SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğr ÜYESİ Abdullah SEVİN

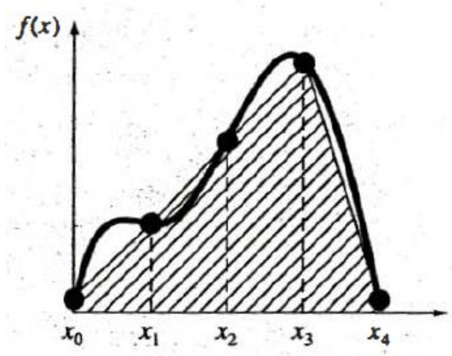
SAYISAL ANALİZ

SAYISAL İNTEGRAL

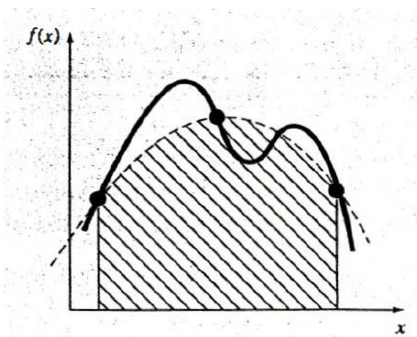
(Numerical Integration)

İÇİNDEKİLER

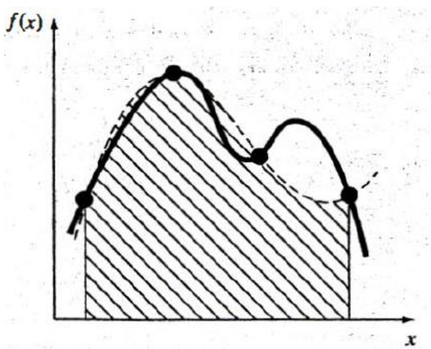
- **Sayısal İntegral**
  - **Trapez (Yamuk) Yöntemi**



  - **Simpson Yöntemi**



1/3 Kuralı

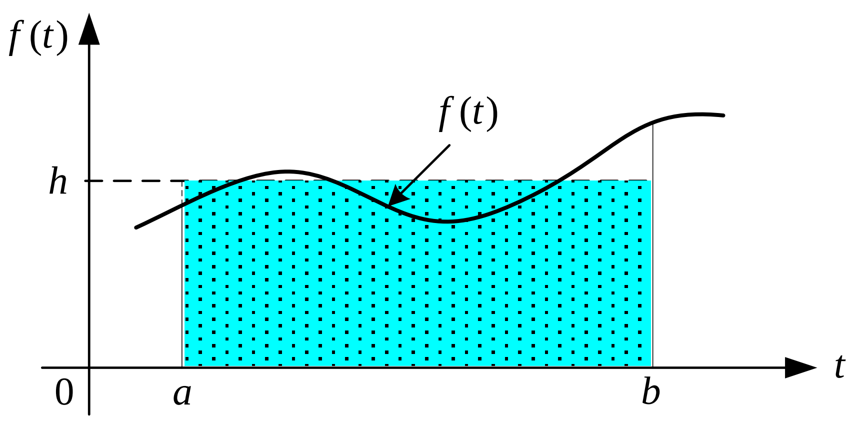


3/8 Kuralı

Sayısal İntegral

- **Mühendisler değişen sistemler ve süreçlerle sürekli olarak uğraşmak zorunda oldukları için türev ve integral kavramları mesleklerinin temel araçlarındandır.**

- **Sayısal integral, integrali alınacak fonksiyonun grafiği çizildiğinde grafiğin altında kalan alanın yaklaşık olarak hesaplanması prensibine dayanır.**



$$Alan = \int_a^b f(t)\, dt$$

$$h \times (b - a) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Sayısal İntegral

- İntegral hesabı, mesleki olarak nerelerde karşımıza çıkar.

- Ortalama değer hesabı,

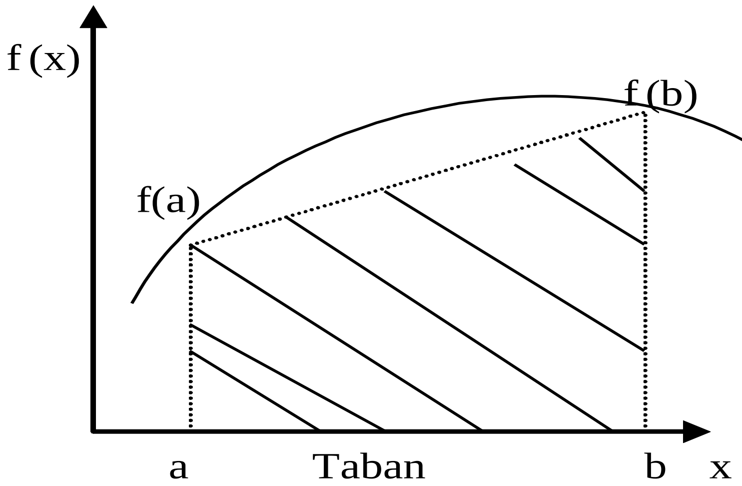
$$h = \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{(b-a)} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)\,dt \qquad i_{ort} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt \qquad i_{ort} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$$

- Etkin değer (rms-root mean square/karelerinin ortalamasının karekökü) hesabı,

$$f_{etk} = \sqrt{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)^2\,dt}$$

Trapez (Yamuk) Kuralı

- **Fonksiyonun integrali, yamuğun alanına eşittir.**

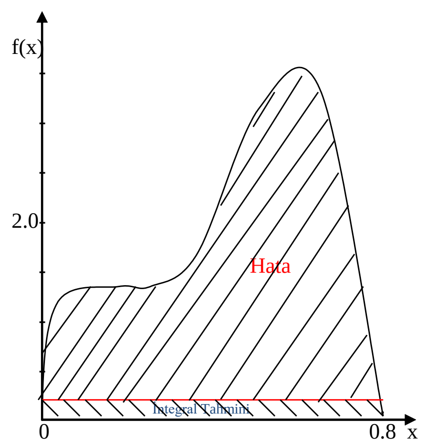


Bir yamuğun alanı,

Alan = Yükseklik x Ortalama Genişlik

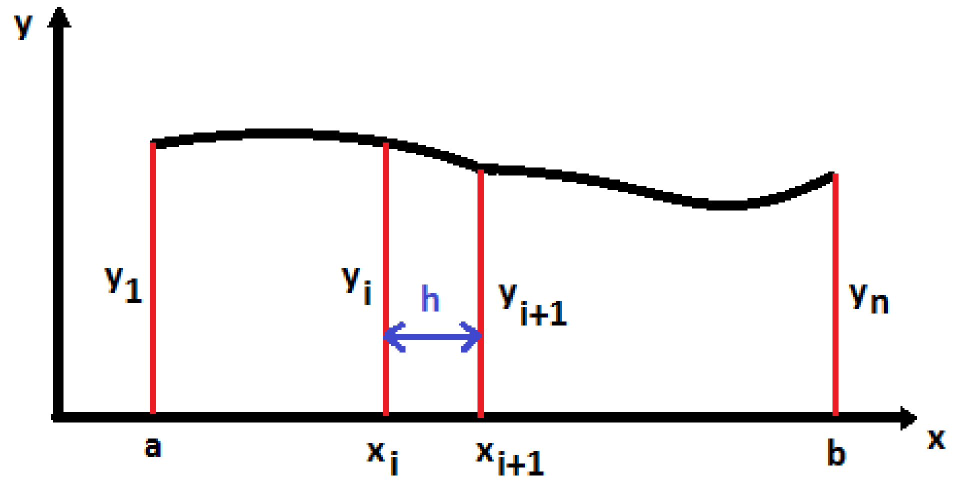
$$Integral = (b-a) * \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

- **Başlangıç ve bitiş noktaların seçimi, hata açısından oldukça önemlidir.**



Trapez (Yamuk) Yöntemi ile Sayısal İntegral

- **Trapez yönteminde, şekilde görüldüğü gibi a ve b olarak sınırları belirlenen x eksenindeki aralığın h olarak adlandırılan eşit uzunlukta parçalara bölünmesi gerekir.**
- **Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (h ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.**



$$Alan \cong h\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+h\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+h\left(\frac{y_3+y_4}{2}\right)+\ldots+h\left(\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$Alan \cong \frac{h}{2}\left[y_1+2\left(y_2+y_3+y_4+\ldots+y_{n-1}\right)+y_n\right]$$

Trapez Yöntemi ile Sayısal İntegral

- **Örnek:** $y(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun **0<x<1** aralığı için **h=0.25** kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini trapez yöntemi ile hesaplayınız.

n	x	$y(x) = e^{-x^2}$
1	0	1.0000
2	0.25	0.9394
3	0.5	0.7788
4	0.75	0.5698
5	1	0.3679

- **Çözüm:**

$$Alan \cong \frac{h}{2}\left[y_1 + 2\left(y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-1}\right) + y_n\right]$$

$$Alan \cong \frac{0.25}{2}\left[1 + 2\left(0.9394 + 0.7788 + 0.5698\right) + 0.3679\right] = 0.7430$$

trapz komutu ile alan (integral) hesabı

- **trapz (x, f(x))**

alanı (integrali) hesaplanacak fonksiyon

integralin sınırları içerisinde h aralığına göre oluşan vektör

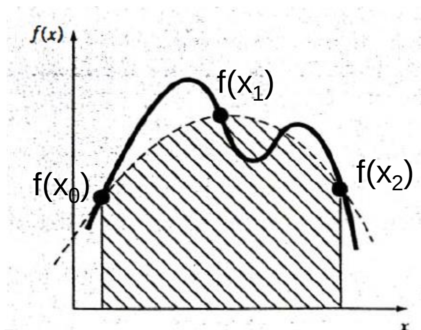
```
%  fonksiyonun aralığını tanımla
>> a=0; b=1; h=0.25;
>> x = a:h:b;
%  trapz komutu ile integral hesabı
>> alan = trapz (x, exp(-x.^2))
alan =
     0.7430
```

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral

- Trapez yöntemine göre alan hesabı daha sık aralıklarla yapılır.
- Trapez yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.
- Simpson yöntemi daha doğru integral hesabı için, noktaları birleştirmek amacıyla daha yüksek dereceli polinomlar kullanmaktır.

1/3 Kuralı

➢ f(a) ve f(b) noktaları arasında bilinen ek bir nokta var ise, bu üç nokta bir parabol ile birleştirilebilir.

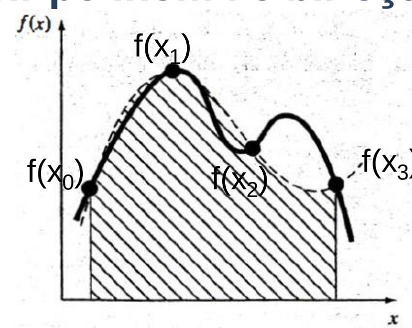


$$I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{Taban}\underbrace{\frac{\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]}{6}}_{Ortalama\ yükseklik}$$

3/8 Kuralı

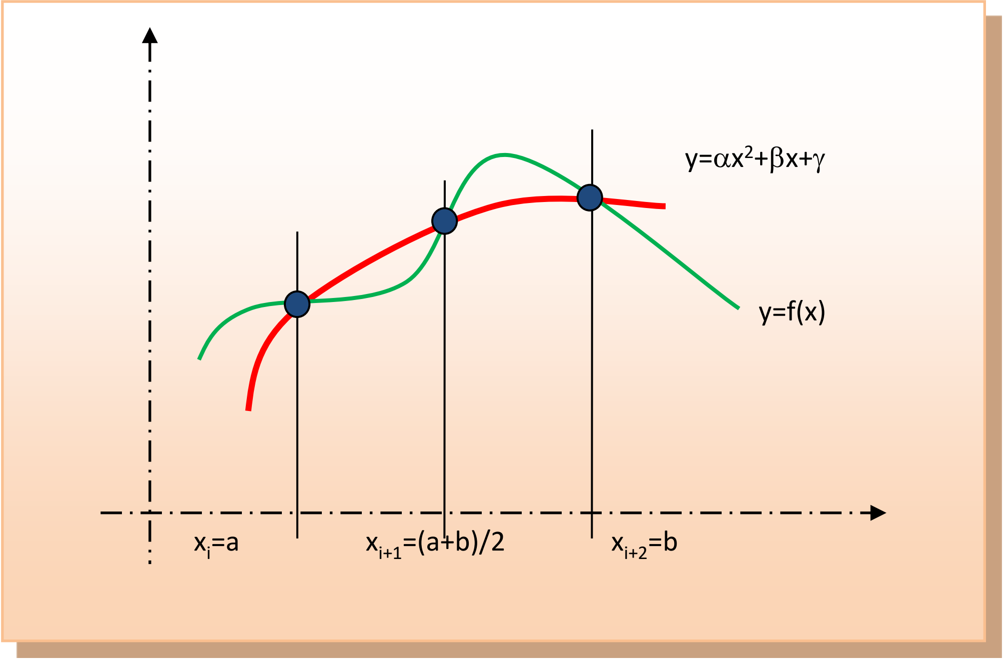
➢ f(a) ve f(b) noktaları arasında eşit aralıklı iki nokta var ise, bu dört nokta üçüncü dereceden (kübik) bir polinom ile birleştirilebilir.



$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$

$$I \cong \underbrace{(b-a)}_{Taban}\underbrace{\frac{\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]}{8}}_{Ortalama\ yükseklik}$$

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral



Şimdi çok fazla indis yazmamak için $a = x_i$, $b = x_{i+2}$ yazalım; bu durumda $x_{i+1} = (a+b)/2$ olacaktır. Buna göre $y = f(x)$ in yerini almasını istediğimiz parabol şu şartları sağlamalıdır.

$x = a$ -> $y = \alpha a^2 + \beta a + \gamma$

$x = (a+b)/2$ -> $y = \alpha (a+b)^2 /4 + \beta (a+b)/2 + \gamma$

$x = b$ -> $y = \alpha b^2 + \beta b + \gamma$

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral(1/3 Kuralı)

$$\int_a^b \left[\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right] dx = \left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma x\right]_a^b = \frac{1}{3}\left\{\alpha\left(b^3 - a^3\right) + \frac{3}{2}\beta\left(b^2 - a^2\right) + 3\gamma(b-a)\right\}$$

Bu denklemde yer alan **α, β, γ** da hesaplanıp yerlerine konulursa, hesaplamalardan sonra, şu sonuca ulaşılır.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right]$$

Simpson Yöntemi ile Sayısal İntegral

- **Örnek:** $f(x)=0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$ fonksiyonunu a=0'dan b=0.8'e kadar

  1- Simpson'un 1/3 kuralıyla

  2- Simpson'un 3/8 kuralıyla sayısal integralini hesaplayınız.

- **Çözüm 1:**

  f(0)=0.2, f(0.4)=2.456, f(0.8)=0.232 'dir.

  Integral değeri $$I \cong 0.8 \frac{[0.2+4(2.456)+0.232)]}{6} = 1.367467$$

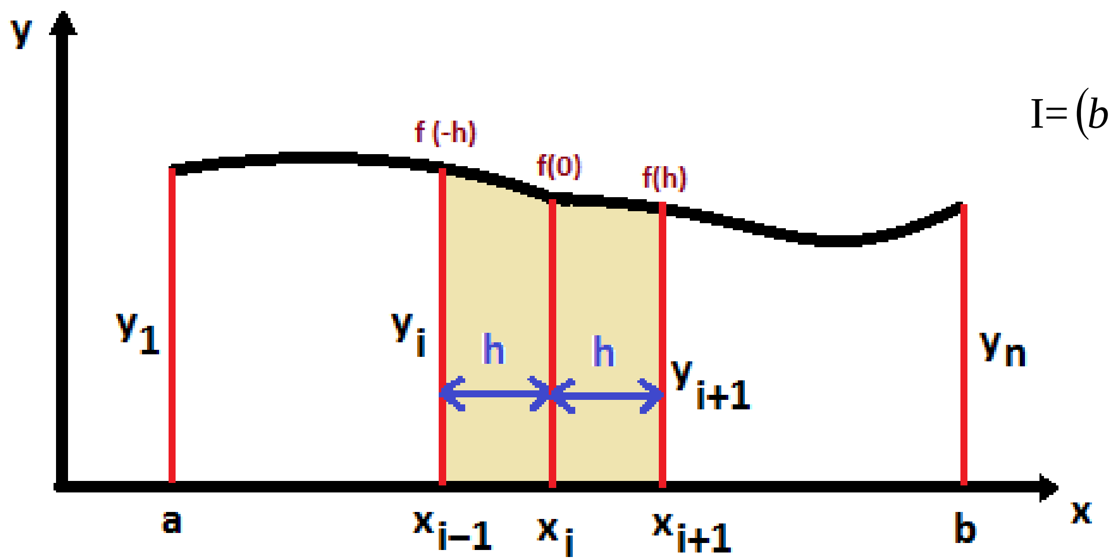
- **Çözüm 2:**

f(0)=0.2, f(0.2667)=1.432724, f(0.5333)=3.487177, f(0.8)=0.232 'dir.

Integral değeri $$I \cong 0.8 \frac{[0.2+3(1.432724+3.487177)+0.232)]}{8} = 1.51917$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

- **Simpson yönteminde, şekilde görüldüğü gibi a ve b olarak sınırları belirlenen x eksenindeki aralığın h olarak adlandırılan eşit uzunlukta fakat çift sayıdan oluşan n adet parçalara bölünmesi gerekir.**
- **Parçaların adedi ne kadar fazla olursa (h ne kadar küçük olursa) elde edilecek alan hesabının doğruluğu da o kadar yüksek olur.**
- **Trapez yöntemine göre daha doğru sonuçlar verir.**



$$I = (b-a)\left(\frac{f_0 + f_n + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{(n-2)/2} f_{2i}}{3n}\right)$$

$$Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_1 + 4\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-2}\right) + y_n\right]$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

- x_{i-1} ile x_{i+1} arasında kalan eğri, $y_{i-1}=f(-h)$, $y_i=f(0)$ ve $y_{i+1}=f(h)$ noktalarından geçen $f(x)=ax^2+bx+c$ doğrusu ile tanımlanır.
- a, b ve c katsayıları

$$y_{n-1} = f(-h) = ah^2 - bh + c$$
$$y_n = f(0) = c$$
$$y_{n+1} = f(h) = ah^2 + bh + c$$

$$\Longrightarrow$$

$$c = y_n$$
$$b = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$
$$a = \frac{1}{2h^2}\left(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n\right)$$

- y(x) fonksiyonunun x_{i-1} ve x_{i+1} arasındaki değeri

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y(x)dx = \int_{-h}^{h} f(x)dx$$

$$Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_1 + 4\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-2}\right) + y_n\right]$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}h\sum_{i=1}^{n/2}\left[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right]$$
$$=\frac{1}{3}h\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$
$$=\frac{1}{3}h\left[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1}f(x_{2i})+f(x_n)\right].$$

$$Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_1+4\left(y_2+y_4+\ldots+y_{n-1}\right)+2\left(y_3+y_5+\ldots+y_{n-2}\right)+y_n\right]$$

Simpson 3/8 Yönteminin Çoklu Uygulaması

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{3}{8}h\sum_{i=1}^{n/3}\left[f(x_{3i-3})+3f(x_{3i-2})+3f(x_{3i-1})+f(x_{3i})\right]\\ &= \frac{3}{8}h\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+2f(x_6)+\cdots+2f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\\ &= \frac{3}{8}h\left[f(x_0)+3\sum_{i=1,\ 3\nmid i}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{i=1}^{n/3-1} f(x_{3i})+f(x_n)\right].\end{aligned}$$

$$\int y\,dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 2\left(y_3 + y_6 + \ldots + y_{n-3}\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1}\right) + y_n\right)$$

Simpson 1/3 Yönteminin Çoklu Uygulaması

- **Örnek:** $y(x)=e^{-x^2}$ fonksiyonunun **0<x<1** aralığı için **h=0.25** kullanarak fonksiyona ait değer hesaplamaları aşağıdaki tabloda görülmektedir. Fonksiyonun integralini Simpson 1/3 yöntemi ile hesaplayınız.

n	x	$y(x)=e^{-x^2}$
1	0	1.0000
2	0.25	0.9394
3	0.5	0.7788
4	0.75	0.5698
5	1	0.3679

- **Çözüm:**

$$Alan \cong \frac{h}{3}\left[y_1 + 4(y_2 + y_4) + 2(y_3) + y_5\right]$$

$$Alan \cong \frac{0.25}{3}\left[1 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2(0.7788) + 0.3679\right] = 0.7469$$

MATLAB Kodu

```
% Sayısal İntegral
a=0; b=2*pi; h=0.5;
x=a:h:b;
y=1+2*sin(x);
n=length(x);

%trapez yöntemi
alant=(y(1)+2*sum(y(2:n-1))+y(n))*h/2

%trapz komutu
alant2=trapz(x,y)

%simpson yöntemi
alans=(y(1)+4*sum(y(2:2:n-1))+2*sum(y(3:2:n-1))+y(n))*h/3

area(x,y)

%sembolik çözüm
syms x
alan=double(int(1+2*sin(x),x,0,2*pi))
```

ÖDEV

- $f(x)= e^{2x}$ fonksiyonunun $0<x<2$ için, $h=0.2$ adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak integralini hesaplayınız.

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**