PR4 Aşağıdaki fonksiyonlar için $fog(x)$ ve $gof(x)$ değerlerini bulunuz:

a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in (-\infty, 0] \\ x & ; x \in (0, \infty) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in (-\infty, \\ -x^2 & ; x \in (0, \infty \end{cases}$

PR5 a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğunda $fofof(x)$ 'i bulunuz

Kapalı Fonksiyon

İki değişken arasındaki ilişki, onların ikisine göre de çözülmemiş halde verilmişse bu fonksiyona kapalı halde verilmiştir denir. Buna göre x'in fonksiyonu olan y $F(x,y)=0$ eşitliği ile verilir.

ÖR13 Kapalı şekilde verilmiş olan aşağıdaki fonksiyonları açık şekilde yazalım:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, c) $x^2 - \arcsin y = \pi$

a) Verilen elips denkleminde y değişkeni çekilirse

$\dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2} \Rightarrow y = \mp \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ eğrileri elde edilir.

Bunlar kapalı olan elips eğrisinin alt ve üst yay parçalarını ifade eder.

b) Benzer şekilde hiperbol denkleminden;

$y = \mp \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ eğrileri elde edilir.

c) $x^2 - \arcsin y = \pi \Rightarrow \arcsin y = x^2 - \pi \Rightarrow y = \sin(x^2 - \pi)$ açık fonksiyonu elde edilir.

Bununla birlikte her kapalı fonksiyon açık olarak ifade edilemez.

Ters Fonksiyon

Belli bir X kümesi üzerinde tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu ele alınırsa onun değerler kümesinin Y ile gösterilebilir:

$f: X \to Y$, $x \mapsto f(x)=y$; $y=f(x)$ eşitliğinden x değişkeni y cinsinden tek türlü olarak (tek değerli) elde edilebiliyorsa; $x=g(y)$ ile ifade edilen g ye f nin ters fonksiyonu denir, ve $g=f^{-1}$ şeklinde gösterilir.

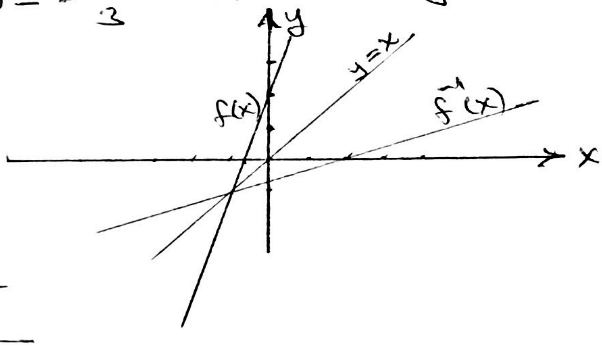
Buna göre f de g nin ters fonksiyonu olacaktır.

f ile f^{-1} arasında

$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = I(x) = x$ şeklinde bir bağıntı vardır.

Geometrik olarak bakıldığında ise $y=x=I(x)$ birim fonksiyonuna göre f ile f^{-1} in grafikleri simetriktir.

ÖR 14 $f(x) = 3x+2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ olur ki grafikleri; aşağıdaki şekildedir:



Elementer Fonksiyonlar

Aşağıdaki fonksiyonlara temel elementer fonksiyonlar denir.

1) $y=c=$ sabit fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$.

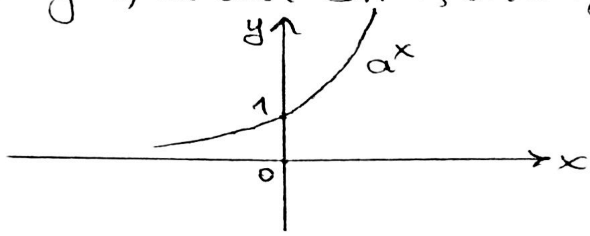
$f: \mathbb{R} \to \{c\}$, $x \to c$ şeklinde tanımlanır.

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y=x^{\alpha}$ kuvvet fonksiyonu.

Tanım kümesi, α reel sayısına göre farklılık gösterir.

$\alpha \in \mathbb{N}$ olması halinde polinom olarak adlandırılır.

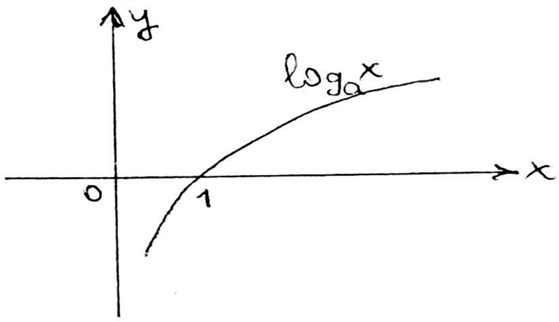
3) $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = a^x$ üstel fonksiyonu:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olup peryodik olmayan, artan bir fonksiyondur:



4) $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere
$y = \log_a x$ logaritma fonksiyonu:
$f(x) = a^x$ üstel fonksiyonun ters fonksiyonudur:

$$a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$$ sağlanır.

Özel olarak $a = e$ olması halinde doğal logaritma olarak anılır: $f(x) = \log_e x = \ln x$.



Bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

a) $\log 1 = 0$

b) $\log_a a = 1$, $\log_a b^c = c \log_a b$

c) $\log(ab) = \log a + \log b$

d) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

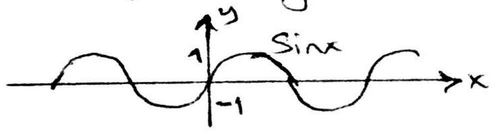
e) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

f) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

5) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ - trigonometrik fonksiyonlar.

Sinüs fonksiyonu $\mathbb{R}$ den $[-1, +1]$ aralığına tanımlı 2π esas peryotlu, sınırlı bir fonksiyon:

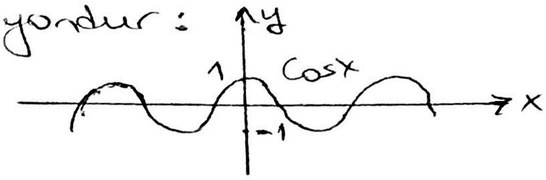
$\sin : \mathbb{R} \to [-1, +1]$



Orjine göre simetrik bir grafiğe sahip Sinx fonksiyonu birebir bir fonksiyon (1-1) değildir; yani

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f (1-1) dir. tanımını gerçeklemez: $0, \pi \in \mathbb{R}$ için $0 \neq \pi$ iken $\sin 0 = \sin \pi$ olmakta.

Sinx için geçerli olan özellikler Cosx için de geçerlidir yani $\cos: \mathbb{R} \to [-1, +1]$, fonksiyonu da peryodik (2π), sınırlı çift ve (1-1) olmayan bir fonksiyondur:

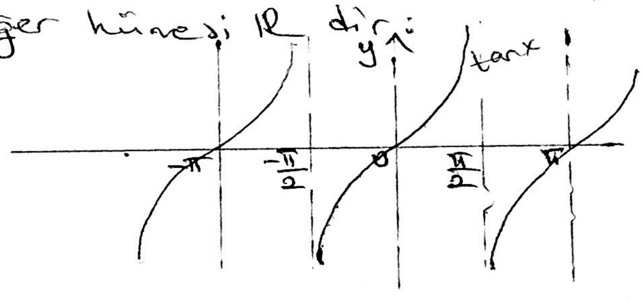


Trigonometrik Fonksiyonların Bazı Özellikleri

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
3) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$
4) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
5) $\tan x . \cot x = 1$
6) $\sin(x \mp y) = \sin x . \cos y \mp \sin y \cos x$
7) $\cos(x \mp y) = \cos x . \cos y \pm \sin x . \sin y$
8) $\tan(x \mp y) = \frac{\tan x \mp \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$
9) $\cot(x \mp y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x \mp \cot y}$

$y = \tan x$ fonksiyonu $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ aralığında tanımlı olup değer kümesi $\mathbb{R}$ dir:

$\tan: (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

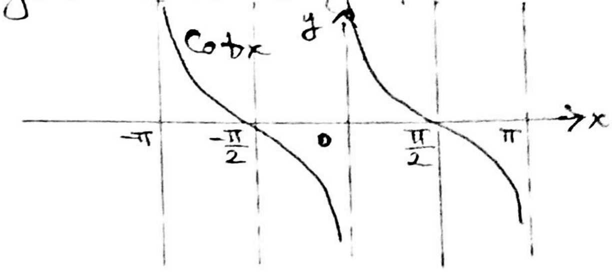


Fonksiyon tanım aralığı içinde daima artan, sınırsız, π peryotlu, (1-1) bir fonksiyondur.

Benzer özellikler Cotx fonksiyonu için de geçerlidir:

$Cot : (n\pi, n\pi + \pi) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

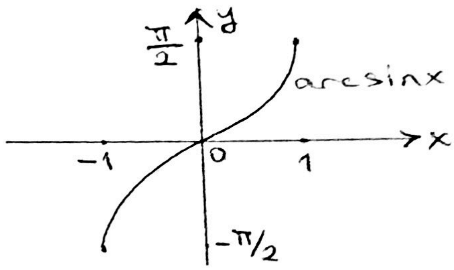
daima azalan, sınırsız, π peryotlu, (1-1) dir.



6) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \text{arc}\cot x$ ters trigonometrik fonksiyonlar:

a) $y = \arcsin x$ fonksiyonu sinx'in ters fonksiyonu olup sinx'in (1-1), örten olduğu bir aralıkta tanımlıdır:

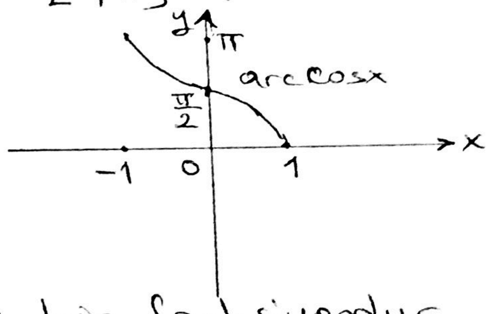
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, +1] \Rightarrow \arcsin : [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dir.



b) $y = \arccos x$ de cosx'in tersi olup

$\cos : [0, \pi] \to [-1, +1] \Rightarrow \arccos : [-1, +1] \to [0, \pi]$ şeklinde tanımlanır.

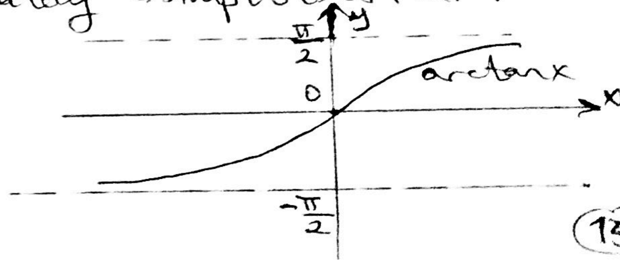
Tanımlı olduğu aralıkta tersi gibi (1-1), azalan bir fonksiyondur.



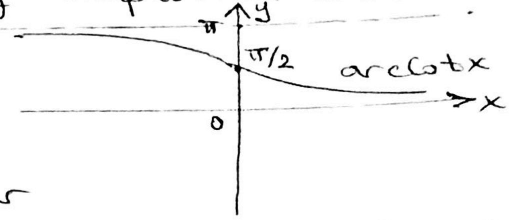
c) $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olup

tersi olan tanx gibi artan, (1-1) bir fonksiyondur.

$y = -\frac{\pi}{2}$ ve $y = \frac{\pi}{2}$ doğruları yatay asimptotlarıdır:



d) $\text{arcCot}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$ olup bu da tersi olan $\text{Cot}x$ gibi azalan, (1–1), $y=0$ ve $y=\pi$ de yatay asimptotları olan bir fonksiyondur:



<u>Tanım</u> $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ polinomlar olmak üzere $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$ eşitliğini sağlayan her $f(x)$ fonksiyonuna cebirsel fonksiyon denir.

<u>Tanım</u> Pay ve paydasında birer polinom olan fonksiyona rasyonel fonksiyon denir:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

<u>Tanım</u> Kesirli rasyonel kuvvet içeren cebirsel fonksiyona irrasyonel fonksiyon denir;

örneğin $y = x + 3\sqrt{x}$, $y = \dfrac{x^3 + 2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x^5 - 2x + 6}}$, $y = \sqrt{x^5 - 6x^3 + 3x}$

birer irrasyonel fonksiyondur.

7) Hiperbolik Fonksiyonlar

Üstel fonksiyonlar e^x ve e^{-x} yardımıyla tanımlanan

$$\left.\begin{aligned} y &= \text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ y &= \text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}\right\}$$ şeklindeki fonksiyonlardır.

Trigonometrik fonksiyonlarla benzerlik gösterirler:

Bazı özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

a) $\text{th}x = \dfrac{\text{Sh}x}{\text{Ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\text{Coth}x = \dfrac{\text{Ch}x}{\text{Sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b) $\text{Ch}^2x - \text{Sh}^2x = 1$

c) $\text{Sech}x = \dfrac{1}{\text{Ch}x}$, $\text{Cosech}x = \dfrac{1}{\text{Sh}x}$

d) $Shx + Chx = e^{x}$, $Chx - Shx = e^{-x}$

e) $thx . Cothx = 1$

f) $th^2x + Sech^2x = 1$

g) $Sh(x \mp y) = Shx . Chy \mp Shy . Chx$

h) $Ch(x \mp y) = Chx . Chy \mp Shx . Shy$

i) $th(x \mp y) = \dfrac{thx \mp thy}{1 \mp thx\, thy}$, $Coth(x \mp y) = \dfrac{1 \mp Cotx\, Coty}{Coth \mp Coty}$

j) $Sh2x = 2Shx\, Chx$, $Ch2x = Ch^2x + Sh^2x$