başka çözüm bulunmalıdır. Bu amaçla $u(x)$ 2. mertebeye kadar türetilebilir bir fonksiyon olmak üzere $y = u(x)e^{ax}$ şeklinde öncekiyle lineer bağımlı olmayan bir $y(x)$ fonksiyonu (çözümü) bulmalıyız:
Bu çözüm denklemde yazılıp düzenlenirse;

$$(ue^{ax})'' - 2a(ue^{ax})' + a^2(ue^{ax}) = 0 \Rightarrow$$

$$(u'e^{ax} + u.ae^{ax})' - 2a(u'e^{ax} + uae^{ax}) + a^2ue^{ax} = 0 \Rightarrow$$

$$u''e^{ax} + \cancel{2u'ae^{ax}} + \cancel{u.a^2e^{ax}} - \cancel{2au'e^{ax}} - \cancel{2a^2ue^{ax}} + \cancel{a^2ue^{ax}} = 0 \Rightarrow$$

$$u''e^{ax} = 0 \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u' = c_1 \Rightarrow u(x) = c_1x + c_2 \text{ bulunur.}$$

Buna göre çözüm $y = (c_1x + c_2)e^{ax}$ olmalıdır. Dolayısıyla bu fonksiyonlardan e^{ax} iken diğeri xe^{ax} olmaktadır.
Sonuç olarak verilen 2. mertebeden lineer dif. denkleminin lineer bağımsız çözümleri $y_1 = e^{ax}$ ve $y_2 = xe^{ax}$ olacaktır. Böylece de denklemin bir temel çözüm cümlesi $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ olup genel çözüm de $y(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} = e^{ax}(c_1 + c_2x)$ şeklindedir.
Bu durum genelleştirilirse; $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = a$ karakteristik köklerine sahip bir denkleme karşı gelen lineer bağımsız çözümler;

$$y_1 = e^{ax},\ y_2 = xe^{ax},\ \dots,\ y_n = x^{n-1}e^{ax}$$ olup genel çözüm

$$y(x) = (c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1})e^{ax}$$ şeklinde yazılacaktır.

<u>ÖR1</u> $y''' + 2y'' - 3y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım:
Bu denkleme karşı gelen karakteristik denklem;

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -3$$

köklerine sahiptir. Buna göre denklemin temel çözüm cümlesi $\{1, e^x, e^{-3x}\}$ olup genel çözümü $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-3x}$ dir.

ÖR2 $y''' + 3y'' - 4y = 0$ denkleminin genel çözümü?

Karakteristik denklem; $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ olup $\lambda_1 = 1$ bir kök olur. Dolayısıyla denklem $\lambda - 1$ ile bölünürse

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & \downarrow & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ bulunur. Buradan temel çözüm cümlesi $\{e^x, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$ olup genel çözüm

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ olarak elde edilir.

ÖR3 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ aynı soru?

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$ çıkar.

Böylece verilen dif. denklemin genel çözümü;

$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$ olarak elde edilir.

Problemler

1) Aşağıdaki dif. denklemlerin genel çözümü?

a) $y''' - 6y' + 9y = 0$ b) $y''' + 5y'' = 0$ c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

d) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ e) $y^{(5)} = 0$ f) $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$

2) Aşağıdaki başlangıç-değer problemlerini çözünüz:

a) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

b) $y''' - 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$

c) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$.

Sabit Katsayılı Homogen Olmayan Lineer Denklemler

$a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere n. mertebeden homogen olmayan $Ly \equiv a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \dots (1)$
dif. denkleminin genel çözümü; önceki kesimde verildiği üzere homogen kısma ait y_h genel çözümü ile (1) in sağ yan fonksiyonuna bağlı y_p özel çözümünün toplamıdır. Buna göre, y_p özel çözümünün bulunmasına yönelik aşağıdaki yöntemi verelim:

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

(1) homogen olmayan lineer denklemindeki $Q(x)$ fonksiyonu sonlu sayıda lineer bağımsız türevlere sahip fonksiyonlardan oluşsun. Mesela $Q(x) = \sin 2x + x^2 e^{3x} + x^2 - 4x + 1$ gibi. Bu tip fonksiyonlardan mesela $\sin 2x$ kendisi lineer bağımsız $(c_1 . \sin 2x = 0)$, türeviyle birlikte de lineer bağımsız $(c_1 . \sin 2x + c_2 . 2\cos 2x = 0)$ iken 3. adımda tekrar türeviyle birlikte lineer bağımlı hale gelir:
$c_1(\sin 2x) + c_2(2\cos 2x) + c_3(-4\sin 2x) = 0$ eşitliği c'lerin tamamı sıfır olmadan sağlanır.

Bu şekildeki polinomlar, $\sin \alpha x, \cos \alpha x$ şeklindeki trigonometrik fonksiyonlar, $e^{\alpha x}$ üstel fonklar ya da bunların lineer kombinasyonu şeklindeki fonksiyonlar bu koşulu sağlar. Böylece; (1) in özel çözümü y_p için, bu fonksiyonların en genel halleri formunda çözümler aranır. Bu amaçla da aşağıdaki tablodan yararlanırız:

$Q(x)$	Karakteristik denklemi bir kökü değildir	y_p
x^n	0	$A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0$
$e^{\alpha x}$	α	$A e^{\alpha x}$
$\sin \alpha x / \cos \alpha x$	$i\alpha$	$A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$
$x^n e^{\alpha x}$	α	$e^{\alpha x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$
$e^{\alpha x} \sin \beta x / e^{\alpha x} \cos \beta x$	$\alpha + i\beta$	$e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x)$
$x^n e^{\alpha x} \sin \beta x /$ $x^n e^{\alpha x} \cos \beta x$	$\alpha + i\beta$	$e^{\alpha x}[(A_n x^n + \dots + A_0) \sin \beta x + (B_n x^n + \dots + B_0) \cos \beta x]$

Tablodaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olup 2. sütunda yer alan büyüklükler karakteristik denklemin k-katlı kökü iseler bu durumda tablonun son sütununda yer alan y_p özel çözümleri x^k ile çarpılır.

ÖR1 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x} + 3\sin x$ denkleminin genel çözümünü bulalım:

Karakteristik denklem $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$ köklerine sahiptir. Buna göre homogen kısma ait genel çözüm y_h; $y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$ dir.

y_p özel çözüm ilk terim için $y_p = (Ax+B)e^{3x}$ şeklinde; diğer fonksiyon da dikkate alınırsa $y_p = (Ax+B)e^{3x} + C\sin x + D\cos x$ formunda olur. Buradan y_p yi dif. denklemde yazarsak;

$$2 / \; y_p = (Ax+B)e^{3x} + C\sin x + D\cos x$$

$$-3 / \; y_p' = Ae^{3x} + 3(Ax+B)e^{3x} + C\cos x - D\sin x$$

$$1 / \; y_p'' = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9(Ax+B)e^{3x} - C\sin x - D\cos x$$

$$e^{3x}\left[(2A - 9A + 9A)x + (2B - 3A - 9B + 6A + 9B)\right] + (2C + 3D - C)\sin x +$$

$$+ (2D - 3C - D)\cos x = 2xe^{3x} + 3\sin x$$ eşitliğinden;

$A=1$, $B=-\frac{3}{2}$, $C=\frac{3}{10}$, $D=\frac{9}{10}$ bulunur. Sonuçta özel çözüm;

$y_p=\left(x-\frac{3}{2}\right)e^{3x}+\frac{3}{10}\sin x+\frac{9}{10}\cos x$ ve de genel çözüm;

$y_g=y_h+y_p$ olarak elde edilir.