Diferansiyel Denklemler

Hafta 14

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0) \Rightarrow x_0 \ ise \ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\boxed{P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = Q(x)} \ldots \ldots (1)$$

$P_0(x) \neq 0 \ ise \ x = x_0 \ noktalarına \ (1)$ *denkleminin* $adi \ noktaları \ denir. Aksi \ halde \ tekil \ nokta \ denir.$

$y'' - y = 0; \ P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = -1 \ tüm \ reel \ sayılar \ bir \ adi \ noktadır.$

$(x^2 - 1)y'' - xy' + (x + 1)y = 0 \ denkleminin \ tekil \ noktaları \pm 1 \ olup \ adi \ noktalar \ \mathbb{R} - \{-1,1\} \ olur.$

$- - - - - - - - - - - - -Özet \ sonu - - - - - - - - -$

$$(x^2-1)y''-\frac{1}{x}y'+(x+1)y=0$$

$Payda\ sıfır\ olma\ ihtimaline\ karşı\ her\ taraf\ x\ ile\ çarp$

$$x(x^2-1)y''-y'+x(x+1)y=0$$

$$\begin{pmatrix} x=0 \\ x=\pm \end{pmatrix} birer\ tekil\ nokta\ olur.$$

$Adi\ nokta\ civarı\ çözümler$

$$\boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)}$$

$şeklinde\ aranır.$

$\boxed{ÖRNEK\ 1}\ y''-xy=0\ denklemi\ x=0$ $noktasında\ kuvvet\ serisi\ ile\ çözelim.$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$xy = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}$$

$$2a_2 + \underbrace{(3.2a_3 - a_0)}_{0}x + \underbrace{(4.3a_4 - a_1)}_{0}x^2 + \cdots = 0$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$3.2a_3 = a_0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}a_0$$

$$\overbrace{4.3a_4}^{12a_4} - a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$

$$5.4a_5 - \underbrace{a_2}_{0} = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

$$6.5a_6 - a_3 = 0 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6.5}a_3 = \frac{a_0}{6.5.3.2}$$

$$a_7 = \frac{1}{7.6}a_4 = \frac{1}{7.6.4.3}a_1$$

$$a_8 = 0 \; (a_5 \; sıfır \; olduğu \; için)$$

$$Genel \; Çözüm:$$

$$y = a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right)}_{Y_1(x)} + a_1 \underbrace{\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right)}_{Y_2(x)}$$

$$y_g = a_0 Y_1(x) + a_1 Y_2(x)$$

$$x'' - xy = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{A} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{B} = 0$$

$$ilk\ şey\!: x'lerin\ kuvvetlerini\ eşitlemek.$$

$$\begin{pmatrix} A'da\!:\ n-2=m \\ B'de\!:\ n+1=m \end{pmatrix} demeliyiz.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, a_{m+2} x^m b \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^m = 0$$

$$İkinci\ şey\!:\ başalama\ noktaları\ aynı\ olmalı.$$

$$2a_2 x^0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+e)(m+1)a_{m+2} - a_{m-1}]x^m = 0$$

$$2a_2 = 0$$

$$a_{m+2} = \frac{a_{m-1}}{(m+2)(m+1)}\ ;\ \ m \geq 1$$

$$Rekurams\ (indirgeme)\ bağıntısı$$

$$m = 1 \text{ için } a_3 = \frac{a_0}{3.2}$$

$$m = 2 \text{ için } a_4 = \frac{a_1}{4.3}$$

$$m = 3 \text{ için } a_5 = \frac{a_2}{5.4} = 0$$

$\boxed{\text{ÖRNEK 2}}$ $y'' + xy' + y = 0$ *denklemini seri yöntemiyle çözelim.*

$$x = 0 \text{ seçelim,}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n-2=m} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n}_{n-1=m} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{n=m} = 0$$

$$\text{İlk iş:}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{2m+2} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$\text{İkinci iş:}$$

$$(2.1a_1 + a_0)x^0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1)a_{m+2} + (m+1)a_m] x^m = 0$$

$$2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow \; a_2 = -\frac{1}{2} a_0$$

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} + (m+1)a_m = 0$$

$$ise$$

$$a_{m+2} = \frac{-(m+1)a_m}{(m+2)(m+1)} = -\frac{a_m}{m+2} \Rightarrow a_{m+2} = -\frac{1}{m+2}a_m \,; m \geq 1$$

$$m = 1 \; için \; a_3 = -\frac{1}{3}\, a_1$$

$$m = 2 \; için \; a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}a_0\right) = \frac{1}{8}a_0$$

$$m = 3 \; için \;\; a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}a_1\right) = \frac{1}{15}a_1$$

$$m = 4 \; için \;\; a_6 = -\frac{1}{6}a_4 = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}a_0\right) = -\frac{1}{48}a_0$$

$$m = 5 \; için \;\; a_7 = -\frac{1}{7}a_5 = -\frac{1}{105}a_1$$

Genel çözüm

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \cdots\right)$$

$$= a_0 Y_1(x) + a_1 Y_2(x)$$

Problemler

1) $y'' + xy = 0$ (*Airy Denklemi*)

2) $y'' - x^2 y' - 2xy = 0$