Diferansiyel Denklemler

Hafta 10

$$Parametre\ (Sabitinin) Değişimi\ Yöntemi$$

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$ele\ alalım$$

$$2.\ ADIM: y_g = y_h + y_ö$$

$$2.\ ADIM: y_h = ?$$

$$\boxed{y_h = c_1y_1 + c_2y_2}$$

$$3.\ ADIM: \boxed{y_ö = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)}$$

$$şeklinde\ aranır.$$

$$v_1 = ?, \qquad v_2 = ?$$

$$4.\ ADIM: (v_1\ ve\ v_2\ nin\ bulunması)$$

$$y = v_1y_1 + v_2y_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$y' = v'_1\, y_1 + v_1y'_1 + v'_2y_2 + v_2y'_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$(5)'te:\ v'_1y_1 + v'_2y_2 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$kabul\ edelim.$$

$$y' = v_1y'_1 + v_2y'_2$$

$$y'' = v'_1y'_1 + v_1y''_1 + v'_2y'_2 + v_2y''_2 \ldots (8)$$

$$(4), (7)\ ve\ (8)'i\ (1)\ denkleminde\ yazalım.$$

$$a_2[v'_1 y'_1 + v_1 y''_1 + v'_2 y'_2 + v_2 y''_2] + a_1[v_1 y'_1 + v_2 y'_2] + a_0[v_1 y_1 + v_2 y_2] = Q(x)$$

$$v_1[a_2 y''_1 + a_1 y'_1 + a_0 y_1] + v_2[a_2 y''_2 + a_1 y'_2 + a_0 y_2] + a_2[v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2] = Q(x)$$

$$\left(\frac{y_1, y_2 \text{ homojen denkleminin çözümü olduklarından}}{\text{ilk iki toplam SIFIR OLUR}}\right)$$

$$\boxed{v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = \frac{1}{a_2} Q(x)} \ldots\ldots (9)$$

(6) *ve* (9) *iki bilinmeyenli denklem sistemidir. Önce* v'_1, v'_2 *bulunur. sonra integral olarak* v_1, v_2 *bulunur.*

$$\boxed{\begin{array}{c} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = \dfrac{1}{a_2} Q(x) \end{array}}$$

$\boxed{\text{ÖRNEK 1}}$ $y'' + y = \tan x$ *denkleminin genel çözümünü bulun.*

1. *ADIM*: $y_h = ?$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$$

$$y_h = c_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin x}_{y_2}$$

$$2.\,ADIM: y_ö = v_1 \cos x + v_2 \sin x$$

$$3.\,ADIM: \ (v_1 \ ve \ v_2 \ nin \ bulunması)$$

$$v'_1 \cos x + v'_2 \sin x = 0$$

$$v'_1(-\sin x) + v'_2(\cos x) = \tan x$$

Denklem sistemi çözülmeli

Kramer Yöntemi:

$$v'_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}}, \qquad v'_2 = \frac{\begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}}$$

$$v'_1 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow v_1 = \int -\frac{\sin^2 x \, dx}{\cos x}$$

$$v'_2 = sinx \ \Rightarrow \ v_2 = \int \sin x \, dx \Rightarrow \ v_2 = -\cos x$$

$$v_1 = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) dx$$

$$\boxed{v_1 = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|}$$

$$y_ö = \cos x\,(\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) + \sin x\,(-\cos x)$$

$$y_ö = -\cos x \ln|secx + tanx|$$

$\boxed{ÖRNEK\ 2}$ $y'' + 8y' + 16y = \dfrac{e^{-4x}}{x^2} \quad \left(x^{-2}.\,e^{-4x} \ \Rightarrow polinom\ değil\right)$

$$1. ADIM: r^2+8r+16=0$$

$$r_1=r_2=-4 \;\; (katlı\ kök)$$

$$\boxed{y_h=c_1e^{-4x}+c_2xe^{-4x}}$$

$$2. ADIM: \boxed{y_ö=v_1e^{-4x}+v_2xe^{-4x}}$$

$$Ödev: \boxed{y''+y=\sec x}$$

$$v'_1e^{-4x}+v'_2xe^{-4x}=0$$

$$v'_1(-4e^{-4x})+v'_2(1-4x)e^{-4x}=\frac{e^{-4x}}{x^2}$$

$$v'_2=\frac{1}{x^2}, \quad v_2=-\frac{1}{x} \quad ,v'_1=-\frac{1}{x}, \qquad v_1=-\ln|x|$$

$$y_ö=-e^{-4x}(1+lnx)$$

$\boxed{\text{ÖRNEK 3}}$ $y'''+y'=\dfrac{1}{\sin x}$ genel çözümünü bulunuz.

$$1. \mathrm{ADIM}: \mathrm{r}^3+\mathrm{r}=0$$

$$r_1=0, \qquad r_{2,3}=\pm\mathrm{i}$$

$$y_h=c_1\underbrace{1}_{y_1}+c_2\underbrace{\cos x}_{y_2}+c_3\underbrace{\sin x}_{y_3}$$

$$2. \mathrm{ADIM}: y_ö=v_1 1+v_2\cos x+v_3\sin x$$

v_1, v_2, v_3 ü bulmak için

$$v'_1 1+v'_2\cos x+v'_3\sin x=0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$v'_1 0 + v'_2\,(-\sin x) + v'_3 \sin x = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$v'_1 0 + v'_2\,(-\cos x) + v'_3\,(-\sin x) = \frac{1}{\sin x} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

denklem sistemi çözülmeli.

$\boxed{KISA\ YOL}$

$$v_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ Q(x) & y'_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}} = \frac{W(\bar{y}_1, y_2)}{W(y_1, y_2)}$$

$$v_1 = \int \frac{W(\bar{y}_1, y_2)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

$$(1) + (3):\ v'_1 = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v_1 = \int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right|$$

$$(\sin x)(2) + \cos x\,(3):\ -v'_2 = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow v_2 = \int -\frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= -\ln|\sin x|$$

$$v'_3 = -1 \Rightarrow v_3 = \int (-1) dx = -\mathrm{x}$$

Problemler

$$1)\ \mathrm{y}'' + \mathrm{y} = \frac{1}{\sin x}$$

$$2)y'' - y = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$3)\ \ y'' - 2y' + y = \frac{\ln x}{x},\quad x > 0 \text{ için çözümü}$$

$$4)\ \ y'' - y' = \arctan x$$

Lineer Değişken Katsayılı Denklemleri

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0 y = Q(x)$$

(1. Yöntem: Mertebe Düşürme Yöntemi)

(2. Yöntem: Euler Diferansiyel Denklemi)

1) Mertebe Düşürme Yöntemi:

Denklemin homojen kısmının bir özel çözümü $y_1 = y_1(x)$ verilmişse

$\boxed{y = y_1 u}$ *dönüşümü yapılarak denklemin mertebesi*

bir alt mertebeye düşürülür.

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0 y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = y_1(x)$ olsun.

$y = y_1 u$ dönüşümü yapalım.

$$y' = y'_1 u + y_1 u'$$

$$y'' = y''_1 u + y'_1 u' + y'_1 u' + y_1 u''$$

$$a_2\left[y''_1 u + y'_1 u' + y'_1 u' + y_1 u''\right] + a_1\left[y'_1 u + y_1 u'\right] + a_0(x) y_1 u = 0$$

$$u\left[a_2(x) + y''_1 + a_1 y'_1 + a_0(x) y_1\right] + \left(2a_2(x) y'_1 + a_1(x) y_1\right) u' + a_2(x) y_1 u'' = 0$$

$$a_2 y_1 \mathrm{u}'' + \left(2a_2 y'_1 + a_1 y_1\right)\mathrm{u}' = 0$$

$$\mathrm{u}' = v \quad , \quad \mathrm{u}'' = \mathrm{v}'$$

$$\boxed{a_2 y_1 \mathrm{v}' + \left(2a_2 y'_1 + a_1 y_1\right)\mathrm{v} = 0}$$ lineer denklemi elde edilir.

Bu denklemi çözerek önce 0 bulunur $\left(\mathrm{v} = \mathrm{u}'\right)$ eşitliğinden

$$\mathrm{u} = \int v \, \mathrm{dx} \;\; \textit{bulunur}.$$

Genel Çözüm: $\mathrm{y} = y_1 \mathrm{u} = y_1 \left(\int v \, \mathrm{dx}\right)$

$\boxed{\textit{ÖRNEK}}$ $y'' - xy = -x^2$

(Biraz düşündü ve: "Haftaya devam edelim."dedi.)