Fonksiyonda Limit

Öncelikle özel bir fonksiyon olan dizi kavramından sözedelim:

Dizi, Limiti.

Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunu ele alalım: $y=f(x)$, $(D(f)=\mathbb{N}$, $E(f)\subseteq\mathbb{R}$, $E(f)$- görüntü kümesi). Burada, $f(n)=x_n$ ile gösterilirse, her n doğal sayısına belli bir $x_n\in\mathbb{R}$ reel sayısı karşılık gelir. $f(n)$ nin bu sonsuz elemanlı değerler kümesine reel sayı dizisi denir ve

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ya da $\{x_n\}$ ile gösterilir.

$x_1, x_2, \ldots$ sayıları dizinin terimleri, x_n ise genel terimidir.

Mesela;

a) $x_n = 1+\frac{1}{2^n} \Rightarrow \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \ldots, 1+\frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$

b) $x_n = (-1)^n \Rightarrow \{-1, 1, -1, \ldots (-1)^n, \ldots\}$

c) $x_n = p^n \Rightarrow \{p, p^2, \ldots, p^n, \ldots\}$

d) $x_n = (-2)^n \Rightarrow \{-2, 4, -8, \ldots, (-2)^n, \ldots\}$

e) $x_n = -n^2+1 \Rightarrow \{0, -3, -8, \ldots, -n^2+1, \ldots\}$

sayılabilir.

Limit kavramı, matematiğin temel kavramlarından biridir. Bunu, gerçel (reel) sayı dizileri için tanımlayalım. Yukarıdaki ilk örnekte n sayısı arttıkça $x_n = 1+\frac{1}{2^n}$ elemanının değerinin küçüldüğünü görüyoruz. Örneğin, $n=5$ iken x_n elemanı $1+\frac{1}{32}=1{,}03125$ değerini, $n=10$ " de $1+\frac{1}{1024}=1{,}0009767$ değerini alır.

Buradan da n indis değerleri arttıkça dizinin elemanlarının azalarak 1 e yaklaştığı görülür. Buna göre aşağıdaki limit tanımı verilebilir:

<u>Tanım 1</u> Verilen bir x_0 ve her ε pozitif sayısına karşılık ε'a bağlı bir n_0 indisi; bu n_0 dan büyük olacak her n indisi için $|x_n - x_0| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabilirse $\{x_n\}$ dizisine, yakınsak dizi, x_0 sayısına da dizinin limiti denir ve

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ya da $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$

şeklinde ifade edilir. Bu tanım bize dizinin yakınsak olması halinde, belli bir indisten sonraki terimlerin bu x_0 limit noktasına istenildiği kadar yakın olabileceğini yani $\{x_n\}$ dizisinin terimlerinin x_0 noktası civarında yığılma yaptığını gösterir.

<u>Tanım 2</u> Yakınsak olmayan diziye ıraksaktır denir.

Diziler de birer fonksiyon olduğundan, dizilerin de sınırlılığından sözedilebilir.

<u>Teorem 1</u> Artan (azalan) ve üstten (alttan) sınırlı her dizi yakınsaktır.

<u>Teorem 2</u> Yakınsak her dizi sınırlıdır.

Bu bilgiler ışığında fonksiyonlarda limiti tanımlayalım:

<u>Bir Fonksiyonun Limiti</u>

$y=f(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasının herhangi bir civarında tanımlı olsun (x_0 da tanımsız olabilir)

Bu civara (komşuluğa) ait herhangi x değişkeni

x_0 sayısına yaklaştığında, f fonksiyonu altındaki değerler de belli bir L sayısına yaklaşıyorsa L ye f nin bu x_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$ ile gösterilir.

Bu tanıma alternatif, diziler üzerinden verilen bir tanım da vardır, ki buna dizisel limit tanımı denir.

<u>Tanım 3</u> f fonksiyonu x_0 ın herhangi bir civarında tanımlanmış ve bu civarda bulunup x_0'a yakınsayan tüm $\{x_n\}$ dizilerine karşılık $f(x_n)$ dizileri de belli bir L sayısına yakınsıyorsa L ye f nin x_0 daki limiti denir.

<u>Ör 1</u> $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki limitini inceleyelim:

Dizisel limit tanımına dikkat edilirse x_0 noktasına yakınsayan tüm dizilerin görüntüleri de belli bir L sayısına yakınsaması halinde limitten söz edilebilir. Fonksiyon $x_0 = 0$ noktasında tanımlı değildir. Bu nokta civarında tanımlı ve 0 noktasına yakınsayan $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ve $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ dizilerini ele alalım. Bunların her ikisi de sıfıra yakınsayan dizilerdir: $n \to \infty$ için $x_n \to 0$ ve $y_n \to 0$ dır. Öte yandan; Bu f fonksiyonu altındaki diziler sırasıyla

$f(x_n) = \sin(n\pi)$ ve $f(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ dir. ve bu diziler birer sabit dizi oluştururlar:

$\sin(n\pi) = \{0, 0, ---, 0, ---\}$, $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \{1, 1, ---, 1, ---\}$.

Bu sabit diziler de kolayca görüleceği üzere

sırasıyla 0 ve 1'e yakınsaktır. Dolayısıyla 0'a yakınsayan iki dizinin görüntü dizileri aynı noktaya yakınsamamaktadır. Sonuç olarak bu fonksiyonun $x_0=0$ noktasında limitinden ~~söz~~ edemeyiz. Limit yoktur.
Bu tanım, verilen bir fonksiyonun bir noktada limite sahip olmadığını göstermek için kullanılabilecek bir tanımdır.

<u>Tanım 4</u> x_0 noktası civarında tanımlı bir f fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer x bağımsız değişkeni x_0'a bu sayıdan daha büyük (küçük) değerler alarak yaklaşırken f(x) görüntüsü de bir L_1 (L_2) sayısına yaklaşıyorsa L_1 (L_2) ye f nin x_0 noktasındaki sağdan (soldan) limiti denir ve $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_1$ $\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_2\right)$ ile gösterilir.

Bu tanımlar ışığında $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ ve $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=0$ olduğu görülür.

<u>Ör 2</u> $f(x)=|x|/x$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktasındaki sağdan ve soldan limitlerini hesaplayalım:

Verilen fonksiyon $x_0=0$ noktasında tanımlı değildir. Öte yandan mutlak değerin tanımına göre;

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \text{ ise} \\ -x & ; \ x<0 \text{ ise} \end{cases}$$ olduğu dikkate alınırsa

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1, \text{ ve}$$