BAŞLIK 14.

EULER TİPİ DİFERENSİYEL DENKLEM .

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ sabit büyüklükler ve $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = Q(x) \tag{1}$$

formundadır. $x = e^t$ değişken dönüşümü yapılarak sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem hâline dönüştürülür.

$D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t} = [Dy]e^{-t} \Rightarrow$$

$$xy' = Dy$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= [\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}e^{-t})]e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t}$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} = [D(D-1)y]e^{-2t} \Rightarrow$$

$$x^2y'' = D(D-1)y$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t}\right)e^{-t}$$

$$= \left(\frac{d^3y}{dt^3}e^{-2t} - 3\frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} + 2\frac{dy}{dt}e^{-2t}\right)e^{-t}$$

$$= [D(D-1)(D-2)y]e^{-3t} \Rightarrow$$

$$x^3y'' = [D(D-1)(D-2)]y$$

....

değerleri ile (1) e girilirse t ye göre yazılmış lineer bir diferansiyel denklem elde edilir.

ÖRNEK 1. $x^3y''' + 3x^2y'' + 2xy' = \dfrac{1}{\cos(\ln x)}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

ÇÖZÜM : $x = e^t$ diyelim.

$$x^3y''' = [D(D-1)(D-2)]y(t) = y''' - 3y'' + 2y'$$

$$x^2y'' = [D(D-1)]y(t) = y'' - y'$$

$$xy' = Dy(t) = y'$$

olur. Denkleme girelim ve düzenleyelim:

$$x^3y''' + 3x^2y'' + 2xy' = y''' - 3y'' + 2y' + 3y'' - 3y' + 2y'$$
$$= y''' + y' = \frac{1}{\cos\ln e^t} = \frac{1}{\cos t}$$

bulunur. Bu ise t bağımsız, y bağımlı değişken olmak üzere sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklemi ve kökleri ve sağ tarafsızın çözümü

$$r^3 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = i,\ r_3 = -i$$
$$y_h = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t$$

dir. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos t$, $y_3 = \sin t$ olmak üzere belirsiz katsayılar yöntemi ile özel çözümünü bulalım:

$$L_1' + L_2'\cos t + L_3'\sin t = 0$$
$$-L_2'\sin t + L_3'\cos t = 0$$
$$-L_2'\cos t - L_3'\sin t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1' = \sec t \\ L_1' = -1 \\ L_1' = -\dfrac{\sin t}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \ln|\sec t + \tan t| \\ L_2 = -t \\ L_3 = \ln|\cos t| \end{cases}$$

Genel çözümü yazalım:

$$y_g = y_h + y_p$$
$$= c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t + \ln|\sec t + \tan t| - t\cos t + \ln|\cos t|\sin t$$
$$= c_1 + c_2\cos e^x + c_3\sin e^x + \ln|\sec e^x + \tan e^x| - e^x\cos e^x + \ln|\cos e^x|\sin e^x$$

ÖRNEK 2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x\ln x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

ÇÖZÜM : $x = e^t$ diyelim. $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ olmak üzere

$$x^2y'' = [D(D-1)]y = y'' - y'$$
$$xy' = Dy = y'$$

olur. Denkleme girelim ve düzenleyelim:

$$y'' - y' - 2y' + 2y = y'' - 3y' + 2y = 2e^t\ln e^t = 2te^t$$

bulunur. Bu ise t bağımsız, y bağımlı değişken olmak üzere sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklemi, kökleri ve sağ tarafsızın çözümü:

$$r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1$$
$$y_h = c_1e^{2t} + c_2e^t$$

Sağ taraf için özel çözüm tahmini: $y_p = t(Ate^t + Be^t)$ dir. Denkleme girilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} y_p &= -t^2e^t - 2te^t \\ y_g &= y_h + y_p = c_1e^{2t} + c_2e^t - t^2e^t - 2te^t \\ &= c_1x^2 + c_2x - x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 3. $(x+2)^2y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

ÇÖZÜM : $x + 2 = e^t$ diyelim. $D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (x+2)^2y'' &= [D(D-1)]y = y'' - y' \\ (x+2)y' &= Dy = y' \end{aligned}$$

olur. Denkleme girelim ve düzenleyelim:

$$y'' - y' - y' + y = y'' - 2y' + y = 3(e^t - 2) + 4 = 3e^t - 2$$

bulunur. Bu ise t bağımsız, y bağımlı değişken olmak üzere sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Karakteristik denklemi, kökleri ve sağ tarafsızın çözümü:

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 1$$

$$y_h = c_1e^t + c_2te^t$$

$3e^t$ ile ilgili çözüm tahmini: $y_{p_1} = t^2(Ae^t) = At^2e^t$ ve $y_{p_1} = \dfrac{3}{2}t^2e^t$,
-2 ile ilgili özel çözüm tahmini $y_{p_2} = A$ ve $y_{p_2} = -2$.
Ve

$$\begin{aligned} y_g &= y_h + y_p = c_1e^t + c_2te^t + \frac{3}{2}t^2e^t - 2 \\ &= c_1(x+2) + c_2(x+2)\ln|x+2| + \frac{3}{2}(x+2)[\ln|x+2|]^2 - 2 \end{aligned}$$

dir.

ÇÖZÜLECEK PROBLEMLER .

Aşağıdaki Euler tipi diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = x^2$,
2. $xy'' - y' = \dfrac{\ln x}{x}$,
3. $x^2y''' + 2xy'' + y' = \dfrac{1}{x}\sin\ln x$,
4. $\dfrac{1}{9}(3x+1)^2y'' + \dfrac{1}{3}(3x+1)y' + y = [\ln(3x+1)]^2$,
5. $(2x+1)^2y'' + 2(2x+1)y' + 4y = 2x + 9 + \cos[\ln(2x+1)] + \ln^3(2x+1)$.