Ayrık İslemsel Yapılar Ödevi - I

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$ icin

$$\left.\begin{aligned} a \oplus b &= a+b+1 \\ a \odot b &= ab+a+b \end{aligned}\right\} (\mathbb{Z},\oplus,\odot)$$ yapısı cisim midir? inceleyiniz.

C1) $(\mathbb{Z},\oplus)$ yapısının abelyen grub olması gerekir

a) Kapalılık ?

$a+b \in \mathbb{Z}$, $+1 \in \mathbb{Z}$, $a+b+1 \in \mathbb{Z}$ 'dır. Buna göre $a \oplus b \in \mathbb{Z}$ 'dır.
Kapalıdır.

b) Degisme?

$a \oplus b \stackrel{?}{=} b \oplus a \longrightarrow a+b+1 = b+a+1 = b \oplus a$ oldugundan
Degismelidir.

c) Birlesme?

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ icin $(a \oplus b) \oplus c \stackrel{?}{=} a \oplus \overbrace{(b \oplus c)}^{b+c+1}$

$$\left.\begin{aligned} (a+b+1) \oplus c &= (a+b+1)+c+1 \\ &= a+(b+c+1)+1 \\ &= a+(b \oplus c)+1 \\ &= a \oplus (b \oplus c) \end{aligned}\right\}$$ old. birlesmedir.

d) Birim eleman ?

$\forall a,e \in \mathbb{Z}$ icin $a \oplus e = e \oplus a = a$ ol. sekilde

$a \oplus e = a$

$a+e+1 = a \Rightarrow e = -1 \in \mathbb{Z}$ oldugundan birim elemandır.

Halkanın sıfırı $= \{0\} = 1$

e) Ters eleman

$\forall a \in \mathbb{Z}$ icin $a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e$ olcak sekilde $a^{-1} \stackrel{?}{\in} \mathbb{Z}$

$a \oplus a^{-1} = e = -1$

$a + a^{-1} + 1 = -1 \Rightarrow a^{-1} = -a-2 \in \mathbb{Z}$ oldugundan

$\forall a \in \mathbb{Z}$ 'sinin tersi $-2-a \in \mathbb{Z}$ 'dir.

5 maddeyide ispatlarından C1 yani $(\mathbb{Z},\oplus)$ yapısının abelyen grub oldugunu gösterildi.

C2) $(Z,\odot)$ yapısının abelyen grub olması gerekir.

a) Kapalılık?

$\forall a b \in Z$ için $a \cdot b \in Z$, $a \in Z$, $b \in Z$, $ab+a+b \in Z$ Buna göre

$a \odot b \in Z$ Kapalıdır.

b) Değişme?

$a \odot b = b \odot a \longrightarrow ab+a+b = ba+b+a = b \odot a$ olduğundan

Değişmelidir.

c) Birleşme?

$\forall a,b,c \in Z$ için $(a \odot b) \odot c \stackrel{?}{=} a \odot (b \odot c)$

$$
\begin{aligned}
(ab+a+b) \odot c &= (ab+a+b)c + ab+a+b+c \\
&= abc+ac+bc+b+c+ab+a \\
&= abc+ab+ac+a+b \odot c \\
&= a(bc+b+c)+a+b \odot c \\
&= a(b \odot c)+a+b \odot c \\
&= a \odot (b \odot c)
\end{aligned}
$$

olduğundan birleşmelidir.

d) Birim eleman?

$\forall a,e \in Z$ için $a \odot e = e \odot a = a$ olacak şekilde

$a \odot e = a$

$ae+a+e = a \Rightarrow ae+e=0$ $e=0 \in Z$ olduğundan

birim elemandır.

e) Ters eleman?

$\forall a \in Z$ için $a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = e$ olcak şekilde $a^{-1} \stackrel{?}{\in} Z$

$a \odot a^{-1} = e$

$a \cdot a^{-1} + a + a^{-1} = 0 \Rightarrow a^{-1} = \dfrac{-a}{a+1}$ $a=-1 \in Z$ için anlamsız

$a^{-1} \notin Z$ olmadığından ters eleman değildir.

5 maddeyide incelediğimizde e maddesinin sağlamamasından ötürü C2 yani $(Z,\odot)$ yapısının abelyen grub olmadığını gösterdik. Bundan dolayı $(Z,\oplus,\odot)$ yapısı cisim değildir