Diferansiyel Denklemler

Hafta 12

Laplace Dönüşümlerinin Diferansiyel Denklemlerdeki Karşılığı

$\boxed{ÖRNEK\ 1}$ $y'' + 3y' + 2y = 0$ *diferansiyel denklemini* $y(0) = 1, y'(0) = 2$ *başlangıç koşulları altında Laplace* dönüşüm *yöntemi ile çözelim.*

Her tarafın Laplace dönüşümünü *alalım.*

$$L\{y''\} + 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{0\}$$

Hatırlayalım: $\boxed{L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$

$$L\{y\} = Y \text{ dersek,}$$

$$L\{y'\} = sY - y(0)$$

$$L\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) \text{ oluyordu.}$$

$$L\{y''\} = +3L\{y'\} + 2L\{y\} = 0$$

$$\left[s^2Y - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{2}\right] + 3\left[sY - \underbrace{y(0)}_{1}\right] + 2Y = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y - s - 5 = 0$$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2 + 3s + 2}$$

$$Hatırlayalım: \boxed{L\{f(t)\} = F(s) \Leftrightarrow f(t) = L^{-1}\{F(s)\}}$$

Her tarafın Ters Laplace Dönüşümü alırız.

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^2 + 3s + 2}\right\}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}\right\}$$

$$A(s+1) + B(s+2) = s + 5$$

$$s = -1 \text{ için } B = 4$$

$$s = -2 \text{ için } A = -3$$

$$= -3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-2)}\right\} + 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1)}\right\}$$

$$y(t) = -3e^{-2t} + 4e^{-t}$$

bulunur.

Bu kolay oldu. Biraz farklı örnek yazalım.

$\boxed{\rightarrow \text{ ÖRNEK } 2}$ $y'' + 2y' + 5y = \sin t \,, y(0) = 1, y'(0) = 2$

Biz bu tarz problemlere başlangıç değer problemleri diyoruz.

Başlangıçta bize $y(0)$ *ve* $y'(0)$ *verildiği için.*

Şimdi bu başlangıç değer problemini çözelim.

$$L\{y''\} + 2L\{y'\} + 5L\{y\} = L\{\sin t\}$$

Üstteki sorudan hatırladıklarımızı direk yazarsak.

$$\left[s^2 Y - s\,\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{2}\right] + 2\left[sY - \underbrace{y(0)}_{1}\right] + 5Y = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y = s + 4 + \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + s + 5}{(s^2+1)(s^2+2s+5)}$$

Her tarafın Ters Laplace dönüşümünü alalım.

$$L^{-1}\{Y\} = L^{-1}(\dots\dots\dots)$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}\right\}$$

Burada hesaplamak yapmak hayli zor. Bu yüzden

$$= AL^{-1}\left\{\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{\cos t}\right\} + BL^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\sin t}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{C(s+1) + D - C}{(s+1)^2 + 2^2}\right\}$$

$$= A\cos t + B\sin t + CL^{-1}\left\{\underbrace{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}}_{e^{-t}\cos 2t}\right\} + \frac{(D-C)}{2}L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}}_{e^{-t}\sin 2t}\right\}$$

$$= A\cos t + B\sin t + Ce^{-t}\cos 2t + \frac{(D-C)}{2}e^{-t}\sin 2t$$

$$(As + B)(s^2 + 2s + 5) + (Cs + D)(s^2 + 1) = s^3 + 4s^2 + s + 5$$

$$Burayla\ daha\ fazla\ uğraşmayacağım. Siz\ bunlara\ bakarsınız.$$

$$A = -\frac{1}{10}$$

$$B = \frac{1}{5}$$

$$C = \frac{11}{10}$$

$$D = 4$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + \frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t + \frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t}$$

$$Problem$$

$$1)\ y'' + 2y' + 5y = 3e^{-2t}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

$$Cevap: y(t) = \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{13}{10}e^{-t}\sin 2t$$

Laplace Dönüşümleri Sonu.

Konvolüsyon

$$\int_0^t f(u)\, g(t-u)du \text{ } integraline\ f\ ile\ g'nin\ konvolüsyonu$$

$$denir.\, f * g\ ile\ gösterilir.$$

$$\boxed{f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du}$$

$$f * g = g * f\ (Değişme\ özelliği\ vardır.)$$

$$\boxed{ÖRNEK\ 1}\ t * \sin t = \int_0^t u \sin(t-u)du$$

$$\underbrace{t}_{f(t)} * \underbrace{\sin t}_{g(t)} = \int_0^t u \sin(t-u)du$$

$$Kısmi\ integrale\ göre\ hesaplayacağız.$$

$$Hatırlayalım: \int dv = \int \sin(t-u)\, du$$

$$v = \cos(t-u)$$

$$= u\cos(t-u)|_0^t - \int_0^t \cos(t-u)du$$

$$= \left[t\, \underbrace{\cos(\mathrm{t}-\mathrm{t})}_{1} - \underbrace{0\cos(t-0)}_{0}\right] + \sin(t-u)|_0^t$$

$$= t + \left[\underbrace{\sin(t-t)}_{0} - \sin(t-0)\right]$$

$$Teorem\ \boxed{1}\ L\{f*g\} = L\{f(t)\}.L\{g(t)\}$$

$$= F(s).G(s)$$

$$= t - \sin t$$

$$Teorem\ \boxed{2}\ \boxed{f*g = L^{-1}\{F(s)G(s)\}}\ 'dir.$$

$$\boxed{ÖRNEK\ 2}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{s}}_{F(s)}}_{f(t)=1}\ \underbrace{\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{G(s)}}_{g(t)=\sin t}\right\}$$

$$\boxed{2}\ 'den, L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}\right\} = 1*\sin t$$

$$= \int_0^t 1\sin(t-u)du$$

$$= \cos(t-u)\ (tden\ sıfıra)$$

$$= \cos 0 - \cos t$$

$$= 1 - \cos t$$

$$e^{-t} * \sin 2t = \int_0^t e^{-u}\sin 2t\,(t-u)du$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+4)}\right\} = ?$$

$$\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{F(s)}}_{f(t)=e^{-t}}\underbrace{\underbrace{\frac{2}{s^2+2^2}}_{G(s)}}_{g(t)=\sin 2t}\right\}=\frac{1}{2}(e^{-t}*\sin 2t)$$

$\boxed{ÖRNEK\ 3}$ $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{(s^2+1)^2}\right\}$

Birinci yol bu.

$$2.Yol:L^{-1}\left\{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{F}}_{f(t)=\sin t}\underbrace{\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{G}}_{g(t)=\cos t}\right\}=f*g=\sin t*\cos t$$

$$=\int_0^t \sin u\cos(t-u)\,du$$

$$=\int_0^t \sin u\,[\cos t\cos u+\sin t\sin u]du$$

$$=\cos t\int_0^t \sin u\cos u\,du+\sin t\int_0^t \sin^2 u\,du$$

$$=\cos t\frac{\sin^2 u}{2}\,\Big|_0^t+\sin t\left[\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\sin 2u\right]\Big|_0^t$$

$$=\frac{\sin^2 t}{2}\cos t+\sin t\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

Laplace Dönüşümü konusu burada bitiyor. Bazı özellikleri göstermedik. Son konu çok kolay, dört işlem ve türev biliyorsanız çözülüyor.

Problem

$$1)\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)}\right\} = t * e^t$$

$$2)\ \ L^{-1}\{\frac{3}{(s^2+9)(s+1)^2}\}$$