SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim ÜYESİ Abdullah SEVİN

SAYISAL ANALİZ

SAYISAL TÜREV

(Numerical Differentiation)

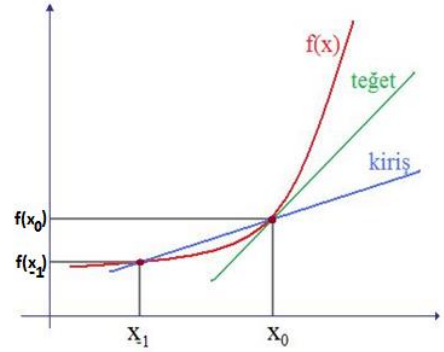
İÇİNDEKİLER

Sayısal Türev

- **Türev,** bağımlı bir değişkenin bağımsız bir değişkene göre değişme miktarıdır.
- Analitik olarak türev ya da integral almanın mümkün olmadığı yerlerde **sayısal türev** veya **sayısal integral** işlemleri kullanılmalıdır. Birçok olayda değişim oranları kullanılır.
  - Örnek: Bir firmanın yıllık satış miktarı (cirosu), bir arabanın bir saatte aldığı yol veya bir akarsuda bir saniyede akan su miktarı gibi
  - Geometrik olarak **Türev**, bir fonksiyona ait eğrinin her hangi bir **x** noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle **x** noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir.

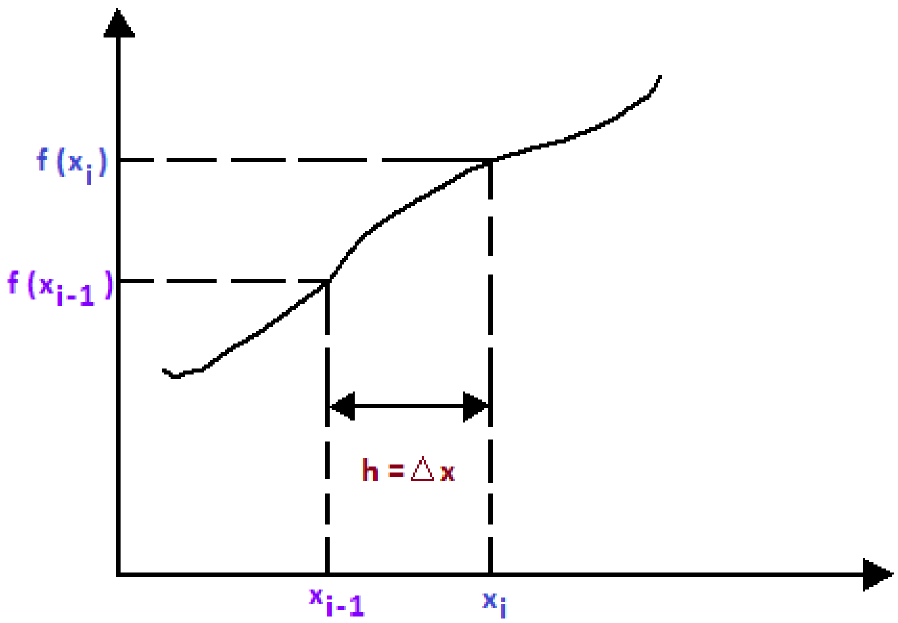
$$f(x)' = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$



- **Sayısal türev,** bir fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının bir ölçüsüdür.

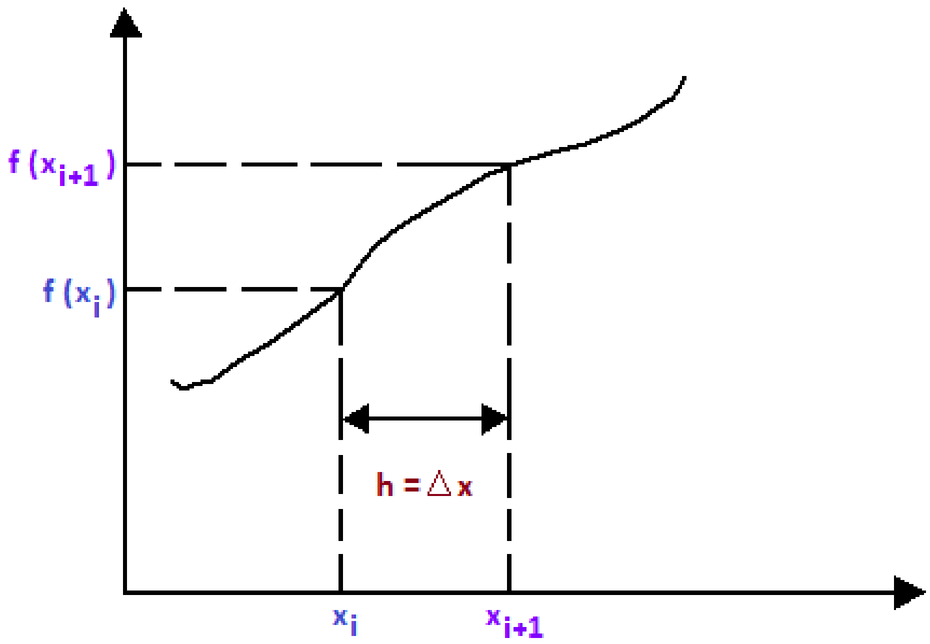
Geri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

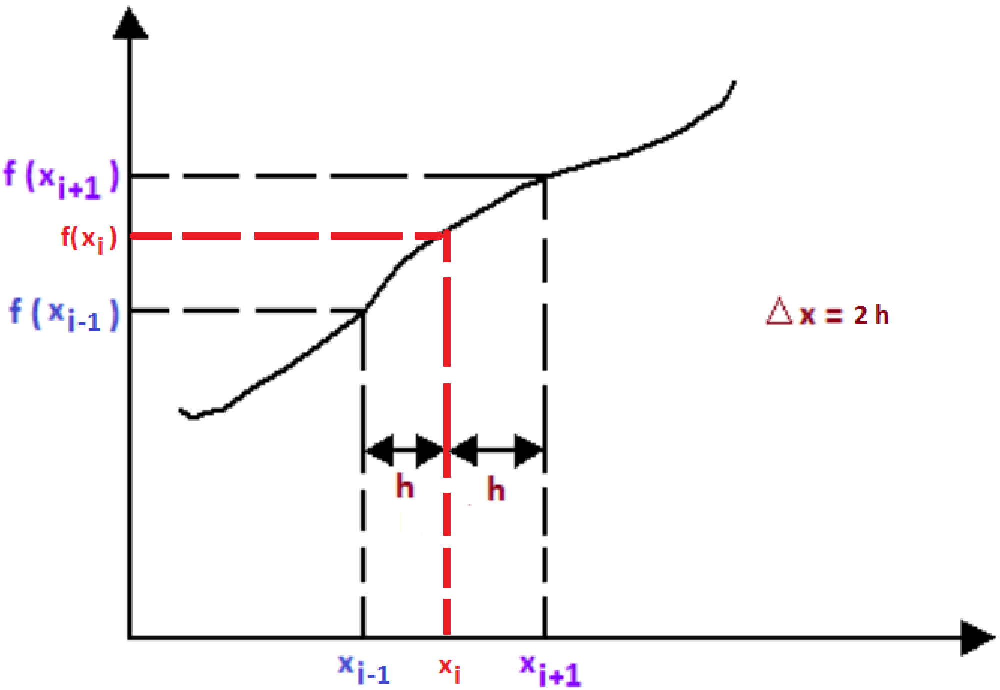
İleri Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev



$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f(x_i)' = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

Geri Farklar İle Sayısal Türev

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$$

İleri Farklar İle Sayısal Türev

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

Merkezi Farklar İle Sayısal Türev

Birinci mertebeden türev:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

İkinci mertebeden türev:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

Üçüncü mertebeden türev:

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$$

Dördüncü mertebeden türev:

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$$

Sayısal Türev

- **Örnek:** $f(x)= x^2$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini $h=0.2$ kullanarak her üç yöntemle hesaplayınız?

- **Çözüm:**

  - **Geri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f(2) - f(2-0.2)}{0.2} = \frac{2^2 - 1.8^2}{0.2} = 3.8$$

  - **İleri farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(2+0.2) - f(2)}{0.2} = \frac{2.2^2 - 2^2}{0.2} = 4.2$$

  - **Merkezi farklar**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(2+0.2) - f(2-0.2)}{2*0.2} = \frac{2.2^2 - 1.8^2}{0.4} = 4$$

  - **Analitik Çözüm = 4 ve İkinci dereceden türevlerini hesaplayınız?**

Örnek

❑**Örnek: f(x)= ln (x) fonksiyonunun x=5 noktasındaki 1. ve 2. dereceden türevini h=0.01 kullanarak ileri farklar yöntemine göre hesaplayınız?**

$$f(x)=\ln x \qquad f'(5)=? \qquad f''(5)=?$$

Analitik çözüm:

$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad f'(5)=0,2 \qquad f''(5)=-0,04$$

Sayısal çözüm:

$$f'(5)=\frac{\ln(5+0,01)-\ln(5)}{5,01-5}=\frac{1,6114435915-1,609437912}{0,01} \Rightarrow f'(5)=0,199800$$

$$f''(5)=\frac{\ln(5,02)-2\ln(5,01)+\ln(5)}{(0,01)^2}=\frac{1,613429934-2*1,611435915+1,609437912}{0,0001}$$

$$=-0,0398405$$

Taylor Serisi ile Sayısal Türev

- Bir f(x) fonksiyonun x_i noktasındaki türevi $f'(x_i)$ Taylor Serisi yardımıyla elde edilebilir.
- Bir fonksiyonun $x_i+\Delta x$ civarındaki değeri x_i civarındaki değerinin kuvvetleri cinsinden, Taylor Serisine açılarak bulunabilir.

$$f(x_i+\Delta x) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i)$$

- Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx' in mertebesine eşit olur.
  - **Örnek:** Taylor serisinde ikinci terim'den sonraki terimler atılacak olursa, yapılan hatanın mertebesi 2 olacaktır.
- Taylor Serisi ile çok noktalı türev yaklaşımı gerçekleştirilir.

Taylor Serisi ile İleri Fark Yöntemi

- **f(x) fonksiyonun x_i+h civarındaki ve x_i+2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekelim.**

-4

$$f(x_i+h) = f(x_i) + \frac{h^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + \frac{(2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(2h)^2 f''(x)}{2!}$$

+

$$-4 f(x_i+h) = -4 f(x_i) - 4hf'(x_i) - 4\frac{h^2 f''(x_i)}{2}$$

$$f(x_i+2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4h^2 f''(x)}{2}$$

+

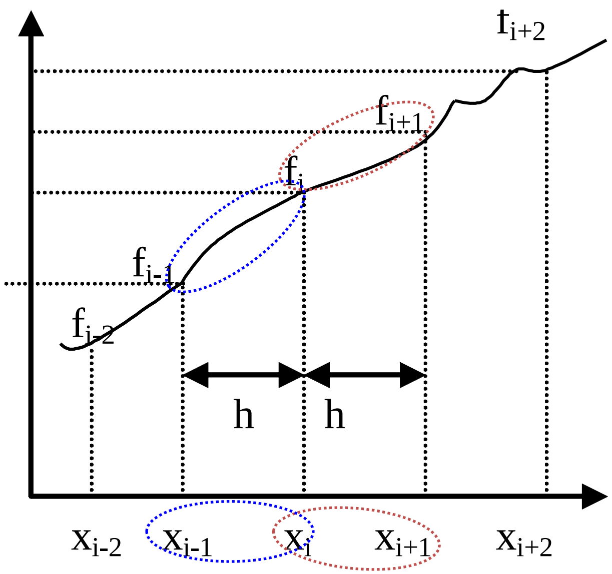
$$f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_i) + 4f(x_i+h) - f(x_i+2h)\right]$$

Taylor serisi için ileri fark formülü →

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

Taylor Serisi ile Geri Fark Yöntemi

- **İleri fark yöntemindeki işlemler f(x) fonksiyonun x_i-h civarındaki ve x_i-2h civarındaki değerlerini $f(x_i)$ nin kuvvetleri cinsinden 2. kuvvetine kadar açıp, $f'(x_i)$ yi çekilmesi şeklinde tekrar edilerek elde edilir.**



$$f(x_i - h) = f(x_i) + \frac{(-h)^1 f'(x_i)}{1!} + \frac{(-h)^2 f''(x_i)}{2!}$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) + \frac{(-2h)^1 f'(x)}{1!} + \frac{(-2h)^2 f''(x)}{2!}$$

Taylor serisi için geri fark formülü

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[3 f_i - 4 f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

Sayısal Türev

- **Örnek:** $f(x)=2x^2+1$ fonksiyonunun $x=2$ yaklaşık türevini gördüğünüz tüm yöntemlerle hesaplayınız. $h=0.1$ ve analitik çözüm $f'(2)=8$

- **Çözüm:**

- **Basit ileri farkla çözüm**

$$f(x_i)' = \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} = \frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1} = \frac{(2*2.1^2+1)-(2*2^2+1)}{0.1} = \frac{9.82-9}{0.1} = 8.2$$

- **Taylor serisi ile iki noktalı ileri farkla çözüm**

$$f_i = f(2) = 2*2^2+1 = 9$$

$$f_i' = \frac{1}{2h}\left[-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}\right]$$

$$f_{i+1} = f(2.1) = 2*2.1^2+1 = 9.82$$

$$f_{i+2} = f(2.2) = 2*2.2^2+1 = 10.68$$

$$f_i' = \frac{1}{2*0.1}\left[-3*9+4*9.82-10.68\right] = \frac{1.6}{0.2} = 8$$

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

- **Daha önceki enterpolasyon konusunda tanımlamış olduğumuz, ileri fark enterpolasyon ifadesi:**

$$Y_n = y_o + n\Delta y_o + [n(n-1)/2!]\Delta^2 y_o + [n(n-1)(n-2)/3!]\,\Delta^3 y_o + \dots$$

n' ye göre türevi $\frac{dy_n}{dn}$ alınırsa, $\frac{dy_n}{dn} = \Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2-6n+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$

Burada $n = \frac{x-x_0}{\Delta x}$, $\frac{dx}{dn} = \Delta x$ ve $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn}\frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\frac{dy}{dn}$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2-6n+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots\right]$$ elde edilir.

x=x0 noktasındaki türev için n=0 olur ve $y_0^{'} = \frac{1}{\Delta x}\left.\frac{dy}{dn}\right|_{n=0}$

$$y_0^{'} = \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \dots\right]$$ olur.

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

- **Daha önceki enterpolasyon konusunda tanımlamış olduğumuz, geri fark enterpolasyon ifadesi:**

Benzer işlemi Geri yön enterpolasyon ifadesi

$y_n = y_0 + n\nabla y_0 + [n(n+1)/2!]\ \nabla^2 y_0 + [n(n+1)(n+2)/3!]\ \nabla^3 y_0 + \ldots$ için yapılırsa,

genel bir ifade olarak $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn}\frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\frac{dy}{dn}$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x}\left[\nabla y_0 + \frac{1}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{1}{3}\nabla^3 y_0 + \ldots\right]$$

elde edilir.

Gregory Newton bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

Örnek:

$y=e^x$, $x\in[0, 5]$ ve **$\Delta x=h=1.0$** aralığında fonksiyonun ileri fark tablosunu hazırlayarak **$x=2$** noktasındaki türevi ileri yön (Newton-Gregory) bağıntısı ile hesaplayınız?

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1.0	1.718	2.944	5.0940
1	2.718	4.662	8.038	13.7720
2	7.38	12.7	21.81	37.500
3	20.08	34.51	59.31	
4	54.59	93.82		
5	148.41			

İleri fark türev bağıntısı

$$y_0' = \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]$$

$X_0=2$ için (temel satır)

$Y' = (1/1)[12.7 - (1/2)21.81 + (1/3)37.5] = 14.2950$

Fonksiyonun **$x=2$** noktasındaki gerçek türev değeri ise **$y'= e^2= 7.3891$** bu problemde **$x=2$** noktası var olduğundan **$n=0$** alınmış oldu.

Sayısal Türev

- **Örnek: $f(x) = x^2e^x$ fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevini 0.1 adımlarla ileri, geri, merkezi farklar ve taylor serisi 2. kuvvetin sayısal türev yöntemlerini kullanarak ayrı ayrı hesaplayınız.**

diff komutu ile sembolik türev alma

- Tanımlanan bir denklemin türevini alır.
- diff (denklem, değişken)

türev işleminde kullanılacak değişkenin adı

çözümü yapılacak sembolik ifadelerden oluşan denklem

```
%  sembol tanımlama
>> syms x
%  diff komutu ile sembolik türev alma
>> diff (x^2)
ans =
     2*x
```

```
%  sembol tanımlama
>> syms x t
%  diff komutu ile sin(2xt)nin t'ye göre türevi
>> diff (sin(2*x*t), t)
ans =
     2*x*cos(2*t*x)
```

diff komutu ile sembolik katlı türev alma

- Katlı türev alma durumu.
- diff (denklem, değişken, türevderecesi)

```
%  sembol tanımlama
>> syms x
%  diff komutu ile x^2 nin 2. dereceden türevi
>> diff (x^2, x, 2)
ans =
      2
```

diff komutu ile bir dizinin türevini alma

- MATLAB'ta dizi elemanları arasındaki fark diff komutu ile elde edilebilir.

t (sn)	0	0.5	1	1.5
y(t)	0	0.6	1.9	2.6

```
%  zaman artışını belirt
>> dt=0.5;
%  diziyi belirt
>> y= [0 0.6 1.9 2.6];
%  dizinin türevi
>> dydt = diff (y)/dt
dydt =
      1.2000    2.6000    1.4000
```

Sayısal Türev MATLAB Uygulama

```
% Sayısal Türev
%%%%%%%%%%%%%%%%
x=[0:0.5*pi:2*pi];
y=1+2*sin(x);
n=length(x);

%ileri farklar
dydxi=(y(2:n)-y(1:n-1))./(x(2:n)-x(1:n-1));
xi=x(1:n-1);

%geri farklar
dydxg=(y(1:n-1)-y(2:n))./(x(1:n-1)-x(2:n));
xg=x(2:n);

%merkezi farklar
dydxm=(y(3:n)-y(1:n-2))./(x(3:n)-x(1:n-2));
xm=x(2:n-1);

%analitik türev
dydx=2*cos(x);

% türev farklarının ortalaması
ileri = mean(abs(dydx(1:end-1)- dydxi))
geri = mean(abs(dydx(2:end)- dydxg))
merkezi = mean(abs(dydx(2:end-1)- dydxm))

plot(x,dydx,':rs',xi,dydxi,'-.ko',xg,dydxg,'--<',xm,dydxm,'-g*')
legend('analitik','ileri','geri','merkezi',-1)
```

ÖDEV

- $f(x) = e^{2x-3}$ fonksiyonunun $x=2$ için, $h=0.2$ adımlar ile gördüğünüz tüm yöntemleri kullanarak türevini hesaplayınız.

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**