$Diferansiyel\ Denklemler$

$Hafta\ 9$

$Sınav\ soruları\ çözümleri$

$$1. Soru:\ (a)\ y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + x$$

Çözüm: x burada bir değişken. C'ler keyfi sabittir. Denklemi bulmadan mertebe 2 dir yazmanın anlamı yok.

$$(b)\ \ y' = 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x} + 1$$

$$(c)\ \ y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

$$y'' - y' - 2y = -2x - 1$$

y'nin karesi olsaydı lineer olmazdı.

Diğer bir çözüm;

$$(a) + (b):\ y + y' = 3c_1e^{2x} + x + 1$$

$$(b) + (c):\ y' + y'' = 6c_1e^{2x} + 1$$

Taraf tarafa toplarsak

$$y'' - y' - 2y = -2x - 1$$

$$2. Soru:\ (12e^{2x}y^2 - y)dx = dy$$

Çözüm: Bernoulli denklemi

$$y' + P(x) = q(x)y^{\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx} = 12e^{2x}y^2 - y$$

$$y' + y = 12e^{2x}y^2\ (Bernoulli\ denklemi)$$

$$v = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{y}{y^2} = 12e^{2x}$$

$$y^{-2}y' + y^{-1} = 12e^{2x}\,, \quad y^{-1} = v \; olduğundan$$

$$y^{-1} = v \quad türevini\ alırsak$$

$$(-1)y^{-2}y' = v' \Rightarrow y^{-2}y' = -v'$$

$$v \; dönüşümü\ yapılırsa$$

$$-v' + v = 12e^{2x}$$

$$v' - v = -12e^{2x}$$

$$v = \frac{1}{e^{\int -dx}}\left(\int e^{\int -1dx}(-12e^{2x})dx + c\right)$$

$$= \frac{1}{e^{-x}}\left(\int e^{-x}(-12e^{2x})dx + c\right)$$

$$= e^{x}\left(-12\int e^{x}dx + c\right)$$

$$v = e^{x}(-12e^{x} + c)$$

$$= -12e^{2x} + ce^{x}$$

$$y^{-1} = -12e^{2x} + ce^{x}$$

$$y = \frac{1}{ce^{x} - 12e^{2x}}$$

$3. Soru$: $yp = xp^2 - 1$ $genel\ veya\ tekil$ çözüm$ü$n$ü$ $yazın$.

Çözüm:

$$y = xp - \frac{1}{p}$$

$$x'eg\text{ö}re\ t\text{ü}rev\ alırız$$

$$y' = 1p + xp' + \frac{1}{p^2}p'$$

$$p = p + p'\left(x + \frac{1}{p^2}\right)$$

$$0 = p'\left(x + \frac{1}{p^2}\right)$$

$$p' = 0\ \ veya\ \ x + \frac{1}{p^2} = 0\ \ olabilir$$

$$p' = 0 \Rightarrow p = c\ olur\ ve\ y = xc - \frac{1}{c}\ genel\ \text{çözümdür}.$$

$$x + \frac{1}{p^2} = 0 \implies x = -\frac{1}{p^2}$$

$$y = -\frac{1}{p^2}p - \frac{1}{p}$$

$$= -\frac{2}{p}$$

$$Kolay\ yoldan\ devam\ edelim$$

$$p = -\frac{2}{y} \implies p^2 = \frac{4}{y^2}$$

$$p^2 = -\frac{1}{x} = \frac{4}{y^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = -4x$$

$$Zor\ yol:$$

$$p^2 = -\frac{1}{x}\ (Sadece\ x < 0\ için\ geçerli)$$

$$p = \sqrt{-\frac{1}{x}}$$

$$p = -\frac{2}{y} = \sqrt{-\frac{1}{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(-\frac{2}{y}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{4}{y^2} = -\frac{1}{x}$$

$$y^2 + 4x = 0$$

$$2.\,Yol:\ Denklemi\ x'e göre\ türev\ alırız.$$

$$y'p + yp' = 1p^2 + x2pp' - 0$$

$$p^2 + yp' = p^2 + 2xpp', \qquad p^2 ler\ sadeleşir$$

$$yp' = 2xpp'$$

$$p'ler\ sadeleştirilmez\ çünkü\ işimiz\ biter$$

$$p'(y - 2xp) = 0 \Rightarrow\ p' = 0\ ve\ y - 2xp = 0'dır$$

$$p' = 0 \Rightarrow\ p = c\ \Rightarrow\ Genel\ çözüm\ (yc = xc^2 - 1)$$

$$y - 2xp = 0\ ise\ y = 2xp\ ise\ p = \frac{y}{2x}$$

$$y\left(\frac{y}{2x}\right) = x\left(\frac{y}{2x}\right) - 1$$

$$\frac{y^2}{2x} = x\frac{y^2}{4x^2} - 1$$

$$2y^2 = y^2 - 4x$$

$$y^2 + 4x = 0$$

$$4.\,Soru:\ \ y^{(6)} + y''' = 0$$

$$Çözüm: Bu\ denklemin\ genel\ çözümü\ için\ ilk\ adım\ karakteristik$$

$$denklemi\ buluruz$$

$$r^6 + r^3 = 0$$

$$r^3(r^3 + 1) = 0,$$

$$yazmamız\ lazım\ işimize\ gelmiyor\ bu\ y\text{ü}zden$$

$$r^3\text{ün}\ kök\text{ünü}\ bulmak\ r^2\ nin\ kök\text{ünü}\ bulmaktan\ daha\ zor$$

$$r^3(r + 1)(r^2 - r + 1) = 0$$

$$r^2 - r + 1\ denkleminde\ \delta < 0\ olduğu\ için\ kök\ yoktur.$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

$$r_4 = -1$$

$$r_{5,6} = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0\ için\ \{e^{ox}, xe^{ox}, x^2e^{ox}\}$$

$$r_4 = -1\ için\ \{e^{-x}\}$$

$$r_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\ için\ \left\{ e^{\frac{1}{2}x}.\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\,, e^{\frac{1}{2}x}.\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

$$\text{ö}yleyse$$

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{ox} + c_4e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_5\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_6\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$