Diferansiyel Denklemler

Hafta 13

$Diferansiyel\ Denklemlerin\ Seri\ Çözümleri$

$y = f(x)$ *fonksiyonunun* $x = x_0$ *noktasında bir Taylor serisi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)$$ *şeklinde yazıldığını biliyoruz.*

$x_0 = 0$ *durumunda seriye Maclaurin Serisi denir.*

$\boxed{ÖRNEK\ 1}$ $f(x) = e^x$ *'in Maclaurin Serisini yazalım.* $(x_0 = 0)$

$$f'(x) = e^x \to f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \to f''(0) = e^0 = 1$$

::::

$$f^{(n)}(x) = e^x \to f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$\boxed{ÖRNEK\ 2}$ $f(x) = lnx,\ \ x = 0'da$ *seriye açılabilir mi?*

$$f(0) = ln0 \to tanımsız$$

$$türevini\ de\ alamıyoruz. \frac{1}{0}\ dan\ yine\ tanımsız\ geliyor.$$

$$O\ halde\ x = 0\ 'da\ seriye\ açılamaz.$$

$$x_0 = 1\ 'de\ seriye\ açılır\ mı? (EVET)$$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

$$::::$$

$$\ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \cdots$$

$$Demekki\ seriye\ açılabilmesi, türevinin\ alınabilmesi\ ile\ aynı\ anlama\ geliyor.$$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{(x-1)^n}$$

$$Tanım: f(x)\ fonsiyonu\ x = x_0\ \ noktasında\ Taylor\ serisine\ açılabilirse$$

$$bu\ f(x)\ fonksiyonu\ x = x_0\ noktasında\ Analitiktir\ denir.$$

$$\boxed{ÖRNEK\ 3}\ e^x, \sin x\ , \cos x\ \ fonksiyonları\ x = 0\ noktasında\ analitiktir.$$

$$(Yani\ x = 0\ noktasında\ istediğiniz\ kadar\ türev\ alabilirsiniz.)$$

$$f(x) = \sin x\ , x_0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}$$

Taylor serisi yöntemi

Çözümler

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

şeklinde yazılır. Bu seri devam ettikçe sayının küçüldüğünü görüyoruz.

Dolayısıyla serimiz 0 *'a yaklaşıyor.*

$\boxed{\text{ÖRNEK 4}}$ $y' = x^2y + 3x\,, \quad y(1) = 1$ *başlangıç değer problemini Taylor açılımı yöntemi ile bulmaya çalışalım.*

$$y(1) = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \text{ noktasında demektir.}$$

$$y(1) = 1$$

$$y'(1) = ? \Rightarrow y'(1) = 1^1 y(1) + 3.1 = 4$$

$$y''(1) = ?$$

(Türevi yok, her tarafın türevi alınır.)

$$y'' = 2xy + x^2y' + 3$$

$$y''(1) = 2.1y(1) + 1^2y'(1) + 3 = 9$$

$$y'''(1) = ?$$

$$(Devamını\ ben\ yazmıyorum.\ dedi)$$

$$\boxed{y(x) = 1 + \frac{4}{1!}(x-1) + \frac{9}{2!}(x-1)^2 + \cdots}\quad bu\ denklemin\ seri\ çözümüdür.$$

$\boxed{\text{ÖRNEK 5}}$ $y' = y - x - 4\,,\ \ y(0) = 6$ *başlangıç değer problemini*

Taylor serisi yöntemi kullanarak bulalım.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$y'(0) = ? \rightarrow y'(0) = \underbrace{y(0)}_{6} - 0 - 4 = 2$$

$$y''(0) = ? \rightarrow y'' = y' - 1 \rightarrow\ y''(0) = y'(0) - 1 = 1$$

$$y'''(0) = ? \rightarrow y''' = y'' \rightarrow y'''(0) = y''(0) = 1$$

$$\text{Çözüm}: y(x) = 6 + x + \underbrace{\frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}_{e^x - 1}\ ,$$

$$y(x) = 5 + x + e^x$$

Kuvvet Serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

serisine x_0 *noktasında kuvvet (power) serisi denir.* $(a_1\ 'ler\ sabit\ )$

Diferansiyel denklemin üstteki formda çözümleri aranması yöntemine kuvvet serisi yöntemi denir.

$\boxed{\text{ÖRNEK 6}}$ $y' = y - x - 4\,,\;\; y(0) = 6$ *başlangıç değer problemini kuvvet serisi yöntemini kullanarak çözelim.*

Önce denklemi şöyle yazalım:

$$y' - y = -x - 4$$

$$(y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) = -x - 4$$

$$\underbrace{(a_1 - a_0)}_{-4} + \underbrace{(2a_2 - a_1)}_{-1}x + \underbrace{(3a_3 - a_2)}_{0}x^2 + \underbrace{(4a_4 - a_3)}_{0}x^3 + \cdots = -4 - x$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{4}\left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{3!}a_0\right) = -\frac{5}{24} + \frac{1}{4!}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2!}a_0\right) = -\frac{5}{6} + \frac{1}{3!}a_0$$

$$a_2 = \frac{-1 + a_1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{-4 + a_0}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2!}a_0$$

$$a_1 = -4 + a_0$$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$= a_0 + (-4 + a_0)x + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2!}a_0\right)x^2 + \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{3!}a_0\right)x^3 + \left(-\frac{5}{24} + \frac{1}{4!}a_0\right)x^4 + \cdots$$

$$= a_0\underbrace{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)}_{e^x} - 4x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \cdots$$

$$y = a_0e^x - 5e^x + x + 5$$

$$y_g = (a_0 - 5)e^x + x + 5$$

$$y(0) = 6 = (a_0 - 5)e^0 + 0 + 5 \Rightarrow a_0 = 6$$

$$\boxed{y = e^x + x + 5}$$

$$\boxed{P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = Q(x)} \ldots\ldots(1) \ denklemini\ ele\ alalım.$$

$$(1)\ denkleminde\ P_0(x_0) \neq 0\ ise\ x_0\ noktalarına\ (1)\ denkleminin\ ADİ\ NOKTASI\ denir.$$

$\boxed{ÖRNEK\ 7}$ $(1 - x^2)y'' + xy = 0$ denkleminde $x_0 \neq \pm 1$ noktaları hariç tüm noktalar

Adi noktadır. $x = 0,\ \ x = 1905,\ \ x = 1903$ birer adi noktadır.

Adi olmayan noktalara TEKİL (aykırı) nokta denir.

Son örnekte: $x_0 \neq \pm 1$ birer tekil noktadır.

$x = x_0$ noktası (1) denkleminin bir adi noktası ise denklemin çözümü

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n} \ \ şeklinde\ aranır.$$

$\boxed{ÖRNEK\ 8}$ $y'' - y = 0$ diferansiyel denklemini Kuvvet serisi yöntemiyle çözelim.

$P_0(x) = 1$ olduğu için tüm noktalar adi noktadır.

$x_0 = 0$ seçelim. (Kolaylık olsun diye)

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + \cdots$$

Denklemde yerine yazarsak

$$(2a_2 - a_0) + \underbrace{(6a_3 - a_1)x}_{0} + \underbrace{(12a_4 - a_2)x^2}_{0} + \underbrace{(20a_5 - a_3)x^3}_{0} + \underbrace{(30a_6 - a_4)x^4}_{0} + \cdots = 0$$

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}a_1 = \frac{1}{3!}a_1$$

$$a_4 = \frac{1}{4.3} a_2 = \frac{1}{4!} a_0$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5.4} = \frac{1}{5!} a_1$$

$$a_6 = \frac{1}{6!} a_0$$

$$\mathit{Genel}\ \text{Çözüm}$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 + \cdots \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \cdots \right)$$

$$\boxed{y = a_0 y_1 + a_1 y_2}$$