Özet

Lineer : $y' + p(x)y = q(x)$

Bernoulli : $y' + p(x)y = q(x).y^{\alpha} \Rightarrow u = y^{1-\alpha}$

Riccati : $y' = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \Rightarrow y_1$ bir özel çözüm olmak üzere;

$y = y_1 + \frac{1}{u}$

(11) $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ $y_1 = \sec x \Rightarrow$ genel çözüm nedir?

① $P(x) = -\sin x$, $Q(x) = 0$, $R(x) = 2\tan x \sec x$

② $y = y_1 + \frac{1}{u} = \sec x + \frac{1}{u}$

$y' = \sec x \tan x - \frac{u'}{u^2}$

③ $\sec x \tan x - \frac{u'}{u^2} = 2 \tan x \sec x - \sin x \left(\sec x + \frac{1}{u}\right)^2$

$= 2\tan x . \sec x - \sin x \left(\sec^2 x + \frac{2\sec x}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$

$\cancel{\sec x \tan x} - \frac{u'}{u^2} = 2\cancel{\tan x} . \sec x - \cancel{\sin x . \sec^2 x} - \frac{2\sin x . \sec x}{u} - \frac{\sin x}{u^2}$

④ $-u^2$ ile çarpıyoruz

$u' - 2 . \frac{\sin x}{\cos x} u = \sin x$ (lineer oldu)

⑤ int çarpanı $e^{\int \frac{-2\sin x}{\cos x} dx} = e^{2\ln(\cos x)} = \cos^2 x$

⑥ Genel çözüm: $u = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\int \cos^2 x . \sin x \, dx + c\right]$

⑦ $u = \frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right)$

⑧ $y = \sec x + \frac{3\cos^2 x}{(3c - \cos^3 x)}$

Özet sonu.

3. Bölüm Yüksek Dereceden Diferansiyel Denklemler

$y = xy' + (y')^5$; Mertebe: 1
Derece : 5

$y = xy' + 3(y')^2$ Genel çözümü : $y = cx + 3c^2$ (Doğru Denklemi)

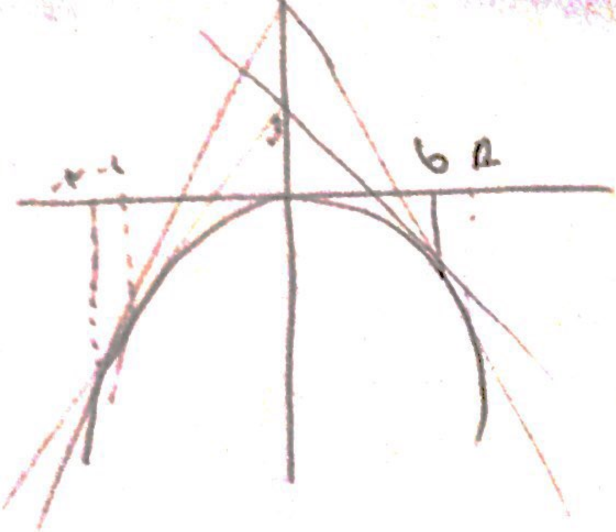
(Tekil (aykırı) çözüm) $y = -\frac{x^2}{12}$ de bu denklemin başka bir çözümüdür.

$y' = -\frac{x}{6}$, $(y')^2 = \frac{x^2}{36}$

$x^2 + 12cx + 36c^2 = 0$

$(x+6c)^2 = 0$

$x = -6c$



$y = -\frac{x^2}{12}$, $y = cx + 3c^2$'nin zarfıdır.

Zarflar değişir ancak mektuplar değişmez.

Türeve Göre Çözülen Denklemler

1) Clairaut dif denklemleri

$y = xy' + f(y')$; ① $y = xy' + 3(y')^2$

② $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$

③ $y = xy' + \ln(y')$ tarzında gelebilir.

① $y' = p$ alalım.

② $y = xp + f(p)$

③ x'e göre türev alınır.

④ $y' = 1.p + x.p' + f'(p).p'$

⑤ $p = p + (p + f'(p)) \cdot p'$

⑥ $0 = \frac{dp}{dx}(x + f'(p))$

⑦ $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ (c: sabit)

⑨ Genel çözüm ②'den

$y = cx + f(c)$

⑩ $x + f'(p) = 0 \Rightarrow x = -f'(p)$ ②'de yerine yaz.

⑪ $y = -f'(p).p + f(p)$ bulunur.

⑫ $x = x(p)$, $y = y(p)$ ②'nin tekil çözümünün parametrik yazılışı denir.

⑬ p'ler yok edilirse, tekil çözümünün kartezyen ifadesi bulunur.

9) $y = xy' + 3(y')^2$ tekil çözümü bul.

1) $y' = p$

2) $y' = 1.p + x.p' + 6p.p'$

3) $p = p + p'(x+6p)$

4) $0 = p'(x+6p)$

5) $p' = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = x.c + 3(c)^2 \Rightarrow cx + 3c^2 = y_g$

ya da

6) $x + 6p = 0 \Rightarrow \boxed{x = -6p} \Rightarrow y = (-6p)p + 3p^2 = \boxed{-3p^2 = y}$

Aykırı çözümün parametrik yazılışı; p'leri yok edelim.

11) $y = xp + \sqrt{1+p^2}$ genel çözüm ve varsa aykırı çözümünü yaz.

1) Clairaut dif. denklemidir. x'e göre türev alırız.

2) $y' = 1.p + xp' + \dfrac{\cancel{2}p.p'}{\cancel{2}\sqrt{1+p^2}}$

3) $0 = p'\left(x + \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$

4) $p' = 0 \Rightarrow p = c$

5) Genel çözüm; $y = cx + \sqrt{1+c^2}$

6) Aykırı çözüm;

7) $x = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}$ 8) $y = xp + \sqrt{1+p^2}$

10) $y = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}} . p + \sqrt{1+p^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$

11) $x = \dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$ Tekil çözümünün parametrik yazılışı

P'yi nasıl çekeceğiz?

12) $x^2 = \left(\dfrac{-p}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 = \dfrac{p^2}{1+p^2}$ $y^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2 = \dfrac{1}{1+p^2}$

+

13) $x^2 + y^2 = 1$ (çember denklemi)

Problemler

1) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$, C: $y^2 = 4x$

2) $y = xp + p\ln(p)$, C: $y = -e^{-x-1}$

3) $(y - xy')^2 = 4y'$ C: $y = xy' + 2\sqrt{y'}$

Lagrange Dif Denk

Genel Denk: $y = x f(y') + g(y')$ şeklindedir.

$$\left.\begin{array}{l} y = x(y')^2 + 3(y')^3 \\ y = xy' + \ln(y') \end{array}\right\} \text{gibi}$$

1) $y' = p$ yazdım $\Rightarrow \boxed{y = x f(p) + g(p)}$ ①

2) ①'in x'e göre türev alınız

$y' = 1.f(p) + x f'(p).p' + g'(p).p'$

$\downarrow$

$p = f(p) + p'(x f'(p) + g'(p))$

$p - f(p) = \frac{dp}{dx}(x f'(p) + g'(p))$ ②

3) $p - f(p) = 0$ denkleminin çözümlerini ①'de yerine yazarak genel denklemin Aykırı (tekil) çözümünü buluruz.

4) $p - f(p) \neq 0$ (2)'nin her tarafı $p - f(p)$ ile böleriz.

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x f'(p) + g'(p)}{p - f(p)} \quad \text{veya}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

lineer denklemi elde edilir

$x = x(p)$'yi bulduktan sonra ①'de yerine yazarak $y = y(p)$ bulunur.

$\left.\begin{array}{l} x = x(p) \\ y = y(p) \end{array}\right\}$ ikilisine genel denklemin genel çözümünün parametrik ifadesi olur.

Ö) $y = xp^2 + p^3$ Lagrange'dekl genel ve (varsa) tekil çözümünü bulalım.

1) x'e göre türev

2) $y' = 1.p^2 + x2p.p' + 3p^2.p'$

3) $p = p^2 + p'(2xp + 3p^2)$

4) $p - p^2 = p'(2xp + 3p^2)$

5) $p - f(p) = \frac{dp}{dx}(x f'(p) + g'(p))$

6) $p - p^2 = 0$ denkleminin kökleri $p = 0$, $p = 1$'dir.

$p = 0$ için $y = x.0 + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

$p = 1$ için $y = x + 1$

$\Rightarrow$ Tekil Çözüm

7) $p - p^2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p - p^2 = \frac{dp}{dx}(2xp + 3p^2)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2xp + 3p^2}{p(1-p)}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2x + 3p}{1 - p}$

$\Rightarrow x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{3p}{1-p}$

8) int çarpanı $\Rightarrow e^{\int \frac{2}{p-1}dp} = (p-1)^2$

9) $x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left[\int (p-1)^2 \frac{3p}{1-p}dp + C\right]$

5/5

10) $\int (p-1)^2 \frac{3p}{1-p}\,dp = -3\int (p-1)p\,dp$

$= -3\left(\frac{p^3}{3}-\frac{p^2}{2}\right)$

11) $x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left[\frac{3}{2}\frac{3p}{(1-p)}dp + c\right]$

12) $y(p) = p^2\left[\frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c\right)\right] + p^3$

11.2) $y = \left(\frac{c}{p^2}+1\right)(p^2+2p) - (p^2+2p-1)$

11.3) $= \frac{c}{p^2}(p^2+2p)+1$

11.4) $= \frac{c(p+2)}{p}+1 = y(p)$

11.5) $\frac{y-1}{1} \times \frac{c(p+2)}{p}$

11.6) $p(y-1) = c(p+2)$

11.7) $p[y-1-c] = 2c$

11.8) $p = \frac{2c}{y-1-c}$

---

(11) $y = x(p^2+2p) - (p^2+2p-1)$

1) $y' = 1(p^2+2p) + x(2p+2)p' - (2p+2).p'$

2) $\overset{\downarrow}{p} = p^2+2p + p'\left[(x-1)(2p+2)\right]$

3) $-p-p^2 = p'((x-1)(2p+2))$

4) $-p-p^2 = 0 \Rightarrow p=0 \lor p=-1$

5) $p=0$ için $y=1$

6) $p=-1$ için $y = x((-1)^2+2(-1)) - ((-1)^2+2(-1)-1)$

$= -x+2$

7) $y=1 \lor y=-x+2$, aykırı (tekil) çözümdür.

8) $-p-p^2 \neq 0$ 8.1) $-p(1+\cancel{p}) = \frac{dp}{dx}((x-1)(\cancel{p+1}).2)$

9) $\frac{dx}{x-1} = \frac{-dp}{p}$ 9.1) $\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{2}{p}dp$

10) $\ln|x-1| + \ln|p|^2 = \ln C$

11) $(x-1)p^2 = c$ 11.1) $\boxed{x = \frac{c}{p^2}+1}$

12) $\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p)-p}x = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$

13) $x = \frac{c}{p^2}+1$

13.1) $\frac{x-1}{c} = \frac{1}{\left(\frac{2c}{y-1-c}\right)^2}$

13.2) $4c(x-1) = (y-1-c)^2$

Problemler

(1) $y = (1+p)x + p^2$ C: tekil çözüm yok

genel çözüm: $x = ce^{-p} - 2p + 2$

$y = 2 - p^2 + c(1+p)e^{-p}$

(2) $y = 2xy' - (y')^3$ C: Tekil çözüm $y=0$

genel çözüm:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}p^2 + \frac{c}{p^2} \\ y = \frac{1}{2}p^3 + \frac{2c}{p} \end{cases}$$