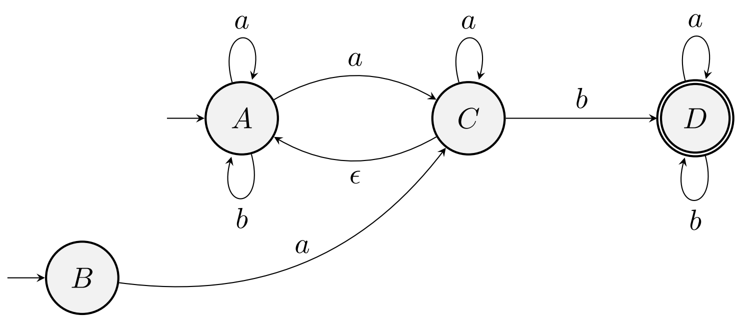
Automates et Théorie des Langages – Session 1 – 26/11/2021 – 1h30

Seuls documents autorisés : feuille A4 et formulaire inclu dans le sujet

Calculatrice, Téléphone Portable, Ordinateur Interdits

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Lisez le sujet avant de commencer. Traitez les exercices dans votre ordre de préférence.
Si vous trouvez dans le sujet un élément qui vous semble erroné, signalez le sur votre copie, indiquez les hypothèses que vous faites, et poursuivez la composition.
Dans tous les exercices, vous veillerez à justifier vos résultats, par exemple en faisant apparaître le nom des règles utilisées, il en sera tenu compte dans la notation.

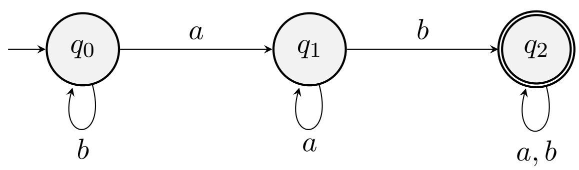
Exercice 1 Soit l'automate fini $\mathcal{E} = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \{A, B\}, \{D\}, \delta_{\mathcal{E}})$ dont la fonction de transition est définie par :



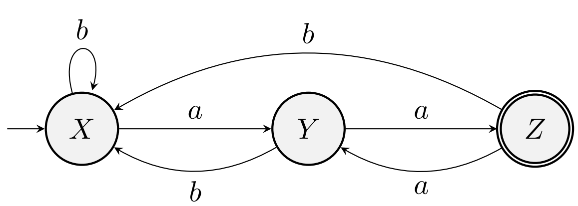
1. $\mathcal{E}$ est-il déterministe ? Justifier votre réponse.

2. S'il ne l'est pas, le déterminiser. Dessiner l'automate déterministe obtenu.

3. Un de vos enseignants vous dit que le langage de l'automate $\mathcal{E}$ est égal à celui de l'automate ci-dessous. Qu'en pensez-vous ? Quelle méthode pourriez-vous utiliser pour vérifier si cette affirmation est vraie ?



Exercice 2 Soit l'automate fini $\mathcal{E} = (\{X, Y, Z\}, \{a, b\}, \{X\}, \{Z\}, \delta_{\mathcal{E}})$ dont la fonction de transition est définie par :



1. Construire le système d'équations sur les expressions régulières associé à l'automate $\mathcal{E}$;

2. Résoudre ce système et donner une expression régulière décrivant le langage reconnu par l'automate $\mathcal{E}$.

Exercice 3 On considère l'expression régulière $E = (a\,a)^\star\,a\,a$.

1. Que peut-on dire sur la longueur des mots engendré par l'expression E.
2. Calculez par la méthode des dérivées un automate acceptant le même langage que l'expression E.
3. Faites de même avec l'expression $R = (a^\star\,b)^\star\,E$: calculez l'ensemble des dérivées obtenue à partir de R (vous pouvez vous servir des expressions obtenues à la question 1) et dessinez l'automate déterministe obtenu par cette méthode.

Exercice 4 On considère la grammaire $G = (\Sigma, V, S, P)$, d'axiome S, d'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, et définie à partir des non-terminaux $V = \{S, A, B\}$ et de l'ensemble P de règles de production suivantes:

$$\begin{array}{ll} 1. & S \to a\,A \\ 2. & S \to B \\ 3. & A \to B\,a \\ 4. & A \to b \\ 5. & B \to A\,b \\ 6. & B \to b \end{array}$$

1. Donnez une séquence de règles de production qui exhibe une *récursion gauche* depuis le non-terminal A, c'est-à-dire une séquence de réductions de la forme $A \Rightarrow A\,\gamma$, où γ est un mot de $(\Sigma \cup V)^\star$.
2. Transformer G en une grammaire régulière (contenant uniquement des productions de la forme $X \to w\,Y$ ou $Z \to \Lambda$, avec w un mot de $\Sigma^\star$) décrivant le même langage en utilisant des transformations de grammaire préservant le langage reconnu (substitution, factorisation et élimination récursivité gauche) ;
3. Donnez une expression régulière générant un langage équivalent à celui de G.

Exercice 5 Soit une grammaire simplifiée du langage LISP $G = (A,\ V,\ S,\ P)$ composée des non-terminaux $V = \{S, L\}$, de l'axiome S, des terminaux $A = \Big\{\mathtt{id}, ., (,)\Big\}$ et de l'ensemble P de règles suivantes pour lesquelles nous donnons, entre accolades, les symboles directeurs associés :

$$\begin{array}{lll} 1. & S \to \mathtt{id} & \{\mathtt{id}\} \\ 2. & S \to (\ S\ L\ ) & \{(\} \\ 3. & L \to .\ S & \{.\} \\ 4. & L \to S\ L & \{\mathtt{id}, (\} \\ 5. & L \to \Lambda & \{)\} \end{array}$$

1. Pourquoi est ce que cette grammaire est LL(1) ?
2. Donner un programme CaML réalisant l'analyse descendante récursive pour le nom terminal L de cette grammaire selon une des approches suivies en séance de travaux pratiques (vous supposerez que vous disposez de la fonction d'analyse du non terminal S si nécessaire).
3. Calculez pour chaque non-terminal, S et L, les trois relations suivantes: (a) s'il est *nullable* (le non-terminal X est nullable si on peut trouver une séquence de réduction de la forme $X \Rightarrow \Lambda$); (b) ses premiers; et (c) ses suivants.
4. Servez vous du résultat précédent pour justifiez que la valeur du symbole directeur donné pour la règle de production 4. (c'est-à-dire $L \to S\,L$) est correcte.

Equivalence entre expressions régulières : L'opérateur de concatenation/juxtaposition . est implicite pour ne pas surcharger l'écriture des expressions : $e_1.e_2$ est notée $e_1\,e_2$.

$$\begin{array}{ll}
\emptyset\, e = e\,\emptyset = \emptyset & \Lambda\, e = e\,\Lambda = e \\
e \mid \emptyset = \emptyset \mid e = e & e \mid e = e \\
e_1\,(e_2\,e_3) = (e_1\,e_2)\,e_3 & e_1 \mid (e_2 \mid e_3) = (e_1 \mid e_2) \mid e_3 \\
e_1\,(e_2 \mid e_3) = (e_1\,e_2) \mid (e_1\,e_3) & (e_1 \mid e_2)\,e_3 = (e_1\,e_2) \mid (e_1\,e_3) \\
e_1 \mid e_2 = e_2 \mid e_1 & \emptyset^\star = \Lambda^\star = \Lambda \\
e^\star = \Lambda \mid e^+ & e^+ = e\,e^\star = e^\star\,e \\
e^\star\,e^\star = e^\star & e^{\star\star} = e^\star \\
e = e^\star \Leftrightarrow e = e\,e & e\,e^\star = e^\star \Leftrightarrow \Lambda \in L(e) \\
(e_1^\star\,e_2^\star)^\star = (e_1 \mid e_2)^\star = (e_1^\star \mid e_2^\star)^\star & \\
(e_1^\star\,e_2)^\star\,(e_1^\star) = (e_1 \mid e_2)^\star = e_1^\star\,(e_2\,(e_1^\star))^\star &
\end{array}$$

ϵ-fermeture : L'ϵ-fermeture d'un ensemble d'états E est la fermeture réflexive et transitive de la relation de transition sur ϵ. Il s'agit de l'union de E et de tous les états accessibles depuis les états de E en suivant un nombre quelconque de transitions sur ϵ.

Théorème de Arden : Soient x une variable, e_1 et e_2 des expressions régulières, l'équation $x = e_1\,x \mid e_2$ admet au moins une solution : $x = e_1^\star\,e_2$

Dérivation des expressions régulières :

$$\begin{array}{ll}
D_a(a) = \Lambda & D_a(b) = \emptyset \\
D_a(\emptyset) = \emptyset & D_a(\Lambda) = \emptyset \\
D_a(e^\star) = D_a(e)\,e^\star & D_a(e_1 \mid e_2) = D_a(e_1) \mid D_a(e_2) \\
D_a(e_1\,e_2) = D_a(e_1)\,e_2 \mid \delta(e_1)\,D_a(e_2) & \\
\delta(\emptyset) = \emptyset & \delta(\Lambda) = \Lambda \\
\delta(a) = \emptyset \text{ si } a \in A & \delta(e^\star) = \Lambda \\
\delta(e_1\ e_2) = \delta(e_1)\ \delta(e_2) & \delta(e_1 \mid e_2) = \delta(e_1) \mid \delta(e_2)
\end{array}$$

Soit la grammaire non contextuelle $G = (A, V, S, P)$:

Calcul des Premiers :

$$\begin{array}{l}
\text{Premiers}(\Lambda) = \{\Lambda\} \\
\text{Premiers}(a\,\alpha) = \{a\} \text{ avec } a \in A \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X) = \displaystyle\bigcup_{X \to \gamma \in P} \text{Premiers}(\gamma) \text{ avec } X \in V \text{ et } \gamma \in (A \cup V)^\star \\
\text{Premiers}(X\,\alpha) = \text{Premiers}(X) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{ Premiers}(\alpha)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(X)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star
\end{array}$$

Calcul des Suivants :

$$\text{Suivants}(X) = \bigcup_{Y \to \alpha\, X\, \beta \in P} \text{Premiers}(\beta) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(Y)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\beta)} \underbrace{\cup\{\$\}}_{\text{si } X = S} \text{ avec } X, Y \in V \text{ et } \alpha, \beta \in (A \cup V)^\star$$

Calcul des Symboles Directeurs :

$$\text{Directeurs}(X \to \alpha) = \text{Premiers}(\alpha) \underbrace{\setminus\{\Lambda\} \cup \text{Suivants}(X)}_{\text{si } \Lambda \in \text{Premiers}(\alpha)} \text{ avec } X \in V \text{ et } \alpha \in (A \cup V)^\star$$