4. Bölüm → Yüksek Mertebeden Lineer Denklemler

n. mertebeden lineer bir diferansiyel denklem

$a_i(x)$'ler x'in birer fonksiyonu olmak üzere

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x) \quad (1)$$

şeklinde yazılır

$y^{I} \quad y^{II} \quad y^{III}$

$y^{(1)} \quad y^{(2)} \quad y^{(3)}$

Ör: $x^2y'' - 3xy' + 5y = 1+e^x$ (2. mertebeden lineer diferansiyel denklem)

Ör: $my'' + ky = M\cos px$

Araba süspansiyonu

Ör: $\ddot{I}'' + \frac{R}{L}\dot{I}' + K\dot{I} = E_0$

Elektrik Devresi

* $a_i(x)$'ler sabit $(a_i(x) = a_i)$ ise (1) denklemine sabit katsayılı denklem, aksi halde değişken katsayılı denklem denir.

** $Q(x) = 0$ ise (1) denklemine Homojen (Sağ-tarafsız) denklem, aksi takdirde Homojen olmayan denklem (sağ-yanlı) denir.

$y'' - 5y' + 3y = 0$ (sabit katsayılı sağ-yansız (homojen) lineer denk)

$x^2y'' - xy' + y = x^2$ (Değişken katsayılı sağ-yanlı lineer denklem)

Tanım:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına $f_1, f_2, \ldots, f_n$'nin Wronskian'ı denir.

(1) $W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(2) $W(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.1.2 = 2$ (Alt üçgensel matris old. köşegenler determinantıdır)

(3) $W(e^x, -2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & -2e^x \\ e^x & -2e^x \end{vmatrix} = 0$ (Birbirinin katı olduğu için determinant '0' dır.

Teorem 1: $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$ ise $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. (1) Önceki örneklerde cosx ile sinx lin. bağımsızdır.

(2) " (2) " " $1, x, x^2$ "

(3) bağımlıdır. (3) " " $e^x, -2e^x$ "

(1) Ödev $W(e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}) \neq 0$ a, b, c ilişkisini belirle.

Teorem 2 $\forall_i$ için $a_i(x)$ fonksiyonları sürekli ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları $a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ (2) homojen denklemin birer çözümü olsun.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarını lineer bağımsız olabilmeleri için ancak ve ancak

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \text{ olmasıdır.}$$

(Yani $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lin bağımsız $\Longleftrightarrow W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$)

Teorem 3:

$y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $c_1, c_2, \dots, c_n$ birer sabit olmak üzere (2) denkleminde lineer bağımsız çözümleriyse $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabit olmak üzere (2)'nin genel çözümü;

$$c_1 . y_1 + c_2 . y_2 + \dots + c_n y_n = y_{genel} \quad (3)$$

şeklindedir.

Ör: $y'' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümü

$$y_g = \underbrace{c_1 . \cos 2x}_{y_1} + \underbrace{c_2 . \sin 2x}_{y_2}$$

dir. y_1 ve y_2 birer çözümdür ve üstelik lineer bağımsızdır.

y yerine $y_1 = \cos 2x$ yazarsak

$$y_1'' + 4y_1 \stackrel{?}{=} 0 , \quad y' = -2\sin 2x , \quad y'' = -4\cos 2x$$

$$-4\cos 2x + 4\cos 2x = 0 \checkmark$$

$$W(\cos 2x, \sin 2x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)) = 2 \neq 0$$

Ör: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y'' - y = 0$ denklemin birer çözümü ise genel çözüm nedir?

y_1, y_2 lin bağımsız mı?

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Yani e^x ile e^{-x} lin. bağımsızdır.

Genel Çözüm; $y = c_1 . e^x + c_2 e^{-x}$

Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denk.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (4)$$

şeklindedir. a_i'ler birer sabit. (4) denkleminin çözümlerini $y = e^{rx}$, $(r \in \mathbb{R})$ şeklinde arayalım.

$$y' = re^{rx}, \; y'' = r^2 e^{rx}, \; y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

türevlerini (4)'te yerine yazalım.

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} \cdot r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 \cdot r \cdot e^{rx} + a_0 \cdot e^{rx} = 0 \text{ veya}$$

$$(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) e^{rx} = 0$$

bulunur. $e^{rx} \neq 0$ olduğu için

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (5)$$

(5)'e (4) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi denir. (5)'in köklerine de karakteristik kökler denir.

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow (5) \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp 2i$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \Rightarrow (5) \Rightarrow r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2,3} = 1$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^x, \; \dots\dots, \; r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \;\dots\; r_1 = 1, \; r_2 = 3$$

(5)'in karakteristik kökleri birbirinden bağımsız ise ($r_1, r_2, \dots, r_n$) her bir r_i için $y_i = y_i(x)$ özel çözüm bulunur. Eğer bu $y_i(x)$'ler lineer bağımsız ise (4)'ün genel çözümü;

$$c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n y_n = y_{genel} \text{ şeklinde olur.}$$

$r = r_1$ için $y_1 = e^{r_1 x}$

$r = r_2$ için $y_2 = e^{r_2 x}$

$\vdots \qquad \vdots$

(11) $y'' - 4y' + 4y = 0$ denklemini çözelim.

(1) (5)'i yazalım

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r_1 = 2 = r_2$$

$r_1 = 2$ için $y_1 = e^{2x}$

$r_2 = 2$ için $y_2 = e^{2x}$

(2) y_1 ile y_2 lineer bağımsız mı?

$$W(e^{2x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{2x} \\ 2e^{2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 0 \text{ old. için}$$

y_1 ile y_2 lin. bağımlıdır.

Fakat $y_1 = e^{2x}$ ile $\bar{y}_2 = xe^{2x}$ lineer bağımsızdır.

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x.e^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}(1+2x) - 2xe^{4x}$$

$$= e^{4x}(1) = e^{4x} \neq 0$$

Genel çözüm

$$y = C_1 y_1 + C_2 \bar{y}_2$$

$$= C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

6/6

(11) $y'' + 4y = 0$

(1) $r^2 + 4 = 0$

$r_{1,2} = \mp 2i$

(2) $r_1 = 2i$ için $y_1 = e^{(2x)i} = \cos(2x) + i\sin(2x)$

$r_2 = -2i$ için $y_2 = e^{(-2x)i} = \cos(-2x) + i\sin(-2x)$

(3) $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1(\cos 2x + i\sin 2x) + c_2(\cos 2x - i\sin 2x)$

$= \underline{(c_1 + c_2)}\cos 2x + i\underline{(c_1 - c_2)}\sin 2x$

$= \tilde{C_1} \cdot \cos 2x + \tilde{C_2} \cdot \sin 2x$