SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğr. ÜYESİ Abdullah SEVİN

SAYISAL ANALİZ

LİNEER DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMLERİ

(İTERATİF YÖNTEMLER)

İÇERİK

Doğrusal Denklem Takımlarının Çözümü

- **LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U**
- **Yinelemeli (İterasyon) Yöntemler**
  - **Jacobi yöntemi**
  - **Gauss-Siedel yöntemi**
  - **Aitken yöntemi**

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

- **A.X=B ve A=L.U => L.U.X=B şeklinde bir düzenleme ile…**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} \;,\; u_{12} = a_{12} \;,\; u_{13} = a_{13} \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \;, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\,.u_{12} \;,\; u_{23} = a_{23} - l_{21}\,.u_{13}$$

$$l_{32} = [a_{32} - l_{31}\,.u_{12}]/u_{22} \;,\; u_{33} = a_{33} - l_{31}\,.u_{13} - l_{32}\,.u_{23}$$

L ve **U** matrisleri elde edilmiş olur.

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

A.X=B sisteminde **A'** nın ayrıştırılması ile
L.U.X=B şeklini gelir. İfadeye
U.X =Z dönüşümü yapılarak
L.Z=B şeklinde yeni bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

buradan $z_1 = b_1$, $z_1 = b_2 - l_{21} . z_1$, $z_3 = b_3 - l_{31} . z_1 - l_{32} . z_2$

sonuçları elde edilir, bu değerleri ;

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

denkleminde yerine yazılarak ,

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{12} . x_2 - u_{13} . x_3}{u_{11}} = \frac{b_1 - u_{21} . x_2 - u_{13} . x_3}{u_{11}}$$

$$x_2 = \frac{z_2 - u_{32} . x_3}{u_{22}} = \frac{b_2 - l_{21} . z_1 - u_{23} . x_2}{u_{22}}$$

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{33}} = \frac{b_3 - l_{31} . z_1 - l_{32} . z_2}{u_{33}}$$

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

ÖRNEK

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$$
$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$
$$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 6$$

şeklinde verilen denklem sistemini LU yöntemi kullanarak çözünüz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Çözüm: Bu denklem sistemini çözmede öncelikle A katsayılar matrisi, X bilinmeyenler matrisi ve Y değerler matrisini oluştururuz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ; \; Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Burada A katsayılar matrisini A=L.U şeklinde ifade edecek olursak

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 1.5 & -0,2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1,6 \end{pmatrix}$$

Bir önceki örnekle katsayılar aynı alındığından L ve U'nun yandaki değerleri aldığını hesaplamıştık.

L ve U yukarıdaki gibi hesaplandıktan sonra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

$z_1 = y_1 = 4$;

$z_2 = y_2 - z_1.l_{2,1} = 6\text{-}4.(\text{-}0,5) = 8$ ve

$z_3 = y_3 - z_1.l_{3,1} - z_2.l_{3,2} = 6\text{-}4.(1,5)\text{-}8.(\text{-}0,2) = 1,6$

olmak üzere Z matrisi oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

eşitliğindende

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{3,3}} = \frac{y_3 - z_1.l_{3,1} - z_2.l_{3,2}}{u_{3,3}} = \frac{6 - 4.1,5 - 8}{1,6} = 1$$

$$x_2 = \frac{z_2 - u_{2,3}.x_3}{u_{2,2}} = \frac{y_2 - z_1.l_{2,1} - u_{2,3}.x_3}{u_{2,2}} = \frac{6 - 4.(-0,5) - 0,5.1}{2,5} = 3$$

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{1,2}.x_2 - u_{1,3}.x_3}{u_{1,1}} = \frac{y_1 - u_{1,2}.x_2 - u_{1,3}.x_3}{u_{1,1}} = \frac{4 - 1.3 - (-3).1}{2} = 2$$

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$

şeklinde denklem sistemi çözülmüş olunur.

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

Uygulama :

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

Çözümünü Ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

```
>> A=[4,1,1;2,-1,1;2,1,1]

        4     1     1
A =     2    -1     1
        2     1     1

>> B=[9,3,7]'

       9
B =    3
       7
>> [l,u]=lu(A)

      1.0000         0         0
l =   0.5000    1.0000         0
      0.5000   -0.3333    1.0000

      4.0000    1.0000    1.0000
u =        0   -1.5000    0.5000
           0         0    0.6667

>> z=inv(l)*B

       9.0000
z =   -1.5000
       2.0000
>> x=inv(u)*z

      1.0000
x =   2.0000
      3.0000
```

Doğrusal Denklem Sistemleri

Bir Bilinmeyenli Bir Denklem

Klasik Form

$$a_{11}x_1 = b_1$$

Matris Form

$$[a_{11}][x_1] = [b_1] \rightarrow \underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

İki Bilinmeyenli İki Denklemli Sistem

Klasik Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Matris Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

m Bilinmeyenli n Denklemli Sistem

Klasik Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n$$

Matris Form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$$

Not: Birinci dereceden bilinmeyen ve sabit sayılar içeren denklem sistemleri lineer denklem sistemlerdir.

YİNELEMELİ YÖNTEMLER

- Büyük katsayılar matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümü çoğu zaman verimli olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir.

- İteratif ve yaklaşık çözümler daha önce anlatılan yerine koyma yöntemlerine alternatif oluştururlar.

- Örnek yinelemeli (iteratif) yöntemler
  - Jacobi Yöntemi
  - Gauss-Siedel Yöntemi

JACOBI YÖNTEMİ

- Toplam adımlarla yineleme yöntemi olarak ta bilinir.
- Örneğin iki bilinmeyenli bir denklem ele alalım.
  - $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 = c_1$
  - $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = c_2$
- Denklemler tekrar düzenlenirse (bilinmeyenler yalnız bırakılırsa)
  - $x_1 = (c_1 - a_{12}\, x_2)/ a_{11} = f(x_1,x_2)$
  - $x_2 = (c_2 - a_{21}\, x_1)/ a_{22} = g(x_1,x_2)$
- Jacobi iterasyonu bilinmeyenler için bir tahmin ile başlar.
  - Çözüm için bir başlangıç x_1 ve x_2 değerleri seçilir. (yani x_0 vektörü)
    - Örneğin; $X_1=Ax_o + C$ ve sırasıyla $X_2=Ax_1 + C$
    - genellersek, $X_k=Ax_{k-1} + C$ ve X_k bilinmeyen vektör elemanları
    - $$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i\,, \qquad i = 1 : n$$
- Durdurma kriteri olarak ya iterasyon sayısı ya da hata sınırlaması kullanılır

$$\max_{i \le i \ge n} \frac{\left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|}{x_i^k}$$

JACOBI YÖNTEMİ

Örnek: jacobi iterasyon metodu kullanarak aşağıdaki lineer denklem sistemini çözünüz

$$
\begin{aligned}
10x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 23 \\
2x_1 - 10x_2 + 3x_3 &= -9 \\
-x_1 - x_2 + 5x_3 &= 12
\end{aligned}
$$

Çözüm Yolu: yeniden düzenleme

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (23 - 2x_2 - 3x_3)/10 \\
x_2 &= (-9 - 2x_1 - 3x_3)/(-10) \\
x_3 &= (12 + x_1 + x_2)/5
\end{aligned}
$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ve $x_3 = 0$. keyfi tahminlerle başlıyoruz ve iterasyon aşağıdaki sonuçları verir.

ITER	X_1	X_2	X_3	Hata normu, $E = \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^{new} - x_i^{old} \right\|$
0	0	0	0	---
1	2.300000	0.900000	2.400000	5.600000
2	1.400000	2.080000	3.040000	2.720000
3	0.972000	2.092000	3.096000	4.960001E-01
4	0.952800	2.023200	3.012800	1.712000E-01
5	0.991520	1.994400	2.995200	8.512014E-02
6	1.002560	1.996864	2.997184	1.548803E-02
7	1.001472	1.999667	2.999885	6.592035E-03
8	1.000101	2.000260	3.000228	2.306700E-03
9	0.9998797	2.000089	3.000072	5.483031E-04
10	0.9999606	1.999998	2.999994	2.506971E-04

JACOBI YÖNTEMi

Örnek:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x = ?$$

- Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir.
- Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini JACOBI iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3) \quad , \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4) \quad , \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4) \quad , \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|\, x_i^k - x_i^{k-1} \,| \le \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

JACOBI YÖNTEMi

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.5000	0	0.2500
2	0.1250	0.3750	-0.1250	0.1250
3	0.1875	0.4375	-0.0625	0.1875
4	0.1563	0.4063	-0.0938	0.1563
5	0.1719	0.4219	-0.0782	0.1719
6	0.1641	0.4141	-0.0860	0.1641
7	0.1680	0.4180	-0.0821	0.1680
8	0.1660	0.4160	-0.0840	0.1660
9	0.1670	0.4170	-0.0830	0.1670
10	0.1665	0.4165	-0.0835	0.1665
11	0.1668	0.4168	-0.0833	0.1667
12	0.1666	0.4166	-0.0834	0.1666
13	0.1667	0.4167	-0.0833	0.1667

Başlangıç değerleri

$Max|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_4^2 - x_4^1| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1875 - 0.1250| = 0.0625 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1660 - 0.1680| = 0.0020 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1668 - 0.1665| = 0.0003 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyon durduruldu**

13. iterasyon sonunda bulunan çözüm

İterasyon no

Çözüm: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0833 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ

- En çok kullanılan iteratif yöntemdir.
- Değişkenlerin yeni değerleri, tüm değişkenler için bir iterasyonun tamamlanması beklenmeden, sonraki hesaplamalarda kullanılır.
- 3'e 3'lük bir denklem sistemi üzerinde Gauss-Siedel yönteminin çalışması.

Başlangıç koşulları: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}\overset{0}{x_2}-a_{13}\overset{0}{x_3}}{a_{11}}$$

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}x_1-a_{23}\overset{0}{x_3}}{a_{22}}$$

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2}{a_{33}}$$

- n değişken için Gauss-Siedel formülü;

$$\boxed{x_i^{k+1}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k}}$$

- Yakınsama koşulu $\left|a_{ii}\right|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|$

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ

- **Örnek:** Aşağıdaki denklemi Gauss-Siedel yöntemini kullanarak 2 iterasyon için çözünüz?.

$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$

$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$

$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$

↓

❶ **Bilinmeyen x değerlerini diğerleri cinsinden bul**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

❷ **İterasyon 0 için $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,**

❸ **İterasyon 1**

- **x_1 hesabı için, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$,**

$$x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

- **x_2 hesabı için, $x_1 = 2.616667$, $x_3 = 0$,**

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

- **x_3 hesabı için, $x_1 = 2.616667$, $x_2 = -2.794524$,**

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.616667) + 0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMi

❹ İterasyon 2

- x_1 hesabı için, x_2 = -2.794524, x_3 = 7.005610,

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$

- x_2 hesabı için, x_1 = 2.990557, x_3 = 7.005610

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$

- x_3 hesabı için, x_1 = 2.990557, x_2 = -2.499625,

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

Hatayı tahmin etmek için bilinmeyenlerin bağıl yaklaşım yüzde hatalarına bakılır. Örneğin x_1 için:

$|\in_{a,1}| = \left|\frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557}\right| \%100 = \%12.5$ 'tir. x_2 ve x_3 için hata tahminleri

$$|\in_{a,2}| = \left|\frac{-2.499625 - 2.794524}{-2.499625}\right| \%100 = \%11.8$$

$$|\in_{a,3}| = \left|\frac{7.000291 - 7.005610}{7.000291}\right| \%100 = \%0.076$$

Bu şekilde tüm hatalar belirlenen bir tolerans sınırı altına düşene kadar iterasyona devam edilir.

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ

Örnek:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\quad \mathrm{x} = ?$$

- Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir.
- Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini GAUSS-SEIDELiterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3) \;,\quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4) \;,\quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4) \;,\quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|\,x_i^k - x_i^{k-1}\,| \le \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için x $=x^{(0)}=[0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ

k	X_1	X_2	X_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.4375	-0.0625	0.1563
2	0.1563	0.4219	-0.0782	0.1641
3	0.1641	0.4180	-0.0821	0.1660
4	0.1660	0.4170	-0.0830	0.1665
5	0.1665	0.4168	-0.0833	0.1666
6	0.1666	0.4167	-0.0833	0.1667
7	0.1667	0.4167	-0.0834	0.1667

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_1^2 - x_1^2| = |0.1563 - 0.2500| = 0.0937 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1641 - 0.1563| = 0.0078 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

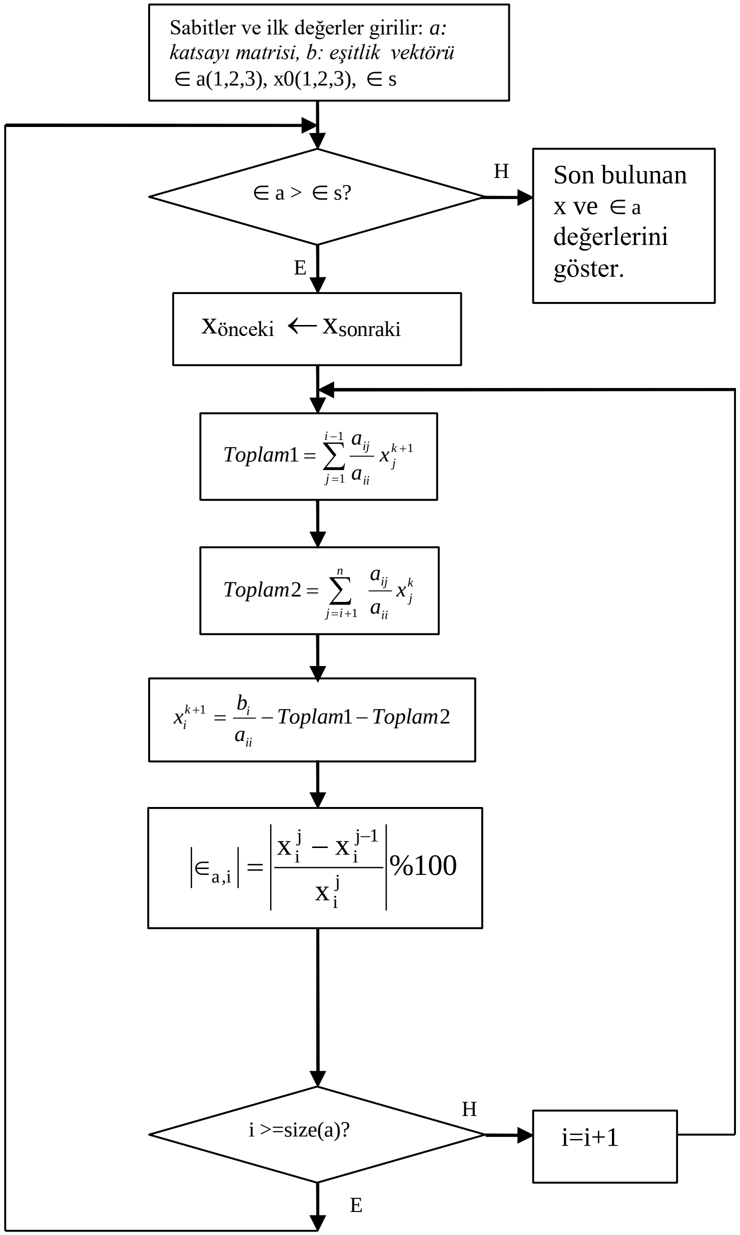
$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyonu durdur!**

İterasyon adımları

7. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0834 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ MATLAB UYGULAMASI




```
a=[3 -0.1 -0.2
   0.1 7 -0.3
   0.3 0.2 10];
b=[7.85
   -19.3
   71.4];
for i=1:size(a,1)
    ea(i)=0.9;
    xson(i)=0;
end
 es=0.8;

while max(ea)>es
    xonceki=xson;
for i=1:size(a,1)
    Toplam1=0; Toplam2=0;
    for j=1:i-1
        Toplam1=Toplam1+a(i,j)/a(i,i)*xson(j);
    end
    for j=i+1:size(a,1)
        Toplam2=Toplam2+a(i,j)/a(i,i)*xonceki(j);
    end
    xson(i)=b(i)/a(i,i)-Toplam1-Toplam2;
    ea(i)=abs((xson(i)-xonceki(i))/xson(i))*100;
end

end
xson
ea
```

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

GAUSS-SİEDEL YÖNTEMİ MATLAB UYGULAMASI

```
A=[9 1 4 -1 2 0; 1 7 1 2 0 -2;
 4 1 8 1 0 -1; -3 0 1 9 0 4;
 1 1 2 0 6 -1; 2 -2 0 1 1 7];
b=[-1; 6; 3; 4; 0; -2];
x=[0;0;0;0;0;0];
x_1=[0;0;0;0;0;0];
eps=0.01;n=0;Nmax=100;
while n<Nmax
   for i=1:length(A)
      for j=1:length(A)
         if j<i
            x(i)=x(i)+(-1*A(i,j)*x(j));
         elseif i==j
            bol=A(i,j);
         else
            x(i)=x(i)+(-1*A(i,j)*x_1(j));
         end
      end
      x(i)=(x(i)+b(i))/bol;
   end
   if max(100*abs(x-x_1)./x)<eps
      sonuc=x
      n
      n=Nmax;
   end
   x_1=x;
   x(:)=0;
   n=n+1;
end
```

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k}$$

Yandaki MATLAB Programını Jacobi Yöntemini gerçekleştirecek şekilde değiştiriniz.

Hatırlatma

$$x_i^{k} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k-1}$$

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.

JACOBI İLE GAUSS-SEIDEL YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Birinci iterasyon

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

İkinci iterasyon

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

(a)
Gauss-Siedel

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

(b)
Jacobi

- Her x değeri bulundukça bir sonraki x değerini belirleyen denklemde hemen hesaplanır.
- Eğer çözüm yakınsıyorsa her zaman en iyi tahminler kullanılmış olur.

- Her iterasyonda hesaplanan tüm x değerleri bir sonraki x değerleri bulunurken toplu olarak yerine koyulur.

Aitken İterasyon yöntemi

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi, iterasyon gerçek çözüme oldukça yavaş yakınsamaktadır. JACOBI ve GAUSS-SEIDEL iterasyonları doğrusal yaklaşım sergilerler. Doğrusal yaklaşımlı iterasyon metotlarında AITKEN yöntemi kullanılarak iterasyon hızlandırılabilir. Herhangi bir xi bilinmeyenin birbirini izleyen üç İterasyon adımı sonunda bulunan

$$x_i^{k-2}, x_i^{k-1}, x_i^{k}$$

değerleri kullanılarak x_i^k nın değeri iyileştirilebilir. AITKEN'e göre x_i^k nın iyileştirilmiş değeri

$$x_i^k = x_i^k - \frac{(x_i^k - x_i^{k-1})^2}{x_i^k - 2x_i^{k-1} + x_i^{k-2}}$$

Formülü kullanarak aşağıdaki örneği JACOBI metodu ile çözümleyelim

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = ?$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_2 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

Aitken İterasyon yöntemi

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.5000	0	0.2500
2	0.1250	0.3750	-0.1250	0.1250
3	0.1875 **(0.1667)**	0.4375 **(0.4167)**	-0.0625 **(-0.0833)**	0.1875 **(0.1667)**
4	0.1563 **(0.1667)**	0.4063 **(0.4167)**	-0.0938 **(-0.0834)**	0.1563 **(0.1667)**

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$

olduğundan **iterasyona devam!**

Aitken

$$0.1875 - \frac{(0.1875-0.1250)^2}{0.1875 - 2\cdot 0.1250 + 0.2500} = 0.1667$$

$|-0.0834 - (-0.0833| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$

iterasyonu durdur!

İterasyon adımları

4. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Parantez içinde koyu yazılmış değerler AITKEN formülü ile iyileştirilmiş değerlerdir.

Görüldüğü gibi yakınsama hızlanmış, 13 iterasyon yerine sadece 4 iterasyon yeterli olmuştur.

AITKEN yöntemi, formülün yapısı gereği, en erken 3. adım sonunda uygulanabilir. Ancak, ilk adımlarda değerler çok kaba olduğundan, büyük denklem sistemlerinde 5.-10. adımdan sonra uygulanması daha uygun olur.

(İterasyonun son adımlarında da yarar sağlamaz, çünkü sadece son hanelerde çok küçük değişiklikler olmaktadır.

$$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \le 10 \cdot \varepsilon$$

olduğunda AITKEN yönteminin kullanılmaması uygun olur.)

GAUSS ELEME YÖNTEMİ

- **Örnek:** Aşağıda verilen doğrusal denklem takımındaki bilinmeyen değerleri için;
  - ❶ Gauss Eleme yönteminin $[\mathrm{R} \;\vdots\; \mathrm{E}]$ formunu kullanarak tam değerlerini bulunuz.
  - ❷ Gauss Siedel Yöntemini kullanarak 3 iterasyon için çözünüz. Başlangıç değerlerini 0 alınız. 3. iterasyon sonunda yaklaşık bağıl hatalarını hesaplayınız. Her iterasyonda bulduğunuz sonucun, tam değerlere yaklaşıp yaklaşmadığını gözlemleyiniz.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2X_1 & - & X_2 & + & X_3 & = & 2 \\
X_1 & - & 2X_2 & + & X_3 & = & -1 \\
X_1 & - & X_2 & + & X_3 & = & 0
\end{array}
$$

Çalışma Sorusu

- Aşağıdaki doğrusal denklem sistemini **Gauss Seidel ve Jacobi yöntemlerini** kullanarak 5 iterasyon için ayrı ayrı hem el ile hem de MATLAB ile çözünüz? Not: Her iterasyon için hata hesaplamalarını da yapınız.

$$2X_1 - 3X_2 + X_3 = -5.4$$

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 6.7$$

$$X_1 + 4X_2 - 5X_3 = 3.2$$

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Ahmet TOPÇU, "*Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz*", OGÜ.**
- **Yüksel YURTAY, *Sayısal Analiz Ders Notları*, Sakarya Üniversitesi**
- **Prof.Dr. Asaf VAROL, "*Sayısal Analiz Ders Notları*", Fırat Üniversitesi**
- **Fahri VATANSEVER, "*İleri Programlama Uygulamaları*",Seçkin Yayıncılık**