Diferansiyel Denklemler

Hafta 14

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0) \Rightarrow x_0 \ ise \ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\boxed{P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = Q(x)} \dots\dots(1)$$

$P_0(x) \neq 0$ *ise* $x = x_0$ *noktalarına* (1) *denkleminin adi noktaları denir. Aksi halde tekil nokta denir.*

$y'' - y = 0;\ P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = -1$ *tüm reel sayılar bir adi noktadır.*

$(x^2 - 1)y'' - xy' + (x + 1)y = 0$ *denkleminin tekil noktaları* ± 1 *olup adi noktalar* $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ *olur.*

– – – – – – – – – – – –*Özet sonu* – – – – – – – – –

$$(x^2-1)y'' - \frac{1}{x}y' + (x+1)y = 0$$

$$Payda\ sıfır\ olma\ ihtimaline\ karşı\ her\ taraf\ x\ ile\ çarp$$

$$x(x^2-1)y'' - y' + x(x+1)y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ x = \pm \end{pmatrix} birer\ tekil\ nokta\ olur.$$

$$Adi\ nokta\ civarı\ çözümler$$

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)}$$

$$şeklinde\ aranır.$$

$$\boxed{ÖRNEK\ 1}\ y'' - xy = 0\ denklemi\ x = 0$$

$$noktasında\ kuvvet\ serisi\ ile\ çözelim.$$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$xy = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}$$

$$2a_2 + \underbrace{(3.2a_3 - a_0)}_{0}x + \underbrace{(4.3a_4 - a_1)}_{0}x^2 + \cdots = 0$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$3.2a_3 = a_0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}a_0$$

$$\overbrace{4.3a_4}^{12a_4} - a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$

$$5.4a_5 - \underbrace{a_2}_{0} = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

$$6.5a_6 - a_3 = 0 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6.5}a_3 = \frac{a_0}{6.5.3.2}$$

$$a_7 = \frac{1}{7.6}a_4 = \frac{1}{7.6.4.3}a_1$$

$$a_8 = 0\ (a_5\ sıfır\ olduğu\ için)$$

$$Genel\ Çözüm:$$

$$y = a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right)}_{Y_1(x)} + a_1 \underbrace{\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right)}_{Y_2(x)}$$

$$y_g = a_0 Y_1(x) + a_1 Y_2(x)$$

$$x'' - xy = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{A} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{B} = 0$$

$$ilk\ şey: x'lerin\ kuvvetlerini\ eşitlemek.$$

$$\begin{pmatrix} A'da:\ n-2=m \\ B'de:\ n+1=m \end{pmatrix} demeliyiz.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, a_{m+2} x^m b \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m = 0$$

$$\text{İkinci şey}:\ başalama\ noktaları\ aynı\ olmalı.$$

$$2a_2 x^0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+e)(m+1)a_{m+2} - a_{m-1}]x^m = 0$$

$$2a_2 = 0$$

$$a_{m+2} = \frac{a_{m-1}}{(m+2)(m+1)}\ ;\ \ m \geq 1$$

$$Rekurams\ (indirgeme)\ bağıntısı$$

$$m = 1 \text{ için } a_3 = \frac{a_0}{3.2}$$

$$m = 2 \text{ için } a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$

$$m = 3 \text{ için } a_5 = \frac{a_2}{5.4} = 0$$

$\boxed{\text{ÖRNEK 2}}$ $y'' + xy' + y = 0$ *denklemini seri yöntemiyle çözelim.*

$$x = 0 \text{ seçelim,}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n-2=m} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n}_{n=m} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{n=m} = 0$$

İlk iş:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

İkinci iş:

$$(2.1 a_1 + a_0) x^0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1) a_{m+2} + (m+1) a_m] x^m = 0$$

$$2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} a_0$$

$$(m+2)(m+1) a_{m+2} + (m+1) a_m = 0$$

$$ise$$

$$a_{m+2}=\frac{-(m+1)a_m}{(m+2)(m+1)}=-\frac{a_m}{m+2}\Rightarrow a_{m+2}=-\frac{1}{m+2}a_m\ ;m\geq 1$$

$$m=1\ için\ a_3=-\frac{1}{3}\ a_1$$

$$m=2\ için\ a_4=-\frac{1}{4}a_2=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}a_0\right)=\frac{1}{8}a_0$$

$$m=3\ için\ \ a_5=-\frac{1}{5}a_3=-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}a_1\right)=\frac{1}{15}a_1$$

$$m=4\ için\ \ a_6=-\frac{1}{6}a_4=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}a_0\right)=-\frac{1}{48}a_0$$

$$m=5\ için\ \ a_7=-\frac{1}{7}a_5=-\frac{1}{105}a_1$$

$$Genel\ \text{çözüm}$$

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5+\cdots\right)$$

$$=a_0Y_1(x)+a_1Y_2(x)$$

$$Problemler$$

1) $y''+xy=0\ (Airy\ Denklemi)$

2) $y''-x^2y'-2xy=0$