gerektiği görülür. Bu ise ilk eşitlikten c_1 'in de 0 olmasını gerektirir ki $c_1 = c_2 = 0$ olduğundan verilen fonksiyonlar lineer bağımsız olacaktır.

Tekrar homogen denklemlerin çözümleri konusuna gelelim.

<u>Teorem 5</u> $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ ler bir J açık aralığında sürekli ve bu aralıktaki $\forall x$ için $a_n(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda, (2) homogen lineer dif. denkleminin J de lineer bağımsız n tane çözümü vardır. Ayrıca bu n lineer bağımsız çözüm $y_1, \ldots, y_n$ ise (2) nin bir y çözümü bu lineer bağımsız çözümlerin bir kombinasyonu olarak tek türlü gösterilebilir. Yani;

$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ olacak şekilde $c_1, \ldots, c_n$ sabitleri mevcuttur.

Teoremin sonucu düşünüldüğünde n. mertebeden homogen lineer bir denklemin n den fazla sayıda çözümünün lineer bağımlı olduğu görülür.

<u>ÖR-8</u> $y'' + y = 0$ homogen lineer dif. denklemini ele alalım 2. mertebeden sabit katsayılı lineer bir denklem olduğundan $\mathbb{R}$ de lineer bağımsız iki çözüme sahip olacaktır.

Özel olarak

$y_1(0) = 1, \; y_1'(0) = 0$ ve $y_2(0) = 0, \; y_2'(0) = 1$

başlangıç koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri $y_1 = \cos x$ ve $y_2 = \sin x$ dir. Denklemin her çözümü, bu iki lineer bağımsız çözümün bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Mesela; $y(0) = 5, \; y'(0) = 1$ koşullarını sağlayan çözüm $y = 5\cos x + \sin x, \; x \in \mathbb{R}$, dir.

Genel olarak, yukarıda ifade edilen örnekte olduğu gibi özel başlangıç koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümler yerine (2) homogen denkleminin lineer bağımsız n tane çözümü kullanılabilir. Bunun için aşağıda ifade edilecek olan Wronskian kavramı bu çözümler için bir kriter vermektedir.

Tanım $f_1, \dots, f_n$ bir J aralığında $(n-1)$ defa türetilebilir fonksiyonlar olsun.

$$W(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & & f_n' \\ \dots & \dots & & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına $f_1, \dots, f_n$ fonksiyonlarının Wronskian'ı denir, ve herhangi bir $x \in J$ noktasındaki değeri $W(f_1, \dots, f_n)(x)$ ya da $W(f_1(x), \dots, f_n(x))$ ile gösterilir.

(2) homogen lineer dif. denkleminin $y_1, \dots, y_n$ çözümlerinin Wronskian'ı ile bu çözümlerin lineer bağımsızlığı arasında bir ilişki vardır:

Teorem 6 $a_0, \dots, a_n$ fonksiyonları bir J açık aralığında sürekli ve $\forall x \in J$ için $a_n(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda (2) homogen lineer dif. denkleminin $y_1, \dots, y_n$ çözümlerinin J aralığında lineer bağımsız olması için gyk., $\forall x \in J$ için $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ olmasıdır.

Uyarı: Lineer bağımsızlığı araştırılan fonksiyonlar bir homogen lineer dif. denklemin çözümleri değil de herhangi fonksiyonlar ise bu teorem genellikle doğru olmaz. Şöyle ki;

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 ; & x \geq 0 \\ -x^2 ; & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarıyla $-1 \leq x \leq 1$ aralığını ele alalım. Bu durumda $x \geq 0$ ise $W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$,

$x < 0$ ise de $W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$ çıkar.

Yani $[-1,1]$ aralığınındaki her x için $W(f_1, f_2)(x) = 0$ olur. Fakat f_1 ve f_2 fonksiyonları $[-1,1]$ de lineer bağımsızdır. Gerçekten de $\forall x \in [-1,1]$ için

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ ise $x = 1$ ve $x = -1$ değerleri için

$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{array}\right\}$ olduğu görülür. Buradan da $c_1 = c_2 = 0$

olduğu çıkar.

Teorem 7 $y_1, \ldots, y_n$ ler açık bir J aralığında (2) homogen lineer dif. denkleminin n tane çözümü olsun. Bu durumda, $\forall x \in J$ için ya $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$ dır ya da $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ dır.

Teorem 8 (Abel Formülü) $a_0, \ldots, a_n$ fonksiyonları J açık aralığında sürekli ve $\forall x \in J$ için $a_n(x) \neq 0$ olsun. Eğer $y_1, \ldots, y_n$, J aralığında (2) homogen lineer dif. denkleminin lineer bağımsız n çözümü ise, $\forall x \in J$ için

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=c\,e^{-\int\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}dx} \quad \dots (9)$$

eşitliği geçerlidir. $(c\in\mathbb{R})$

<u>ÖR 9</u> $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$, $(l>0$ sabit$)$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin Wronskian'ını bir sabit farkıyla bulalım:

(9) eşitliğinden $W(y_1,y_2)(x)=c\,e^{-\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}=c\,e^{-\ln|1-x^2|}$

$W(y_1,y_2)(x)=\dfrac{c}{1-x^2}$ olarak bulunur.

<u>Teorem 9</u> $a_0,\dots,a_n$ fonksiyonları bir J açık aralığında sürekli ve $\forall x\in J$ için $a_n(x)\neq 0$ olsun. Eğer $y_1,\dots,y_n$ (2) homogen lineer dif. denkleminin J'de n lineer bağımsız çözümü ise denklemin J deki herhangi bir y çözümü $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x) \quad \dots (10)$$

şeklinde ifade edilir.

<u>Tanım</u> n. mertebeden homogen lineer dif. denklemin J aralığında lineer bağımsız olan n çözüm cümlesine denklemin temel çözüm cümlesi denir. Buna göre $y_1,\dots,y_n$ denklemin temel çözüm cümlesi ise $y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$ ifadesine denklemin genel çözümü denir.

<u>ÖR 10</u> $y_1=e^{-2x}$ ve $y_2=e^{2x}$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ de $y''-4y=0$ homogen lineer dif. denkleminin iki çözümüdür. Wronskianına bakılırsa $W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}=$

$W(y_1,y_2)(x)=2+2=4\neq 0$ olup bu iki çözüm $\mathbb{R}$ de lineer bağımsızdır ve ikisi denklemin bir temel çözüm cümlesini oluşturur. Bu durumda

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$ fonksiyonu dif. denkleminin genel çözümüdür.

Problemler

1) Aşağıda verilen fonksiyonların $\mathbb{R}$ de lineer bağımlı olup olmadığını inceleyiniz:

a) x, x^3, x^5 b) $x, x+1, x+2$ c) $x, (x-1)^2, (x+1)^2$

d) $-1, \cos^2 x, \sin^2 x$ e) $1, \cos x, \sin x$ f) $\mathrm{Sh}x, e^x, e^{-x}$.

2) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ denkleminin $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = e^{2x}$ çözümleri $\mathbb{R}$ de lineer bağımsız mıdır? gösteriniz.

3) Aşağıda verilen denklemlerin lineer bağımsız çözümlerinin wronskianını sabit farkıyla hesaplayınız:

a) $y'' - y' - 12y = 0$ b) $y''' + y' + xy = 0$ c) $y^{(4)} - y = 0$

d) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Homogen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler

Teorem 10 $a_0, \dots, a_n$ ve Q, J açık aralığında sürekli ve $\forall x \in J$ için $a_n(x) \neq 0$ olsun. Eğer y_p,

$$Ly \equiv a_n(x) y^{(n)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = Q(x) \quad \dots (1)$$

denkleminin bir özel çözümü ve $y_1, \dots, y_n$ de (1) homogen denkleminin bir temel çözüm cümlesi ise (1) in herhangi bir çözümü $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p \quad \dots (11)$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla (11) fonksiyonuna (1) homogen olmayan lineer dif. denkleminin genel çözümü denir.

ÖR 11 $xy'' + y' = 2x$ denklemi verilmiş olsun. Gösterilebilir k

$\{y_1=1,\ y_2=\ln x\}$ cümlesi homogen denklemin bir temel çözüm cümlesidir. Yani $y_h=c_1.1+c_2.\ln x$ fonksiyonu homogen denklemin genel çözümünü oluşturur. Öte yandan $y_p=\frac{x^2}{2}$ homogen olmayan denklemin bir özel çözümüdür. Buna göre $(0,\infty)$ aralığında verilen denklemin genel çözümü $y(x)=c_1+c_2\ln x+\frac{x^2}{2}$ dir.

Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler

$a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ olmak üzere n. mertebeden

$$Ly\equiv a_n y^{(n)}+\dots+a_1y'+a_0y=0 \quad \dots(1)$$
$$=(a_nD^n+\dots+a_1D+a_0)y=0$$

homogen lineer dif. denkleminin genel çözümünü bulalım. Önceki bölümden bilineceği üzere denklemin lineer bağımsız n çözümünü, yani temel çözüm cümlesini bulmalıyız. Denklemin 1. mertebeden hali $(a_1D+a_0)y=0=a_1y'+a_0y$ olup bunun çözümü $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $y=ce^{-\frac{a_0}{a_1}x}$, $x\in\mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla daha yüksek mertebeden denklemlerin de üstel tipten çözümleri olabileceği beklenebilir.

Şimdi n. mertebe genel hali ele alalım:
Öncelikle $L(D)$ diferansiyel operatörünün bir özelliğini görelim:

__Teorem 1__ $L(D)=a_nD^n+\dots+a_1D+a_0$ sabit katsayılı bir lineer dif. operatör olsun. λ reel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere $L(D)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}.L(\lambda)\ \dots(2)$ dir.

Kolayca gösterilebilirki $m>0$ tamsayısı için

$D^m e^{\lambda x} = \lambda^m e^{\lambda x}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} L(D)e^{\lambda x} &= (a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0) e^{\lambda x} \\ &= a_n D^n e^{\lambda x} + \cdots + a_1 D e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= a_n \lambda^n e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}(a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = e^{\lambda x} L(\lambda) \end{aligned}$$ elde edilir.

Dolayısıyla (2) eşitliğinden, $y = e^{\lambda x}$ fonksiyonunun (1) denkleminin bir çözümü olması için gyk, ~~λ~~ nın

$$L(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \cdots (3)$$

denklemini sağlamasıdır. $L(\lambda)$ ile verilen polinoma karakteristik polinom, (3) denklemine de karakteris-tik denklem denir.

Karakteristik denklem n. dereceden bir polinom denklem olup n tane köke sahiptir. Bunların i) tümü reel ve farklı olabilir ii) bazıları karmaşık sayı ve iii) bazıları katlı kök olabilir. Şimdi bu durumları ayrı ayrı ele alalım:

i) Köklerin tümü reel ve birbirinden farklı ise:

Bu durumda karakteristik denklemin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ köklerinin tümü reel ve farklı ise

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x} \quad \ldots (4)$$

fonksiyonları $\mathbb{R}$ de (1) denkleminin n tane çözümüdür. Wronskianına bakılırsa,

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x} = e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x} \cdot \prod_{\substack{m,s=1 \\ m>s}}^{n} (\lambda_m-\lambda_s)$$

olur ve $s\neq m$ için sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla çözümler $\mathbb{R}$ de lineer bağımsızdır, yani (1) in bir temel çözüm cümlesini oluştururlar. Böylece de $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y=c_1e^{\lambda_1 x}+\dots+c_ne^{\lambda_n x}$ fonksiyonu (1) homogen lineer dif. denkleminin genel çözümüdür.

ii) Köklerin bazıları karmaşık sayı ise:

$\lambda_1=\alpha+i\beta$, karakteristik denkleminin bir karmaşık kökü ise denklemin katsayıları reel sabitler olduğundan, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ da karakteristik denklemin bir kökü olacaktır. Bu durumda bunlara karşı gelen çözümler;

$y=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ yani
$=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$ dolayısıyla $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ çözümlerini verir. (Euler formülü $-$ $e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$)

Burada elde edilen $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ ve $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ çözümlerinin de lineer bağımsız olacağı bilinebilir.

iii) Köklerin bazıları katlı ise:

Bu durumu 2. mertebeden $y''-2ay'+a^2y=0$ diferansiyel denklemi üzerinden açıklayalım:

Denkleme karşı gelen karakteristik denklem,

$\lambda^2-2a\lambda+a^2=(\lambda-a)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=a$ köklerine sahiptir.

$\lambda=a$ noktası iki-katlı kök olduğundan, çözümlerden biri olan e^{ax} ile lineer bağımsız olacak şekilde bir