উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায়-১: ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

প্রশ্ন ▶ ১ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ *[ঢা. বো. ১৭]*

ক. $A \times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর। ২

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. $A \times B = C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+20+8 \\ 8+0+12 \\ 4+15+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$\therefore A \times C$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3×1 **(Ans.)**

খ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(0-9) - 4(8-6) + 2(12-0)$

$= -9 - 8 + 24 = 7 \neq 0$

$\therefore A$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 = -16$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$

$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -9 & -2 & 12 \\ -2 & -2 & 5 \\ 12 & 5 & -16 \end{bmatrix}^t$

$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -9 & -2 & 12 \\ -2 & -2 & 5 \\ 12 & 5 & -16 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A \times B = C$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x+4y+2z \\ 4x \quad +3z \\ 2x+3y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$x + 4y + 2z = 2$

$4x + 3z = 5$

$2x + 3y + 2z = 4$

$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(0-9) - 4(8-6) + 2(12-0)$

$= -9 - 8 + 24 = 7 \neq 0$

$\therefore D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(0-9) - 4(10-12) + 2(15-0)$

$= -18 + 8 + 30 = 20$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(10-12) - 2(8-6) + 2(16-10)$

$= -2 - 4 + 12 = 6$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1(0-15) - 4(16-10) + 2(12-0)$

$= -15 - 24 + 24 = -15$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{7}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{7}, z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = \left(\frac{20}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-15}{7}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২ $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *[দি. বো. ১৭]*

ক. $\begin{bmatrix} 2 & -x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর। ২

খ. $M^2 - 3M + MI$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স। ৪

গ. M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 2 & -x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$y - 1 = 4$
$\therefore y = 5$

$-x = 3 + y$
বা, $-x = 3 + 5$
$\therefore x = -8$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $(x, y) = (-8, 5)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 2-6+1 & 1-2+0 \\ 3-9-2 & 6+9-1 & 3+3-0 \\ 2+3+0 & 4-3+0 & 2-1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 14 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

প্রদত্ত রাশি $= M^2 - 3M + MI$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 14 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 14 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-3+1 & -3-6+2 & -1-3+1 \\ -8-9+3 & 14+9-3 & 6+3-1 \\ 5-6+2 & 1-3+1 & 1-0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 \\ -14 & 20 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1(-0+1) - 2(0+2) + 1(3+6)$
$= 1 - 4 + 9 = 6 \neq 0$

$\therefore M^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -0 + 1 = 1$

$M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$

$M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9$

$M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$

$M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

$M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$

$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$

$M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-3) = 4$

$M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9$

$$\therefore M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{adj } M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}'$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 9 & 3 & -9 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৩ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$,

$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ /কু. বো. ১৭/

ক. x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর। ৪

গ. D^{-1} নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী।

সুতরাং $\begin{vmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$

বা, $3x^2 - 10x = 0$

বা, $x(3x - 10) = 0$

$\therefore x = 0, \frac{10}{3}$ **(Ans.)**

খ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1-6-15 & 2+14-0 \\ 2-3+0 & -4+7+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = C.C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25+1 & 5-3 \\ 5-3 & 1+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= AB - C^2 + 2I_2$

$$= \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -22-26+2 & 16-2+0 \\ -1-2+0 & 3-10+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(-6-4) - 1(0-2) + (-1)(0+2)$
$= -10 + 2 - 2 = -10 \neq 0$

$\therefore D^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$

$D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3+2) = -5$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+1 = 4$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2 = 0$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2+0) = -2$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2-0 = -2$$

$$\therefore D^{-1} = \frac{1}{|D|}\text{adj } D$$

$$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -10 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{-1}{10}\begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৪ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = A^t$, $f(x) = x^2 - 4x$. [চ. বো. ১৭]

ক. $g(x) = \frac{1}{2x-3}$ ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(B)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $y = g(x) = \frac{1}{2x-3}$

বা, $2xy - 3y = 1$

বা, $2xy = 1 + 3y$

$\therefore x = \frac{1+3y}{2y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \neq 0$ হয়।

$\therefore$ g(x) ফাংশনটির রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{0\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore f(B) = B^2 - 4B$

$$\therefore B = A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3+1 & 2+2+2 & 2+2+0 \\ 6+6+2 & 3+4+4 & 3+4+0 \\ 2+6+0 & 1+4+0 & 1+4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 14 & 11 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore f(B) = B^2 - 4B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 14 & 11 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 12 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ ['খ' হতে প্রাপ্ত]

$= 2(0-4) - 1(0-2) + 1(6-2)$

$= -8 + 2 + 4 = -2 \neq 0$

$\therefore B^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-2 = 4$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 = -1$$

$$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2 = 0$$

$$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}B = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = \frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$. [সি. বো. ১৭]

ক. বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0$. ২

খ. $A = B + C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x & -a & x+a-a \\ y & -b & y+b-b \\ z & -c & z+c-c \end{vmatrix}$ $[c'_3 = c_3 + c_2]$

$= \begin{vmatrix} x & -a & x \\ y & -b & y \\ z & -c & z \end{vmatrix} = 0$

[যদি কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়।]

$\therefore \begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0$ (প্রমাণিত)

খ $A = B + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= -1(5+0) - 2(10-0) + (-3)(-4-4)$

$= -5 - 20 + 24 = -1 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5+0 = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(10-0) = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4-4 = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(10-6) = -4$$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(2-8) = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-0+6) = -6$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^t$

$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প অনুসারে, $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = 1$

$\therefore 2x + 3y - 5z = 7$ .... (i)

$\frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = 1$

$\therefore x - 4y + z = 4$ .... (ii)

$\frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1$

$\therefore 3x - y - 2z = 5$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং হতে x, y ও z এর সহগগুচ্ছ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক,

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 2(8+1) - 3(-2-3) + (-5)(-1+12)$

$= 18 + 15 - 55 = -22 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 4 & -4 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 7(8+1) - 3(-8-5) + (-5)(-4+20)$

$= 63 + 39 - 80 = 22$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 2(-8-5) - 7(-2-3) + (-5)(5-12)$

$= -26 + 35 + 35 = 44$

$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(-20+4) - 3(5-12) + 7(-1+12)$

$= -32 + 21 + 77 = 66$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{-22} = -1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{44}{-22} = -2$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{66}{-22} = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (-1, -2, -3)$ । **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $x + y + z = 1$ .... (i) /য. বো. '১৭/

$lx + my + nz = k$ .... (ii)

$l^2x + m^2y + n^2z = k^2$ .... (iii)

ক. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$ হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স। ২

খ. সমীকরণগুলোকে AX = B আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\det(A) = (l-m)(m-n)(n-l)$. ৪

গ. x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1, m = 2, n = -1$. ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

বা, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore F = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ $x + y + z = 1$

$lx + my + nz = k$

$l^2x + m^2y + n^2z = k^2$

ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$

$\therefore AX = B$

যেখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$

$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l-m & m-n & n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 & n^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} l-m & m-n \\ l^2-m^2 & m^2-n^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} l-m & m-n \\ (l+m)(l-m) & (m-n)(m+n) \end{vmatrix}$

$= (l-m)(m-n)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l+m & m+n \end{vmatrix}$

$= (l-m)(m-n)(m+n-l-m)$

$\therefore \det(A) = (l-m)(m-n)(n-l)$ **(দেখানো হলো)**

গ (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে x, y ও z এর সহগ নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1^2 & 2^2 & (-1)^2 \end{bmatrix}$ $[\because l = 1, m = 2, n = -1]$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(2+4) - 1(1+1) + 1(4-2)$

$= 6 - 2 + 2 = 6 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1) = 0$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{t}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৭ $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *[ব. বো. ১৭]*

ক. p এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে? ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ । ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে $AX = B$ হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে x, y নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $A = \begin{bmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে যদি $|A| = 0$ হয়।

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} p-2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

বা, $5p - 10 - 12 = 0$

বা, $5p - 22 = 0$

বা, $5p = 22$

$\therefore$ $p = \frac{22}{5}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+6 & 8+10 \\ 12+15 & 6+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 27 & 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-20+6 & 18-10+0 \\ 27-15+0 & 31-25+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 12 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ প্রশ্নমতে, $AX = B$

বা, $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ 3x+5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে পাই, $4x + 2y = 6$
$3x + 5y = 1$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14$

$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 2 = 28$

$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 18 = -14$

$\therefore$ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{14} = 2$ এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{14} = -1$

$\therefore$ $x = 2$ এবং $y = -1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ময়মনসিংহ]

ক. |A| এর (1, 2) তম অনুরাশি নির্ণয় কর। ২

খ. $(AB)^{-1}$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $AC = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ হলে, x, y ও z এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক |A| এর (1, 2) তম অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3-(-2)$
$= -3 + 2 = -1$ **(Ans.)**

খ ধরি, $F = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+2+3 & 3-2+2 & 4+4+1 \\ 6-3-3 & 9+3-2 & 12-6-1 \\ 4+1-3 & 6-1-2 & 8+2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |F| = |AB| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 7(90-15) - 3(0-10) + 9(0-20)$$
$$= 375 \neq 0$$

$\therefore$ F^{-1} অর্থাৎ $(AB)^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$F_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 90 - 15 = 75$

$F_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -(0-10) = 10$

$F_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$

$F_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(27-27) = 0$

$F_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 63 - 18 = 45$

$F_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(21-6) = -15$

$F_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 90 = -75$

$F_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(35-0) = -35$

$F_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 70 - 0 = 70$

$$\therefore (AB)^{-1} = F^{-1} = \frac{1}{|F|}\text{adj}F = \frac{1}{375}\begin{bmatrix} 75 & 10 & -20 \\ 0 & 45 & -15 \\ -75 & -35 & 70 \end{bmatrix}^{t}$$

$$= \frac{1}{375}\begin{bmatrix} 75 & 0 & -75 \\ 10 & 45 & -35 \\ -20 & -15 & 70 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{75} & \frac{3}{25} & \frac{-7}{75} \\ \frac{-4}{75} & \frac{-1}{25} & \frac{14}{75} \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ প্রশ্নমতে, $AC = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x+2y+z \\ 3x-3y-z \\ 2x+y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $x + 2y + z = 1$

$$3x - 3y - z = 3$$
$$2x + y - z = 2$$

x, y ও z এর সহগগুচ্ছ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক D হলে,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(3+1) - 2(-3+2) + 1(3+6)$$
$$= 4 + 2 + 9 = 15 \neq 0$$

$$\therefore \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = D = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ [∵ কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি (বা কলাম) একই হলে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়]

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{15} = 1 \textbf{ (Ans.)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{15} = 0 \textbf{ (Ans.)}$$

এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{15} = 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯. 3 × 3 মাত্রার একটি বর্গাকার ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. $|A^T|$ নির্ণয় কর। ২

খ. $A^3 + 3A^2 + 2I$ নির্ণয় কর, যেখানে I একটি একক ম্যাট্রিক্স। ৪

গ. ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর : $A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [5 \quad 7 \quad 11]^T$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-9) - 3(2+3) + 2(6-1)$$
$$= -10 - 15 + 10 = -15 \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1+6-2 & 2-2-3 & -1+6-1 \\ 3-3+6 & 6+1+9 & -3-3+3 \\ 2+9+2 & 4-3+3 & -2+9+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 6 & 16 & -3 \\ 13 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 6 & 16 & -3 \\ 13 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5+12-13 & -3+32-4 & 4-6-8 \\ 15-6+39 & -9-16+12 & 12+3+24 \\ 10+18+13 & -6+48+4 & 8-9+8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 25 & -10 \\ 48 & -13 & 39 \\ 41 & 46 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3 + 3A^2 + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 25 & -10 \\ 48 & -13 & 39 \\ 41 & 46 & 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 6 & 16 & -3 \\ 13 & 4 & 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 25 & -10 \\ 48 & -13 & 39 \\ 41 & 46 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & -9 & 12 \\ 18 & 48 & -9 \\ 39 & 12 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 21 & 16 & 2 \\ 66 & 37 & 30 \\ 80 & 58 & 33 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $A \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [5 \quad 7 \quad 11]^T$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x+2y-z \\ 3x-y+3z \\ 2x+3y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্স সমতার নিয়ম অনুযায়ী, $x + 2y - z = 5$

$$3x - y + 3z = 7$$
$$2x + 3y + z = 11$$

এখন, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-9) - 2(3-6) - 1(9+2)$

$$= -10 + 6 - 11 = -15 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1-9) - 2(7-33) - 1(21+11)$$
$$= -50 + 52 - 32 = -30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1(7-33) - 5(3-6) - 1(33-14)$$
$$= -26 + 15 - 19 = -30$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1(-11-21) - 2(33-14) + 5(9+2)$$
$$= -32 - 38 + 55 = -15$$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-30}{-15} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-30}{-15} = 2$ এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-15}{-15} = 1$

∴ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১০ $A = \begin{bmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{bmatrix}$

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স কী? উদাহরণ দাও। ২

খ. দেখাও যে, $|A| = (x + y + z)^3$. ৪

গ. $x = 2, y = 2$ এবং $z = -1$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (Involutory Matrix):** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

উদাহরণ: $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, এখানে $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

সুতরাং B একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।

খ বামপক্ষ $= |A| = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -x-y-z & 2x & 2x \\ x+y+z & y-z-x & 2y \\ 0 & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \quad [\because c_1' = c_1 - c_2]$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} -1 & 2x & 2x \\ 1 & y-z-x & 2y \\ 0 & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} -1 & 2x & 2x \\ 1 & y-z-x & 2y \\ 0 & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} -1 & 2x & 2x \\ 0 & y-z+x & 2(x+y) \\ 0 & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \quad [\because z_2' = z_2 + z_1]$$

$= (x+y+z)(-1)\{(y-z+x)(z-x-y)-2z.2(x+y)\}$
$= -(x+y+z)(yz-xy-y^2-z^2+zx+yz+zx-x^2-xy-4zx-4yz)$
$= -(x+y+z)(-x^2-y^2-z^2-2xy-2yz-2zx)$
$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$
$= (x+y+z)(x+y+z)^2$
$= (x+y+z)^3 =$ ডানপক্ষ
$\therefore |A| = (x+y+z)^3$ **(দেখানো হলো)**

গ $x = 2, y = 2$ এবং $z = -1$ হলে,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1(-5+8) - 4(-20+8) + 4(-8+2)$
$= 3 + 48 - 24 = 27 \neq 0$
$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = (-5+8) = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(-20+8) = 12$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-8+2) = -6$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(-20+8) = 12$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (-5+8) = 3$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+8) = -6$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (16-4) = 12$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(4-16) = 12$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (1-16) = -15$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & 12 & -6 \\ 12 & 3 & -6 \\ 12 & 12 & -15 \end{bmatrix}^t$$
$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & 12 & 12 \\ 12 & 3 & 12 \\ -6 & -6 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶১১ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. AB এবং AC নির্ণয় কর। ২
খ. দেখাও যে, $AB + AC = A(B + C)$ ৪
গ. প্রমাণ কর যে,
$$\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0+2+0 & 2+4-3 \\ 0+5+0 & 8+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

এবং $$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+0+9 & 2+8+18 \\ -4+0+18 & 8+20+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

খ এখানে, $$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0-1 & 2+2 \\ 1+0 & 2+4 \\ 0+3 & -1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

এখন, $AB + AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 14 & 64 \end{bmatrix}$ ['ক' হতে প্রাপ্ত মান]
$$= \begin{bmatrix} 2+8 & 3+28 \\ 5+14 & 12+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \\ 19 & 76 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+2+9 & 4+12+15 \\ -4+5+18 & 16+30+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \\ 19 & 76 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $AB + AC = A(B+C)$ **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, $$\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ ax+by & bx+cy & -(ax^2+2bx+cy^2) \end{vmatrix}$$ $[\because c_3' = c_3 - (c_1x + c_2y)]$

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ [৩য় কলামের সাপেক্ষে বিস্তার করে]
$= -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$
$= (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶১২ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

ক. $7I - 4A$ নির্ণয় কর। ২
খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪
গ. প্রমাণ কর যে, $B = (1+a^2+b^2)^3$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\therefore 7I - 4A = 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -4 & 8 \\ -20 & 12 & 4 \\ -4 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7-12 & 0+4 & 0-8 \\ 0+20 & 7-12 & 0-4 \\ 0+4 & 0+8 & 7+16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & -8 \\ 20 & -5 & -4 \\ 4 & 8 & 23 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

খ $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 3(-12+2) + 1(20+1) + 2(10+3)$$
$= -30 + 21 + 26$
$= 17 \neq 0$
$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -(20 + 1) = -21$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -(4 + 4) = -8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 1) = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 10) = -13$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4$$

$$\therefore \quad IA^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj}(A)$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -10 & -21 & 13 \\ -8 & -10 & 7 \\ -7 & -13 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -10 & -8 & -7 \\ -21 & -10 & -13 \\ 13 & 7 & 4 \end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $B = \begin{vmatrix} 1 + a^2 - b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1 - a^2 + b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1 - a^2 - b^2 \end{vmatrix}$

$$= (1 + a^2 + b^2)\begin{vmatrix} 1 & 2ab & -2b \\ 0 & 1 - a^2 + b^2 & 2a \\ b & -2a & 1 - a^2 - b^2 \end{vmatrix}$$

[$c'_1 = c_1 - b \times c_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (1 + a^2 + b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 + a^2 + b^2 & 2a \\ b & -a(1 + a^2 + b^2) & 1 + a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

[$c'_2 = c_2 + ac_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (1 + a^2 + b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1 + a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

[প্রথম সারি সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= (1 + a^2 + b^2)^2\,[1\{1 - a^2 - b^2 - a(-2a)\} - 0 - 2b\{0 - b\}]$$
$$= (1 + a^2 + b^2)^2\{1 - a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2\}$$
$$= (1 + a^2 + b^2)^2\,(1 + a^2 + b^2) = (1 + a^2 + b^2)^3$$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$

$D = [1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 6]$ এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2I$

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. যদি $\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে (x, y) নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপক অনুসারে প্রমাণ কর যে, $(BC)D = B(CD)$ ৪

গ. $f(A)$ নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $2x + 3y = 5$

বা, $3y = 5 - 2x$

$\therefore \quad y = \frac{5 - 2x}{3}$ ……… (i)

এবং $x - 2y = 2$

বা, $x - 2 \times \frac{5 - 2x}{3} = 2$ [(i) নং এর মান বসিয়ে]

বা, $3x - 10 + 4x = 6$

বা, $7x = 16$

$\therefore \quad x = \frac{16}{7}$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$y = \frac{5 - 2.\frac{16}{7}}{3} = \frac{5 - \frac{32}{7}}{3} = \frac{35 - 32}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

$\therefore \quad (x, y) = \left(\frac{16}{7}, \frac{1}{7}\right)$ **(Ans.)**

খ এখানে, $BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 6 + 3 \times (-1) \\ 4 \times 4 + 5 \times 6 + 6 \times (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 12 - 3 \\ 16 + 30 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (BC)D = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}[1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 6]$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$$

এবং $CD = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}[1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 6]$

$$= \begin{bmatrix} 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times -5 & 4 \times 6 \\ 6 \times 1 & 6 \times 2 & 6 \times -5 & 6 \times 6 \\ -1 \times 1 & -1 \times 2 & -1 \times -5 & -1 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; B(CD) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 12 - 3 & 8 + 24 - 6 & -20 - 60 + 15 & 24 + 72 - 18 \\ 16 + 30 - 6 & 32 + 60 - 12 & -80 - 150 + 30 & 96 + 180 - 36 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ, $(BC)D = B(CD)$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2I$

$\therefore \quad f(A) = A^3 - 2A^2 + A - 2I$

$$\therefore \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 4 + 4 & 2 + 2 + 4 & 2 + 4 + 2 \\ 2 + 2 + 4 & 4 + 1 + 4 & 4 + 2 + 2 \\ 2 + 4 + 2 & 4 + 2 + 2 & 4 + 4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 + 16 + 16 & 18 + 8 + 16 & 18 + 16 + 8 \\ 8 + 18 + 16 & 16 + 9 + 16 & 16 + 18 + 8 \\ 8 + 16 + 18 & 16 + 8 + 18 & 16 + 16 + 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 41 & 42 & 42 \\ 42 & 41 & 42 \\ 42 & 42 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 - 2A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} 41 & 42 & 42 \\ 42 & 41 & 42 \\ 42 & 42 & 41 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 41-18+1-2 & 42-16+2-0 & 42-16+2-0 \\ 42-16+2-0 & 41-18+1-2 & 42-16+2-0 \\ 42-16+2-0 & 42-16+2-0 & 41-18+1-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 28 & 28 \\ 28 & 22 & 28 \\ 28 & 28 & 22 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৪ $\varphi(x) = x^2 - 4x$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

এবং $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{bmatrix}$ *[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. $f(y) = \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y})$ ও $g(y) = \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$ হলে দেখাও যে, $f(y+z) = f(y).f(z) + g(y).g(z)$. ২

খ. $\varphi(A) - 5I$ নির্ণয় কর, যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $|B| = (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(y) = \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y})$ ……… (i)

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{2}(3^z + 3^{-z})$$

এবং $g(y) = \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$

$$\therefore \quad g(z) = \frac{1}{2}(3^z - 3^{-z})$$

বামপক্ষ $= f(y+z)$

$= \frac{1}{2}\{3^{(y+z)} + 3^{-(y+z)}\}$ [(i) নং এর সাহায্যে]

ডানপক্ষ $= f(y).\, f(z) + g(y)\,.\, g(z)$

$$= \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}).\frac{1}{2}(3^z + 3^{-z}) + \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y}).\frac{1}{2}(3^z - 3^{-z})$$

$$= \frac{1}{4}(3^y.\,3^z + 3^y.\,3^{-z} + 3^{-y}.\,3^z + 3^{-y}.\,3^{-z}) + \frac{1}{4}(3^y.\,3^z - 3^y.\,3^{-z} - 3^{-y}.\,3^z + 3^{-y}.\,3^{-z})$$

$$= \frac{1}{4}\{3^{(y+z)} + 3^{(y-z)} + 3^{-(y-z)} + 3^{-(y+z)} + 3^{(y+z)} - 3^{(y-z)} - 3^{-(y-z)} + 3^{-(y+z)}\}$$

$$= \frac{1}{4}\{2.3^{(y+z)} + 2.3^{-(y+z)}\} = \frac{1}{2}\{3^{(y+z)} + 3^{-(y+z)}\}$$

= বামপক্ষ

$\therefore$ $f(y+z) = f(y)\, f(z) + g(y)\, g(z)$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = x^2 - 4x$

$\therefore \varphi(A) - 5I = A^2 - 4A - 5I$

এখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

এখন, প্রদত্ত রাশিমালা $= A^2 - 4A - 5I$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{bmatrix}$

$$\text{বামপক্ষ} = |B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3-1 \\ y & y^2 & y^3-1 \\ z & z^2 & z^3-1 \end{vmatrix}$$ [১ম, ২য় ও ৩য় সারিকে যথাক্রমে ১ম ২য় ও ৩য় কলামে স্থাপন করে]

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

[২য় নির্ণায়কে ২য় ও ৩য় কলাম স্থান বিনিময় করার পর ১ম ও ২য় কলাম স্থান বিনিময় করে।]

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

[$r'_1 = r_1 - r_2$ এবং $r'_2 = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} (x-y) & (x^2-y^2) \\ (y-z) & (y^2-z^2) \end{vmatrix}$$

[প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$$= (xyz-1)\begin{vmatrix} (x-y) & (x-y)(x+y) \\ (y-z) & (y-z)(y+z) \end{vmatrix}$$

$$= (xyz-1)(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 1 & y+z \end{vmatrix}$$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(y+z-x-y)$

$= (xyz-1)(x-y)(y-z)(z-x)$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৫ $A = \begin{bmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{bmatrix}$

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $\begin{bmatrix} 7 & n \\ m & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে $3m + 4n$ এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|A| = (x+y+z)^3$ ৪

গ. $x = y = z = 1$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 7 & n \\ m & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $m = 4$ এবং $n = -3$

$\therefore$ $3m + 4n = 3 \times 4 + 4(-3) = 12 - 12 = 0$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ১০(খ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬

গ $x = y = z = 1$ হলে, $A = \begin{bmatrix} 1-1-1 & 2.1 & 2.1 \\ 2.1 & 1-1-1 & 2.1 \\ 2.1 & 2.1 & 1-1-1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -1(1-4) - 2(-2-4) + 2(4+2)$$
$$= 3 + 12 + 12$$
$$= 27 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} নির্ণয়যোগ্য।

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$\therefore \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. বক্র প্রতিসম (skew symmetric) ম্যাট্রিক্সের ব্যাখ্যা দাও। ২

খ. $(A^t)^{-1}$ নির্ণয় কর। ৪

গ. নির্ণায়ক পদ্ধতিতে $AX = B$ এর সমাধান কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{n \times n}$ কে **বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স** বলা হবে যদি $A^t = -A$ হয়, অর্থাৎ $a_{ij} = -a_{ji}$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

অর্থাৎ $A^t = -A$ সুতরাং A হলো একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। উল্লেখ্য যে, প্রত্যেক বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তিসমূহ শূন্য, অর্থাৎ $a_{ij} = 0$ যখন $i = j$।

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A^t| = 1(-3-14) - 2(2+10) + 4(-14+15)$$
$$= -17 - 24 + 4$$
$$= -37 \neq 0$$

$$A^t_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = (-3 - 14) = -17$$

$$A^t_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(2+10) = -12$$

$$A^t_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = (-14+15) = 1$$

$$A^t_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -(2+28) = -30$$

$$A^t_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (1-20) = -19$$

$$A^t_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -(-7-10) = 17$$

$$A^t_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-4+12) = 8$$

$$A^t_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-8) = 10$$

$$A^t_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3-4) = -7$$

$$\therefore \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{bmatrix} -17 & -12 & 1 \\ -30 & -19 & 17 \\ 8 & 10 & -7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -17 & -30 & 8 \\ -12 & -19 & 10 \\ 1 & 17 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A^t)^{-1} = \frac{\text{adj}(A^t)}{|A^t|}$$
$$= \frac{-1}{37} \begin{bmatrix} -17 & -30 & 8 \\ -12 & -19 & 10 \\ 1 & 17 & -7 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $AX = B$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x + 2y + 5z \\ 2x - 3y - 7z \\ 4x - 2y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

উভয়পক্ষ সমীকৃত করে পাই, $x + 2y + 5z = 3$
$2x - 3y - 7z = 5$
$4x - 2y + z = 0$

x, y, z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক হবে,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-3-14) - 2(2+28) + 5(-4+12)$$
$$= -37 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(-3-14) - 2(5-0) + 5(-10+0) = -111$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(5+0) - 3(2+28) + 5(0-20) = -185$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1(0+10) - 2(0-20) + 3(-4+12) = 74$$

$$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-111}{-37} = 3$$

$$\therefore \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-185}{-37} = 5$$

$$\therefore \quad z = \frac{Dz}{D} = \frac{74}{-37} = -2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (3, 5, -2)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $P = \begin{vmatrix} (s-a)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (s-b)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (s-c)^2 \end{vmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝ? ২

খ. $f(x) = x^2 - 2x - 3I$ হলে $f(A^T)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $s = a + b + c$ হলে, দেখাও যে, $P = 2abc\,(a + b + c)^3$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A=(a_{ij})_{n\times n}$ কে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^t=-A$ হয়, অর্থাৎ $a_{ij}=-a_{ji}$ হয়।

উদাহরণ: $A=\begin{bmatrix}0&1&-4\\-1&0&3\\4&-3&0\end{bmatrix}$ হলে $A^t=\begin{bmatrix}0&-1&4\\1&0&-3\\-4&3&0\end{bmatrix}$

$$=-\begin{bmatrix}0&1&-4\\-1&0&3\\4&-3&0\end{bmatrix}=-A$$

অর্থাৎ $A^t=-A$ সুতরাং A হলো একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। উল্লেখ্য যে, প্রত্যেক বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের ভুক্তিসমূহ শূন্য, অর্থাৎ $a_{ij}=0$ যখন $i=j$।

খ দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&0&-1\\2&1&-2\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^2-2x-3I$

$$\therefore\quad A^T=\begin{bmatrix}2&1&2\\3&0&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad f(A^T)=(A^T)^2-2.A^T-3I$$

এখন, $(A^T)^2=A^T\,.\,A^T$

$$=\begin{bmatrix}2&1&2\\3&0&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\3&0&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+3+2&2+0-2&4+1-4\\6+0+1&3+0-1&6+0-2\\2-3-2&1+0+2&2-1+4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&0&1\\7&2&4\\-3&3&5\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad f(A^T)=\begin{bmatrix}9&0&1\\7&2&4\\-3&3&5\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&1&2\\3&0&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-4-3&0-2+0&1-4+0\\7-6+0&2-0-3&4-2+0\\-3-2+0&3+2+0&5+4-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-2&-3\\1&-1&2\\-5&5&6\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, $s=a+b+c$

$$\therefore\quad P=\begin{vmatrix}(s-a)^2&a^2&a^2\\b^2&(s-b)^2&b^2\\c^2&c^2&(s-c)^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2&a^2&a^2\\b^2&(c+a)^2&b^2\\c^2&c^2&(a+b)^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2&a^2-(b+c)^2&a^2-(b+c)^2\\b^2&(c+a)^2-b^2&b^2-b^2\\c^2&0&(a+b)^2-c^2\end{vmatrix}$$

[$c'_2=c_2-c_1$ এবং $c'_3=c_3-c_1$ প্রয়োগ করে]

$$=\begin{vmatrix}(b+c)^2&(a+b+c)(a-b-c)&(a+b+c)(a-b-c)\\b^2&(a+b+c)(c+a-b)&0\\c^2&0&(a+b+c)(a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\,(a+b+c)\begin{vmatrix}(b+c)^2&(a-b-c)&(a-b-c)\\b^2&(c+a-b)&0\\c^2&0&(a+b-c)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix}2bc&-2c&-2b\\b^2&c+a-b&0\\c^2&0&a+b-c\end{vmatrix}\quad[r_1'=r_1-(r_2+r_3)]$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix}2bc&-2bc&-2bc\\b^2&bc+ab-b^2&0\\c^2&0&ac+bc+c^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix}2bc&0&0\\b^2&bc+ab&b^2\\c^2&c^2&ac+bc\end{vmatrix}$$

[$c'_2=c_1+c_2;\ c'_3=c_3+c_1$]

$$=\frac{(a+b+c)^2}{bc}\times 2bc\begin{vmatrix}bc+ab&b^2\\c^2&ac+bc\end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)^2.bc\begin{vmatrix}c+a&b\\c&a+b\end{vmatrix}$$

$$=2bc(a+b+c)^2\ [(c+a)\,(a+b)-bc]$$

$$=2bc(a+b+c)^2\,[ca+a^2+bc+ab-bc]$$

$$=2abc\,(a+b+c)^2\,(c+a+b)=2abc(a+b+c)^3$$

$\therefore\ P=2abc(a+b+c)^3$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&-3&1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}6\\3\\1\end{bmatrix}$ হলো তিনটি ম্যাট্রিক্স।

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. $\begin{bmatrix}5+k&-2\\-4&-8\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. B^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. BX = C হলে, ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে (x, y, z) নির্ণয় কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\begin{bmatrix}5+k&-2\\-4&-8\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে,

$$\begin{vmatrix}5+k&-2\\-4&-8\end{vmatrix}=0$$

বা, $-40-8k-8=0$

বা, $8k=-48$

$\therefore\ k=-6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&-3&1\end{bmatrix}$

$$\therefore\quad |B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&-3&1\end{vmatrix}=1(-1+6)-1(1-4)+1(-3+2)$$

$$=5+3-1=7\neq 0$$

$\therefore\ B^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

|B| এর সহগুণকগুলি হচ্ছে,

$B_{11}=(-1)^{1+1}(-1+6)=5$

$B_{12}=(-1)^{1+2}(1-4)=3$

$B_{13}=(-1)^{1+3}(-3+2)=-1$

$B_{21}=(-1)^{2+1}(1+3)=-4$

$B_{22}=(-1)^{2+2}(1-2)=-1$

$B_{23}=(-1)^{2+3}(-3-2)=5$

$B_{31}=(-1)^{3+1}(2+1)=3$

$B_{32}=(-1)^{3+2}(2-1)=-1$

$B_{33}=(-1)^{3+3}(-1-1)=-2$

$$\therefore\quad B^{-1}=\frac{\text{adj}(B)}{|B|}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5&3&-1\\-4&-1&5\\3&-1&-2\end{bmatrix}^T=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5&-4&3\\3&-1&-1\\-1&5&-2\end{bmatrix}\text{ (Ans.)}$$

গ দেওয়া আছে, BX = C

বা, $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\1\end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix}x+y+z\\x-y+2z\\2x-3y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\1\end{bmatrix}$

সমান ম্যাট্রিক্সের ধারণা অনুযায়ী পাই, $x+y+z=6$

$x-y+2z=3$

$2x-3y+z=1$

ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে,

$$D=|B|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&-3&1\end{vmatrix}=1(-1+6)-1(1-4)+1(-3+2)$$

$$=5+3-1=7$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\3&-1&2\\1&-3&1\end{vmatrix}=6(-1+6)-1(3-2)+1(-9+1)$$

$$=30-1-8=21$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(3-2) - 6(1-4) + 1(1-6)$$
$$= 1 + 18 - 5 = 14$$
$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+9) - 1(1-6) + 6(-3+2)$$
$$= 8 + 5 - 6 = 7$$
$\therefore$ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{21}{7} = 3;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{7} = 2$ এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{7}{7} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৯ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2c \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix}$

এবং $f(x) = x^2 + 2x$ *[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]*

ক. $\begin{bmatrix} x+5 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে x এর মান কত? ২

খ. $f(A) + 3I_3$ নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $|M| = (a+b+c)^3$ ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু $\begin{bmatrix} x+5 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী। সুতরাং,

$$\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$$
বা, $x^2 + 5x - 6 = 0$

বা, $x^2 + 6x - x - 6 = 0$

বা, $x(x+6) - 1(x+6) = 0$

বা, $(x+6)(x-1) = 0$

$\therefore x = -6, 1$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 2x$

$\therefore$ $f(A) = A^2 + 2A$

এখন, $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$
$$= \begin{bmatrix} 1+4-6 & 2+10-14 & -2-8+10 \\ 2+10-12 & 4+25-28 & -4-20+20 \\ 3+14-15 & 6+35-35 & -6-28+25 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$
প্রদত্ত রাশি $= f(A) + 3I_3$
$$= A^2 + 2A + 3I_3$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & -8 \\ 6 & 14 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+2+3 & -2+4+0 & 0-4+0 \\ 0+4+0 & 1+10+3 & -4-8+0 \\ 2+6+0 & 6+14+0 & -9-10+3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 4 & 14 & -12 \\ 8 & 20 & -16 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১০(খ) নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬

প্রশ্ন ▶২০ $A = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix}$

[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

ক. $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{bmatrix}$ এবং $D = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ হলে $(B+C)D$ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\det(A) = (a+b+c)^3$. ৪

গ. $a = b = c = 1$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{bmatrix}$ এবং $D = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad (B+C)D = \begin{bmatrix} 7-2 & -3+7 & 4+5 \\ 5+1 & 3+10 & 2-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 6 & 13 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5x+4y+9z \\ 6x+13y-6z \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ১০(খ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৬

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১৫(গ) এর সমাধানের অনুরূপ। পৃষ্ঠা-১৯

প্রশ্ন ▶২১ একটি গার্মেন্টস কারখানায় বিভিন্ন শাখায় কর্মরত শ্রমিকদের তালিকা নিম্নরূপ :

শাখা	১ম গ্রেড	২য় গ্রেড	৩য় গ্রেড
উৎপাদন	1	2	5
বিপণন	2	1	0
বিতরণ	0	1	2

ছকের সংখ্যাগুলি একটি ম্যাট্রিক্স D নির্দেশ করে।

[আজিমপুর গভর্নমেন্ট গার্লস স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. D_{32} নির্ণয় কর। ২

খ. D^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. নতুন বেতন স্কেল ঘোষণার পর উৎপাদন, বিপণন, বিতরণ শাখায় শ্রমিকদের মাসিক মোট বেতন যথাক্রমে 89, 42, 32 হাজার টাকা হলে ১ম, ২য়, ৩য় গ্রেড ভুক্ত একজন শ্রমিকের মাসিক বেতন কত? ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-10) = 10 \textbf{ (Ans.)}$$

খ $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1(2-0) - 2(4-0) + 5(2-0)$$
$$= 2 - 8 + 10 = 4 \neq 0$$
$\therefore$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$
$$D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4$$
$$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$
$$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1$$
$$D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$
$$D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1$$
$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-5) = -5$$
$$D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-10) = 10$$
$$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-4) = -3$$

$\therefore \quad D^{-1} = \frac{\text{Adj (D)}}{|D|} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & -3 \end{bmatrix}^{t}$

$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ মনে করি, নতুন বেতন স্কেল ঘোষণার পর উৎপাদন, বিপণন ও বিতরণ বিভাগের কর্মচারীদের প্রতি জনের মাসিক বেতন যথাক্রমে x, y ও z টাকা। গ্রেডগুলোকে কলাম বরাবর সাজিয়ে একটি ম্যাট্রিক্স F গঠন করি।

$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

সুতরাং আমরা পাই,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \\ 42 \\ 32 \end{bmatrix}$ বা, $\begin{bmatrix} x + 2y + 5z \\ 2x + y \\ y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \\ 42 \\ 32 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্স সমতার নিয়ম অনুযায়ী,

$x + 2y + 5z = 89$
$2x + y = 42$
$y + 2z = 32$

এখন, ক্রেমারের পদ্ধতি প্রয়োগ করে,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-0) + 2(0-4) + 5(2-0)$

$= 2 - 8 + 10 = 4 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix} 89 & 2 & 5 \\ 42 & 1 & 0 \\ 32 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 89(2-0) + 2(0-84) + 5(42-32)$

$= 178 - 168 + 50 = 60$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 89 & 5 \\ 2 & 42 & 0 \\ 0 & 32 & 2 \end{vmatrix} = 1(84-0) + 89(0-4) + 5(64-0)$

$= 84 - 356 + 320 = 404 - 356 = 48$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 89 \\ 2 & 1 & 42 \\ 0 & 1 & 32 \end{vmatrix} = 1(32-42) + 2(0-64) + 89(2-0)$

$= -10 - 128 + 178 = 178 - 138 = 40$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{60}{4} = 15;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{48}{4} = 12$

এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{40}{4} = 10$

∴ গ্রেড-I এর একজন শ্রমিকের মাসিক বেতন 15 হাজার টাকা **(Ans.)**
গ্রেড-II এর একজন শ্রমিকের মাসিক বেতন 12 হাজার টাকা **(Ans.)**
এবং গ্রেড-III এর একজন শ্রমিকের মাসিক বেতন 10 হাজার টাকা **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[জাতির জনক বঙ্গবন্ধু শেখ মুজিবুর রহমান সরকারি মহাবিদ্যালয়, উত্তরা, ঢাকা]

ক. B সমঘাতি কি না তা যাচাই কর? ২

খ. M (b_{11}, b_{21}, b_{13}) ও N(b_{12}, b_{31}, b_{23}) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখা বরাবর $2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর। ৪

গ. $B^tX = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে X নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক B সমঘাতি হবে যদি $B^2 = B$ হয়।

এখানে, $B^2 = B.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-4+1 & 2+2+0 & 1+0+1 \\ -2-2+0 & -4+1+0 & -2+0+0 \\ 1+0+1 & 2+0+0 & 1+0+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \neq B$

∴ B সমঘাতি নয়। **(Ans.)**

খ $M(b_{11}, b_{21}, b_{13}) \equiv M(1, -2, 1)$ ও
$N(b_{12}, b_{31}, b_{23}) \equiv N(2, 1, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $2\hat{i} + \hat{j}$

ধরি, $\vec{E} = \overrightarrow{MN} = (2\hat{i} + \hat{j}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

এবং $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{E}$ বরাবর $\vec{F}$ ভেক্টরের অংশক

$= \left(\frac{\vec{E}\,.\,\vec{F}}{E}\right)\left(\frac{\vec{E}}{E}\right)$

$= \left(\frac{2+6-1}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}}\right)\left(\frac{\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}}\right)$

$= \frac{7}{11}(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ **(Ans.)**

গ $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $B^tX = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

বা, $\begin{bmatrix} x - 2y + z \\ 2x + y \\ x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে পাই,

$x - 2y + z = 2$
$2x + y = 5$
$x + z = 4$

$\therefore \quad D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 1 = 4$

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 10 - 4 = 8$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 + 3 = 4$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 2 = 8$

$\therefore \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{4} = 2;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{4} = 1;\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{4} = 2$

$\therefore \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৩ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স এবং $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ও $2p\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ দুটি ভেক্টর। *[নটর ডেম কলেজ, ময়মনসিংহ]*

ক. p এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে? ২

খ. |A| নির্ণায়কে প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$ যেখানে A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তিগুলো যদি নিম্নরূপ হয়, $a_1 = c_3 = 1$, $a_2 = b_1 = 3$, $a_3 = b_2 = -1$ এবং $c_1 = c_2 - 2 = b_3 - 1 = 4$, তবে এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর যেন, $AB = BA = I_3$ হয়। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}).(2p\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

বা, $4p + 4 + 8 = 0$

বা, $4p = -12$

$\therefore$ $p = -3$ **(Ans.)**

খ সহগুণকের সংজ্ঞানুসারে,

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - a_3c_2)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$\therefore \quad a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = a_2(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2$$

$= 0$ (প্রমাণিত)

গ এখানে, $a_1 = c_3 = 1$, $a_2 = b_1 = 3$, $a_3 = b_2 = -1$

এবং $c_1 = c_2 - 2 = b_3 - 1 = 4$

$\therefore$ $c_1 = 4$, $c_2 = 6$ ও $b_3 = 5$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

এমন একটি ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় করতে হবে যেন $AB = BA = I_3$ হয়।

যেহেতু $AB = BA = I_3$

$\therefore$ $B = A^{-1}$ এবং $A = B^{-1}$

এখন $\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-1 - 30) + 3(-6 - 3) + 4(15 - 1)$

$= -31 - 27 + 56 = -2 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} নির্ণয়যোগ্য।

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -31$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 17$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -8$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 22$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$

$$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} -31 & -9 & 14 \\ 17 & 5 & -8 \\ 22 & 6 & -10 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & \frac{-17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & \frac{-5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B = \begin{bmatrix} \frac{31}{2} & \frac{-17}{2} & -11 \\ \frac{9}{2} & \frac{-5}{2} & -3 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ২৪ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & x \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

[ঘাটাইল ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. x এর কোন মানের জন্য $|A| = 0$ হবে? ২

খ. $x = 0$ ধরে প্রাপ্ত B ম্যাট্রিক্সের বিপরীত বর্গ ম্যাট্রিক্স B^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $BB^{-1} = I_3$. ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & x \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(0 - 4) - 6(0 - 0) + x(2 - 0) = -4 + 2x$$

শর্তমতে, $-4 + 2x = 0$

বা, $2x = 4$

$\therefore$ $x = 2$ **(Ans.)**

খ $x = 0$ হলে, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(0 - 4) - 6(0 - 0) + 0 = -4 \neq 0$$

$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$

$B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$

$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$

$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$

$B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$

$B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$

$$\therefore \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{ adj } B = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 12 & -2 & -3 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \textbf{(Ans.)}$$

গ বামপক্ষ $= BB^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -3+3+0 \\ 1+0-1 & 0+0+1 & -3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2} \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶ ২৫ $P = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 - 4x - 5I$

[শেরপুর সরকারি কলেজ, শেরপুর]

ক. $\begin{bmatrix}2 & x\\ y-1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3+y\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর। ২

খ. $f(P)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. P^{-1} নির্ণয় কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix}2 & x\\ y-1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3+y\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $x = 3 + y$

$\therefore$ $x - y = 3$ .... (i)

এবং $y - 1 = 4$

$\therefore$ $y = 4 + 1 = 5$

(i) নং হতে, $x - 5 = 3$

বা, $x = 3 + 5$

$\therefore$ $x = 8$

$\therefore$ $(x, y) = (8, 5)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 4x - 5I$

এবং $P = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

$$\therefore P^2 = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2\\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2\\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

এখন, প্রদত্ত রাশিমালা $= f(P) = P^2 - 4P - 5I$

$$= \begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

গ এখানে, $P = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

$\therefore$ $\det(P) = |P| = 1(1-4) - 2(2-4) + 2(4-2) = -3 + 4 + 4 = 5 \neq 0$

$\therefore$ P বিপরীতযোগ্য।

এখানে, $P_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$P_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix} = -1(2-4) = 2$

$P_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&2\end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$

$P_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&2\\2&1\end{vmatrix} = -1(2-4) = 2$

$P_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$P_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix} = -1(2-4) = 2$

$P_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix} = (4-2) = 2$

$P_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix} = -1(2-4) = 2$

$P_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$$\therefore \text{adj } P = \begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } P$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-3}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}&\frac{-3}{5}&\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}&\frac{2}{5}&\frac{-3}{5}\end{pmatrix} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ২৬ নিচের অনুচ্ছেদটি পড় এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

যদি $A = \begin{bmatrix}3+x & 4 & 2\\ 4 & 2+x & 3\\ 2 & 3 & 4+x\end{bmatrix}$ হয় তবে *[নিউ গভঃ ডিগ্রী কলেজ, রাজশাহী]*

ক. ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। ২

$2x + 3y = 4$

$x - y = 7$

খ. $|A| = 0$ হলে x-এর মান কত? ৪

গ. A^{-1} নির্ণয় কর, যখন $x = 0$ ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2x + 3y = 4$

$x - y = 7$

এখানে, $D = \begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$

$D_x = \begin{vmatrix}4&3\\7&-1\end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$

$D_y = \begin{vmatrix}2&4\\1&7\end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$

$\therefore$ $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-5} = 5$ এবং $y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (5, -2)$

খ এখানে, $|A| = \begin{vmatrix}3+x&4&2\\4&2+x&3\\2&3&4+x\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}3+x+4+2 & 4 & 2\\ 4+2+x+3 & 2+x & 3\\ 2+3+4+x & 3 & 4+x\end{vmatrix} \quad ; [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$$

$$= \begin{vmatrix}x+9&4&2\\x+9&2+x&3\\x+9&3&4+x\end{vmatrix} = (x+9)\begin{vmatrix}1&4&2\\1&2+x&3\\1&3&4+x\end{vmatrix}$$

$$= (x+9)\begin{vmatrix}0&2-x&-1\\0&x-1&-1-x\\1&3&4+x\end{vmatrix} \quad ; [r_1' = r_1 - r_2 \text{ এবং } r_2' = r_2 - r_3]$$

$$= (x+9)\begin{vmatrix}-(x-2)&-1\\x-1&-1-x\end{vmatrix} = (x+9)(x^2 - x - 2 + x - 1)$$

$$= (x+9)(x^2 - 3)$$

যেহেতু, $\begin{vmatrix}3+x&4&2\\4&2+x&3\\2&3&4+x\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+9)(x^2-3) = 0$

হয় $x + 9 = 0$ অথবা $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \therefore x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $x = -9$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $x = -9, \pm\sqrt{3}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$

$x = 0$ হলে ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(8-9) - 4(16-6) + 2(12-4)$

$= -3 - 40 + 16$

$= -27 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (8-9) = -1$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(16-6) = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (12-4) = 8$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(16-6) = -10$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (12-4) = 8$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-8) = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (12-4) = 8$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(9-8) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (6-16) = -10$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-27} \begin{bmatrix} -1 & -10 & 8 \\ -10 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -10 \end{bmatrix}^t$

$= \frac{-1}{27} \begin{bmatrix} -1 & -10 & 8 \\ -10 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{10}{27} & \frac{-8}{27} \\ \frac{10}{27} & \frac{-8}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{-8}{27} & \frac{1}{27} & \frac{10}{27} \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২৭ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

এবং $B = \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{bmatrix}$

[জয়পুরহাট সরকারি মহিলা কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের মধ্যে পার্থক্য লিখ। ২

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $|B| = (1+a^2+b^2)^3$। ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
বিজ্ঞান ও গণিতের বিভিন্ন তথ্য আয়তাকারে সারি ও কলাম বরাবর সাজালে যে আয়তাকার বিন্যাস পাওয়া যায় তাকে ম্যাট্রিক্স বলে।	যে নিয়মের দ্বারা প্রত্যেকটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের জন্য এক একটি সংখ্যা বা মান পাওয়া যায় তাকে নির্ণায়ক বলে।

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= -1(5 \times 1 - 0 \times -2) - 2(5 \times 2 - 4 \times 0) - 3(-2 \times 2 - 4 \times 1)$

$= -5 - 20 + 24 = -1 \neq 0$

এখন, $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} (5-0) & -(10-0) & (-4-4) \\ -(10-6) & (-5+12) & -(2-8) \\ (0+3) & -(0+6) & (-1-4) \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১২(গ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮

প্রশ্ন ▶ ২৮ উদ্দীপক-১: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

উদ্দীপক-২: $\begin{vmatrix} x+1 & -6 & x \\ y & y+1 & y \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$ *[দিনাজপুর সরকারি কলেজ, দিনাজপুর]*

ক. উদ্দীপকে ম্যাট্রিক্স A ও B আয়তাকার কি-না, কারণ লিখ। ২

খ. দেখাও যে $(AB)^t = B^tA^t$. ৪

গ. উদ্দীপক-২ হতে সম্ভব হলে দেখাও যে $x = -(y+3)$ ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

আয়তাকার ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞানুসারে, ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারি সংখ্যা সমান না হলে তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে। এখানে, A ও B উভয় ম্যাট্রিক্সেরই সারি ও কলাম সংখ্যা সমান।

সুতরাং এরা আয়তাকার ম্যাট্রিক্স নয়। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4+3 & 0+9 \\ 2+4 & 0+12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)^t = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

আবার, $B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore B^tA^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4+3 & 2+4 \\ 0+9 & 0+12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)^t = B^tA^t$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} x+1 & -6 & x \\ y & y+1 & y \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} x+y+3 & y+3 & x+y+3 \\ y & y+1 & y \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $[R'_1 = R_1 + R_2 + R_3]$

বা, $\begin{vmatrix} 0 & y+3 & x+y+3 \\ 0 & y+1 & y \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $[C'_1 = C_1 - C_3]$

বা, $\begin{vmatrix} y+3 & x+y+3 \\ y+1 & y \end{vmatrix} = 0$

বা, $y(y+3) - x(y+1) - (y+3)(y+1) = 0$

বা, $-(y+3) - x(y+1) = 0$

বা, $x(y+1) = -(y+3)$

$\therefore x = -\dfrac{y+3}{y+1}$

এখন, $x = -(y+3)$ হবে যদি $y+1 = 1$

বা, $y = 0$ হয়।

$\therefore x = -(y+3)$ সম্ভব নয়। (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ২৯ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]

ক. $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $AX = R$ সমীকরণটি ক্রেমার সূত্রের সাহায্যে সমাধান কর। ৪

গ. $f(A) = I$ সমীকরণটি হতে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $F = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$

F ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হবে যদি $F^t = -F$ হয়।

$\therefore F^t = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -7 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ x & 0 \end{bmatrix}$

শর্তমতে, $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতানুসারে, $x = 7$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $AX = R$

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} x+z \\ x+y+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতার নিয়ম অনুযায়ী,

$x + z = 4$

$x + y + z = 6$

$y + z = 5$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-1) - 0 + 1(1-0) = 0 - 0 + 1 = 1$

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(1-1) - 0 + 1(6-5) = 1$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1(6-5) - 4(1-0) + 1(5-0) = 1 - 4 + 5 = 2$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(5-6) - 0 + 4(1-0) = -1 + 4 = 3$

$\therefore x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1}{1} = 1, \; y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2}{1} = 2$ এবং $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{3}{1} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ **(Ans.)**

গ এখানে, $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+1 & 1+0+1 \\ 1+1+0 & 0+1+1 & 1+1+1 \\ 0+1+0 & 0+1+1 & 0+1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $f(A) = I$

বা, $A^3 - 3A^2 + 2A = I$

বা, $A^{-1}A^3 - 3A^{-1}A^2 + 2A^{-1}A = A^{-1}I$ [A^{-1} দ্বারা গুণ করে]

বা, $A^2 - 3A + 2I = A^{-1}$

বা, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-3+2 & 1-0+0 & 2-3+0 \\ 2-3+0 & 2-3+2 & 3-3+0 \\ 1-0+0 & 2-3+0 & 2-3+2 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩০ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল ও কলেজ, কুমিল্লা]

ক. $(A - A')$ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(A)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. K এর মান নির্ণয় কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (A - A') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-2 & 0-2 & 1-1 \\ 2-0 & 1-1 & 3+1 \\ 1-1 & -1-3 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$\therefore f(A) = A^2 - 5A + 6$

$= A^2 - 5A + 6I$

এখন, $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+0+1 & 0+0-1 & 2+0+0 \\ 4+2+3 & 0+1-3 & 2+3+0 \\ 2-2+0 & 0-1-0 & 1-3+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 - 5A + 6I = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5-10+6 & -1-0+0 & 2-5+0 \\ 9-10+0 & -2-5+6 & 5-15+0 \\ 0-5+0 & -1+5+0 & -2-0+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১০(খ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৩১ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

[ব্রাহ্মণবাড়িয়া সরকারি মহিলা কলেজ, ব্রাহ্মণবাড়িয়া]

ক. $(B + C)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $A^2 - 3A + 5I$ নির্ণয় কর, যেখানে I একটি একক ম্যাট্রিক্স। ৪

গ. A^{-1} এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad B + C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -3+3 & 7-7 \\ 5-5 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 0$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0-1 & 1-2-2 & -1+2-3 \\ 0+0+2 & 0+4+4 & 0-4+6 \\ 1+0+3 & 1-4+6 & -1+4+9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

সুতরাং,

$A^2 - 3A + 5I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0-3+5 & -3-3+0 & -2+3+0 \\ 2-0+0 & 8+6+5 & 2-6+0 \\ 4-3+0 & 3-6+0 & 12-9+5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 2 & 19 & -4 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(-6-4) - 1(0-2) - 1(0+2)$

$= -10 + 2 - 2$

$= -10 \neq 0$

$\therefore \quad A^{-1}$ বিদ্যমান।

যেহেতু $|A| \neq 0$ সুতরাং $|A^{-1}| \neq 0$

আমরা জানি, কোনো ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স মূল ম্যাট্রিক্সের সমান। অর্থাৎ $(A^{-1})^{-1} = A$

$\therefore \quad A^{-1}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩২ $A = \begin{bmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. $a = b = c = 3$ হলে দেখাও যে, A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। ২

খ. দেখাও যে, $\det(A) = 2(a + b + c)^3$ ৪

গ. $a = 0; b = 1; c = 2$ হলে $AX = [a \ b \ c]^T$ সমীকরণ জোট নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর। যেখানে, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. ৪

৩২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a = b = c = 3$

$\therefore A = \begin{bmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3+3+2\times3 & 3 & 3 \\ 3 & 3+3+2\times3 & 3 \\ 3 & 3 & 3+3+2\times3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

এখন, $A^t = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 3 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

$\therefore A^t = A$

$\therefore$ A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{bmatrix}$

বামপক্ষ $= \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1+c_2+c_3$ প্রয়োগ করে $]$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে$]$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ a+b+c & -(a+b+c) \end{vmatrix}$

[প্রথম কলাম ও তৃতীয় সারি বরাবর বিস্তার করে]

$= 2(a+b+c) \{(a+b+c)^2 - 0\}$

$= 2(a+b+c)^3$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$a = 0, b = 1, c = 2$ হলে,

$A = \begin{bmatrix} 0+1+2\times2 & 0 & 1 \\ 2 & 1+2+2\times0 & 1 \\ 2 & 0 & 2+0+2\times1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $AX = [a \ b \ c]^t$

বা, $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 5x+z \\ 2x+3y+z \\ 2x+4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে,

$5x + z = 0$

$2x + 3y + z = 1$

$2x + 4z = 2$

x, y ও z এর সহগগুচ্ছ নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সের মান,

$D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5(12-0) - 0 + 1(0-6)$

$= 60 - 6$

$= 54 \neq 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1(0 - 6) = -6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5(4 - 2) - 0 + 1(4 - 2) = 10 + 2 = 12$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5(6 - 0) - 0 + 0 = 30$$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{-6}{54} = \frac{-1}{9}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = \left(\frac{-1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৩ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ *[বি এ এফ শাহীন কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. $A \times C$ নির্ণয় করে মাত্রা নির্ণয় কর। ২

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. $A \times B = C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান

সৃজনশীল প্রশ্ন ১নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১১

প্রশ্ন ▶ ৩৪ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [1 \;\; 2 \; -5 \;\; 6]$

$$K = \begin{vmatrix} 1 + a^2 - b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1 - a^2 + b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1 - a^2 - b^2 \end{vmatrix}$$ *[কক্সবাজার সিটি কলেজ, কক্সবাজার]*

ক. $(BC)^T =$ কত? ২

খ. A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. $K =$ কত? ৪

৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [1 \;\; 2 \; -5 \;\; 6]$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \;\; 2 \; -5 \;\; 6] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (BC)^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 8 & 12 & -2 \\ -20 & -30 & 5 \\ 24 & 36 & -6 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-4 + 2) - 1(-2 + 6) + 5(-1 + 6)$$
$$= -4 - 4 + 25$$
$$= 17 \neq 0$$

$\therefore$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 6) = -4$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 5) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 10 = 8$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 3 & -11 & 1 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix}^t$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 8 \\ -4 & -11 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 8 \\ -4 & -11 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন ১২(গ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮

প্রশ্ন ▶ ৩৫ $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a & b & ax + by \\ b & c & bx + cy \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{bmatrix}$

[বান্দরবান ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, বান্দরবান]

ক. A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি কিনা যাচাই কর। ২

খ. B^{-1} নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $|D| = (b^2 - ac)(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$

A ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি হবে যদি $A^2 = I$ হয়।

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 16 - 15 & -4 + 4 \\ 60 - 60 & -15 + 16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= I_2$$

$\therefore$ A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-4 + 1) + 1(2 - 1) - 1(-1 + 2)$$
$$= 2 \times (-3) + 1 - 1$$
$$= -6 + 1 - 1$$
$$= -6 \neq 0$$

$\therefore B^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$

$B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$B_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$

$B_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$

$B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$

$B_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 1) = 1$

$B_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$

$B_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3$

$B_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$

$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31}\\ B_{12} & B_{22} & B_{32}\\ B_{13} & B_{23} & B_{33}\end{bmatrix}$

$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-3 & 3 & -3\\ -1 & 5 & -3\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ বামপক্ষ $= |D| = \begin{vmatrix} a & b & ax+by\\ b & c & bx+cy\\ ax+by & bx+cy & 0\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a & b & 0\\ b & c & 0\\ ax+by & bx+cy & -(ax^2+2bx+cy^2)\end{vmatrix}$ $[\because c_3' = c_3 - (c_1x + c_2y)]$

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)\begin{vmatrix} a & b\\ b & c\end{vmatrix}$ [৩য় কলামের সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$

$= (b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2) =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩৬ $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 9 & 7\end{bmatrix}$,

$D = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b\\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a\\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2\end{vmatrix}$

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $D = (1 + a^2 + b^2)^3$। ৪

গ. $AB = BA = I_3$ হলে B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

এবং y অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $= \theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\hat{j}}{|\vec{A}||\hat{j}|}$

বা, $\cos\theta = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\cdot\hat{j}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} \times \sqrt{1}}$

বা, $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{9}}$

বা, $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$

$\therefore \theta = 109.47°$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ১২(গ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-১৮

গ দেওয়া আছে,

$AB = BA = I_3$

$\therefore AB = I_3$

বা, $B = A^{-1}I_3 = A^{-1}$

এবং $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 8 & 9 & 7\end{bmatrix}$

$\therefore \det(A) = |A|$
$= (35 - 54) - 2(28 - 48) + 3(36 - 40)$
$= 9 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$A_{11} = (-1)^{1+1}(35 - 54) = -19$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(28 - 48) = 20$

$A_{13} = (-1)^{1+3}(36 - 40) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1}(14 - 27) = 13$

$A_{22} = (-1)^{2+2}(7 - 24) = -17$

$A_{23} = (-1)^{2+3}(9 - 16) = 7$

$A_{31} = (-1)^{3+1}(12 - 15) = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}(6 - 12) = 6$

$A_{33} = (-1)^{3+3}(5 - 8) = -3$

$\therefore \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix}-19 & 20 & -4\\ 13 & -17 & 7\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix}-19 & 13 & -3\\ 20 & -17 & 6\\ -4 & 7 & -3\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$

$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-19 & 13 & -3\\ 20 & -17 & 6\\ -4 & 7 & -3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\frac{-19}{9} & \frac{13}{9} & \frac{-1}{3}\\ \frac{20}{9} & \frac{-17}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore B = A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{-19}{9} & \frac{13}{9} & \frac{-1}{3}\\ \frac{20}{9} & \frac{-17}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৭ $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix}(p+q)^2 & rp & rq\\ rp & (q+r)^2 & pq\\ rq & pq & (r+p)^2\end{bmatrix}$

[এম.সি একাডেমী (মডেল স্কুল ও কলেজ), গোলাপগঞ্জ, সিলেট]

ক. A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত যোগ্যতা নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $|D| = 2pqr(p + q + r)^3$ ৪

গ. $(AB)^{-1}$ নির্ণয় কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$
$= 2 - 3$
$= -1 \neq 0$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য। **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= |D| = \begin{vmatrix}(p+q)^2 & rp & qr\\ rp & (q+r)^2 & pq\\ qr & pq & (r+p)^2\end{vmatrix}$

$= pqr\begin{vmatrix}\frac{(p+q)^2}{r} & p & q\\ r & \frac{(q+r)^2}{p} & q\\ r & p & \frac{(r+p)^2}{q}\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}(p+q)^2 & p^2 & q^2\\ r^2 & (q+r)^2 & q^2\\ r^2 & p^2 & (r+p)^2\end{vmatrix}$

[প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কলামকে যথাক্রমে r, p ও q দ্বারা গুণ করে]

$= \begin{vmatrix}(p+q)^2 & r^2 & r^2\\ p^2 & (q+r)^2 & p^2\\ q^2 & q^2 & (r+p)^2\end{vmatrix}$

[সারিকে কলামে ও কলামকে সারিতে রূপান্তর করে]

$= \begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\ q^2 & (r+p)^2 & q^2\\ r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix}$ [সারি ও কলাম স্থানান্তর করে]

$$= \begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2-(q+r)^2 & p^2-(q+r)^2 \\ q^2 & (r+p)^2-q^2 & q^2-q^2 \\ r^2 & 0 & (p+q)^2-r^2 \end{vmatrix}$$

[$r'_2 = r_2 - r_1$ এবং $r'_3 = r_3 - r_1$ প্রয়োগ করে]

$$= \begin{vmatrix} (q+r)^2 & (p+q+r)(p-q-r) & (p+q+r)(p-q-r) \\ q^2 & (p+q+r)(r+p-q) & 0 \\ r^2 & 0 & (p+q+r)(p+q-r) \end{vmatrix}$$

$$= (p+q+r)\,(p+q+r) \begin{vmatrix} (q+r)^2 & (p-q-r) & (p-q-r) \\ q^2 & (r+p-q) & 0 \\ r^2 & 0 & (p+q-r) \end{vmatrix}$$

$$=(p+q+r)^2 \begin{vmatrix} 2qr & -2r & -2q \\ q^2 & r+p-q & 0 \\ r^2 & 0 & p+q-r \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - (r_2+r_3)]$$

$$= \frac{(p+q+r)^2}{qr} \begin{vmatrix} 2qr & -2qr & -2qr \\ q^2 & qr+pq-q^2 & 0 \\ r^2 & 0 & pr+qr+r^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(p+q+r)^2}{qr} \begin{vmatrix} 2qr & 0 & 0 \\ q^2 & qr+pq & q^2 \\ r^2 & r^2 & pr+qr \end{vmatrix} \quad [r'_2 = r_1 + r_2;\ r'_3 = r_3 + r_1]$$

$$= \frac{(p+q+r)^2}{qr} \times 2qr \begin{vmatrix} qr+pq & q^2 \\ r^2 & pr+qr \end{vmatrix}$$

$$= 2(p+q+r)^2.qr \begin{vmatrix} r+p & q \\ r & p+q \end{vmatrix}$$

$= 2qr(p+q+r)^2\ [(r+p)(p+q) - qr]$

$= 2qr(p+q+r)^2\ [rp + p^2 + qr + pq - qr]$

$= 2pqr\,(p+q+r)^2\,(r+p+q) = 2pqr(p+q+r)^3$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ধরি, $P = AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2+2 & 2+4 \\ 3+2 & 3+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore\ |P| = |AB| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= 28 - 30 = -2 \neq 0$

$\therefore$ P ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

তাহলে, $P_{11} = (-1)^{1+1}\, 7 = 7$

$P_{12} = (-1)^{1+2}\, 5 = -5$

$P_{21} = (-1)^{2+1}\, 6 = -6$

$P_{22} = (-1)^{2+2}\, 4 = 4$

$\therefore\ P^{-1} = (AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\, \text{adj}\,(AB)$

$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}^t$

$= \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৮ $ax + by + cz = \ell$ ... ... (i)

$a^2x + b^2y + c^2z = k$ ... ... (ii)

$(a^3-1)x + (b^3-1)y + (c^3-1)z = m$ ... ... (iii)

[যশোর সরকারি মহিলা কলেজ, যশোর]

ক. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$ হলে F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। ২

খ. সমীকরণগুলোকে AX = B আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, Det(A) = (a − b) (b − c) (c − a) (abc − 1) ৪

গ. x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে a = 1, b = 1, c = − 1 ৪

৩৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2$

বা, $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

বা, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 0+4 \\ 0-4 & 1+2 \end{bmatrix}$

$\therefore\ F = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $ax + by + cz = \ell$ ... ... (i)

$a^2x + b^2y + c^2z = k$ ... ... (ii)

$(a^3-1)x + (b^3-1)y + (c^3-1)z = m$ ... ... (iii)

সমীকরণ জোটটিকে Ax = B আকারে প্রকাশ করে পাই,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3-1 & b^3-1 & c^3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ k \\ m \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3-1 & b^3-1 & c^3-1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3-1 & b^3-1 & c^3-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3-1 \\ b & b^2 & b^3-1 \\ c & c^2 & c^3-1 \end{vmatrix}$$

[অনুরূপ সারি ও কলামগুলোর পারস্পরিক স্থান বিনিময় করে]

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

[পরপর দুইবার কলামগুলোর স্থান বিনিময় করে]

$$= (abc-1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (abc-1) \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad [r_1 - r_2 \rightarrow r_1' \ \&\ r_2 - r_3 \rightarrow r_2']$$

$$= (abc-1) \begin{vmatrix} a-b & (a+b)(a-b) \\ b-c & (b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (abc-1)(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & b+c \end{vmatrix}$$

$= (a-b)(b-c)(abc-1)(b+c-a-b)$

$\therefore\ \det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)(abc-1)$ **(দেখানো হলো)**

গ x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3-1 & b^3-1 & c^3-1 \end{pmatrix}$$

a = 1, b = 1, c = − 1 হলে,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1^2 & 1^2 & (-1)^2 \\ 1^3-1 & 1^3-1 & (-1)^3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

এখন, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(1-1) = -2 \times 0 = 0$

যেহেতু $\det(A) = |A| = 0$ সেহেতু ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী। অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীত যোগ্য নয়। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৯ $P = \begin{bmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{bmatrix}$

[পিরোজপুর সরকারি মহিলা কলেজ, পিরোজপুর]

ক. $[1 \ \ 2]\begin{bmatrix} x & y \\ y & -2 \end{bmatrix} = [-4 \ \ 5]$ হলে (x, y) নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|P| = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ ৪

গ. $a = 2, b = -1$ এবং $c = 1$ হলে P^{-1} নির্ণয় কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $[1 \ \ 2]\begin{bmatrix} x & y \\ y & -2 \end{bmatrix} = [-4 \ \ 5]$

$\therefore \ [x+2y \ \ \ y-4] = [-4 \ \ 5]$

ম্যাট্রিক্সের সমতা অনুসারে, $x + 2y = -4$ ……… (i)

এবং $y - 4 = 5 \ \therefore \ y = 9$

(i) থেকে পাই, $x + 2 \times 9 = -4 \ \therefore \ x = -22$

$\therefore \ (x, y) = (-22, 9)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{bmatrix}$

বামপক্ষ $= |P| = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix} \ \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= 1\{(a+b)(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2) - (b+c)(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$

$= (b-c)(a-b)\{(a+b)(b^2+bc+c^2) - (b+c)(a^2+ab+b^2)\}$

$= (b-c)(a-b)\{ab^2 + abc + ac^2 + b^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - ab^2 - b^3 - a^2c - abc - b^2c\}$

$= (b-c)(a-b)(ac^2 - a^2b + bc^2 - a^2c)$

$= (b-c)(a-b)\{ac(c-a) + b(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(a-b)\{ac(c-a) + b(c+a)(c-a)\}$

$= (b-c)(a-b)(c-a)(ac+bc+ab)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ $a = 2, b = -1$ এবং $c = 1$ হলে, $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \ |P| = -1(-1-1) - 2(2+2) + 4(2-2) = 2 - 8 + 0 = -6 \neq 0$

$\therefore \ P^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$P_{11} = (-1)^{1+1}(-1-1) = -2$

$P_{12} = (-1)^{1+2}(2+2) = -4$

$P_{13} = (-1)^{1+3}(2-2) = 0$

$P_{21} = (-1)^{2+1}(2-4) = 2$

$P_{22} = (-1)^{2+2}(-1+8) = 7$

$P_{23} = (-1)^{2+3}(-1+4) = -3$

$P_{31} = (-1)^{3+1}(2+4) = 6$

$P_{32} = (-1)^{3+2}(-1-8) = 9$

$P_{33} = (-1)^{3+3}(1-4) = -3$

$\therefore \ P^{-1} = \frac{1}{|P|}\operatorname{adj}(P) = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \\ 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}^t = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -4 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪০ $A = \begin{bmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{bmatrix}$

[ঝালকাঠি সরকারি কলেজ, ঝালকাঠি]

ক. $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে x এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, $|A| = 2(x+y+z)^3$ ৪

গ. $x = y = z = 1$ হলে, A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

৪০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক যেহেতু $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী। সুতরাং

$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ বা, $2x - 12 = 0$

বা, $2x = 12 \ \therefore \ x = 6$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন ৩২(খ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-২৮

গ $x = y = z = 1$ হলে,

$A = \begin{bmatrix} 1+1+2.1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1+2.1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+1+2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-1) - 1(4-1) + 1(1-4)$

$= 4 \times 15 - 1 \times 3 + 1(-3)$

$= 60 - 3 - 3 = 54 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

এখন, $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} 15 & -3 & -3 \\ -3 & 15 & -3 \\ -3 & -3 & 15 \end{bmatrix}$

$= \frac{3}{54}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**