Diferansiyel Denklemler

Hafta 11

Değişken Katsayılı Lineer Denklemler
Mertebe Düşürme Yöntemi

$$y = y_1 u \text{ dönüşümü } yapılır.$$

$$y_1 \; homojen \; denklemin \; bir \; \text{çözümü}$$

$\boxed{\text{ÖRNEK}}$ $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ *olsun, denkleminin bir özel çözümü* $y_1 = x$ *ise* y_g *çözümü nedir?*

1. Adım: $y = ux$ dönüşümü yapılır.

$$y' = 1.u + x.u'$$

$$y'' = 2u' + x.u''$$

denklemde yerine yazarsak

$$(x^2 - 2u' + u'') - 2x(u + xu') + 2xu = 0$$

$$x(x^2-1)u'' + (2(x^2-1) - 2x^2)u' + \underbrace{(-2x+2x)}_{0}u = 0$$

$$x(x^2-1)u'' - 2u' = 0$$

2. Adım: Türev azaltacağız.

$$\underbrace{v = u' \quad \Rightarrow \quad v' = u''}_{olacağından}$$

$$x(x^2-1)v'-2v=0$$

$$değişkenlerine\ ayrılan\ denklem\ bulunur.$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2}{x(x^2-1)}dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{2}{x(x^2-1)}dx$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{2}{x(x^2-1)}$$

$$A=-2\,,\qquad B=C=1\ \ gelir$$

$$\ln|v|=-2\ln|x|+\ln|x-1|+\ln|x+1|+lnC_1$$

$$\ln|\mathrm{v}|=\ln\left|\frac{1}{x^2}(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)C_1\right|$$

$$\mathrm{v}=\frac{C_1(\mathrm{x}^2-1)}{x^2}=C_1-\frac{C_1}{x^2}$$

$$\mathrm{u}'=C_1-\frac{C_1}{x^2}\Rightarrow\ \mathrm{u}=\int\left(C_1-\frac{C_1}{2}\right)dx$$

$$\mathrm{u}=C_1\mathrm{x}-\frac{C_1}{x}+C_2$$

3. Adım: Genel çözüme gidilir

$$\mathrm{y}=\mathrm{ux}=\mathrm{x}\left(C_1\mathrm{x}-\frac{C_1}{x}+C_2\right)$$

$$=C_1(\mathrm{x}^2+1)+C_2\mathrm{x}$$

Burada C_2 deki x ifadesini zaten biliyorduk. İ*kinci* özel çözümü *de*

$$bulmuş\ olduk.$$

$$Problemler$$

$$1)\ \ (x^2+1)y''-2xy'+2y=0,\ \ y_1=x,\ \ y_g=?$$

$$2)\ \ (2x+1)y''-4(x+1)y'+4y=0,\ \ y_1=e^{2x}, y_g=?$$

$$3)\ \ (x^2+1)y''-2xy'=(x^2+1)\ Bu\ soru\ biraz\ farklı$$

$$\boxed{\text{ÖRNEK 3}}\ (x^2+1)y''-2xy'=(x^2+1)$$

$$y'=v$$
$$y''=v'$$

$$(x^2+1)v'-2xv=x^2+1$$

$$v'-\frac{2x}{x^2+1}v=1$$

$$integral\ çarpanından$$

$$e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}=e^{-\ln|x^2+1|}=\frac{1}{x^2+1}$$

$$v'=\frac{1}{\frac{1}{x^2+1}}\left(\int\frac{1}{x^2+1}.1.dx+C_1\right)$$

$$v=(x^2+1)(arctanx+C_1)$$

$EULER\ DİFERANSİYEL\ DENKLEMLER$

$n.mertebeden\ bir\ euler\ diferansiyel\ denklem$

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = Q(x) \rightarrow (1)$$

$a_i\ 'ler$ sabit olmak üzere mesela

$2x^3y''' - 5xy' + y = 0$ bir euler denklemdir. Yine

$$x^2y''' - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow x \text{ ile çarp } \Rightarrow x^3y''' - y = 0$$

gibi yazılır.

$x^2y'' + xy' + 5y = 0$ da yine bir euler denklemdir.

<u>Euler Dönüşümü</u>

$x = e^t$ ile sabit katsayılı lineer denklem elde edilir. $\left(x = e^t \Leftrightarrow t = lnx\right)$

(1) denkleminde $Q(x) = 0$ yani homojense $y = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$ şeklinde çözüm aranabilir.

$$y' = rx^{r-1}$$

$$y' = rx^{r-1}$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

$$y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = r(r-1)\ldots\big(r-(n-1)\big)x^{r-n}$$

$$xy' = r(r-1)x^r$$

$$x^2y'' = r(r-1)x^r$$

$$x^n y^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)x^r \ olacağından$$

$$(1) \ denklemi$$

$$[b_n r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \dots + b_1 r + b_0] \underbrace{x^r}_{(x^r \neq 0)} = 0$$

$$I(r) = 0 \dots \ (2) \ denklemine \ karakteristik \ denklem \ denir.$$

$$r_1, r_2, \dots, r_n \ \ reel \ ve \ farklı \ kökler \ ise$$

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

$$y_g = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + \dots + c_n x^{r_n}$$

$\boxed{ÖRNEK \ 1}$ $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \ \ Euler \ diferansiyel$

$$denklemini \ çözelim.$$

$$1. Adım: Homojen \ bir \ denklemdir.$$

$$y = x^r \ dönüşümü \ yapılır.$$

$$y' = r x^{r-1} \ \Rightarrow xy' = r x^r$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2} \Rightarrow x^2 y'' = r(r-1)x^r$$

$$[r(r-1) - 2r + 2]x^r = 0$$

$$2. Adım: r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$r_1 = 1, \ \ r_2 = 2$$

$$r = r_1 = 1 \ için \ y_1 = x^1$$

$$r = r_2 = 2 \ \ için \ y_2 = x^2$$

$$y_g = C1\, x + C2\, x^2$$

$$\boxed{NOT:}\ r_1 = r_2 \Rightarrow y_g = C1\,x^{r_1} + C2\,x^{r_1}\ln x \ \ olacaktır.$$

$$Q(x) \neq 0 \ \Rightarrow \ (Genel\ yöntem)\ x = e^t \text{ dönüşümü } yapılır.$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = (y')' = \frac{d(y)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

$$x^2y'' = \ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Fizikçilerin Notasyonu

$$xy' = \frac{dy}{dt} = \dot{y}(+)$$

$$x^2y'' = \ \ddot{y}(+) - \dot{y}(+)$$

::::::::

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = Q(x)\ alalım.$$

$$a_2[\ddot{y} - \dot{y}] + a_1\dot{y} + a_0y = Q(x)$$

$$a_2\ddot{y} + (a_2 - a_1)\dot{y} + a_0y = Q(e^t)$$

$$sabit\ katsayılı\ lineer\ denklem.$$

$$\boxed{ÖRNEK\ 2}\ x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$(\ddot{y}-\dot{y})-2\dot{y}+2y=0$$

$$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=0$$

$$r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1\,, \qquad r_2=2$$

$$r_1=1 \; için \;\; y_1=e^{1t}$$

$$r_2=2 \; için \; y_2=e^{2t}$$

$$y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}$$

$$y(x)=c_1x+c_2x^2$$

$\boxed{\text{ÖRNEK 3}}$ $x^2y''+3xy'+y=x\ln x$ *Euler diferansiyel denklemini* çözünüz.

$$1.\,Adım: x=e^t$$

$$(\ddot{y}-\dot{y})+3\dot{y}+y=e^tt \;\Longrightarrow\; \ddot{y}+2\dot{y}+y=te^t$$

$$2.\,Adım: y(t)=y_h(t)+y_ö(t)$$

$$y_h=?$$

$$r^2+2r+1=0$$

$$r_1=r_2=-1$$

$$\boxed{y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}}$$

$$y_ö(t)=? \;\; (Belirsiz\;Katsayıya\;göre\;yaparsak)$$

$$\boxed{y_ö(t)=(At+B)e^t}$$

$$y'=e^t\big(At+(A+B)\big)$$

$$y''=e^t[At+(2A+B)]$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = te^t$$

$$\underbrace{(A + 2A + A)}_{1} t + \underbrace{[(2A + B) + 2(A + B) + 2B]}_{0} = t$$

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = -\frac{1}{4}$$

$$y_{ö}(t) = \frac{1}{4}(t - 1)e^t$$

$$y_g = 4e^{-t} + 4te^{-t} + \frac{1}{4}(t - 1)e^t$$

$$\boxed{y_g(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln x - \frac{1}{4}(1 - \ln x)x}$$

$$Problem$$

$$1)\ x^2 y'' - 6xy + 6y = 7 + 6 \ln x + 12x^2$$

$$2)\ x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy = 2 \ln x$$

$$x^n y^{(n)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right) \dots \left(\frac{d}{dt} - (n - 1)\right)$$

$$x^3 y''' = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right) y$$

$$= \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right) y$$

$$= \left(\frac{d^3}{dt^3} - \frac{3d^2}{dt^2} + \frac{2d}{dt}\right) y$$

$$x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\ \ şeklinde\ çözüme\ gidilecektir.$$