$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

elde edilir. Yani f nin $x=0$ daki sağdan ve soldan limitleri sırasıyla 1 ve -1 dir.

Teorem 3 Bir x_0 noktası civarında tanımlı f fonksiyonunun bu noktada limitinin varolması için gerek ve yeter koşul; fonksiyonun bu noktadaki sağ ve sol limitlerinin var ve birbirine eşit olmasıdır, yani başka bir deyişle;

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_1 = L_2 = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \text{ dir.}$$

Bu teoremden hareketle Ör 2 için fonksiyonun $x=0$ da limiti yoktur.

Limitlerin Özellikleri

f ve g fonksiyonları bir x_0 noktası civarında tanımlı olsunlar. $c \in \mathbb{R}$ ve $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ olduğunu varsayalım. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1) $\lim_{x\to x_0} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \mp \lim_{x\to x_0} g(x) = A \mp B$;

2) $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c . \lim_{x\to x_0} f(x) = cA$;

3) $\lim_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = A.B$;

4) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$; $(B \neq 0)$

ÖR3 $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2 x}{x^2-1}$ limitini hesaplayalım:

Özelliklerden 4. dikkate alınırsa pay ve paydanın $x=\pi$ noktasında limiti vardır; buna göre

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2 x}{x^2-1} = \frac{\lim_{x\to\pi} \cos^2 x}{\lim_{x\to\pi} x^2-1} = \frac{(\cos\pi)^2}{\pi^2-1} = \frac{1}{\pi^2-1}$$ çıkar.

ÖR4 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = ?$

Pay ve paydanın $x=2$ deki limitleri sıfıra yaklaştığından 4deki kural doğrudan uygulanamaz. Bunun için pay çarpanlarına ayrılırsa

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+5) = 7$$ bulunur.

ÖR5 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} = ?$

Burada da $x\to 1$ için benzer bir durum olduğundan pay, $x^2-x = x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ şeklinde ayrılır. Sonuçta;

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}} = \lim_{x\to 1} x(\sqrt{x}+1) = 2$$ çıkar.

Limit Hakkında Teoremler

Teo 1 Verilen bir noktada fonksiyonun limiti sonlu bir değere sahipse, bu noktanın belli bir civarında fonksiyon sınırlıdır; yani $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ise $\exists M>0$ sayısı öyle ki x_0 noktasının belli bir δ-civarındaki x ler için $|f(x)| \leq M$ sağlanır.

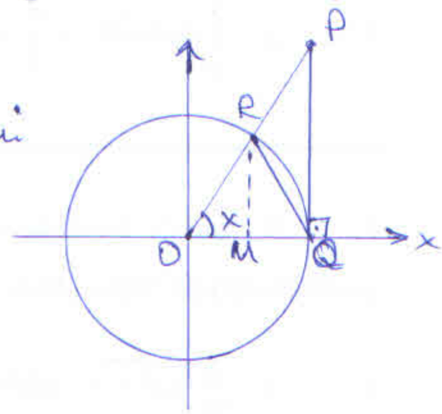
Teo 2 Eğer x_0 noktasının bir civarında $f(x) \geq 0$ ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ise bu durumda $A \geq 0$ dır.

Teo 3 x_0 noktasının herhangi bir civarında $f(x) \leq g(x)$ ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ ise bu durumda $A \leq B$ dir.

Teo 4 x_0 noktasının herhangi bir civarında f, g ve h fonksiyonları arasında $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ eşitsizliği varsa ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$ ise $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ dır. Buna sıkıştırma prensibi de denir.

Ör 6 Son teorem yardımıyla $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim:

Bu amaçla düzlemdeki 1. bölgede birim çember içinde bir x açısı belirleyelim:



Bu dar açıya bağlı olarak aşağıdaki alanlar tanımlanabilir:

$$A(\overset{\triangle}{ORQ}) \leq A(\overset{\frown}{ORQ}) \leq A(\overset{\triangle}{OPQ}) \Rightarrow$$

$$\frac{|OQ||RM|}{2} \leq \pi . 1^2 \frac{x}{2\pi} \leq \frac{|OQ||PQ|}{2} \Rightarrow$$

$1 . \sin x \leq x \leq 1 . \tan x$ elde edilir. $\sin x > 0$ olduğundan $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ eşitsizliğine ulaşılır. Buna göre

$\lim\limits_{x \to 0} 1 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ olduğundan Teo 4.den $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ olduğu görülür. Öte yandan

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ çıkar.}$$

Sonuç olarak $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ ... (1) özel limiti gösterilmiş olur.

(1) limitine 1. temel limit denir ve benzer tarzda $\left(\frac{0}{0}\right)$ ifade edilen birçok limitte kullanılır.

Limit hesabında da değişken değiştirme yapılır, mesela; $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$ dir. Zira $kx=t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $x\to 0$ için $t\to 0$ olacağından

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t/k}=k\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=k.1=k$$

elde edilir.

ÖR 7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$ dir. Gerçekten;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\beta x}{\sin\beta x}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}.1.1=\frac{\alpha}{\beta}\text{ dir.}$$

ÖR 8 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$ limitini hesaplayalım:

öncelikle $x-\frac{\pi}{4}=t$ dönüşümü yapılırsa $x\to\frac{\pi}{4}$ iken $t\to 0$ olacaktır. Böylece limit;

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}-2\cos(t+\pi/4)}{4t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos t+\sqrt{2}\sin t}{4t}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(t/2)}{t}-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}.\sin(t/2)-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}.1.0-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ bulunur.}$$

ÖR 9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ limiti bulalım:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{4}{1+\cos 2x}\right]=\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{4}{1+\cos 2x}\right)=1^2.\frac{4}{1+1}=2,,$$

Problemler

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = ?$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2}{\sin 3x} = ?$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{x} = ?$ 4) $\lim\limits_{x\to} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos(x/2)} = ?$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 2x}{\arcsin 3x} = ?$ 6) $\lim\limits_{x\to \alpha} \tan\dfrac{\pi x}{2\alpha} \cdot \sin\dfrac{x-\alpha}{2} = ?$

7) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x = ?$ 8) $\lim\limits_{x\to} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \cot x\right) = ?$

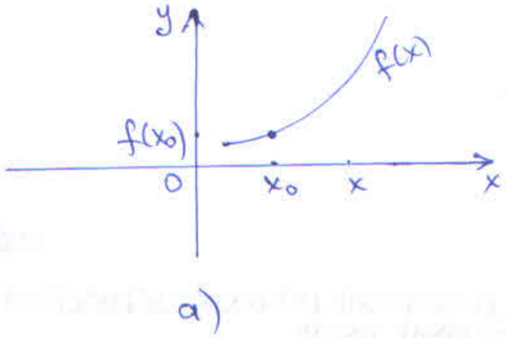
Fonksiyonun Sürekliliği

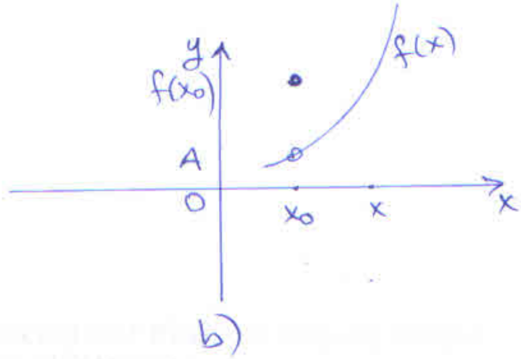
Tanım 1 f fonksiyonu, x_0 noktasında ve onun belli bir civarında tanımlı olsun. Eğer

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ---(1) limiti varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. (1) eşitliği bize, geometrik olarak x'in x_0 noktasına yaklaşması halinde, f in $f(x)$ değerinin de $f(x_0)$'a yaklaştığını göstermektedir. Ayrıca (1) eşitliği, f nin x_0 da tanımlı olduğunu, bu noktada sağdan ve soldan limitlerinin var ve birbirine eşit olduğunu ve de bu limit değeri ile $f(x_0)$ tanım noktasındaki değerin eşit olduğunu ifade eder. Dolayısıyla bu koşullardan herhangi biri sağlanmadığı durumda f ye x_0 da süreksizdir denir. Mesela $\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olmasına rağmen bu noktada tanımlı değildir, dolayısıyla da süreksizdir.

Fonksiyonun süreksiz olduğu bir noktadaki süreksizliğin türlerini ileride inceleyeceğiz.

ÖR10





(b) şeklinde gösterilen fonksiyonun, x_0 noktasındaki değeri $f(x_0)$, limiti ise A dır. $A \neq f(x_0)$ olduğundan, bu fonksiyon x_0 noktasında süreksizdir. Süreklilik için $A = f(x_0)$ olması gerekir.

Teo 1 Sürekli fonksiyon işareti altında limite geçilebilir, yani limit ve f işaretlerinin yerleri değiştirilebilir.

f fonksiyonunun tanım kümesi içindeki x_0 noktası ile keyfi x noktası arasındaki fark Δx ile, bunların fonksiyon altındaki görüntüleri farkı da Δy ile gösterilsin:

$\left.\begin{array}{l}\Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = f(x) - f(x_0)\end{array}\right\}$. Δx ve Δy ye sırasıyla değişkenin ve fonksiyonun x_0 noktasındaki artımı denir. Buna göre; $x = x_0 + \Delta x$ ve $f(x) = f(x_0) + \Delta y$ de yazılabilir. Bir fonksiyonun bir x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $\Delta x \to 0$ iken $\Delta y \to 0$ olmasıdır.

Tanım 2 f fonksiyonu, x_0 da ve onun belli bir sağ (sol) civarında tanımlanmış olsun. f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan (soldan) limiti varsa ve

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$ ise f ye x_0 da sağdan (soldan) süreklidir denir.

Teo 2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ dır.

Ör11 $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun tanım aralığında sürekli olduğunu gösterelim:

Bilindiği üzere $\sin x$ için $D(f)=(-\infty,+\infty)$ dur, burada $x_0\in D(f)$ noktası seçelim. Bu durumda Δy;

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

yazılabilir. Δy nin sağındaki çarpanlar için

$$\left|\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leq 1 \text{ ve } \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leq\frac{|\Delta x|}{2}$$ eşitsizlikleri gözönüne

alındığında $|\Delta y|\leq 2\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x| \Rightarrow |\Delta y|\leq|\Delta x|$ elde edilir. Bu ise bize $\Delta x\to 0$ iken $\Delta y\to 0$ olacağını gösterir. Seçtiğimiz x_0 keyfi bir nokta olduğundan bu $\forall x\in\mathbb{R}$ için geçerli olduğunu gösterir.

Problemler

1) Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgelerinde sürekli olduğunu gösteriniz:

a) $f(x)=|x|$; b) $f(x)=\begin{cases}\sin x & ; x\leq 0\\ x^2 & ; x>0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}|x-1| & ; x\leq 1\\ \cos\frac{\pi}{2}x & ; x>1\end{cases}$

Sürekli Fonksiyonlar Hakkında Teoremler

Teo3 f ve g fonksiyonları, $x_0$da ve onun belli bir civarında tanımlı olsunlar. f ve g fonksiyonları x_0 da sürekli ise $f(x)\mp g(x)$, $f(x)g(x)$ ve $f(x)/g(x)$. $(g(x_0)\neq 0)$ fonksiyonları da süreklidir.

Teo4 f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ise bu durumda f fonksiyonu x_0'ın belli bir civarında sınırlıdır.

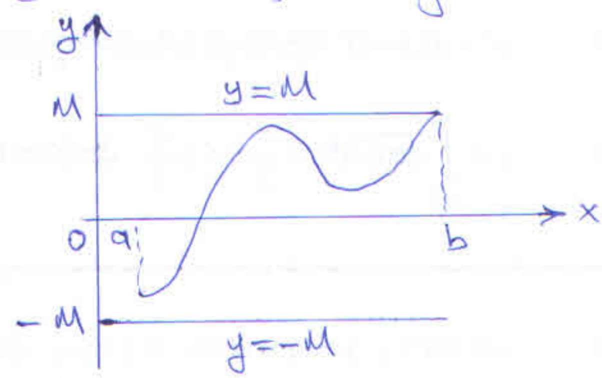
Teo 5 f fonksiyonu, x_0 da sürekli ve $f(x_0)\neq 0$ ise bu durumda x_0'ın belli bir civarında

$$\begin{cases} f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) & ; \text{ eğer } f(x_0)>0 \text{ ise} \\ f(x) < \frac{1}{2}f(x_0) & ; \text{ eğer } f(x_0)<0 \text{ ise} \end{cases}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Yani, fonksiyon sürekli olduğu noktanın belli bir civarında kendi işaretini korur.

Tanım 3 $[a,b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu, (a,b) aralığında sürekli ve a noktasında sağdan, b noktasında soldan sürekli ise f ye $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyon denir.

Teo 6 Kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyon bu aralıkta sınırlıdır.



Dolayısıyla sürekli olan f fonksiyonu kapalı aralıkta, $|f(x)|\leq M \quad \ldots(2)$ olacak şekilde bir $M\in\mathbb{R}$ sayısı vardır.

Not: Şayet fonksiyon $[a,b]$ aralığında $(a,b]$ ya da (a,b) aralıklarında sürekli ise bu aralıkta sınırlı olmayabilir. Zira $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu iki sürekli fonksiyonun bölümü olarak $(0,1]$ de süreklidir, fakat bu aralıkta sınırlanamaz, yani $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ olacaktır. Bu teorem sadece kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyonlar için sınırlılığı garanti etmektedir.

Verilen bir fonksiyonun tanım aralığında sınırlı olduğunu

$$m\leq f(x)\leq M \quad (m\leq M) \quad \ldots(3)$$

şeklinde yazabiliriz. Özel durumda ise $m=-M$ olduğunda, (3) eşitsizliği (2) ye dönüşür.

Örneğin, $\sin x$ fonksiyonunun sınırlı olması $|\sin x| \leq 1$ şeklinde $\sin x + 5$ " " " ise

$4 \leq \sin x + 5 \leq 6$ şeklinde yazılır.

Sınırlılık kavramı (3) ile gösterildiğinde m ye fonksiyonun alttan sınırı, M ye ise üstten sınırı denir.

Tanım 4 Verilen bir $[a,b]$ kapalı aralığında fonksiyonu alttan sınırlayan sayıların en büyüğüne bu aralıkta en büyük alt sınır ya da infimum; üstten sınırlayanların en küçüğüne en küçük üst sınır ya da supremum denir ve

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad --- (4)$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıda ele alınan fonksiyonlar için

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} (\sin x) = -1, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} (\sin x) = +1 \quad . (m=-1, M=+1)$$

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} (5+\sin x) = 4, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} (5+\sin x) = 6 \quad (m=4, M=6)$$

yazılabilir.

Teo 7 $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli f fonksiyonu bu aralıkta en küçük üst sınır ve en büyük alt sınır değerlerini alır, yani $x_1, x_2 \in [a,b]$ noktaları vardır ki

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1), \quad \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_2)$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 5 $[a,b]$ de sürekli f fonksiyonunun, bu aralıkta aldığı değerlerin en küçüğüne f nin en küçük (minimum); " " " büyüğüne de " " büyük (maksimum) değeri denir.