$Diferansiyel\ Denklemler$

$Hafta\ 9 - Devam$

$Finalde\ vizeden$ önceki $son\ konumuzun\ 2.\ kısmındayız.$

$Sabit\ Katsayılı\ Homojen\ Olmayan\ Lineer\ Denklemler$

$n.inci\ \ mertebeden\ sabit\ katsayılı\ homojen\ olmayan\ lineer\ diferansiyel\ denklemi$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = Q(x)$$

$şeklinde\ yazılır.$

$Q(x) = 0\ olursa\ homojen\ denklem\ olur.$

$Bu\ denklemlerin$ çözümünü $nasıl\ bulacağız?$

$(1) Denklemin\ genel$ çözümü

$$y_g = y_h + y_ö\ , \qquad \ldots\ldots(2)$$

$şeklinde\ iki\ parçadan\ oluşur.$

$$y_h: Q(x) = 0\ için\ bulunan\ çözümdür.$$

$$y_ö: Q(x) için\ bulunacak\ özel\ çözümdür.$$

$Bizim\ burda\ uğraşacağımız\ kısım$ özel çözümünün $bulunması,$

$diğer\ kısımları\ zaten\ biliyoruz.$

$Sınavdaki\ birinci\ soru: y'' - y' - 2y = -2x - 1$

Çözümü: $y = c_1 r + e^{2x} + c_2 e^{-x} + x$

$Özel\ çözüm\ bulma\ yöntemleri\ (y_ö\ bulma)$

$i)\ Belirsiz\ Katsayılar\ Yöntemi$

$ii)\ Parametrenin\ (Sabitin) Değişimi\ Yöntemi$

$iii)\ Operatör\ Yöntemi\ (Türev\ ve\ integralden\ bahsediyoruz)$

$Mesela\ y'' = x\ denklemi\ olsun, homojen\ de\ değil. Operatör\ deyince\ aslında$

$aklınıza\ integral\ gelsin. Eğer\ alınırsa\ y' = \dfrac{x^2}{2} + c_1$

$Bir\ integral\ daha\ alırız. y = \dfrac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\ bulunur. c'li\ kısımlar$

$burada\ homojen\ (y_h)\ kısımdır. x^3 lü\ ifade\ de\ özel\ çözüm\ (y_ö)\ dür.$

$i)\ Belirsiz\ Katsayı\ Yöntemi$

$Bu\ yöntem\ kısıtlı\ bir\ yöntemdir. Eğer\ fonksiyonumuz,$

$Q(x) = P_n(x); polinomda\ çalışır.$

$Q(x) = e^{mx};\ \ üstel\ ise\ çalışır.$

$Q(x) = \sin kx , \cos kx , A\cos kx + B \sin kx\ \ ; de\ yine\ çalışır.$

$\ln x , \arctan x , \arcsin x , \dfrac{P_n(x)}{q_n(x)}, \tan x , \cot x, \sec x\ \ gibi\ fonksiyonlar\ için\ bu\ yöntem$

$işlevsizdir.$

1) $\quad Q(x) = e^{mx}\ \ (m \in Reel\ sayılar) olsun.\ \ y'' + y = e^{-x}$

$a)\ Karakteristik\ köklerde\ m\ YOKSA\ y_ö = Ae^{mx}$

$b)\ Karakteristik\ köklerde\ k\ adet\ VARSA\ y_ö = Ax^k e^{mx}$

$şeklinde\ çözüm\ aranır. A\ bulunması\ gereken\ bir\ katsayıdır.$

$Yöntemin\ adı\ zaten\ A'dan\ geliyor. (Belirsiz\ Katsayı\ Yöntemi)$

$\boxed{ÖRNEK\ (1)}\ \ y'' - 4y = 7e^{-x}\ denkleminin\ genel\ çözümünü\ bulalım.$

$1. ADIM:\ \ y_g = y_h + y_ö$

$2. ADIM:\ \ y_h\ bulmak\ için;$

$(y'' - 4y = 0)$

$(r^2 - 4 = 0)$

$\left(r = \pm 2 \implies y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}\right)$

$3. ADIM:\ \ y_ö = ?$
$m = 1 \Rightarrow\ r_1 = 2,\ \ r_2 = -2$
$köklerde\ 1\ olmadığı\ için\ y_ö = Ae^x\ şeklinde$
$y'' - 4y = 7e^x$

$Ae^x - 4Ae^x = 7e^x$

$-3Ae^x = 7e^x$

$A = -\dfrac{7}{3}$

$$y_ö = -\frac{7}{3}e^x$$

$\boxed{ÖRNEK\ 2}$ $y'' - y = e^x$ *ise* y_g *çözümü nedir?*

$1.$ *Adım:* y_h *için*

Karakteristik Denklem: $r^2 - 1 = 0$

$$r_1 = 1,\ \ r_2 = -1$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$2.$ *Adım:* $y_ö$ *için*

Ae^x *diyemiyoruz çünkü homojen denklemde aynısı var.*

Bu yüzden bu ifadeyi x ile çarpacağız.

(x ile çarptıktan sonra hala varsa tekrar çarpın.)

O halde $y_ö = Axe^x$ *alınır.*

Ya almazsak bakalım ne olacak?

$y = Ae^x$ *için*

$$y' = Ae^x,\ \ y'' = Ae^x$$

$$y'' - y = e^x$$

$$Ae^x - Ae^x = e^x$$

$0 = e^x$ *(Çelişki)*

$y'_ö = A(1+x)e^x,\ \ y''_ö = A(2+x)e^x$ *gelir.*

$$y''_ö - y_ö = e^x$$

$$A(2+x)e^x - Axe^x = e^x$$

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$$

$$2Ae^x = e^x$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$3. ADIM:\ y_g = y_h + y_ö$$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

2) $\quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \ (Polinom)$

$a)$ $Karakteristik\ köklerde\ (e^{mx}\ polinoma\ dönüştürmek\ için\ m = 0\ olmalı)\ SIFIR$ $yoksa$ $\boxed{y_ö = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n}$

$b)$ $Karakteristik\ köklerde\ k\ adet\ SIFIR\ varsa$ $\boxed{y_ö = x^k (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)}$ $bkz.$ Örnek4

$\boxed{ÖRNEK\ (3)}$ $y'' - y = 2x + 1\ \ ise\ y_g$ çözümü $nedir?$

$$1. ADIM: y_h\ için;$$

$$Karakteristik\ denklem: r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \qquad r_2 = -1$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$2. ADIM:\ y_ö\ için;$$

$$Köklerde\ SIFIR\ yok!$$

$\boxed{y_ö = Ax + B}$ $şeklinde\ olmalı.$

$$y'_ö = A,\ y''_ö = 0$$

$$y''_ö - y_ö = 2x + 1$$

$$0 - (Ax + B) = 2x + 1$$

$$A = -2\,, \qquad B = -1$$

$$y_ö = -2x - 1$$

$\boxed{ÖRNEK\ (4\,)}$ $y^{(4)} - 4y'' = 2 - 4x^2\ ise\ y_g$ çözümü $bulun.$

$1. ADIM:\ y_h$ çözüm $bulacağız.$

$$Karakteristik\ denklem: r^4 - 4r^2 = 0$$

$$Kökler:\ r_{1,2}=0, \qquad r_3=2, \qquad r_4=-2$$

$$\boxed{y_h=(c_1+c_2x)e^{0x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}}$$

$$2.\ ADIM:\ y_{ö}\ için;$$

$$Köklerde\ 2\ adet\ SIFIR\ var!$$

$$\boxed{y_{ö}=x^2(Ax^2+Bx+C)}$$

$$şeklinde\ olur.$$

$$y_{ö}=Ax^4+Bx^3+Cx^2, \qquad birinci\ türev$$

$$y'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx\,, \qquad ikinci\ türev$$

$$y''=12Ax^2+6Bx+2C, \qquad \text{üçüncü}\ türev$$

$$y'''=24Ax+6B, \qquad ve\ dördüncü\ türevi\ de\ alırsak$$

$$y^{(4)}=24A$$

$$y^{(4)}{}_{ö}-4y''{}_{ö}=2-4x^2$$

$$24A-4(12Ax^2+6Bx+2C)=2-4x^2$$

$$-48Ax^2-24Bx+(24A-8C)=-4x^2+0x+2$$

$$A=\frac{1}{12}\,, \qquad B=0, \qquad C=0$$

$$y_{ö}=x^2\left(\frac{1}{12}x^2\right)=\frac{x^4}{12}$$

$$\boxed{y_g=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}+\frac{1}{12}x^4}$$

$$\boxed{Problemler}$$

1) $y''-2y'+y=1905e^{-x}$
2) $y''-3y'-4y=e^{x}$
3) $y'''-y''=x^3+2x$
4) $y''+y=5-x$