2. Hafta Özet

Homojen Diferansiyel Denklem

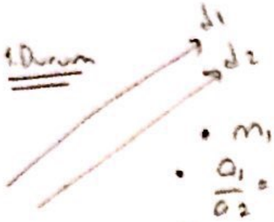
$$y' = f(y/x) \quad , \quad y' = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

Homojen Hale Getirilebilen Denklem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$ şeklindedir. ($c_1 \neq c_2$, Homojen olmama sebebi)

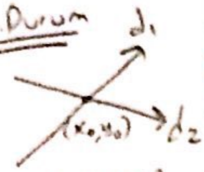
(Doğru Denklemi)
$d_1: a_1x + b_1y + c_1$
$d_2: a_2x + b_2y + c_2$

1. Durum



- $m_1 = m_2$
- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$
- k: oranti sabiti
- $a_1 = k \cdot a_2$

2. Durum



$a_2x + b_2y + c_2 = 0$
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$x = \overline{X} + x_0$
$y = \overline{Y} + y_0$
öteleme dönüşümü yapılır.

1. Durumda

① $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{a_2kx + b_2ky + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Rightarrow$ ② $y' = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}$

② $\Rightarrow u = a_2x + b_2y$ dersek $\overset{④}{\Rightarrow} u' = a_2 + b_2y'$ olur.

③ $\Rightarrow y' = \frac{u' - a_2}{b_2} \overset{⑥}{\Rightarrow} \frac{u' - a_2}{b_2} = \frac{ku + c_1}{u + c_2} \overset{⑦}{\Longleftrightarrow} u' = a_2 + b_2\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right)$ elde edilir.

Örn1 $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{x + 2y + 3}$ (Homojen değil, $c_1 \neq c_2$)

① $a_1 = 1, \; a_2 = 1, \; b_1 = 2, \; b_2 = 2 \overset{②}{\Rightarrow} x + 2y = u$ denir.

③ $u' = 1 + 2y' \overset{④}{\Rightarrow} y' = \frac{u' - 1}{2} = \frac{u+1}{u+3} \overset{⑤}{\Rightarrow} u' = 1 + \frac{2(u+1)}{u+3}$

⑥ $\frac{du}{dx} = \frac{3u + 5}{u + 3}$ (d.d.d) $\overset{⑦}{\Longleftrightarrow} \int \frac{u+3}{3u+5} du = \int dx \overset{⑧}{\Rightarrow}$ $u+3 \,|\, 3u+5$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$

⑨ $\Rightarrow \int \left(\frac{1}{3} + \frac{4/3}{3u+5}\right) du = x + C \overset{⑩}{\Rightarrow} \frac{1}{3}u + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \ln|3u + 5| = x + C \overset{⑪}{\Rightarrow} \frac{x + 2y}{3} + \frac{4}{9} \ln|3(x+2y) + 5| = x + C$

2. Durum için

$$dx = d\bar{X}$$
$$dy = d\bar{Y}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{X}} = \bar{y}'$$

① $a_1x + b_1y + c_1 = a_1(\bar{x}+x_0) + b_1(\bar{y}+y_0) + c_1$

$= a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + \underbrace{(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}_{=0} = a_1\bar{X} + b_1\bar{y}$

② $a_2x + b_2y + c_2 = a_2(\bar{x}+x_0) + b_2(\bar{y}+y_0) + c_2$

$= a_2\bar{x} + b_1\bar{y} + \underbrace{(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}_{=0} = a_2\bar{X} + b_2\bar{y}$

③ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{X}} = \frac{a_1\bar{X} + b_1\bar{y}}{a_2\bar{X} + b_2\bar{y}} = \frac{a_1 + b_1\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)}{a_2 + b_2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)} \Rightarrow \bar{y}' = f\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)$

homojen denklem elde edilir.

Örn $(x+y-3)dx + (-x+y+1)dy = 0$

① $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$, $a_1 = 1, b_1 = 1$, $c_2 = 1, b_2 = -1$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-1} = -1$, $-1 \neq 1$ (2. Durum)

② x_0, y_0 bul!

$d_1: \quad x + y - 3 = 0$

$d_2: \quad x - y - 1 = 0$

$x_0 = 2$

$y_0 = 1$

③ $x = \bar{X} + 2$, $y = \bar{y} + 1$ öteleme dönüşümü yapılır.

④ $\frac{d\bar{y}}{d\bar{X}} = \frac{(\bar{x}+2) + (\bar{y}+1) - 3}{(\bar{x}+2) - (\bar{y}+1) - 1}$

⑤ $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{X}+\bar{y}}{\bar{X}-\bar{y}} = \frac{1 + (\bar{y}/\bar{x})}{1 - (\bar{y}/\bar{x})}$ Homojen Denklem.

⑥ $\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = u \Rightarrow \bar{y} = u\bar{x}$, $\bar{y}' = u' \cdot \bar{x} + u$

Homojen denklem çözeceğiz.

⑦ $u + \bar{X}u' = \frac{1+u}{1-u}$ ⑧ $\bar{X}\frac{du}{d\bar{x}} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u}$ ⑨ $\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{\bar{x}}d\bar{x}$

⑩ $\int\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \int\frac{d\bar{X}}{\bar{X}}$ ⑪ $\arctan u - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|\bar{X}| + \ln C$

⑫ $\arctan u = \ln\left(C\bar{X}\sqrt{1+u^2}\right)$ ⑬ $\boxed{e^{\arctan u} = C\bar{X}\sqrt{1+u^2}}$

Problem: ① $y' = \frac{x+y-2}{x+y}$ $\quad C: (x+y+1) + \ln(x+y+1) = 2x + c$

② $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$ $\quad C: (x-1)^3 = \frac{c}{\left(1 - c_1\frac{y-1}{x-1}\right)\left(2 + \frac{y-1}{x-1}\right)^2}$

Tam Diferansiyel Denklem

$y = f(x) \rightarrow dy = f'(x) \cdot dx$ diferansiyel

$f(x,y)$ iki değişkenli fonk. ise

$df = f_x \cdot dx + f_y dy$ ifadesine

f'in tam diferansiyeli denir.

f_x : f'nin x'e göre kısmî türevi

f_y : " y'e " " "

Ör) $U(x,y) = x^2y - y^2 \ln x \Rightarrow$ u'nun x'e göre türevini bulalım.

① $U_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^2 \cdot \frac{1}{x}$

③ $(U_x)_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \left(2xy - \frac{y^2}{x}\right)_y$

$\boxed{U_{xy} = 2x - \frac{2y}{x}}$

② $U_y = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2y \ln x$

④ $(U_y)_x = U_{yx} = (x^2 - 2y \ln x)_x = 2x - \frac{2y}{x} = U_{yx}$ Sonuç: $U_{yx} = U_{xy}$

Ör) $U(x,y) = \arctan(y/x) + e^{x/y} \Rightarrow U_x = ?,\ U_y = ?$

① $U_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(y/x)_x}{1 + (y/x)^2} + (x/y)_x \cdot e^{x/y}$ ② $\left(\frac{y}{x}\right)_x = \frac{-y}{x^2}$, $\left(\frac{x}{y}\right)_x = \frac{1}{y}$

③ $U_x = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} + \frac{1}{y} \cdot e^{x/y} = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{1}{y} e^{x/y}$

④ $U_y = \frac{(y/x)_y}{1 + (y/x)^2} + \left(\frac{x}{y}\right)_y \cdot e^{x/y} \Rightarrow$ ⑤ $\left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{x}$, $\left(\frac{x}{y}\right)_y = \frac{-x}{y^2}$

⑥ $U_y = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{y^2} e^{x/y}$

Tanım: Tam Diferansiyel Denklem

$dU = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ olacak biçimde bir $U(x,y)$ fonksiyonu varsa

U denklemin çözümüdür. $(dU = U_x\,dx + U_y\,dy = 0)$

Ör) $U = x^2y - x^3y^4$ olsun. $dU = U_x\,dx + U_y\,dy$

$= (2xy - 3x^2y^4)\,dx + (x^2 - 4x^3y^3)\,dy$

$(2xy-3x^2y^4)dx+(x^2-6x^3y^3)dy=0$

$dU=0$

Def

Tam Dif Denklem

$dU=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$
olacak biçimde U fonksiyonu varsa
denklem Tam Dif. Dnk. denir.

$dU=U_x dx+U_y dy=0$

$U_x=M$ ve $U_y=N$ olmalı.

Denklemin çözümü
$U_x=M \iff U(x,y)=\int M(x,y)dx+h(y)$ şeklindedir.
$h(y)$ y'ye bağlı bulunması gereken bir fonksiyondur.

$(U_x)_y=M_y \iff U_{xy}=M_y \Rightarrow U_{xy}=U_{yx}$ olacağından,
$(U_y)_x=N_x \iff U_{yx}=N_x$ $\quad M_y=N_x$ tam diferansiyel olma koşulu elde edilir.

Örnek (1) $(2xy^2-y\sin x+2x-1)dx+(2x^2y+\cos x+\frac{1}{y})dy=0$
denklemi tam dif. mi? $M_y \stackrel{?}{=} N_x$

Çözüm $(2xy^2-y\sin x+2x-1)_y \stackrel{?}{=} (2x^2y+\cos x+\frac{1}{y})_x$ (x'e göre türev demektir)

$4xy-\sin x+0 \stackrel{\checkmark}{=} 4xy-\sin x+0$ ✓ Tam dif. denklem

Özetle; 1) $M_y = N_x$

2) $U(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$

3) $h(y)$'yi bul ve üstte yerine yaz.

$h(y)$'yi bulmak için $U_y = N$ eşitliği kullanılır.

Önceki Örnekten

$$\int M dx + h(y) = \int (2xy^2 - y\sin x + 2x - 1)\,dx + h(y)$$

$$U(x,y) = x^2y^2 + y\cos x + x^2 - x + h(y)$$

3) $U_y = N$

$$\left(x^2y^2 + y\cos x + x^2 - x + h(y)\right)_y = 2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}$$

$$\cancel{2x^2y} + \cancel{\cos x} + 0 - 0 + h'(y) = \cancel{2x^2y} + \cancel{\cos x} + \frac{1}{y}$$

$$h'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow h(y) = \ln|y|$$

Çözüm $U(x,y) = x^2y^2 + y\cos x + x^2 - x + \ln y = c$

Örnek $(3 - 2xy)\,dx - \left(x^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

$$\left(\overbrace{3 - 2xy}^{M}\right)_y \stackrel{?}{=} \left(\overbrace{-\left(x^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)}^{N}\right)_x$$

$$\underbrace{0 - 2x}_{M_y} \stackrel{\checkmark}{=} \underbrace{-2x + 0 - 0}_{N_x}$$ Tam dif. denklem

2) $U(x,y) = \int M dx + h(y)$

$$= \int (3 - 2xy)\,dx + h(y)$$

$$= 3x - x^2y + h(y)$$

3) $U_y = N$

$$\left((3x - x^2y + h(y))\right)_y = -x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}$$

$$0 \cancel{-x^2} + h'(y) = \cancel{-x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} \Rightarrow ① \; h'(y) = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} \Rightarrow ② \int h'(y) \; ② = \frac{1}{y} + \ln|y| + c$$

Genel Çözüm

$$U(x,y) = 3x - x^2y + \frac{1}{y} + \ln|y| + c = 0$$

(11) Örnek $\left(-y\sin(xy) + ky^4\right)dx - \left[20xy^3 + x\sin(xy)\right]dy = 0$

tam dif. yapan k sayısını bulun.

$$\left(-y\sin(xy) + ky^4\right)_y = -\left[20xy^3 + x\sin(xy)\right]_x$$

$$M_y = -\sin(xy) - y.x\cos(xy) + 4ky^3$$

$$N_x = -\left(20y^3 + 1.\sin(xy) + xy\cos(xy)\right)$$

$$= -20y^3 - \cancel{\sin(xy)} - \cancel{xy\cos(xy)} = -\cancel{\sin(xy)} - \cancel{yx\cos(xy)} + 4ky^3$$

$$-20y^3 = 4ky^3$$

$$k = -5$$

Problemler

① $\left(y + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$ $\quad C: x.y + \ln(xy) - 1 = c$

② $(1 + xy)e^{xy}dx + x^2e^{xy}dy = 0$ $\quad C: xe^{xy} = c$

Sağlama yöntemi; 2) $C: xe^{xy} = c \Rightarrow U = x.e^{xy}$

diferansiyele U denektir.

$$dU = (xe^{xy})_x dx + (xe^{xy})_y dy = 0$$

$$= (1.e^{xy} + xye^{xy})dx + x^2e^{xy}dy = 0$$

③ $e^{y/x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 + e^{y/x}\right)dy = 0$ $\quad C: xe^{y/x} + y = c$

(11) Özellik $Mdx + Ndy = 0$ denklemi hem homojen hem de tam diferansiyel ise genel çözüm $xM + yN = c$'dir.

④ Integral Çarpanı:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
denklemi tam dif değilse
(yani $M_y \neq N_x$)
denklemi tam dif yapan
bir çarpan bulabiliriz.
Bu çarpana integral
çarpanı denir.

ŞENYERLİ

Örnek $(3x^2-y^2+3)\,dx + 2xy\,dy = 0$ denklemi tam dif
değil. ($M_y = -2y$, $N_x = +2y$)
Denklemi $\frac{1}{x^2}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{x^2}(3x^2-y^2+3)\,dx + \frac{1}{x^2}(2xy)\,dy = \frac{1}{x^2}\cdot 0$$

$$\left(3-\frac{y^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

$$M_y \overset{?}{=} N_x$$

$$0-\frac{2y}{x^2}+0 = -\frac{2y}{x^2}$$ Tam dif oldu.

Bu yüzden $\frac{1}{x^2}$ ye integral çarpanı denir.
Peki $\frac{1}{x^2}$ nasıl bulundu?

integral çarpanının bulunuşu

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ ..... (1)
Tam dif. olmasın.
Denklemi $\alpha = \alpha(x,y)$ integrasyon çarpanı ile çarpalım.

$\alpha M dx + \alpha N dy = 0 \quad \cdots\cdots (2)$

Tam dif olma koşulundan

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(\alpha M) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha N).\right)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} M + \alpha \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} N + \alpha . \frac{\partial N}{\partial x} \text{ veya}$$

$$N \frac{\partial \alpha}{\partial x} - M \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

kısmi türevli denklem elde edilir.

$\alpha(x,y) = \alpha(U(x,y))$ alırsak

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{d\alpha}{dU} . \frac{\partial U}{\partial y} , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{d\alpha}{dU} . \frac{\partial U}{\partial x}$$

türevlerini (3)'te yerine yazalım.

$$\frac{d\alpha}{dU} . \frac{\partial U}{\partial x} - M . \frac{d\alpha}{dU} . \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \text{ veya}$$

$$\frac{d\alpha}{dU}\left(U_x N - U_y M\right) = \alpha \left(M_y - N_x\right)$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{M_y - N_x}{U_x N - U_y M} dU$$

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha} = \int \left(\qquad \right) dU$$

$$\ln \alpha = \int \left(\qquad \right) dU$$

$\alpha = e^{\int \left(\frac{M_y - N_x}{U_x N - U_y M}\right) dU}$ formülü elde edilir.

$\alpha(U) = e$

Özel Durumlar

1) Sadece x'e bağlı: $(u=x)$, $U_x=1$, $U_y=0$

$$\alpha(x)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{N}dx}$$

Önceki örnekten:

$$\alpha(x)=e^{\int \frac{(2y)-(2y)}{2xy}dx}=e^{\int -\frac{4y}{2xy}dx}=e^{\int \frac{-2}{x}dx}$$

2) Sadece y'ye bağlı ise, $(u=y)$, $U_x=0$, $U_y=1$

$$\alpha(y)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{M}dy}$$

3) Sadece (xy)'ye bağlı ise; $(u=xy)$ $U_x=y$, $U_y=x$

$$\alpha(xy)=e^{\int \frac{M_y-N_x}{y\cdot N-xM}d(xy)}$$

4) $U=x+y$, $U=x-y$, $U=x^2+y^2$