

# SAYISAL ANALİZ

**Dr. Öğr. ÜYESİ Abdullah SEVİN**

# SAYISAL ANALİZ

## 1. Hafta

### SAYISAL ANALİZE GİRİŞ

# AMAÇ

- ❑ Mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal analiz yöntemlerinin **algoritmik olarak çözümü** ve bu çözümlemelerin MATLAB ile bilgisayar ortamında gerçekleştirilmesine ilişkin temel yeterlikleri kazandırmaktır.
- ❑ Uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan problemleri basit aritmetik işlemlerle yaklaşık olarak çözme metotlarını öğretmektir.

# Öğrenme Çıktısı

- ❑ Teorik derslerde el ile yapılan tüm hesaplamaların **bilgisayar ortamına** nasıl taşınabileceği ve bu problemlerin bilgisayarlara nasıl çözdürülebileceği hakkında beceriler kazandırmak.
- ❑ Sayısal çözüm yaklaşımlarının mutlaka bir **algoritma** yapısına dayandığının anlaşılması.
- ❑ **Bilgisayar ve yazılım dillerinin** mühendislik hayatında nasıl bir fonksiyon icra ettiğinin anlaşılması.

# Sayısal Analiz Nedir?

## ❑ Sayısal Analiz

- Nümerik Analiz (**Numeric Analysis**)
- Sayısal Çözümleme
- Mühendislikte Sayısal Yöntemler  
olarak ta bilinir.

## ❑ Genel olarak sayısal analiz;

- Matematiksel (analitik) yöntemlere karşı **tekrarlı (temel aritmetik)** işlemler ile sonuca ulaşılan alternatif bir yöntemdir.

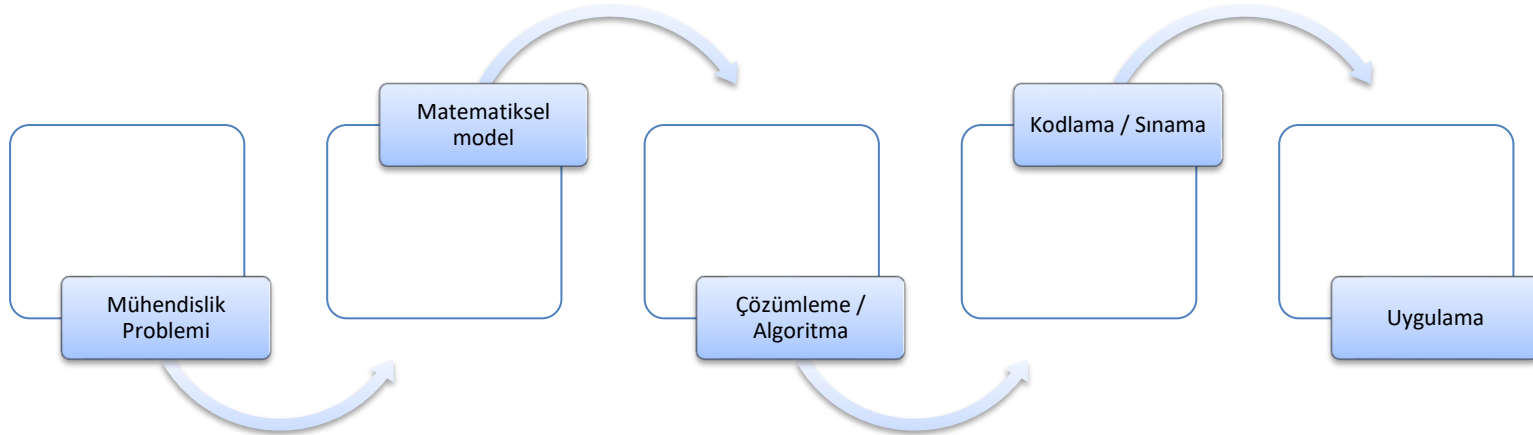
### ➤ Örnek:

❑ Analitik hesaplama:  $5 \cdot 5 = 25$

❑ Bilgisayarlı hesaplama (tekrarlı yapı):  $5 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$

# Sayısal Analiz Nedir?

- ❑ Bir işlevin veya çözüm yönteminin tekrar tekrar uygulanması işlemi ardışık yaklaşım (iterasyon) olarak bilinir.



- ❑ Şüphe yok ki hataları en az olan algoritma verilen problemin çözümü için kullanılacaktır.

# Sayısal Analizin Amacı

- ❑ Matematiksel hesaplamaları ve problemleri tekrarlı (aritmetik) işlemler ile bilgisayarlar (programlar) aracılığı ile çözmektir.
- ❑ Belirli bir sıra ve sayıdaki işlemler bilgisayar programları aracılığı ile çözülür.
- ❑ Özellikle, yüksek dereceli integral, türev ya da çok bilinmeyenli denklemler gibi analitik olarak çözümleri çok zor ya da imkansız olan problemleri, istenilen hassasiyette (hata oranları içerisinde) çözmektir.

# Sayısal Analizde Temel Kavramlar

- ❑ Rasyonel, irrasyonel vb. sayı kavramı yerine sonlu basamak ile ifade edilen sayılar vardır.
  - $\pi$  gibi sayılar **bilgisayar kelime uzunluğuna** bağlı olarak ilgili basamak sayısına kadar yuvarlatılarak hesaplama gerçekleştirilir.
- ❑ Sonsuz şeklinde bir ifade yoktur.
- ❑ Bir problemin bağımsız değişken ve parametrelere bağlı genel çözümünü değil, verilen değerler için çözümünü verir.
- ❑ Çözümün kesinliği ile değil, istenilen hassasiyette (**verilen sınırlar içerisinde**) yaklaşık çözümler ile uğraşır.



# Neden Sayısal Analiz

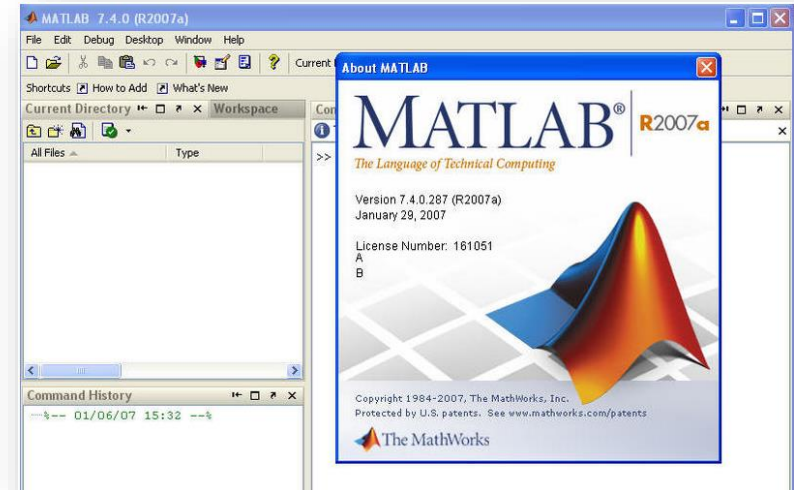
- ❑ Sayısal analiz yöntemleri güçlü ve esnek problem çözme araçlarıdır.
- ❑ Platform ve programlama dili bağımsız olarak uygulanabilir. Ayrıca hazır paket programlar şeklinde örnekleri de mevcuttur. Programlama becerisini geliştirir.
- ❑ Matematiksel bilgi, yetenek ve anlayışınızı geliştirir.
- ❑ Birçok problemin çözümü sayısal analiz yöntemleri olmadan oldukça zor ya da mümkün değildir.

# Sayısal Analiz Nereelerde Kullanılabilir?

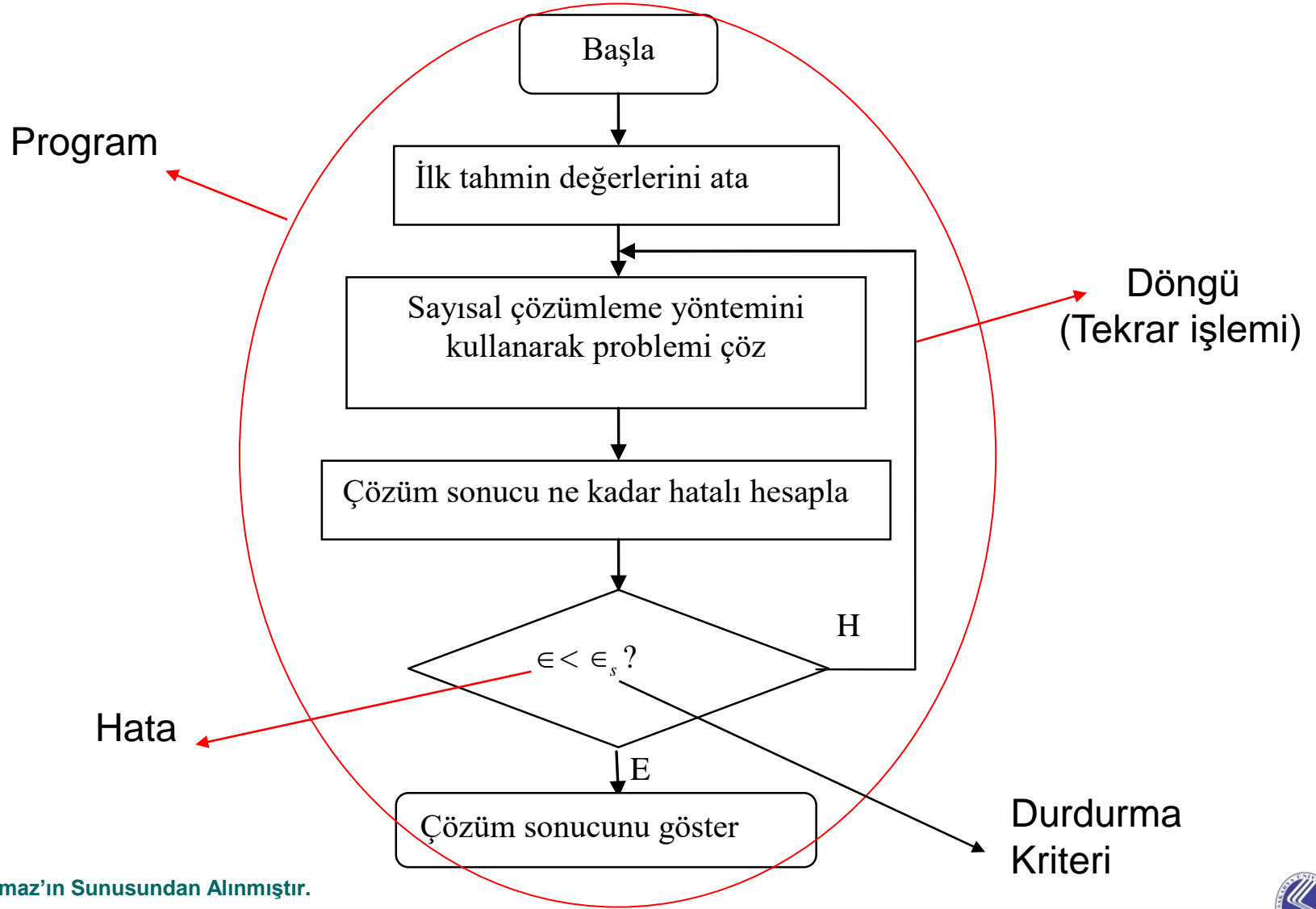
- ❑ Sayısal analiz konusunun sınırları diğer bazı disiplinlerin aksine kesin olarak belirlenmemektedir. Çok geniş bir kullanım alanına sahiptir:
- ❑ Sayısal işaret işleme,
- ❑ Sistem Analizi ve tahminlerinde
- ❑ Modelleme ve Simülasyon
- ❑ Veri Analizi
- ❑ Oyun programlama
- ❑ Bilgisayarlı ve sayısal görüntü işleme,
- ❑ Bilgisayarlı sayısal kontrol,
- ❑ Bilgisayar destekli tasarım ve analiz, vb.

# Sayısal Analiz Nerelerde Kullanılabilir?

- ❑ Bu alandaki çalışmaların sonunda elde edilen veya geliştirilen sayısal yöntemler bilgisayar yardımıyla çok çeşitli mühendislik problemlerinin ve bazı temel bilimlerin çözümünü kolaylaştırır.
- ❑ Bilgisayarlarda problemlerin modellenmesi ve çözümleri için genel amaçlı programlama dilleri kullanılabileceği gibi ticari paket programlar, MatLab, MathCAD, <https://octave-online.net/> veya Mathematica gibi matematiksel işlemler yapmak için geliştirilmiş programlarda kullanılabilir.



# Tüm Sayısal Analiz Yöntemlerinde İzlenilecek Genel Yol



# Sayısal Analizde Hata Kavramı

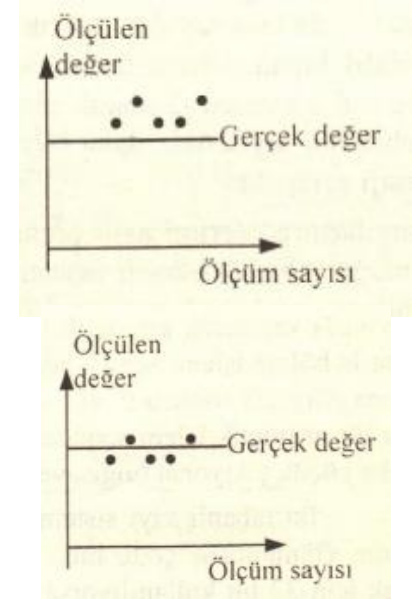
- ❑ Sayısal Analiz, matematiksel hesaplamaları ve problemleri tekrarlı işlemler ile bilgisayarlar (programlar) aracılığı ile çözmektir.
- ❑ Özetle, Sayısal Analiz, bir problemi hesap makinesi, bilgisayar gibi araçlarla yaklaşık olarak çözmek için kullanılan yöntemlerdir.
- ❑ Bilgisayarlı sayısal analizde çeşitli sebeplerle hatalı sonuçlar elde edilebilir.
  - ❑ Kullanıcıdan kaynaklanan hatalar
    - Modelleme hatası
    - Kodlama hatası
  - ❑ Bilgisayar ya da kullanılan yazılımdan kaynaklanan hatalar
    - Belirli bir uzunlukta sayı depolayabilme,
    - Yuvarlatmadan kaynaklanan hata,
    - Kesmeden kaynaklanan hata

# Sayısal Analizde Hataların Sebepleri

- ❑ Fiziksel veya sosyal olayların matematiksel olarak çözümlerinde yapılan hatalar genellikle üç ana başlıkta toplanır.
  - ❶ **Modelleme Hatası**, bir olayın formüle edilmesi esnasında varsayımlardan kaynaklanan hatalardır.
    - ❑ **Örnek:** Serbest düşme problemlerinin modellenmesinde, hava ile cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesinden dolayı meydana gelen hatalar bu tür hatalar grubuna girer.
  - ❷ **Ölçme Hatası**, deney ve gözlemede ölçmelerden dolayı meydana gelen hatalardır.
    - ❑ Örnekte, eğer serbest düşme yapan cismin, düştüğü mesafe veya havada düşerken geçen süre eğer yanlış ölçülürse bu tür hatalar ölçme hatası olarak tanımlanabilir.
  - ❸ **Sayısal hatalar** veya diğer bir deyimle modelin çözümlemesinde yapılan hatalardır.
    - ❑ Dersimizde sayısal hatalar ile ilgileneceğiz.

# Sayısal Hata

- ❑ Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklardır.
- ❑ **Doğruluk:** Ölçme veya hesaplama sonuçlarının gerçek değere yakınlığıdır.
  - ❑ Çoğu durumda kesinliğin değeri bilinmediğinden en iyi doğru cevap genellikle en iyi tahmin edilen değere göre ölçülür.
- ❑ **Kesinlik (hassasiyet):** Bir büyüklüğün defalarca ölçülmesi sonucu ölçümlerin birbiriyle ne kadar yakınlıkta olduğudur.
- ❑ Bilgisayarlı hesaplama doğruluğu, bilgisayarın kelime uzunluğu (bir kerede işlenen bit sayısı), ile doğrudan ilişkilidir.
- ❑ Bilgisayarlar sonlu sayıda rakamı saklayabilirler.
  - ❑ Bu sebeple, hesaplamalar, tam değil, yaklaştırmalar ile yapılabilir.



# Sayısal Hata

- ❑ Bu hataların bir kısmı **kullanıcılardan**, bir kısmı **elektronik hesaplayıcılardan** , bir kısmı da **yazılımlardan** kaynaklanır.
- ❑ Belirli bir ondalıktan sonra **gelecek sayılar kestirilemez**.
- ❑ Gözlemlenen değer, noktadan sonra dört basamaklı ise beşinci basamak için bir şey söylenemez. Bu durumda gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algorithmada kullanılacağı varsayılırsa, her bir işlemten sonra, sonucun daha az doğru olduğu kanısına varabiliriz.



- ❑ Hesaplamalarda ne kadar hata vardır.
- ❑ Ne kadarlık bir hata kabul edilebilir



# Sayısal Hata

❑ Örnek vermek gerekirse,

❑  $\pi = 3,141592653589793\dots$

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

(Yaklaşık 158 hesaplama Yönt. biri)

❑  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

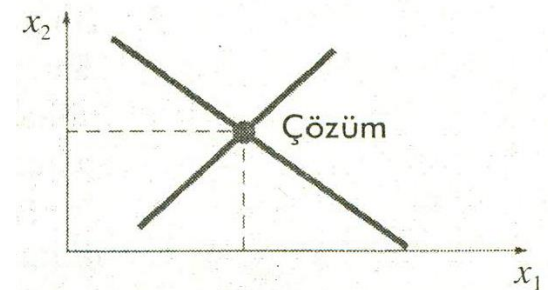
❑  $\frac{2}{3} = 0,66666666\dots$

❑ Bu sayılarla işlem yapıldığında **hataların büyük olacağı açıktır.**

❑ Verilen reel sayı ise ondalık kısmının **iki tabanında tam karşılığı** olup olmadığı araştırılmalıdır.

# Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

1. Sayısal Analize Giriş
2. Sayısal Analiz İçin Gerekli MATLAB İşlemleri
  - ☐ Temel MATLAB işlemleri
  - ☐ Dizi (vektör) işlemleri (linspace, logspace,)
  - ☐ Grafik Çizimleri (plot, subplot, fplot)
  - ☐ Matris İşlemleri (size, length, sum, zeros, inv)
3. Sayısal Hesaplamalarda Hata Kavramı ve Analizi
  - ☐ Hata Kavramı
  - ☐ Hatanın Sebepleri
  - ☐ Sayısal Hata ve Türleri (Mutlak, Bağıl, Yüzde,...)
  - ☐ Anlamlı Basamak
4. Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü
  - ☐ Cramer yöntemi
  - ☐ Gauss yöntemi
  - ☐ LU (Ayrıştırma, Cholesky) yöntemi



# Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

## ❑ Linear Denklem

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilinmeyenler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

denklemine  $n$ - bilinmeyenli bir lineer denklem denir.

Bir lineer denklemde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sayılarına denklemin katsayıları,  $b$  sayısına da denklemin sabiti denir.

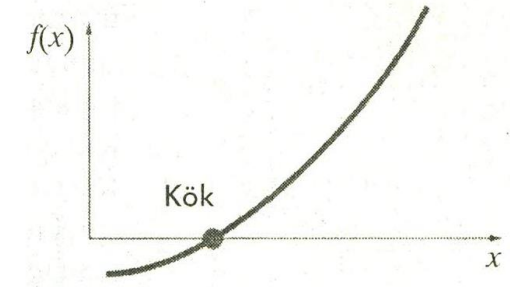
## ❑ Linear olmayan Denklem

İçerisinde trigonometrik ( $\sin, \cos, \tan, \arcsin$  gibi) ifadeler, kübik ve katları terimler vb. ifadeler ile lineerliği bozulan denklemlerdir.

# Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

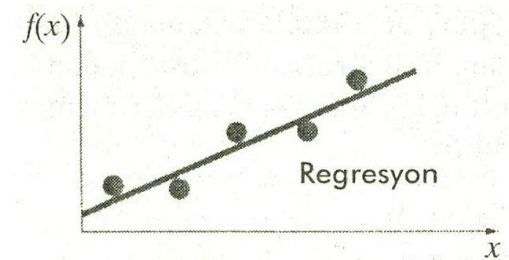
## 5. Doğrusal Olmayan Denklem Takımlarının Çözümü

- ☐ Bisection (yarılama) metodu,
- ☐ Regula falsi metodu,
- ☐ Newton-Raphson metodu,
- ☐ Secant metodu



## 6. Eğri Uydurma

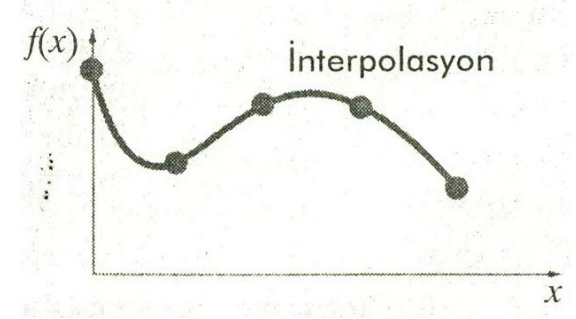
- ☐ En küçük kareler metodu ile doğrusal eğri uydurma
- ☐ Genelleştirilmiş eğri uydurma
- ☐ Doğrusal olmayan eğri uydurma



# Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

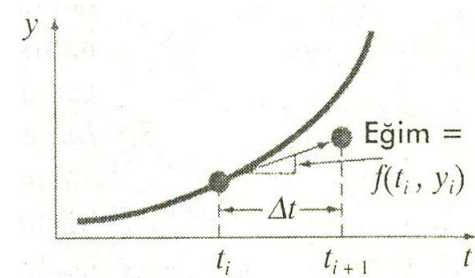
## 7. Ara Değer Bulma Yöntemleri

- ☐ Lagrange polinom interpolasyonu
- ☐ Newton-farklar bölümü yöntemi,
- ☐ Kübik-spline interpolasyonu
- ☐ Ekstrapolasyon



## 8. Sayısal Türev

- ☐ Geri farklar yöntemi,
- ☐ Merkezi farklar yöntemi,
- ☐ İleri farklar yöntemi

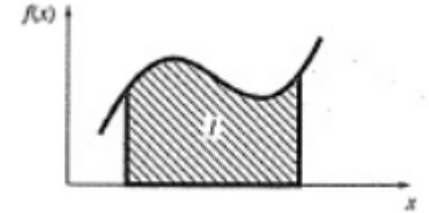


- ✓ **Türev**, bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- ✓ **Sayısal türev**, bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

# Sayısal Analiz Dersinde Neler Göreceğiz

## 9. Sayısal İntegral

- ☐ Trapez (yamuklar) yöntemi,
- ☐ Simpson yöntemi,



- ✓ **Sayısal integral**, integrali alınacak fonksiyonun grafiği çizildiğinde grafiğin altında kalan alanın yaklaşık olarak hesaplanması prensibine dayanır.

## 10. Difrensiyel Denklemlerin Çözümü

- ☐ Taylor seri açılımı,
- ☐ Euler yöntemi,
- ☐ Runge-Kutta yöntemi,

## 11. Kompleks Sayılar

# DEĞERLENDİRME

## Yarıyıl İçi Çalışmaları:

|            | Sayısı | Yıl içine katkı oranı |
|------------|--------|-----------------------|
| Ara Sınav  | 1      | % 70                  |
| Kısa Sınav | 2      | % 10                  |
| Ödev       | 1      | % 10                  |

**Başarı Notu: Yarıyıl içi (% 50) + Yarıyıl Sonu Sınavı (% 50)**

# KAYNAKLAR

## ❖ Temel Kaynaklar

- Ders Notları – Sunular

## ❖ Diğer Kaynaklar

- Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), “*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*”, Literatür Yayıncılık.
- Serhat YILMAZ, “*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*”, Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.
- İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR “*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*”,Seçkin Yayıncılık
- Mehmet Bakioğlu, “*Sayısal Analiz*”, Birsen Yayınevi, 2004.
- Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi
- Fahri VATANSEVER, “*İleri Programlama Uygulamaları*”,Seçkin Yayıncılık
- İrfan Karagöz, “*Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*”, VİPAŞ Yayınevi, 2001.