \cup (A \cap B)$.
Clearly C and $A \cap B$ are disjoint and similarly for D and $A \cap B$. Hence $|A| = |C| + |A \cap B|$ and $|B| = |D| + |A \cap B|$. Consider

$A \cup B = C \cup (A \cap B) \cup D$. Since C, D, and $A \cap B$ are disjoint sets, $|A \cup B| = |C| + |A \cap B| + |D|$,

(أضف لكلا الطرفين $|A \cap B|$ لتحصل على)

$$\Rightarrow |A \cup B| + |A \cap B| = (|C| + |A \cap B|) + (|D| + |A \cap B|)$$
$$= |A| + |B|.$$

6.5 Multiplication of Cardinal Numbers

Def: For any cardinal numbers a and b, the **cardinal product ab** is defined to be the cardinal number of the Cartesian product $A \times B$, where

$$\text{card } A = a \text{ and } \text{card } B = b.$$

ملحوظة: التعريف السابق يلزمه إثبات أنه تعريف جيد (well-defined)
وذلك بسبب إمكانية تعدد إختيار A و B كالتالي:

Suppose that $|A| = |A'| = a$ and $|B| = |B'| = b$. Then $A \sim A'$ and $B \sim B'$. By Thrm 7 of ch 5,

$$A \times B \sim A' \times B' \Longrightarrow |A \times B| = |A' \times B'|$$

وعليه فإنه لا فارق من حساب ab عند استخدام A, B أو A', B'
وبالتالي التعريف يكون well-defined.

بشكل عام، فإنه من المعروف كيف يمكن حساب ab عندما تكون كلا
الرقمين a, b هما finite cardinal، لذا فإنه الإهتمام هنا سيكون
على حساب ab عندما يكون أحدهما أو كلاهما transfinite cardinal.

Thrm 5: Let x, y, and z be arbitrary cardinal numbers. Then:

(a) $xy = yx$ (Commutativity).

(b) $(xy)z = x(yz)$ (Associativity).

(c) $x(y+z) = xy + xz$ (Distributivity).

PF: (a) For any set A, B, we have that $A \times B \sim B \times A$ under the map $(x,y) \to (y,x)$, So if $|A| = x$ and $|B| = y$ then

$$xy = |A \times B| = |B \times A| = yx.$$

(b) Similar to (a) using the fact that

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C) \sim A \times B \times C$$

(c) Let A, B, C be sets such that

$$|A| = x, \quad |B| = y, \quad |C| = z \quad \text{and } B \cap C = \phi$$

Since $B \cap C = \phi$, we get that $(A \times B) \cap (A \times C) = \phi$. Moreover, $|B \cup C| = y + z$, and $|A \times B| = xy$, $|A \times C| = xz$. So,

$$|(A \times B) \cup (A \times C)| = xy + xz \quad ---- \quad (1)$$

Now, $x(y+z) = |A \times (B \cup C)|$

$$= |(A \times B) \cup (A \times C)| \overset{(1)}{=} xy + xz.$$

Example: Let x be an arbitrary cardinal number. Evaluate (a) $1 \cdot x$

(b) $0 \cdot x$

(c) $\aleph_0 \cdot \aleph_0$

Sol: (a) Let A be a set s.t. $|A| = x$. Take $B = \{1\} \Rightarrow |B| = 1$ so,

$$1 \cdot x = |B \times A| = |\{1\} \times A| = |A| = x$$

($\{1\} \times A \sim A$ by the 1-1 and onto map $f(1, t) = t$)

(b) If $A = \phi$, B is a set s.t. $|B| = x$, then $0 \cdot x = |A \times B| = |\phi \times B| = |\phi| = 0.$

(c) Since $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, we have that

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Example: Prove that $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Pf: Let $A = B = (0,1) \Longrightarrow |A| = |B| = \mathfrak{c}$.

Claim: $(0,1) \times (0,1) \sim (0,1)$.

To see this, write any $x \in (0,1)$ in its infinite decimal expansion, so that – for example – $\frac{1}{2} = 0.49999\cdots$

Define $f : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$ by

$$f(0.x_1x_2x_3\cdots, 0.y_1y_2y_3\cdots) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots$$

(For example $f(0.124369\cdots, 0.30142\cdots) = 0.13204134629\cdots$)

Then f is 1–1 and onto.

To see this, suppose that

$$f(0.x_1x_2\cdots, 0.y_1y_2\cdots) = f(0.z_1z_2\cdots, 0.w_1w_2\cdots) \Longrightarrow$$

$$0.x_1y_1x_2y_2\cdots = 0.z_1w_1z_2w_2\cdots \Longrightarrow x_i = z_i \text{ and } y_i = w_i$$

$$\Longrightarrow (0.x_1x_2\cdots, 0.y_1y_2\cdots) = (0.z_1z_2\cdots, 0.w_1w_2\cdots).$$

$\Longrightarrow f$ is 1–1.

Moreover, if $z = 0.z_1z_2z_3z_4\cdots \in (0,1)$, then $x = 0.z_1z_3z_5\cdots$ and $y = 0.z_2z_4z_6\cdots$ are in $(0,1)$ and $f(x,y) = z$. Thus f is onto, and we prove the claim. Therefore

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = |(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)| = \mathfrak{c}.$$

6.6 Exponentiation of Cardinal Numbers

نعلم أنه إذا كان a, b أعداد طبيعية ، فإنه b^a لها معنى حسابي معروف وتقرأ (ath power of b) وقيمته $b^a = b.b.b. \dots .b$ (a factor) . يمكننا النظر لها على أنها حالة تعميم للحالة الخاصة $\times$ للضرب الديكارتي $A \times A$ حيث $|A| = b$ و $a = 2$. لكن هذه الفكرة لا يمكن تطبيقها في حالة كانت a هي transfinite card. ، لذا فإننا بحاجة لفكرة تعميم أخرى يمكن تطبيقها على حالة transfinite card.

في حالة finite card. num. ، إذا كانت A ، B مجموعتين بحيث $|A| = a$ ، $|B| = b$ ، فإنه عدد الدوال التي يمكن تكوينها من A إلى B هو b^a ، وعليه فإنه هذه الفكرة يمكن تعميمها للحالة transfinite card. لنحصل على التعريف التالي :

Def: Let a, b be cardinal numbers with $a \neq 0$. Let A and B be sets such that $|A| = a$ and $|B| = b$. Denote the set of all funs from A to B by B^A. We define $b^a = |B^A|$.

ملاحظة : مرة أخرى ، هذا التعريف يحتاج لإثبات أنه well-defined بأنه كان لدينا $|A| = |A'| = a$ ، $|B| = |B'| = b$ ، فإنه يجب إثبات أن $|B^A| = |B'^{A'}|$ وبالتالي فإنه b^a معرف ولا يعتمد على اختيارات المجموعات . النظرية التالية تثبت أن التعريف السابق جيد .

Thrm 6: Let A, B, X, and Y be sets such that $A \sim X$, $B \sim Y$. Then $B^A \sim Y^X$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

PF: Let $g: A \sim X$, $h: B \sim Y$. Define a fun $\psi: B^A \longrightarrow Y^X$ by that:

if $f \in B^A$ then $\psi(f) \in Y^X$ which is a fun from X to Y $[\psi(f): X \longrightarrow Y]$ defined by $[\psi(f)](x) = h \circ f \circ g^{-1}(x)$. That is $\psi(f) = h \circ f \circ g^{-1} : X \longrightarrow Y$.

Then ψ is a 1-1 and onto fun from B^A to Y^X (prove it). Hence $B^A \sim Y^X$.

Example: Let A be a set. Find $|\wp(A)|$.

sol: Take $B = \{0,1\} \Longrightarrow |B| = 2$, and so we have $|B^A| = 2^{|A|}$.

For any subset $C \subseteq A$, the characteristic fun

$\chi_C : A \longrightarrow \{0,1\}$ defined by

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0, & x \notin C \\ 1, & x \in C \end{cases}$$

is a fun in B^A. For this end, define a fun

$$F : \wp(A) \longrightarrow B^A \quad \text{by}$$

$F(C) = \chi_C$. Then F is 1-1 and onto.

To see this, suppose that $F(C_1) = F(C_2)$

$\Longrightarrow \chi_{C_1} = \chi_{C_2}$.

if $x \in C_1 \Rightarrow \chi_{C_1}(x) = 1$ and so $\chi_{C_2}(x) = 1$

This implies that $x \in C_2 \Longrightarrow C_1 \subseteq C_2$. Similarly $C_2 \subseteq C_1$. Hence $C_1 = C_2 \Longrightarrow F$ is 1-1.

To prove it is onto, let $f: A \longrightarrow B$ by any fun in B^A. Define $C = \{x \in A : f(x) = 1\}$.

Then we claim that $f = \chi_C(x)$, since if $x \in C$, then by its definition, $f(x) = 1 = \chi_C(x)$.

if $x \notin C$, then by its def. $f(x) \neq 1 \Rightarrow f(x) = 0$

($B = \{0,1\}$, and $f(x) \in B$) $\Longrightarrow f(x) = \chi_C(x) = 0$.

Therefore $f = \chi_C$ and $f = F(C)$.

$$\text{Hence } |\mathcal{P}(A)| = |B^A| = 2^{|A|}.$$

ملاحظة: من المثال السابق يمكن الحصول على بعض الحقائق التالية:

Take $A = \mathbb{N} \Longrightarrow |A| = \aleph_0$, and so

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$ Since $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$,

we have that $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$

مثلاً: $A = \mathbb{R} \Longrightarrow |A| = \mathfrak{c}$ and $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$

Moreover, $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$.

Thrm 7: Let a, x, and y be cardinal numbers, then $a^x a^y = a^{x+y}$.

PF: Let A, X, Y be sets s.t. $|A| = a$, $|X| = x$, $|Y| = y$ and $X \cap Y = \phi \Longrightarrow |X \cup Y| = x + y$.

[الهدف المنشود هو إثبات أنّ $A^X \times A^Y \sim A^{X \cup Y}$]

Let $(f,g) \in A^{X} \times A^{Y}$, then we have that $f \in A^{X}$, $g \in A^{Y}$ or $f : X \longrightarrow A$ and
$g : Y \longrightarrow A$

Since $X \cap Y = \phi$, then $f \cup g : X \cup Y \longrightarrow A$ is surly a fun from $X \cup Y$ to $A \cup A = A$. So, $f \cup g \in A^{X \cup Y}$. Now, define

$$F : A^{X} \times A^{Y} \longrightarrow A^{X \cup Y} \quad \text{by}$$

$$F(f,g) = f \cup g.$$

Now, F is 1-1 and onto (prove it),

$\left[\ f_1 \cup g_1 = f_2 \cup g_2\ ,\quad f_1 \cup g_1 = \begin{cases} f_1 & x \in X \\ g_1 & x \in Y \end{cases},\quad f_2 \cup g_2 = \begin{cases} f_2 & x \in X \\ g_2 & x \in Y \end{cases}\ \right]$

So $\quad A^{X} \times A^{Y} \sim A^{X \cup Y}$. $\quad$ ——— $(*)$

$$\Rightarrow |A^{X} \times A^{Y}| = |A^{X}||A^{Y}| = a^{x} \cdot a^{y} \overset{(*)}{=} |A^{X \cup Y}|$$
$$= |A|^{|X \cup Y|} = a^{x+y}. \qquad \square$$

Thrm 8. Let x, y, and z be cardinal numbers. Then $(z^{y})^{x} = z^{yx}$.

PF: Exercise.

Recall that, for $A \times B$, we define A-projection and B-projection maps as follows:

$$P_A : A \times B \longrightarrow A, \quad P_A(a,b) = a, \quad \text{and}$$
$$P_B : A \times B \longrightarrow B, \quad P_B(a,b) = b.$$

Thrm 9: Let a, b, and x be cardinal numbers. Then
$$(ab)^x = a^x b^x$$

PF: Let A, B, and X be sets with cardinal numbers a, b and x respectively. Let $f \in (A \times B)^X$, then $f : X \longrightarrow A \times B$. Hence $\forall x \in X$, $\exists (a,b) \in A \times B$ s.t. $f(x) = (a,b)$. Note that

$$P_A \circ f : X \longrightarrow A \text{ and } P_B \circ f : X \longrightarrow B,$$

So $P_A \circ f \in A^X$ and $P_B \circ f \in B^X$. $\quad$ -----(*)

Now, define $\psi : (A \times B)^X \longrightarrow A^X \times B^X$ by

$$\psi(f) \overset{(*)}{=} \left(P_A \circ f, P_B \circ f \right) \in A^X \times B^X.$$

Then ψ is 1-1 and onto (Prove it).

Hence $|(A \times B)^X| = |A^X \times B^X| \Longrightarrow$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x \qquad \square.$$

Thrm 10: $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

PF: سنقوم ببرهان هذه النظرية في خطوتين:

اثبات أن $\mathfrak{c} \le 2^{\aleph_0}$ بإيجاد دالة 1-1 بين $\mathbb{R}$ و $P(\mathbb{Q})$.

ثم اثبات أن $2^{\aleph_0} \le \mathfrak{c}$ بإيجاد دالة 1-1 بين $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ و $\mathbb{R}$.

Firstly, consider the fun $f : \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{Q})$ defined by $f(a) = \{ r \in \mathbb{Q} : r < a \}$.

This fun is 1-1. To see this, suppose $a \neq b$ in $\mathbb{R}$, and suppose $a < b$ (Similarly if $b < a$)

Then $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ s.t. $a < r < b$ (density of $\mathbb{Q}$)

$\Longrightarrow$ $r \in f(b)$ (by its definition) and

$r \notin f(a)$, $\Longrightarrow f(a) \neq f(b)$.

$$\Longrightarrow \quad |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| \Longrightarrow$$

$$\mathfrak{c} \leq 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0} \quad \text{----} \quad (1)$$

To prove the reverse inequality, note that if $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, then $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$. Then the element $0.f(1)f(2)f(3)f(4)\cdots \in (0,1)$ $[f(i) = 0 \text{ or } 1]$

Note that $f \neq g$ in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, then $\exists\, n \in \mathbb{N}$ s.t.

$$f(n) \neq g(n) \Longrightarrow$$

$$0.f(1)f(2)\cdots f(n)\cdots \neq 0.g(1)g(2)\cdots g(n)\cdots$$

Now, define $\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow (0,1)$ by

$$\psi(f) = 0.f(1)f(2)f(3)\cdots .$$

Then ψ is 1-1 fun, and so $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |(0,1)| = \mathfrak{c}$

But $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$. Then

$$2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c} \quad \text{-----} \quad (2)$$

(1) and (2) implies that $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

ملحوظة: بناءً على هذه الملحوظة، فإنه power set لأي مجموعة denumerable (مثل $\mathbb{N}$) تكون equipotent مع $\mathbb{R}$. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R})$.

Corollary: $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

PF: $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. $\square$

Note Title 06-May-13

6.7 Further Examples of Cardinal Arithmetic

Examples:

1) Prove that $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

Sol: لقد تم اثبات هذا السؤال سابقاً / وهنا سنقوم بعمل اثبات آخر له .

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \Rightarrow \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

2) Find the cardinal number of the set $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Sol: Since $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} \Rightarrow |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$, where

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}.$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}}$$

$$= 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$$

[علينا هنا إستنتاج أن $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim P(\mathbb{R})$ ، أي أننا نوجد دالة $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow P(\mathbb{R})$ تكون 1-1 , onto].

3) Define the sets $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ to be the set of all cont. fun̲s from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$,

$C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ to be the set of all continuous fun̲s from $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{R}$, and

$K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ to be the set of all constant fun̲s from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Prove that

$$|K(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = |C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| = |C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})| = \mathfrak{c}.$$

PF: Firstly, note that if $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is cont., then its restricted fun $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ is also cont. Hence

We can define a map $\psi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$

by $\psi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$. This fun is well defined

fun and it is 1-1 (البرهان غير مطلوب). This implies that $|C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| \leq |C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})|$.

Moreover, $C(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
|C(\mathbb{R}, \mathbb{R})| &\leq |C(\mathbb{Q}, \mathbb{R})| \\
&\leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| \\
&= \mathfrak{c}^{\aleph_0} \\
&= (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \\
&= 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \\
&= 2^{\aleph_0} \\
&= \mathfrak{c}. \qquad ---- (*)
\end{aligned}
$$

One the other hand if $f_a \in K(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is the constant fun $f_a(x) = a$. Then we can define a 1-1 and onto fun

$\psi : K(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ by

$\psi(f_a) = a$. Then

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |K(\mathbb{R}, \mathbb{R})|.$$

Since any constant fun is continuous,

then $K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$$\mathfrak{c} = |K(\mathbb{R},\mathbb{R})| \leq |C(\mathbb{R},\mathbb{R})| \overset{(*)}{\leq} \mathfrak{c}$$

$$\Longrightarrow \quad |C(\mathbb{R},\mathbb{R})| = \mathfrak{c} = |C(\mathbb{Q},\mathbb{R})|.$$

4) Define $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ to be the set of all diff fun from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Find

$$|D(\mathbb{R},\mathbb{R})|.$$

Sol: Each constant fun is differentiable $\Longrightarrow$ $K(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq D(\mathbb{R},\mathbb{R})$, and each differentiable fun is cont. $\Longrightarrow$ $D(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow \mathfrak{c} = |K(\mathbb{R},\mathbb{R})| \leq |D(\mathbb{R},\mathbb{R})| \leq |C(\mathbb{R},\mathbb{R})| = \mathfrak{c}.$$

$$\Longrightarrow \quad |D(\mathbb{R},\mathbb{R})| = \mathfrak{c}.$$

With My Best Wishes