Özet

İnt. çarpanı:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$M_y \neq N_x$ ise tam dif. olmaz

Tam yapacak bir çarpan bulabiliriz.
Bu çarpana integral çarpanı denir.

$$\alpha(u) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{U_x N - U_y . M} du}$$

Özel Durumlar

1) Sadece x'e bağlı (yani $u = x$)

$$\alpha(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

2) Sadece y'ye bağlı (yani $u = y$)

$U_x = 0$, $U_y = 1 \Rightarrow \alpha(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$

3) $U = xy$ (xy'e bağlı)

$U_x = y$, $U_y = x$

$$\alpha(xy) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM} d(x,y)}$$

4) $U = x+y$ (x+y'e bağlı)

$$\alpha(x+y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M} d(x+y)}$$

(11) $(x^2+y^2+x)dx + xy\,dy = 0$ varsa tam dif. yapan integral çarpanını bulunuz.

① $M_y = 2y$, $N_x = y$

② $\dfrac{M_y - N_x}{M} = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$

③ $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$

④ Denklemi "x" ile çarparsak tam diferansiyel olması gerekir

$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y\,dy = 0$

$M_y = 2xy$, $N_x = 2xy$

(11) $(x+1)dx + \left(y - \frac{x}{y}\right)dy = 0$ denkleminin $\alpha = \alpha(x^2+y^2)$ biçiminde bir int. çarpanı buldum. $(U = x^2+y^2)$

① $U_x = 2x$, $U_y = 2y$

② $\alpha(x^2+y^2) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{2xN - 2yM} d(x^2+y^2)}$

③ $\dfrac{M_y - N_x}{2xN - 2yM} = \dfrac{0 - \left(\frac{-1}{y}\right)}{2x\left(y - \frac{x}{y}\right) - 2y(x+1)}$

$= \dfrac{1/y}{-2\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)}$

$= \dfrac{-1}{2(x^2+y^2)}$

④ $e^{\int \frac{-1}{2(x^2+y^2)} d(x^2+y^2)} = e^{\frac{1}{2}\ln|u|}$

$= e^{\ln(x^2+y^2)^{-1/2}} = (x^2+y^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Barış Sevyerli

(1) $(4xy+3y^4)dx+(2x^2+5xy^3)dy=0$ denklemini $x^M y^N$ şeklinde int. çarpanını bulun veya varsa m ve n nedir? (x^M, x'e göre olur ($n=0$ için). y^N, y'ye göre olur ($M=0$ için)

(1) $M_y = 4x+12y^3$, $N_x = 4x+5y^3$, eşit değiller, int. çarpanı ile çarpılır.

(2) $x^m y^n(4xy+3y^4)dx + x^m y^n(2x^2+5xy^2)dy=0$

$(4x^{m+1}.y^{n+1}+3x^m.y^{n+4})dx + (2x^{m+2}.y^n+5x^{m+1}.y^{n+2})dy=0$

(3) $\bar{M}_y = \bar{N}_x$ olmalı;

$\bar{M}_y = (n+1)4x^{m+1}.y^n + (n+4)3x^m.y^{n+3}$

$\bar{N}_x = (m+2)2x^{m+1}.y^n + (m+1)5.x^m.y^{n+3}$

$4n+4 = 2m+4$

$2n = m$

$3n+12 = 5m+5$

$3n+12 = 10n+5$

$7n = 7$

$n=1 \Rightarrow m=2$

int. çarpanı x^2y imiş.

Not $\rightarrow$ $\alpha(x)$: x'e bağlı : x^n

$\alpha(y)$: y'e bağlı : y^n

$\alpha(x^2+y^2)$: x^2+y^2'ye bağlı : $(x^2+y^2)^n$

Problemler

① $(x-x^2y)dy+(y+xy^2)dx=0$, $\alpha=\alpha(xy)$, $(xy)^k$

② $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$, $\alpha=\alpha(y)$, $(y)^k$

③ $(2xy-y^2-y)dx+(2xy-x^2-x)dy=0$, $\alpha=\alpha(x+y)$, $(x+y)^k$

④ $(3x^4+y^2+4yx^2)dx+(2x^5y+3x^3)dy=0$, $\alpha=x^ay^b$ şeklinde ise a, b kaçtır?

NOT $Mdx+Ndy=0$ denklemini homojen denklem ise int. çarpanı, $\dfrac{1}{xM+Ny}$'dir.

integral Çarpanı Sonu...

Lineer Diferansiyel Denklem

1. mertebeden lin. dif. denklem

① $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ şeklinde yazılır.

$$\frac{dy}{dx}=Q(x)-P(x)y \iff \underbrace{\left[P(x)y-Q(x)\right]}_{M}dx+\underbrace{1}_{N}.dy=0$$

Serbest Düşme Hareketi

$u'+ku=g$ (lineer)

$T'+kT=T_d$

② denklemi (dolayısıyla ① denklemi) tam dif. değildir

$M_y=P(x)$, $N_x=0$

Bu durumda ② için int. çarpanı bulabiliriz.

1/4

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{P(x) - 0}{1} = P(x)$: x'e bağlı old. için int. çarpanı;

$e^{\int P(x)dx} = \alpha(x)$ olur. (1) denklemini $e^{\int P(x)dx}$ ile çarpalım

$\Rightarrow e^{\int P(x)dx} \cdot y' + e^{\int P(x).dx} \cdot P(x)\, y = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y.e^{\int P(x)dx}\right) = e^{\int P(x)dx} . Q(x)$ $\Rightarrow$ Her tarafın int. alsak;

$\Rightarrow e^{\int P(x)dx} . y = \int Q(x).e^{\int P(x)dx} + C \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x).e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$

genel çözümü elde edilir.

Özet (1) $\alpha(x) = e^{\int P(x)dx}$ int. çarpanı bul

(2) $y = \frac{1}{\alpha}\left[\int Q(x).\alpha.dx + C\right]$

(11) $(1+x)y' - 2y = (1+x)^4$ denklemini çözelim.

(1) Lineer denklemdir.

(2) $1+x$ ile böl.

(3) $y' - \frac{2}{1+x}y = (1+x)^3$

(4) $P(x) = \frac{-2}{1+x}$

(5) $\alpha = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{-2}{x+1}dx} = e^{-2\ln|x+1|} = e^{\ln(x+1)^{-2}} = \frac{1}{(x+1)^2}$

(6) $y = \frac{1}{\alpha}\left[\int Q(x).\alpha\, dx + C\right]$

$= (1+x)^2\left[\int \frac{1}{(1+x)^2}(x+1)^3 dx + C\right]$

$= (1+x)^2\left[\int (x+1)\, dx + C\right]$

$= (1+x)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + C\right]$

$= \frac{(x+1)^4}{2} + C(1+x)^2$

(11) $y' + \frac{1}{1+x^2} y = \frac{\arctan x}{1+x^2}$

(1) $P(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $Q(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}$

(2) $\alpha = e^{\int \frac{1}{1+x^2} dx} = e^{\arctan x}$

(3) $y = \frac{1}{e^{\arctan x}} \left[\int \frac{\arctan x}{1+x^2} . e^{\arctan x} dx + c \right]$

Emin

$y = \frac{1}{e^t} \left[\int e^t t \, dt + c \right]$

$= \frac{1}{e^t} \left[e^t + c \right]$

$= \frac{e^t}{e^t} + \frac{c}{e^t} = 1 + \frac{c}{e^{\arctan x}} = \arctan x - 1 + C . e^{-\arctan x}$

Değilim.

(11) not $y' + p(x) y = q(x)$

(1) lut çarpanı: $e^{\int p(x) dx} = \alpha(x)$

(2) Genel çözümü $y(x) = \frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{\alpha(x)} \left[\int \alpha(x) q(x) dx + C \right]$

(11) Dış ortamın sıcaklığı $T_d = 15°C$, Başlangıç sıcaklığı $T_0 = 10°C$, $k = 0{,}1$ olsun.

(1) $\frac{dT}{dt} = k(T_d - T) \iff \frac{dT}{dt} + kT = kT_d$ } Lineer denklem

(2) $p(t) = k$, $q(t) = kT_d$

(3) $\alpha(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int k dt} = e^{kt}$

(4) $T(t) = \frac{1}{e^{kt}} \left[\int e^{kt} . k \, T_d \, dt + c \right]$

$= \frac{1}{e^{kt}} . \left(\frac{e^{kt}}{kt} . kT_d + c \right)$

$= T_d + c . e^{-kt}$

(5) $T(0) = T_0 = T_d + c$ (6) $C = T_0 - T_d$

(7) $T(t) = T_d + (T_0 - T_d) e^{-kt}$

$t = 10$ sn sonra T ne olur?

$$T(10) = 15 + (10 - 15)\, e^{-0,1 \times 10}$$
$$= 15 - 5.e^{-1}$$
$$\cong 13.16\ ^\circ C$$

Not: Bazı denklemler lineer olmayıp, lineer hale getirebiliyor.

$f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} + p(x) f(y) = q(x)$ gibi olanlar.

$2yy' + xy^2 = x^3$ (Lineer değil.)

$u = f(y)$ dersek $u' = f'(y) \cdot y'$ olacağından

$u' + p(x) \cdot u = q(x)$ lineer denklem elde edilir.

Sınav Sorusu Çıkan Konular
- lineer denklem ✓
- Bernoulli dif. denklem
- Rivati dif denklem

Bernoulli dif. denklem

$$y' + p(x) y = q(x) \cdot y^{\alpha}$$

$\alpha = 0, \alpha = 1$ lineer denk. olur. Bu yüzden "0" ve "1" düşünmüyoruz.

$(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{R})$

Her tarafı y^{α} ile bölelim;

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{p(x) y}{y^{\alpha}} = q(x) \quad \vee \quad y^{-\alpha} \cdot y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$$

$u = y^{1-\alpha}$ diyelim;

$u' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} \cdot y' \Rightarrow y^{-\alpha} y' = \frac{1}{1-\alpha} u'$

$\frac{1}{1-\alpha} u' + P(x) u = q(x)$

her tarafı $(1-\alpha)$ ile çarparsak;

$u' + (1-\alpha) P(x) u = (1-\alpha) q(x)$

lineer denklem elde edilir.

(11) $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$, $\alpha = 3$, $P(x) = x$, $q(x) = x^3$

Bernoulli dif. denklemini çözelim.

1. y^3'e böl.

2. $\frac{y'}{y^3} + \frac{xy}{y^3} = x^3 \Leftrightarrow y^{-3} \overset{\text{türev}}{y'} + x \underbrace{y^{-2}}_{\text{Lineer'liği bozan}} = x^3$

3. $u = y^{-2} \Rightarrow u' = -2 y^{-3} y'$

4. $\frac{u'}{-2} + x u = x^3 \Rightarrow u' - 2x u = -2x^3$

5. integral çarpanı bul.

6. $e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$

7. $u = \frac{1}{e^{-x^2}} \left[\int e^{-x^2} (-2x^3)\, dx + c \right.$

8. $\int x^3 e^{x^2} dx \Rightarrow x^2 = t$ için; $2x\,dx = dt \Rightarrow \int \frac{t e^{-t}}{2} dt$

9. $u = t$, $dv = e^{-t} dt$

10. $u(x) = c \cdot e^{x^2} - (1 - x^2)$

11. $u = y^{-2} \rightarrow y = u^{-1/2}$

12. $\frac{1}{y^2} = c e^{x^2} - (1 - x^2) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{c e^{x^2} - (1 - x^2)}$ //

(11) $y(6y^2-x-1)\,dx + 2x\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1+x-6y^2)}{2x} = y\left(\frac{1+x}{2x}\right) - \frac{6}{2x}y^3$$

yani şöyle...

$$y' - \left(\frac{1+x}{2x}\right)y = \frac{-3}{x}\cdot y^2 \quad \alpha = 3$$ olan Bernoulli Denklemidir.

(11) $y' - \frac{y}{3x} = y^4 \ln x$ $\alpha = 4$ olan Bernoulli Denklemi

$\left(\boxed{1} \cdot u' - 2xu = -2x^3\right)$ → katsayısını 1 yapmak zorundayız.

(11) $xy' + y = y^2 \ln x$

Bernoulli Sonu

Riccati Dif. Denklem

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ şeklinde yazılır.

$R(x) = 0$ ise Bernoulli,

$P(x) = 0$ ise lineer denklem olur.

Bu denklemi çözmek için en az bir tane özel çözüm verilmeli.

Eğer $y_1 = y(x)$ (1)'in bir özel çözümü ise;

a) $y = y_1 \mp \frac{1}{u}$ dönüşümü ile (1); Lineer denklem "   ine

b) $y = y_1 \mp u$ "   " (1); Bernoulli "   döner.

$y = y_1 + \frac{1}{u}$ dönüşümü yapalım

(1) $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ türevini (1)'de yerine yazalım.

Arka Sayfa

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x)$$

$$\cancel{y_1'} - \frac{u'}{u^2} = \underbrace{\left[P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)\right]}_{\cancel{y_1'}} + \frac{2P(x)\,y_1}{u} + \frac{P(x)}{u^2} + \frac{Q(x)}{u}$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{2P(x)y_1}{u} + \frac{P(x)}{u^2} + \frac{Q(x)}{u}$$ denklemini "$-u^2$" ile çarpalım.

$$u' = -P(x) - u(2Py_1 + Q)$$

$$u' + (2P(x)y_1(x) + Q(x))u = -P(x)$$ Lineer hale gelmiş oldu.

(11) $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = -x^2$ ise genel çözümü bul.

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = -x^2 + \frac{1}{u}, \quad y' = -2x - \frac{u'}{u^2}$$

$$-2x - \frac{u'}{u^2} = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$-\cancel{2}x - \frac{u'}{u^2} = \cancel{x^3} - \cancel{2x} + \frac{2}{xu} - \cancel{x^3} + \frac{2x}{u} - \frac{1}{xu^2}$$

her tarafı $-u^2$ ile çarpalım;

$$u' = \frac{-2}{x}u - 2xu + \frac{1}{x}$$

$$u' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)u = \frac{1}{x}$$ lineer denklem.

İnt. çarpanı $e^{\int\left(\frac{2}{x} + 2x\right)dx} = e^{2\ln x} \cdot e^{x^2} = x^2 e^{x^2}$ (devamı bizde)

Cevap: $y = -x^2 + \dfrac{2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + c}$

⑪ $y' = 1 - y^2$, $y_1 = 1$ cevap; $y = \dfrac{ce^{2x} + 1}{ce^{2x} - 1}$

⑪ $y' = 2\tan x . \sec x - y^2 \sin x$, $y_1 = \sec x$ cevap; $y = \sec x + \dfrac{3\cos^2 x}{c - \cos^3 x}$