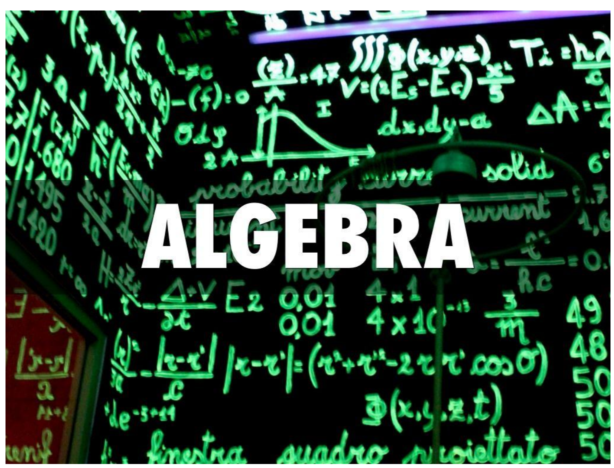
Rapport : Algèbre linéaire creuse 2:

M.Dkhissi | Y.Hamid

08 Mars 2024



Département Sciences du Numérique - Première année

2023-2024

Table de matières

Liste de figures

1 Introduction

La résolution de systèmes linéaires de la forme $Ax = b$ est une tâche fondamentale dans de nombreuses applications mathématiques et scientifiques. L'efficacité de la résolution dépend souvent de la structure de la matrice A.
Dans ce rapport, nous examinons deux cas courants : celui où A est symétrique et définie positive, et celui où A est non symétrique. Pour chacun de ces cas, nous explorons deux approches de résolution : la décomposition de Cholesky pour les matrices symétriques et la décomposition LU pour les matrices non symétriques.
De plus, nous considérons deux stratégies de résolution : sans et avec réordonnancement visant à minimiser le remplissage des matrices et à réduire le nombre d'opérations nécessaires à la résolution des systèmes linéaires. A.
L'objectif principal de ce rapport est de comparer les performances et les résultats obtenus avec différentes stratégies et de trouver la stratégie de réordonnancement la plus efficace.

2 Qualité de la solution

Après chaque résolution, pour évaluer la qualité de la solution calculée, on calculera l'erreur inverse «normwise» (stockée dans la variable normwise dans les scripts) :

$$\eta_{\text{normwise}} = \frac{\|b - Ax_e\|}{\|A\|\|x_e\| + \|b\|}$$

3 Résolution du système linéaire symétrique avec une factorisation de Cholesky

Dans cette partie on compare entre les diffèrentes stratègies de réordonnancement où la matrice A est symètrique définie positive.

La factorisation de Cholesky, nommée d'après André-Louis Cholesky, consiste, pour une matrice symétrique définie positive A, à déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que : $A = LL^T$.

3.1 Nombre de flops

Comme on a vu en TP02 , on prend comme formule du nombre de flops $flops = 4 * nnz(L)$ avec $nnz(L)$ le nombre de coefficients non nuls de la matrice L issue de la factorisation de Cholesky de la matrice A.

3.2 Comparaison des diffèrentes stratégies

Nous allons procéder à une comparaison entre l'application sans réordonnancement(on résout directement le système $LL^T x = b$) et de cinq stratégies différentes avec réordonnancement pour cinq matrices symétriques distinctes. Le but est d'évaluer l'impact du réordonnancement sur la performance(précision) des stratégies.

3.2.1 La matrice mat0.mat de taille $155x155$:

Table 1: Comparaison des résultats pour la matrice mat0

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	15864	5.269060e-14
AMD	4720	5.036994e-14
COLAMD	5468	8.603270e-14
SYMAMD	4744	5.216803e-14
SYMRCM	5468	8.603270e-14
COLPERM	5468	8.603270e-14

3.2.2 La matrice mat1.mat de taille $573x573$:

Table 2: Comparaison des résultats pour la matrice mat1

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	142328	1.053479e-12
AMD	28104	8.960457e-13
COLAMD	35144	1.060170e-12
SYMAMD	28192	1.014828e-12
SYMRCM	35144	1.060170e-12
COLPERM	35144	1.060170e-12

3.2.3 La matrice mat2.mat de taille $2201x2201$:

Table 3: Comparaison des résultats pour la matrice mat2

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	1311572	9.788004e-12
AMD	175128	8.664194e-12
COLAMD	201516	9.451831e-12
SYMAMD	166104	9.609680e-12
SYMRCM	201516	9.451831e-12
COLPERM	201516	9.451831e-12

3.2.4 La matrice bcsstk27.mat de taille $1224x1224$:

Table 4: Comparaison des résultats pour la matrice bcsstk27

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	202060	3.504894e-16
AMD	222996	3.013658e-16
COLAMD	205656	2.536410e-16
SYMAMD	235420	2.388758e-16
SYMRCM	205656	2.536410e-16
COLPERM	205656	2.536410e-16

On remarque que pour ces matrices , pour un même ordre de grandeur de normwise , la stratégie sans paermutations a un nombre de flots plus grand que les stratégies avec réordonnancement.
Pour les stratégies avec réordonnacement , on remarque que la stratégie AMD est plus performante que les autres (nombre de flots minimal pour une même précision).
La manière dont les zéros sont distribués dans la matrice peut également influencer la quantité de mémoire nécessaire. Par exemple, une matrice creuse avec beaucoup de zéros consécutifs peut être compressée plus efficacement qu'une matrice avec des zéros dispersés.

3.3 Visualisation de la structure de A permutée et du L obtenu

Ona visulaisé la structure des matrices A et L avec la fonction *spy* définie sur Matlab , ci dessous l'exemple de visualisation pour la matrice mat0 de taille $155x155$:

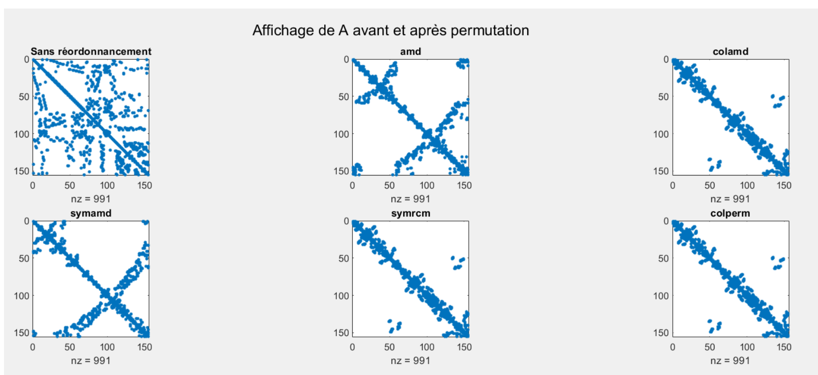


Figure 1: Visualisation de A dans les 6 cas pour mat0

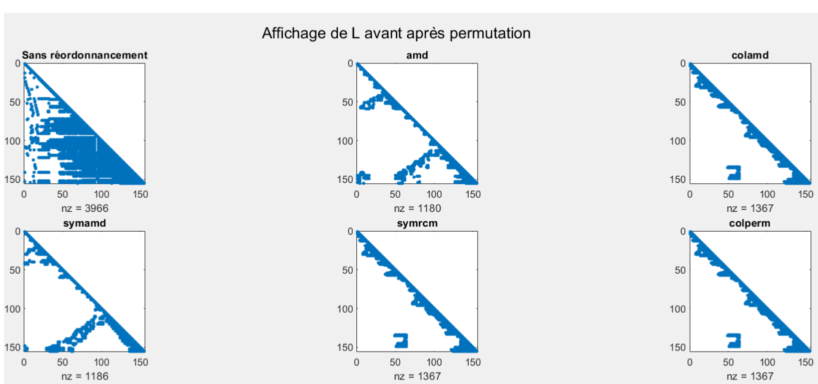


Figure 2: Visualisation de L dans les 6 cas pour mat0

4 Résolution d'un système linéaire avec une matrice non symétrique avec une factorisation LU

Dans le cas où la matrice A n'est pas symétrique , la décomposition LL^T n'existe pas , donc on essaie d'utiliser une décomposition LU.

En algèbre linéaire, la décomposition LU est une méthode de décomposition d'une matrice comme produit d'une matrice triangulaire inférieure L (comme lower, inférieure en anglais) par une matrice triangulaire supérieure U (comme upper, supérieure). Cette décomposition est utilisée en analyse numérique pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

4.1 Nombre de flops

Comme on a vu en TP02 , on prend comme formule du nombre de flops $flops = 2*nnz(L)+2*nnz(U)$ avec $nnz(L)(respU)$ le nombre de coefficients non nuls de la matrice $L(respU)$ issue de la factorisation de Cholesky de la matrice A.

4.2 Comparaison des diffèrentes stratégies

Nous allons procéder à une comparaison entre l'application sans réordonnancement(on résout directement le système $LUx = b$) et de cinq stratégies différentes avec réordonnancement pour cinq matrices non symétriques distinctes. Le but est d'évaluer l'impact du réordonnancement sur la performance(précision) des stratégies.

4.2.1 La matrice hydcar20.mat de taille $99x99$:

Table 5: Comparaison des résultats pour la matrice hydcar20

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	6416	1.973901e-14
AMD	6354	3.293173e-14
COLAMD	2936	2.334144e-14
SYMAMD	6826	3.130604e-14
SYMRCM	2936	2.334144e-14
COLPERM	2936	2.334144e-14

4.2.2 La matrice pde225$_5e-1.matdetaille$225x225:

Table 6: Comparaison des résultats pour la matrice pde2255e-1

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	13556	2.536011e-15
AMD	7192	1.908535e-15
COLAMD	9332	2.348694e-15
SYMAMD	7212	1.852829e-15
SYMRCM	9332	2.348694e-15
COLPERM	9332	2.348694e-15

4.2.3 La matrice piston.mat de taille $2025x2025$:

Table 7: Comparaison des résultats pour la matrice piston

	Nombre de flots	Normwise
Sans permutation	351906	2.115077e-10
AMD	348430	2.661588e-10
COLAMD	456962	2.160271e-10
SYMAMD	413708	3.293010e-10
SYMRCM	456962	2.160271e-10
COLPERM	456962	2.160271e-10

Ce qui est nouveau par rapport aux résultats précèdents c'est qu'on remarque que pour la première matrice de taille $99x99$ (hydcar20) la stratégie COLAMD est la plus performante avec un nombre de flots minimal (2936).
Pour la deuxième et la troisième matrices , on revient au fait que la stratégie AMD est la meilleur.
Donc on peut conclure que pour une matrice non symètrique ; COLAMD est meilleur pour les matrices de taille petite et l'AMD est performante pour le reste de matrices.

4.3 Visualisation de la structure de A permutée et du L obtenu

On a visulaisé la structure des matrices A , U et L avec la fonction *spy* définie sur Matlab , ci dessous l'exemple de visualisation pour la matrice hydcar20 de taille $155x155$:

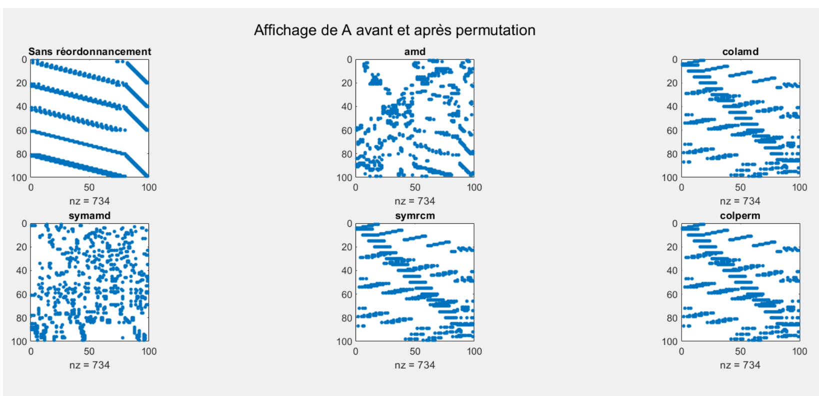


Figure 3: Visualisation de A dans les 6 cas pour hydcar20

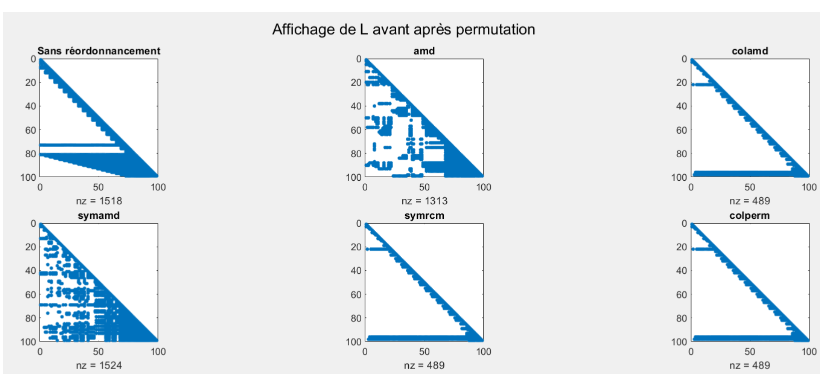


Figure 4: Visualisation de L dans les 6 cas pour hydcar20

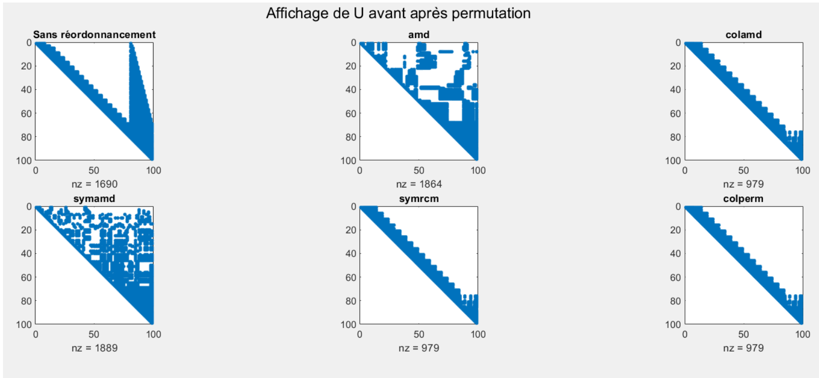


Figure 5: Visualisation de U dans les 6 cas pour hydcar20

5 Conclusion

En synthèse, notre exploration des méthodes directes pour la résolution de systèmes linéaires avec des matrices creuses a souligné l'impact crucial des réordonnancements dans la réduction du calcul. De plus, nous avons constaté que le choix de la permutation optimale est conditionné par les caractéristiques propres de la matrice étudiée.