EKONOMETRİKA(ECONOMETRİCS)

Book · January 2018

1 author:

Elshar Orudzhev
Baku State University

E.Q.ORUCOV

EKONOMETRİKA

050404-iqtisadiyyat,
050401-dünya iqtisadiyyatı,
050407-menecment ixtisasları üzrə

DƏRSLİK

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin 18.01.2018-ci il tarixli 7-58 №-li əmri ilə nəşr hüququ (qrif) verilmişdir.

Bakı – 2018

Rəyçilər:

L.M.MƏMMƏDOVA - fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi iqtisadiyyat" kafedrasının dosenti;

A.M.MƏHƏRRƏMOV - iqtisad elmləri doktoru, professor, Bakı Dövlət Universitetinin "İqtisadiyyat və idarəetmə" kafedrasının müdiri;

A.R.ƏLİYEV - riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor, Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin "Ümumi və tətbiqi riyaziyyat" kafedrasının müdiri;

Elşar ORUCOV. EKONOMETRİKA. Bakı,– 2018, 384 səh.

Dərslik BDU-nun iqtisadiyyat, dünya iqtisadiyyatı, menecment ixtisasları üzrə bakalavriyat pilləsində təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulmuşdur. Burada cüt reqressiya, çoxdəyişənli reqressiya, ekonometrik tənliklər sistemi və zaman sıralarına dair mövzular öz əksini tapmışdır. Şərholunmalar ali təhsilin iqtisadiyyat ixtisaslarında ekonometrika kursunun bazasını tam əhatə edir. Bütün fəsillərdə uyğun modellərin qurulması Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu, Maksimal Doğruya Oxşarlıq Üsulu, Qeyri-xətti optimallaşdırma üsulları və digər yanaşmalarla reallaşdırılır və statistik hipotezlərlə yoxlanılır. Cüt reqressiyaya dair fəsildə parametrik üsullarla yanaşı, həm də, qeyri-parametrik reqressiya analizi təhlil edilmişdir. Çoxdəyişənli reqressiya məsələlərində isə, heteroskedastiklik, avtokorrelyasiya və dəyişkən strukturlu asılılıq hallarında modelləşdirmələr, onların spesifikasiyası araşdırılır. Ekonometrik tənliklər sistemində modelin identifikasiyası, mikro- və makroiqtisadiyyat məslələrinə sistemin tətbiqi, parametrlərin qiymətləndirilməsi üsulları müqayisəli təhlil olunmuşdur. Zaman sıraları bölmələrinində stasionar və qeyri-stasionar zaman sıralarının geniş təhlilləri aparılmış, onların kointeqrasiya olunması məsələləri tətbiqi nümunələrlə xarakterizə olunaraq iqtisadi interpretasiyalar verilmişdir. Bütün fəsillərin sonunda suallar, testlər, çalışmalar tərtib olunmuşdur.

Dərslikdən bakalavrlarla yanaşı, magistrlər, doktorantlar, müəllimlər, proqnoz-analitik hesablamalar sistemində çalışan mütəxəsislər də, istifadə edə bilər.

ISBN 978-9952-473-14-8

GİRİŞ

Milli iqtisadiyyatın inkişafı, onun dünya iqtisadiyyatına inteqrasiyası şəraitində iqtisadi proseslərin mürəkkəb xarakterli olması, makro- və mikroiqtisadiyyat, beynəlxalq iqtisadiyyat, xidmət, loqistika və s. sahələrdə effektiv idarəedici qərarların qəbul edilməsinə artan tələblər, riyazi və statistik üsullar əsasında, iqtisadi göstəricilər sisteminin elementləri arasında asılılıqların və real iqtisadi proseslərin dinamikasının proqnoz-analitik hesablamalar sistemində təhlil olunması zərurətini yaradır.

Ekonometrika real statistik verilənlərə əsasən ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika aparatından istifadə etməklə, müxtəlif iqtisadi göstəricilər (faktorlar) arasındakı asılılığın analizi üsulları və iqtisadi təzahürlərin, iqtisadi proseslərin, onların qarşılıqlı əlaqələrinin kəmiyyət qiymətləndirilməsi üsullarının toplusudur. Bu üsulların köməyilə əvvəllər məlum olmayan yeni əlaqələr aşkara çıxarıla bilir, iqtisadi göstəricilər arasında müəyyən asılılığın mövcud olması haqda iqtisadi nəzəriyyədə irəli sürülən hipotezlər ya dəqiqləşdirilir, ya da rədd edilir.

Ekonometrikanın praktiki əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, onun üsullarının tətbiqi təzahürlər arasında real mövcud əlaqələrin üzə çıxarılmasına, verilmiş şərtlərlə təzahürlərin və proseslərin inkişafının əsaslandırılmış proqnozlaşdırılmasına, qəbul olunan idarəedici qərarların iqtisadi nəticələrinin yoxlanılması və ədədi qiymətləndirilməsinə imkan verir.

Ekonometrika müasir iqtisadi təhsilin mühüm tərkib hissələrindən biridir. Universitet təhsili səviyyəsində iqtisadçı hazırlığı proqramında ona böyük əhəmiyyət verilir. Ekonometrik üsulların tətbiqi müasir iqtisadi tədqiqatlarda artıq standarta çevrilir.

İqtisadiyyatın analitik aspektli sahələrində yüksək səviyyəli ixtisaslaşdırılmış kadr hazırlığı üçün Universitet təhsilində iqtisadi ixtisaslar üzrə təhsil alan tələbələrin ekonometrika üsullarını mənimsəmələri vacib zəruri şərtdir.

Ekonometrika fənninin mənimsənilməsi üçün tələbə "Xətti cəbr və riyazi analiz", "Statistika", "Riyazi iqtisadiyyat", "Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika" (xüsusilə, paylanma parametrlərinin qiymətləndirilməsi, inam intervallarının qurulması, statistik hipotezlərin yoxlanılması), "Mikroiqtisadiyyat", "Makroiqtisadiyyat" fənlərinin anlayış və təhlil üsullarına dərindən yiyələnməlidir. Bu fənnlər bakalavr pilləsinin 1-ci kursunda və 2-ci kursun birinci semestrində tədris olunur.

Təqdim olunan "Ekonometrika" adlı dərslik müəllifin Bakı Dövlət Universitetinin "Beynəlxalq münasibətlər və iqtisadiyyat" fakultəsində "İqtisadiyyat", "Dünya iqtisadiyyatı" və "Menecment" ixtisaslarında eyni adlı fənndən oxuduğu mühazirələr, apardığı məşğələ dərsləri əsasında hazırlanmışdır. Dərslik fənn proqramında (fənn proqram Təhsil Nazirliyinin 22.07.15 tarixli 8.03 saylı əmri ilə təsdiq edilmişdir) nəzərdə tutulan bütün mövzuları əhatə edir və 10 fəsil, əlavələr və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Birinci fəsildə ekonometrikanın predmeti və tətbiqi üsullarının xarakteristikaları verilmiş, ekonometrik modelləşdirmənin əsas aspektləri, istifadə olunan metodikaları, dəyişənlərin növləri və onların necə seçilməsi məsələləri izah olunmuş, Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (ƏKKÜ) və Maksimal Doğruya Oxşarlıq Üsullnun (MDOÜ) mahiyyəti təhlil olunmuşdur.

İkinci fəsildə cüt reqressiya modelinin qurulması məsələsinə baxılır: məsələnin qoyuluşu, spesifikasiyası və modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi, alınmış modelin keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi, nöqtəvi və interval proqnoz qiymətlərinin alınması, modelin iqtisadi interpretasiyası. Burada həm də, qeyri-parametrik xətti reqressiya modellərinə və onların statistik qiymətləndirilməsi məsələsinə baxılır.

Üçüncü fəsil çoxdəyişənli reqressiya modelinin qurulmasına həsr olunmuşdur. Modelin spesifikasiyası və parametrlərin qiymətləndirilməsi, onların statistik əhəmiyyətliliyi daha dərindən təhlil olunmuşdur. Ən Kiçik Kvadratlar Üsulunun effektivliyi şərtləri (Qauss-Markov Teoremi) detalları ilə izah olunmuşdur. Faktorların multikollienarlığı və qalıqların avtokorrelyasiyası şərtləri, parametrlərin effektiv qiymətləndirilməsində Ümumiləşmiş Ən Kiçik Kvadratlar Üsulunun mahiyyəti təsvir olunmuş, MDOÜ-nun çoxdəyişənli reqressiyada tətbiq olunma mexanizmləri izah olunmuşdur.

Fəsil 4-də qeyri-xətti reqressiya modellərinin xətti reqressiyaya gətirilməsi üsulları öyrənilmiş, tərs, loqarfimik, eksponensial, loqxətti, multiplikativ modellərin parametrlərinin iqtisadi interpretasiyaları verilərək, onların statistik qiymətləndirilməsi incəliklərlə izah olunmuşdur. Daha ümumi modellərin parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün isə, qeyri-xətti optimallaşdırma üsullarının mahiyyəti və tətbiq olunma alqoritmləri təhlil edilmişdir.

Beşinci fəsildə dəyişən strukturlu reqressiya modelləri öyrənilir. Fiktiv dəyişənlərin modelə daxil edilməsi ilə modifikasiya olunmuş modellərə ƏKKÜ-nun tətbiqi araşdırılır, struktur dəyişənlərin Q.Çou testi ilə müəyyənləşdirilməsi, onun keyfiyyət əhəmiyyətliliyinin izahı şərh olunur. Burada parametrlərə nəzərən məhdudiyyətli ekonometrik modellərə baxılır. Onların qiymətləndirilməsi üsullarının mahiyyəti, tətbiqi araşdırılır, iqtisadi məsələlərin həllində əhəmiyyətliliyi göstərilir.

Fəsil 6-da stoxastik səbəbiyyət faktorları halında reqressiya məsələləri öyrənilir. Yeni instrumental dəyişənlərin seçilməsi və modeldə istifadə olunması yolları təhlil edilir, Qauss-Markov teoreminin stoxastik reqressorlar üçün modifikasiya olunmuş şərhi verilir. Keynsin istehlak modelinə necə tətbiq olunması məsələsi, parametrlərin qiymətləndirilməsi alqoritmi öyrənilir.

Fəsil 7-də eynizamanlı tənliklər sisteminə baxılır. Burada sistemlərə klassik qiymətləndirmə üsullarının tətbiqində ortaya çıxan çətinliklər və onların aradan qaldırılması yolları göstərilmiş, Dolayı, İki addımlı, Üçaddımlı Ən Kiçik Kvadratlar Üsullarının mahiyyəti izah olunmuşdur. Modelin identifikasiyası şərtləri öyrənilmiş, iqtisadi məsələlərin həllində tətbiq olunma mexanizmləri şərh olunmuşdur.

Fəsil 8-də birölçülü zaman sıralarının modelləşdirilməsi və proqnozlaşdırılması məsələlərinə baxılır. Zaman sıralarının reqressiya modellərinin Qauss-Markov şərtləri, tendensiyaların modelləşdirilməsi məsələləri (iqtisadi artım əyrilərinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi) öyrənilmiş, stasionar zaman sıraları və onların ehtimal xarakteristikaları, Avtokovariyasiya və Avtokorrelyasiya funksiyaları misallarla təhlil olunmuşdur. Burada zaman sıralarının ilkin analizi və hamarlanması üsulları araşdırılmış, Sürüşkən orta üsulları tətbiqi misallarla izah edilmişdir. Sonra isə, zaman sıralarının analizində laq və fərq operatorlarının istifadə olunma qaydaları öyrənilmişdir.

Doqquzuncu fəsildə dinamik ekonometrik modellərin ümumi xarakteristikaları verilmiş, stasionar zaman sıralarının p tərtibli Avtoreqressiya AR(p), q tərtibli Sürüşkən Orta SO(q) və onların kombinasiyaları modellərinə baxılmış, stasionarlıq şərtləri öyrənilmiş, Yul-Uoker tənliklər sistemindən Avtokorrelyasiya və Xüsusi Avtokorrelyasiya funksiyalarının müəyyənləşdirilməsi ətraflı araşdırılmış, qeyri-bircins stoxastik fərq tənliklərinin həll üsulları verilmiş, AR(2) modelinin xarakteristik köklər üzrə ayrılışı təhlil olunmuş, AR(p), SO(q) və ARSO(p,q) modellərinin seçilməsində Akayke, Şvarts, Hennan-Kuin informasiya kriteriyalarının yoxlanılması sadə misallarla göstərilmişdir. Burada paylanmış laq modellərinə xüsusi yer verilmiş, hissə-hissə (tədricən) uyğunlaşma, adaptiv gözləmə, səhvlərin korreksiyası modellərinin qiymətləndirilməsi şərtləri öyrənilmiş, səbəbiyyət-nəticə asılılığının yoxlanılmasında Qreyncer testi şərh edilmiş, periodik stasionar zaman sıralarının harmonik analizi aparılaraq parametrlərin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsi, qiymətləndirilmələrin statistik əhəmiyyətliliyi izah edilmişdir.

Onuncu fəsildə qeyri-stasionar zaman sıraları öyrənilir. Onların stasionar sıralara inteqrasiya olunması məsələləri, stasionarlığın yoxlanılmasında vahid köklərin mövcudluğunun yoxlanılması üçün Diki-Fuller testləri, onların t-Styudent testindən fərqli xarakteristikaları təhlil edilir. Burada, həmdə, İnteqrasiya olunan AR və SO modelləri, qeyri-stasionar zaman sıralarının harmonik analizi, mövsümilik məslələri ətraflı izah olunur.

Bütün fəsillər üzrə suallar, testlər və tapşırıqlar tərtib edilmişdir. Yuxarıda qeyd olunan ixtisaslarda bakalavr pilləsinin III kursunda "İnformasiya kommunikasiya texnologiyaları" ayrıca fənn kimi tədris olunduğundan və burada STATİSTİKA, MS EXCEL, SPSS, Eviews paketlərində ekonometrik məsələlərin həlli üçün kifayət qədər tədris saatları ayrıldığından, "Ekonometrika" dərsliyində ancaq nəzəri, əl və kalkulyatorla heablama əməliyyatları aparılan məsələlər tərtib olunmuşdur.

Bu dərslik "İqtisadiyyat", "Dünya iqtisadiyyatı", "Menecment" və s. ixtisaslar üzrə bakalavr pilləsində gələcəkdə tədris olunan "İnformasiya kommunikasiya texnologiyaları", "İqtisadi-riyazi modelləşdirmə", "Maliyyə riyaziyyatı", "İnvestisiyalar", "Loqistika" və s. fənlərində tətbiq edilən ekonometrik üsulların mənimsənilməsində, magistratura pilləsində isə, "Ekonometrika", "İqtisadi-riyazi modelləşdirmə" ixtisaslarında elmi tədqiqat işlərinin aparılmasında mühüm rol oynayır. Dərslik həm də, doktorantlar, elmi işçilər, proqnoz-analitik hesablamaları sistemində çalışan digər mütəxəssislər üçün əhəmiyyətlidir.

FƏSİL I

EKONOMETRİKANIN ƏSAS MƏSƏLƏLƏRİ VƏ MODELLƏRİ

§1.1. Ekonometrikanın əsas məsələləri

Ekonometrika fənni iqtisadi təhsildə əsas baza fənlərindən hesab edilir. Onun əsas tərkibləri iqtisadi nəzəriyyə, iqtisadi statistika və riyaziyyatdır.

Ekonometrikanın müxtəlif variantlarda tərifləri mövcuddur:

1. Genişləndirilmiş tərifdə iqtisadiyyatda ölçü ilə əlaqədar hər bir kəmiyyət qiymətləndirmələri öz əksini tapır;

2. Qısa instrumental istiqamətləndirilmiş tərifdə ekonometrika dedikdə təhlil olunan iqtisadi göstəricilər arasındakı model münasibətlərinin verifikasiyasına imkan verən müəyyən riyazi-statistik vasitələr toplusu başa düşülür.

Ekonometriya (ekonometrika) termini elmi ədəbiyyata 1930-cu ildə Norveç statistiki Raqnar Friş tərəfindən daxil edilərək elmi tədqiqatların yeni istiqaməti olaraq iqtisadi nəzəriyyənin konsepsiya və nəticələrinin baxılan proseslərin kəmiyyət təhlillərinin nəticələri ilə elmi əsaslandırılmış təsdiq olunması zərurətindən yaranmışdır.

Ekonometrikanın əsas məsələləri:

1. Empirik təhlil aparılması üçün iqtisadi modellərin əlverişli riyazi formada təsviri kimi ekonometrik modellərin qurulması;

2. Qurulmuş modellərin real verilənlərə daha adekvat olmasını təmin edən partametrlərin qiymətləndirilməsi;

3. Modelin alınmış parametrlərinin və ümumilikdə bütöv modelin keyfiyyətinin yoxlanılması. Bu mərhələyə əksər hallarda verifikasiya mərhələsi də deyirlər.

4. Qurulmuş modellərin tədqiq olunan iqtisadi göstəricilərin təhlilində, proqnozlaşdırmada, düzgün iqtisadi siyasət aparılmasında istifadə olunması.

İqtisadi proseslərin öyrənilməsi (qarşılıqlı əlaqələri) riyazi (ekonometrik) modellərlə həyata keçirilir. Ekonometrik modelin mənasını dərindən təsvir etmək üçün bütün modelləşdirmə prosesini 6 əsas mərhələyə bölmək olar:

1. (Məsələnin qoyuluşu): Modelin son məqsədinin, modeldə iştirak edən faktorların və göstəricilərin, onların rolunun müəyyənləşdirilməsi.

2. (Apriop): Öyrənilən təzahürlərin modeləvvəli iqtisadi mənasının təhlili, apriop informasiyaların, xüsusilə, ilkin statistik verilənlər və qalıq təsadüfi tərkiblərin təbiəti və məzmununu ifadə edən informasiyaların formalaşdırılması;

3. (Parametrləşdirmə): Ümumi modelin və həmçinin ona daxil olan tərkib və formaların seçilməsi;

4. (İnformasiya mərhələsi): Zəruri statistik informasiyaların toplanılması. Burada öyrənilən təzahürün müxtəlif zaman və fəza dəyişənləri parçalarında mövcud olmasında əks olunan modelin faktor və göstəricilərinin qiymətləri qeyd olunur;

5. (Modelin identifikasiyası): Modelin statistik təhlili. Burada 1-ci növbədə parametrin naməlum parametrlərinin statistik təhlili aparılır;

6. (Modelin verifikasiyası): Real və model verilənlərin tutuşdurulması, modelin adekvatlığının yoxlanılması, model verilənlərinin dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi.

§1.2. Ekonometrikada əsas modellər

İxtiyari ekonometrik tədqiqatda ekonometrik modelin qurulması əsas məsələdir. Belə ki, baxılan sosial-iqtisadi prosesin inkişaf tendensiyasının, proqnozlaşdırmanın təhlilinin nəticələrinin əsaslandırılması modelin keyfiyyəti ilə müəyyən olunur. Ekonometrik tədqiqatlarda əsasən fərz edilir ki, modelləşdirilən prosesdə qanunauyğunluqlar digər təzahürlərin, faktorların təsirləri nəticəsində formalaşdırılır. Bu prosesin inkişaf qanunauyğunluqlarının təsviri belə ümumi ekonometrik modellə göstərilir:

$$y_t = f(\alpha, x_t) + \varepsilon_t \ . \qquad (1.1)$$

Burada y_t prosesin t=1,2,...,T zaman anlarında inkişaf səviyyəsini, x_t, t=1,2,...,n prosesə təsir edən xarici təzahürlər, faktorlar, $f(\alpha, x_t)$-funksional asılığı y_t və x_{it} dəyişənlərinin $t=1,2,...,T$ anlarında səviyyələrinin qarşılıqlı asılılığının strukturu və formasını xarakterizə edir; x_{it}=(x_{1t}, x_{2t},..., x_{nt}) vektoru t anında asılı olmayan dəyişənin (faktorun) qiyməti, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ modelin parametrlərindən ibarət vektordur. α_i, $i = \overline{1,n}$ parametri baxılan ($1,T$) intervalında x_i faktorunun y dəyişəninə təsiri dərəcəsini ifadə edir; α_0- modeldə sabit kəmiyyətdir; ε_t -kəmiyyəti t zaman anında modelin təsadüfi səhvini göstərir.

Müəyyən ekonometrik tədqiqatlarda asılı y_t dəyişəni və x_{it}, $t=1,2,...,T$, $i=1,2,...,n$ qiymətləri bircins obyektlər məcmusunda onların səviyyələrinin paylanmasını xarakterizə edir. Bu halda t indeksi obyektin sıra nömrəsini, (1.1) modeli isə, y dəyişəninin həmin məcmuda onların spesifik xassələrini xarakterizə edən faktorların təsiri ilə necə paylanmasını təsvir edir.

x_{it}, $i=1,2,...,n$ faktorlarının y dəyişənindən asılı olmadığı fərz edilərək nəzərdə tutulur ki, y-in x_i –lərə əks təsiri mövcud deyil. Bu səbəbdən x_i faktorlarına əsasən ekzogen (xarici və ya faktor) dəyişəni deyilir. y dəyişəninə isə, modelin endogen (daxili və ya səbəbiyyət faktoruna münasibət bildirən dəyişəni) dəyişəni deyilir. Burada "daxili" termini həm də onu ifadə edir ki, hər hansı üsulla α_i, $i=0,1,...,n$ parametrlərinin a=(a_0,a_1,...,a_n) kəmiyyət qiymətləndirilməsi alınmışdırsa, burada $\hat{y}_t$ asılı dəyişəninin hesablanmış qiymətlərinin müəyyənləşdirilməsində əsas rolu $f(\alpha, x_t)$ funksional asılılığı oynayır. "Xarici" termini isə, onu xarakterizə edir ki, x_{it} dəyişəninin qiyməti modeldən kənarda müəyyənləşdirilir, modeldə isə, ilkin verilənlər kimi daxil edilir.

Ekonometrikada x_{it} xarici dəyişənlərinin statistik məzmununa dair müxtəlif fərziyyələr qəbul olunur, eyni zamanda y dəyişəninə (1.1) -ə uyğun olaraq həmişə təsadüfi kəmiyyət kimi baxılır.

Asılı olmayan dəyişənlərin üç əsas statistik interpretasiyasına baxılır:

1. x_i asılı olmayan dəyişənləri (və ya onların bir hissəsi) determinik kəmyyətlərdir, onların qiymətləri səbəbiyyət kimi şərtləndirilir və təsadüfi dəyişənlərdən asılı deyil;
2. x_i asılı olmayan dəyişənlərinə təsadüfi kəmiyyət kimi baxılır, onların qiymətləri hər bir zaman anında birqiymətli təyin olunmur və vəziyyətdən asılıdır;
3. x_i asılı olmayan dəyişənləri elə kəmiyyətlərdir ki, onların x_{it} qiymətləri müəyyən səhvlərlə tapılır (ölçmə səhvləri).

(1.1) ifadəsi yalnız ekonometrik modelin ümumi şəklini müəyyənləşdirir. Konkret ekonometrik tədqiqatlarda xüsusi tip modellərdən istifadə oluna bilər ki, onların hər birinin özünə məxsus xarakteristik xüsusiyyətləri ola bilər. Bu tipləri əsasən iki kriteriya əsasında təsnifata ayırmaq olar:

1-ci halda x_i ekzogen faktorlarının növünə görə;

2-ci halda isə, modelin ε_t səhvlərinin xassələrinə görə.

Klassik reqressiya modellərində əksər hallarda modelin səhvi və öz aralarında asılı olmayan faktorlardan istifadə olunur. Bu zaman fərz edilir ki, modelin təsadüfi tərkibi (səhvi) "ağ küy" xassəsinə malikdir. Burada "ağ küy" dedikdə riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası sabit və müxtəlif zaman anlarındakı qiymətlər arasındakı korrelyasiyaları (ε_t və ε_{t-1}, ε_t və ε_{t-2} və s. t=1,2,...,T) sıfır olan proses başa düşülür. Bu onu göstərir ki,

ε_t səhvlərinin zaman sırasında avtokorrelyasiya əlaqələri mövcud deyil.

Asılı olmayan dəyişənlərin laqlarla verilmiş modellərində faktorlar kimi x dəyişəninin heç olmazsa bir komponentinin müxtəlif zaman anlarında qiymətləri götürülür. Belə qiymətlər x_{it}, $x_{i,t-1}$, $x_{i,t-2}$, ... ola bilər. Analoji qaydada laqlı asılı dəyişənli modellərdə ekzogen faktorlar olaraq y dəyişəninin əvvəlki zaman anlarında y_{t-1}, y_{t-2},... qiymətlərinə baxılır.

Bundan başqa, modellər təsadüfi tərkibin xassələrinə görə də fərqlənə bilərlər: $t=1,2,...,T$ intervalının müxtəlif hissələrində təsadüfi tərkibin paylanmasının dispersiyasının sabit olmadığı modellər; iki qonşu ε_t və ε_{t-1} qiymətləri arasında avtokorrelyasiyanın olduğu modellər. Nəhayət, x_{it} ekzogen dəyişənləri ilə təsadüfi tərkiblər arasında korrelyasiya əlaqələri olan modellərə baxılır ki, belə hallar ekonometrik tənliklər sistemində əks oluna bilər. Həmçinin digər spesifik xassəli bu tip modellər ola bilər.

Maliyyə göstəricilərinin dinamik tədqiqində və bir sıra digər təzahürlərin təhlilində geniş tətbiqə malik xüsusi tip ekonometrik zaman sıraları (stasionar və qeyri-stasionar) modelləri inkişaf tendensiyaları daxili qanunauyğunluqları ilə müəyyənləşdirilən prosesləri təsvir edir.

x_i dəyişənlərinin tərkibi və f funksional asılılığının forması ya asılı və asılı olmayan dəyişənlər arasındakı qarşılıqlı əlaqənin əsasında duran iqtisadi konsepsiyanı, ya da onlar arasındakı empirik (konkret tədqiqat prosesində müəyyənləşdirilən) qarşılıqlı əlaqəni əks etdirə bilər.

Ekonometrik modelin qurulması üçün zəruri ilkin verilənlər olaraq asılı y dəyişəninin və asılı olmayan x_i faktorlarının məlum qiymətləri toplusu (massivlər) götürülür. Belə ki, iki mahiyyətcə müxtəlif tip ilkin informasiya massivlərindən istifadə oluna bilər: statik; dinamik. Statik massiv müəyyən zaman periodunda bircins obyektlər məcmusunda y- nəticə dəyişəninin (asılı dəyişən, izah-olunan dəyişən və s.) və ona təsir edən

x_i faktorlarının (asılı olmayan dəyişənlər, izahedici dəyişənlər) qiymətlərindən formalaşdırılır. Belə obyektlərə misal olaraq eynitipli sənaye müəssisələrini (vahid sahə istiqamətli zavodlar) göstərmək olar. Tətbiqi tədqiqatlarda y dəyişəni olaraq əmək məhsuldarlığı, istehsal məhsullarının həcmi və s. göstəricilərinə baxılır. x_i dəyişənləri olaraq bu göstəricilərin səviyyələrinə təsir edən istifadə olunan fondların həcmi, işçilərin sayı və ixtisasartımı faktorlarına baxılır.

Dinamik informasiyalı ekonometrik modellər y_t asılı dəyişəninin t zaman anında qiymətlərini x_{it} asılı olmayan dəyişəninin (faktorunun) həmin zaman anlarındakı və ya əvvəlki zaman anlarındakı qiymətləri ilə əlaqələndirir. Belə informasiyalar, məsələn, hər hansı bir zavoddankı əmək məhsuldarlığı səviyyələri və onları müəyyənləşdirən faktorların ardıcıl zaman periodlarında qiymətlərini əks etdirir.

Ekonometrik modelin qurulması üçün ilkin informasiyalar qarışıq tip də ola bilər. Məsələn, bu informasiyalar öyrənilən istehsal göstəricilərinin müəyyən qrup zavodlar üçün bir sıra illər üzrə səviyyəlrini ifadə edə bilər.

Ekonometrik modelləşdirmə üçün ilkin informasiyanın formalaşdırılmasında əsas məsələ tədqiq olunan təzahürlərin mahiyyətinə adekvat göstəricilərin seçilməsi məsələsidir ki, burada ekonometrik modelin qurulmasının 1-ci mərhələsində təzahürlərin məzmununun təhlilindən onların kəmiyyət xarakteristikalarının (göstəricilərinin) formalaşdırılmasına keçid zamanı müəyyən anlayışların dəyişdirilməsinə əhəmiyyət vermək lazımdır.

Təzahürlərin məzmununun təhlili mərhələsində onlara keyfiyyət səviyyələrində baxılır. Bu zaman kifayət qədər ümumi anlayışlarla əməliyyatlar aparılır, məsələn, xəstəliklər, tibbi xidmətlərin səviyyəsi, həyat səviyyəsi və keyfiyyəti, işçi qüvvəsinin keyfiyyəti, hava şəraiti və s. Bununla əlaqədar əksər hallarda ekonometrik model təzahürlər arasındakı mövcud qanunauyğunluqların ifadəsi üçün qurulur. Lakin ekonometrik modelin qurulmasında ilkin informasiyalar olaraq bu təzahürlərin xassələrini, tendensiyalarını kəmiyyət xarakteristikaları şəklində ifadə edən informasiyalar, göstəricilər toplusu götürülür.

Ənənəvi tədqiqat istiqamətləri üçün göstəricilərin tərkibinin əsaslandırılması məsələsi həll edilmiş hesab edilir. Məsələn, əmək məhsuldarlığının tədqiqində, makroiqtisadi təhlillərdə əsasən köhnəlmiş (əvvəlki) göstəricilər toplusuna baxılır ki, onların qiymətləri statistik toplularda, elmi hesabatlarda və s. verilir.

(1.1) ifadəsində $f(\alpha, x_t)$-nin konkret analitik ifadəsinin seçilməsi üçün müxtəlif mühakimələrdən istifadə olunur:

1. Asılılığın keyfiyyət xarakterinin analitik tədqiqi zamanı alınan nəticələr (dəyişənlərin dəyişmə istiqamətləri və onun xarakteristikaları);
2. Müxtəlif analitik asılılıqların xassələrinin təsviri;
3. Modelləşdirmənin məqsədi;

$f(\alpha, x_t)$-analitik asılılıqlarının daha çox istifadə olunan halları aşağıdakılar ola bilər:

1. Xətti

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \ldots + \alpha_n x_{nt} + \varepsilon_t; \tag{1.2}$$

2. Sağ yarımloqorifmik

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_{1t} + \ldots + \alpha_n \ln x_{nt} + \varepsilon_t; \tag{1.3}$$

3. Üstlü

$$y_t = \alpha_0 \cdot x_{1t}^{\alpha_1} x_{2t}^{\alpha_2} \ldots x_{nt}^{\alpha_n} \varepsilon_t; \tag{1.4}$$

4. Hiperbolik

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{x_{1t}} + \ldots + \alpha_n \cdot \frac{1}{x_{nt}} + \varepsilon_t; \tag{1.5}$$

5. Loqarifmik hiperbolik

$$\ln y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{x_{1t}} + \ldots + \alpha_n \cdot \frac{1}{x_{nt}} + \varepsilon_t; \tag{1.6}$$

6. Tərs xətti (Tornkvist funksiyası)

$$\frac{1}{y_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \frac{1}{x_{1t}} + \ldots + \alpha_n \cdot \frac{1}{x_{nt}} + \varepsilon_t \ ; \qquad (1.7)$$

7. Əvəzolunmanın sabit elastikliyi funksiyası

$$y_t = \left[\alpha_1 \cdot \frac{1}{x_{1t}{}^{\rho}} + \ldots + \alpha_n \cdot \frac{1}{x_{nt}{}^{\rho}} \right]^{-\lambda/\rho} \varepsilon_t \ ; \qquad (1.8)$$

burada λ və ρ funksiyanın parametrləridir;

8. Eksponensial funksiya

$$y_t = \exp\{\alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \ldots + \alpha_n x_{nt} + \varepsilon_t\}. \qquad (1.9)$$

Xətti modellərdə x_{it} faktorlarının əmsalları olan α_i parametrləri x_{it} faktorunun qiymətini bir vahid dəyişdikdə, digər faktorların qiymətləri dəyişməz qaldıqda, nəticə y_t faktorunun ortalama nə qədər dəyişməsini xarakterizə edir.

Üstlü modellərdə α_i əmsalları elastiklik əmsallarını göstərir. Onlar uyğun x_{it} faktorunun qiymətini 1% dəyişdikdə digər faktorların qiymətini dəyişməmək şərtilə, asılı y_t dəyişəninin ortalama neçə faiz dəyişməsini ifadə edir. Bu tip reqressiya modelləri istehsal funksiyalarının, tələb və təklifin tədqiqində geniş tətbiqləri ilə fərqlənir.

Modelin tipinin modelləşdirilməsində belə bir mülahizədən istifadə olunur ki, əgər nəticə göstəricisinin dəyişməsi faktor göstəricilərinin dəyişməsi ilə düz mütənasibdirsə, onda xətti model adekvat hesab olunur. Digər mülahizə olaraq qeyd edək ki, əgər nəticə göstəricisinin dəyişməsi uyğun faktorun qiyməti ilə mütənasibdirsə, onda adekvat model olaraq ya (1.4), ya da (1.9) modelini seçmək olar.

Əgər faktorların qiymətlərini artırdıqda nəticə göstəricisinin qiymətləri monoton olaraq sonlu limitə yığılırsa, onda (1.5) hiperbolik modelindən istifadə etmək olar.

Əgər x_{it} faktorlarının elə qiymətləri mövcuddursa ki, bu qiymətlərdə uyğun faktor asılı dəyişənə minimaks təsir göstərir, onda modelə x_{it} faktoru nəinki 1-ci tərtibdən, həm də 2-ci tərtibdən daxil olur:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1^{(1)} x_{it} + \alpha_1^{(2)} x_{it}^{\ 2} ... + \alpha_n^{(1)} x_{it} + \alpha_n^{(2)} x_{it}^{\ 2} + \varepsilon_t \ .$$

Bu tip modellər iqtisadi dəyişənlərin optimallıq xassəsini təsvir edir. Məsələn, fəhlələrin yaş göstəricilərinin müəyyən həddə qədər artımı əmək məhsuldarlığının qiymətini hər hansı artım qiymətinə çatdırır, sonra isə bu qiymət azalır.

Qeyd edək ki, $f(\alpha, x_t)$ funksiyalarının əksəriyyəti müəyyən çevirmələr vasitəsilə (1.2) xətti formasına gətirilə bilər. Məsələn, əgər y_t və x_{it} asılılıqları $y_t \sim \dfrac{1}{x_{it}}$ şəklindədirsə, onda $u_{it} = \dfrac{1}{x_{it}}$ dəyişənini daxil etməklə ilkin faktorların çevrilməsi dəqiqliyilə (1.2) ifadəsini almaq olar. Tətbiqi tədqiqatlarda $u_{it}=\ln x_{it}$, $z_t=\ln y_t$ əvəzləmələri aparmaqla (1.4) modelini xətti hala gətirmək daha məqsədəuyğun olar. Alınmış xətti model y_t və x_{it} dəyişənlərinin loqarifmlərini əlaqələndirir.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, $f(\alpha, x_t)$ funksional asılılığının konkret tipi y_t və x_{it}, $i=1,2,...,n$ prosesləri arasındakı nəzərdə tutulan qarşılıqlı əlaqənin xarakterini təsvir edən iqtisadi məzmunlu konsepsiyanı ifadə edə bilər. (1.4) tipli funksiyalardan istifadə olunması, məsələn, belə konseptual fərziyyəyə əsaslana bilər ki, hər bir x_{it} istehsal resursuna (faktora) uyğun y_t istehsal buraxılışının xüsusi elastiklik əmsalı sabitdir. Qeyd edək ki, t nöqtəsində xüsusi elastiklik digər faktorların qiymətinin bu nöqtədə sabit qalması şərtilə, x_{it} faktorunun qiyməti 1% dəyişdikdə asılı y_t dəyişəninin qiymətinin neçə faiz dəyişməsini göstərir:

$$E_{it} = \frac{\partial y_t}{\partial x_{it}} \cdot \frac{x_{it}}{y_t} \tag{1.10}$$

(1.4) ifadəsində α_i parametri y_t dəyişəninin x_{it} faktoru üzrə elastiklik qiymətini bütün $(1,T)$ intervalında müəyyənləşdirir.

(1.8) funksiyası resursların bir-birilə əvəz olunmasının elastikliyinin sabit olması şərti ödənildikdə istifadə olunur. Məsələn, əgər L əmək faktorunun K kapital faktoru ilə əvəzolunması nəzərdə tutulursa, onda əvəzolunmanının elastiklik əmsalı asılı olmayan dəyişənin qiymətinin dəyişdirilməməsi şərtilə, $N_{KL} = -\frac{dK}{dL}$ -əməyin kapitalla əvəz olunmasının limit normasının 1% dəyişməsi ilə $\frac{K}{L}$-kapital silahlandırılmasının neçə faiz dəyişməsini göstərir.

Ümumi halda i-ci faktorun j-cu faktorla əvəzolunmasının elastikliyi

$$\sigma_{ji} = \left(\frac{\partial N_{ji}}{\partial x_j / x_i} \cdot \frac{x_j / x_i}{N_{ji}} \right)^{-1} \qquad (1.11)$$

düsturu ilə hesablanır.

i-ci faktorun j-cu faktorla əvəzolunmasının N_{ji} norması asılı dəyişənin sabit səviyyəsinin saxlanılması və digər asılı olmayan dəyişənlərin qiymətlərinin dəyişilməməsi şərtilə i-ci faktorun bir vahidinin əvəzolunması üçün j-cu faktordan hansı miqdarda tələb olunmasını göstərir. (1.8) funksiyası üçün bu əvəzolunma norması $\frac{1}{1+\rho}$ olur (bax. [4, səh. 89-99]).

§1.3. Faktorların seçilməsi üsulları

Ekonometrik modelin qurulması prosesinin mühüm tərkib hissəsi öyrənilən göstəriciyə ciddi təsir edən və işlənilən modelə salınması nəzərdə tutulan faktorların seçilməsidir. Faktorların optimal seçilməsi kəmiyyət və keyfiyyət təhlili əsasında müəyyənləşdirilir. Məsələnin qoyuluşu və məzmunu iqtisadi təhlil mərhələsində modelin qurulmasında nəzərə alınan faktorlar seçilir. Bir sıra hallarda faktorlar birqiymətli təyin olunur və bu təyinolunma böyük ehtimallıdır. Məsələn, mala tələbat əsasən onun qiyməti və istehlakçının gəliri ilə müəyyənləşdirilir. Daha mürəkkəb hallarda sonrakı mərhələdə formal statistik üsullarla hər bir faktorun modelə daxil olunmasının məqsədəuyğunluğu öyrənilir.

Faktorların arasında sıx xətti korrelyasiya asılılığının mövcudluğu yoxlanılır. x_{it} və x_{jt} faktorları arasında xətti korrelyasiya asılılığının olması üçün şərt

$$\left| r_{x_{it}x_{jt}} \right| \geq r_{krit} \tag{1.12}$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir. Burada $r_{x_{it}x_{jt}}$

$$r_{x_{it}x_{jt}} = \frac{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{it} - \bar{x}_{it})(x_{jt} - \bar{x}_{j})}{\sigma_{x_{it}}\sigma_{x_{jt}}}, \tag{1.13}$$

düsturu ilə hesablanan seçimi xətti korrelyasiya əmsalıdır, n-müşahidələrin sayı, $r_{krit} \approx 0{,}8\text{-}0{,}9$ kritik qiyməti empirik təyin olunur.

Faktorlar arasında sıx korrelyasiya asılılığının varlığı modelin parametrlərinin etibarlı olmayan qiymətləndirilməsinin alınmasına gətirir. Faktorlararası güclü korrelyasının aradan qaldırılması üçün bir sıra yanaşmalar tətbiq edilir:

- modeldən bir və ya bir neçə faktorun çıxarılması. İki korrelə olunan faktorlardan digər faktorlarla daha güclü korrelə olunan faktor modeldən kənarlaşdırılır;

- müəyyən çevirmələr aparmaqla faktorlar arasındakı korrelyasiyanı azaltmaq olar. Məsələn, ilkin dəyişənlərdən onların xətti kombinasiyalarına keçilir ki, bu kombinasiyalar bir-biri ilə korrelə olunmur (baş komponentlər üsulu). Dinamik sıralar əsasında modellərin qurulmasında ilkin verilənlərdən onların $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ 1-ci tərtib fərqlərinə keçilərək tendensiyaların təsirini kənarlaşdırmağa nail olunur.

Faktorların modelə salınması üçün meyarlardan biri onların nəticə göstəricisinə izoləedilmiş təsiri dərəcəsinin müəyyənləşdirilməsidir ki, o $r_{y_t x_{it}}$ cüt reqressiya əmsalı ilə təyin olunur.

$$\left| r_{y_t x_{it}} \right| \geq r^2_{krit}, \tag{1.14}$$

şərtini ödəyən x_{it} faktorları seçilir. Burada r^2_{krit} ≈0,5-0,6 (empirik təyin olunur).

Optimal faktorlar dəstinin müəyyənləşdirilməsində iki üsuldan istifadə oluna bilər: 1) daxiletmə üsulu; 2) kənarlaşdırma üsulu.

Daxiletmə üsuluna əsasən əvvəlcə daha çox təsirli faktorla reqressiya tənliyi qurulur (bu faktorun nəticə göstəricisi ilə $r_{y_t x_{it}}$ korrelyasiya əmsalı modulca ən böyükdür). Sonra isə ardıcıl olaraq digər faktorlar daxil edilərək ən güclü təsirə malik faktorlar cütlüyü müəyyənləşdirilir. Daha sonra birinci iki faktora yenə bir faktor əlavə edilərək ən yaxşı üçlük faktorlar tapılır və s. Hər bir addımla reqressiya modeli qurulur və faktorların əhəmiyyətliliyi yoxlanılır. Modelə ancaq əhəmiyyətli faktorlar daxil edilir. Faktorun əhəmiyyətliliyi ya Styudent kriteriyası, ya da xüsusi Fişer kriteriyası ilə yoxlanılır.

Kənarlaşdırma üsuluna əsasən əvvəlcə tam faktorlar dəsti üzrə reqressiya tənliyi qurulur, sonra isə onlardan ardıcıl şəkildə zəif əhəmiyyətli faktorlar kənarlaşdırılır. Hər bir addımda ancaq bir faktor kənarlaşdırılır.

Parametrlərin kifayət qədər etibarlı qiymətləndirmələrini almaq üçün müşahidələrin sayının parametrlərin sayından ən azı 6-7 dəfə çox olması tövsiyə olunur.

§1.4. Modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi

Faktorların seçimi və $f(\alpha, x_t)$ funksiyasının tipi müəyyənləşdirildikdən sonra (1.1) modelində α_i parametrlərinin ədədi qiymətlərinin tapılması mərhələsinə keçilir. Qeyd edək ki, α_i parametrlərinin tapılmış qiymətləri həm də parametrlərin qiymətləndirilməsi hesab edilir. Parametrlərin qiymətləndirilməsində ilkin verilənlər olaraq əvvəlcədən məlum $\{(y_t, x_{1t}, x_{2t},...,x_{nt}), t=1,2,...,T\}$ müşahidələr massivi götürülür. İlkin verilənlər təsadüfi kəmiyyətlərin mümkünlüyünü tərkib kimi saxladığından, alınmış qiymətlər də təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu kəmiyyətlər qiymətləndirmə üsulundan da asılıdır. Burada daha keyfiyyətli qiymətləndirmə üsulunun seçilməsi zərurəti yaranır.

Statistik qiymətləndirmə nəzəriyyəsinə [5, səh. 261-274] əsasən qiymətləndirmənin keyfiyyəti onun meylsizlik, tutarlılıq, effektivlik xassələrinin olması ilə müəyyənləşdirilir.

Parametrin qiymətləndirilməsi o zaman meylsiz hesab olunur ki, onun riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametrə bərabər olsun.

Parametrin qiymətləndirilməsi o zaman tutarlı hesab olunur ki, o müşahidələrin sayı artdıqda ehtimala görə qiymətləndirilən parametrə yığılsın.

Parametrin qiymətləndirilməsi o zaman effektiv hesab olunur ki, o eyni *n* həcmli seçimi verilənlərə nəzərən hesablanmış bütün mümkün meylsiz qiymətləndirmələr içərisində ən kiçik dispersiyaya malik olsun.

Parametrlərin qiymətləndirilməsində əsasən Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (ƏKKÜ) [5, səh. 301] və Maksimal Doğruya-oxşarlıq (MDOÜ) [5, səh.292-300] üsulundan istifadə olunur. Modelin xətası ε_t müəyyən şərtləri ödədikdə bu üsullarla alınmış parametrlərin qiymətləndirilmələri meylsizlik, tutarlılıq, effektivlik xassələrini ödəyir. Ona görə də parametrlərin qiymətləndirilmələrini aldıqdan sonra qiymətləndirmənin effektivliyinə inanmaq üçün qeyd olunan şərtləri yoxlamaq lazımdır. Əgər bu şərtlər ödənilmirsə, onda modeli uyğun olaraq korrektə etmək lazımdır. Modelin ε_t xətaları üzərinə qoyulan şərtlərin ödənilməməsinin səbəbləri modeldə ciddi faktorların nəzərə alınmaması, modelin göstərilişinin düzgün seçilməməsi ola bilər.

§1.5. Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (ƏKKÜ) və Maksimal Doğruya Oxşarlıq Üsulu (MDOU)

Riyazi statistikada ([5, səh. 300]) ƏKKÜ-nun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, əgər təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu və ya paylanma sıxlığı məlumdursa, lakin bu paylanmaların parametrləri məlum deyilsə, onda seçimi verilənlərlə parametrlərin fərqinin kvadratları cəminin minimallaşdırılması şərtindən parametrlərin seçimi verilənlərə nəzərən qiymətlən-dirilməsi tapılır. Bu üsulun tətbiqində seçimi verilənlərin paylanma qanununun verilməsinə ehtiyac olmur. İlk olaraq üsul normal səhvli verilənlərin emalında tətbiq edilib. Sadə bir parametr halında $y_i = \alpha + \varepsilon_i, \varepsilon_i \in N(0,\sigma^2)$ tipli verilənlər üçün α kəmiyyətinin qiymətləndirilməsi MDOÜ [5, səh.292-300] ilə edilir. Normal paylanmanın həqiqətə oxşarlıq funksiyası belə olur:

$$L(\alpha) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha)^2} = Ce^{-hT},$$

burada $C = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n$, $h = \frac{1}{2\sigma^2} > 0$, $T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2$.

$T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2$ parametrdən asılı funksiya minimum qiymət aldıqda həqiqətə oxşarlıq funksiyası maksimum qiymət alır. Əgər α parametrinə heç bir əlavə şərt qoyulmasa, onda

ƏKKÜ ilə alınmış qiymətləndirmə MDOU qiymətləndirməsi ilə üst-üstə düşür: $\alpha = \bar{y}$.

İndi tutaq ki, y dəyişmə qanunu $Y=f\ (\alpha, x)$ funksional asılılığı ilə təsvir olunan müəyyən iqtisadi göstəricidir. Burada $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ parametr, x-çoxölçülü determinik dəyişəndir. Tutaq ki, i-ci müşahidə nəticəsində $f(\alpha, x_i)$ funksiyasının ε_i təsadüfi səhvlərlə y_i qiymətləri alınmışdır: $y_i = f(\alpha, x_i) + \varepsilon_i$.

$\alpha_1,...,\alpha_n$ parametrlərinin $(x_1, y_1),...,(x_n,y_n)$ müşahidələrinə nəzərən qiymətləndirmələrini tapaq. Approksimasiya edən funksiyanın $\alpha_1,...,\alpha_n$ parametrləri elə seçilir ki,

$$Q = \sum_{i=1}^{n}[y_i - f(\alpha, x_i)]^2 \tag{1.15}$$

cəmi minumum qiymət alsın. Tutaq ki, müşahidələr zamanı ölçmələr asılı deyil və səhvlər normal qanunla paylanmışdır: $\varepsilon_i \in N(0,\sigma^2)$. y_i kəmiyyəti $f(\alpha, x_i)$ sabit kəmiyyətinin və ε_i təsadüfi kəmiyyətinin cəmi kimi normal qanunla paylanır:

$$y_i = N\left(f(\alpha, x_i),\sigma^2\right).$$

y_i-nin paylanma sıxlığı isə

$$\varphi(y_i, \alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - f(\alpha, x_i)]^2}{2\sigma^2}} . \tag{1.16}$$

Müşahidə olunan $y_1,...,y_n$ qiymətlərinin həqiqətə oxşarlıq funksiyası belə olur:

$$L(y,\alpha) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(\alpha, x_i)]^2} . \tag{1.17}$$

Buradan isə alırıq ki, $L(y,\alpha)$ funksiyası α dəyişdikdə o zaman maksimum qiymət alır ki,

$$T_n(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(\alpha, x_i)]^2 \qquad (1.18)$$

statistikası minimum qiymət alsın.

Baxılan məsələ belə riyazi proqramlaşdırma məsələsinə gətirilir: elə $\hat{\alpha}$ qiymətini tapmaq lazımdır ki, bu qiymətlərdə

$$T_n\left(\hat{\alpha}\right)=\min_{\alpha_1,...,\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(\alpha, x_i)]^2 \qquad (1.19)$$

kvadratik forma minimallaşdırılsın. $\hat{\alpha}=(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n)$ nöqtəsi $T_n(\alpha)$ statistikasının minimum nöqtəsi olduqda, minimum üçün zəruri şərtə əsasən $T_n(\alpha)$ funksiyasının $\alpha_1,...,\alpha_n$-lərə nəzərən xüsusi törəmələrini sıfra bərabərləşdirməklə

$$\frac{\partial T_n(\alpha)}{\partial \alpha_i}=0, \quad i=\overline{1,n} \qquad (1.20)$$

tənliklər sistemi alınır ki, onun $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n$ həlləri naməlum parametrlərin ƏKKÜ ilə tapılmış qiymətləndirilmələridir.

Müsbət kvadratik çoxhədli həmişə öz minimum qiymətini aldığından, bu tənliklər sistemi həmişə həllə malikdir. Lakin həll yeganə olmaya bilər. Ola bilər ki, sistemin $\alpha_1,...,\alpha_n$ -lərin müxtəlif xətti kombinasiyaları üçün yeganə həlli olsun, lakin parametrlərin özlərinə nəzərən birqiymətli həll olmasın. Ümumiyyətlə, sistemin həlləri həqiqətə oxşarlıq funksiyasının həm minimumuna, həm maksimumuna və həm də əyilmə nöqtələrinə uyğun gələ bilər.

σ -parametrinin qiymətləndirilməsi üçün isə həqiqətə oxşarlıq funksiyasından bu dəyişənə nəzərən 1-ci tərtib xüsusi törəmə alıb onu sıfra bərabərləşdirməklə $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n$ qiymətləndirilməsini nəzərə almaqla stasionar nöqtə tapılır. Sonra isə maksimum üçün kafi şərtə əsasən $\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2}<0$ bərabərsizliyi bu nöqtədə yoxlanılır. Bərabərsizlik ödəndikdə stasionar nöqtənin maksimum nöqtə olması qəbul edilir.

Qeyd edək ki, σ-nın qiymətləndirilməsi $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n$ qiymətləndirilməsindən fərqli olaraq meylli ola bilər.

Ümumi şəkildə qeyd edək ki, (1.17) və (1.18) düsturları ilə ifadə olunan $L(y,\alpha)$ və $T_n(\alpha)$ funksiyalarının uyğun olaraq maksimum və minimum nöqtələrinin müəyyənləşdirilməsi riyazi analiz kursundan məlum ekstremum üçün belə bir kafi şərtlərə əsaslanır ki, əgər çoxdəyişənli $L(y,\alpha_1,...,\alpha_n,\sigma)$ və $T_n(\alpha_1,...,\alpha_n)$ funksiyaları $\hat{\alpha}=(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n)$, $\hat{\sigma}$-stasionar nöqtələrinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş 2-ci tərtib kəsilməz törəməyə malik olan funksiyalardırsa, (grad L($\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}$)=0, grad $T_n(\hat{\alpha})$=0), onda bu funksiyaların uyğun olaraq $\hat{\alpha}=(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n)$, $\hat{\sigma}$ və $\hat{\alpha}=(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_n)$ nöqtələrində maksimum və minimumunun olması üçün bu funksiyaların

$$H_L(\alpha,\sigma)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1 \partial \sigma} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_n^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_n \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1 \partial \sigma} & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_2 \partial \sigma} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_n \partial \sigma} & \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$H_{T_n}(\alpha)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 T_n}{\partial\alpha_1^2} & \frac{\partial^2 T_n}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T_n}{\partial\alpha_1\partial\alpha_n}\\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\ \frac{\partial^2 T_n}{\partial\alpha_n\partial\alpha_1} & \frac{\partial^2 T_n}{\partial\alpha_n\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T_n}{\partial\alpha_n^2}\end{bmatrix}. \qquad (1.22)$$

Hesse (bax. [32, səh. 317]) matrislərinin həmin nöqtələr-də uyğun olaraq mənfi müəyyən və müsbət müəyyən olmasıdır. Əgər Hesse matrisi müəyyən deyilsə, onda həmin nöqtələr optimum nöqtələr deyil.

Matrisin müsbət və ya mənfi müəyyən olmasını xətti cəbr kursundan (bax. [32, səh.315-320]) məlum Silvestr meyarı ilə də müəyyənləşdirmək olar. Belə ki, $H_{Tn}(\alpha)$ matrisi o zaman müsbət müəyyən hesab olunur ki, əgər $(H_{Tn}\alpha,\alpha)$ kvadratik forması bütün $\alpha\in R^n$, $\alpha\neq 0$, üçün müsbət qiymətlər alır. $H_L(\alpha,\sigma)$ matrisi üçün həmin şərt $(H_L\theta,\theta)$ kvadratik formasının (burada $\theta=(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\sigma)$ bütün $\theta\in R^{n+1}$, $\theta\neq 0$ mənfi müəyyən olmasıdır. Silvestr meyarına əsasən birinci matrisin əsas minorlar mənfidən başlayaraq ardıcıl olaraq işarəsini dəyişən minorlar, ikinci matrisin isə bütün əsas minorları müsbət olmalıdır.

İndi isə, ekonometrik modelləşdirmənin parametrlərinin qiymətləndirilməsi mərhələsində hansı üsuldan istifadə olunması məsələsinə baxaq. Ekonometrik modelin tipi, ilkin şərtlər (qalıq həddinin xassələri) və meyyarlar nəzərə alınmaqla tətbiq olunan qiymətləndirmə üsulları fərqli olur. Modelin tipindən asılı olaraq qiymətləndirmənin baza və modifikasiya olunmuş üsulları tətbiq edilir. Baza üsulları onların əsasında olan meyarlarla fərqləndirilir. Əsas baza üsulları ƏKKÜ və MDOÜ-dur. Onların modifikasiyaları həmin meyarlarla istifadə olunur, lakin parametirlərin qiymətləndirilməsində qalıq həddinin spesifik xassələri (onun elementlərinin müxtəlif müşahidələr üçün fərqli dispersiyaya malik olması kimi başa düşülən heteroskedastiklik və s.) nəzərə alınır. $f(\alpha, x_t)$ funksiyasının tipindən asılı olaraq dəyişənlər cütlüyü tədqiq edildikdə approksimasiya edən funksiya kimi (*x, y*) koordinat müstəvisində müəyyən hamar əyrilər seçilir. Əgər asılılıq $(x_{i1},...,x_{in},y_i)$, $i=\overline{1,T}$, massivi ilə izah olunursa, onda appoksimasiya edən *n*+1 ölçülü hipermüstəvi olur. Burada MDOÜ –nün tətbiqi belə bir şərtə əsaslanır ki, parametrlərin optimal qiymətləndirilmələri doğruya oxşarlıq funksiyasına maksimum qiymət verməlidir. Bu funksiya modelin $\alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$ naməlum parametrlərinin asılı y_t və asılı olmayan x_{it} , *i=1,2.....,n; t=1,2.....,T* verilmiş qiymətlərində bu dəyişənlərin ekonometrik model vasitəsi ilə ümumi halda $f(\alpha, x_t)$ funksionalı ilə asılı olması nəzərə alınmaqla, şərti birgə paylanma sıxlığını interpretasiya edə bilər. Bu funkisionalın parametlərinin optimal $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2,..., \hat{\alpha}_n$ qiymətləndiril-mələri həqiqətə oxşarlıq funksionalının $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2,..., \hat{\alpha}_n$ nöqtələrində qiymətinə bərabər olan yüksək ehtimalla xarakterizə olunur. MDOÜ-nün tətbiq edilməsində ƏKKÜ-dan fərqli olaraq y_t qiymətlərinin paylanma qanunu məlum olmalıdır. Əsasən bu paylanmanın normal paylanma olması fərz edilir. x_{it} asılı olmayan səbəbiyyət faktorlarının qiymətləri məlum olduqda y_t qiymətlərinin birgə paylanma sıxlığı

$$\varphi(y_t / x_t) \sim \mathrm{N}(\hat{y}_t, \hat{\sigma}^2_{y_t}) \qquad (1.23)$$

ifadəsi ilə təyin oluna bilər. Burada $\sigma^2_{y_t}$ kəmiyyəti y_t qiymətinin $\hat{y}_t$ riyazi gözləməsinə nəzərən təyin olunan dispersiyasıdır.

Beləliklə, $f(\alpha, x_t)$ funkisonalının formasından asılı olaraq xətti və qeyri-xətti hallarda parametrlərin qiymətləndirilməsi üçün ƏKKÜ və MDOÜ-nun həm baza variantları, həm də qeyri-xətti modifikasiyalı yanaşmaları tətbiq edilə bilər.

1-ci fəsilə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar.

1.1. Ekonometrika nəyi ölçür?
1.2. Ekonometrikada əsas məqsədlər hansılardır?
1.3. Ekonometrikanın məsələləri və predmeti hansılardır?
1.4. Ekonometrikada hansı növ modellərdən və dəyişənlərdən istifadə olunur?
1.5. Modelin spesifikasiyası dedikdə nə başa düşülür?
1.6. Paramerləşdirmə nə deməkdir?
1.7. Ekonometrik modeli riyazi modeldən fərqləndirən əsas cəhət nədir?
1.8. Zaman sıraları nədir?
1.9. Təsadüfi kəmiyyətlərin korrellə olunması və ya korrelə olunmaması necə müəyyənləşdirilir?
1.10. Elastiklik və xüsusi elastiklik əmsalları iqtisadi faktorlar arasında hansı xassəni təsvir edir və hansı düsturla hesablanır?

Testlər

1.1. Ekonometrika elmi
a) iqtisadi göstəricilərin xassələri haqda hipotezlərin yoxlanılmasını öyrənir;
b) iqtisadi qanunauyğunluqların empirik nəricələrini öyrənir;
c) iqtisadi modellərin qurulmasını öyrənir;
d) riyazi statistikanın üsulları ilə iqtisadi qanunauyğunluqları və qarşılıqlı asılılıqları öyrənir.

1.2. Eyni baş məcmudan götürülmüş müxtəlif seçimlər üçün seçimi ortalar
a) və dispersiyalar eyni olur;
b) eyni olur, dispersiyalar isə, fərqli olur;
c) fərqli olur, dispersiyalar isə, eyni olur;
d) və dispersiyalar fərqli olur.

1.3. Fəza dəyişənləri
a) bir obyektin müxtəlif zaman anında olan verilənləridir;

b) müxtəlif eyni tip obyektin müxtəlif zaman anında olan verilənləridir;
c) müxtəlif eyni tip obyektin eyni zaman anında olan verilənləridir;
d) bir obyektin bir zaman anında qiymətləridir.

1.4. Ekonometrikada hansı dəyişənlər mövcuddur?
a) endogen, ekzogen;
b) qiyməti əvvəlcədən bilinən (laq), endogen;
c) endogen, ekzogen, laq;
d) daxili, xarici.

1.5. Ekonometrik modellərin əsas növləri hansılardır?
a) trend və mövsümi modellər;
b) mövsümi və reqressiya modelləri;
c) zaman sıraları modelləri, reqressiya modelləri, eyni zamanlı tənliklər sistemi;
d) stasionar və qeyri-stasionar zaman sıraları modelləri.

1.6. Ekonometrik modelin qurulması mərhələləri hansılardır?
a) məsələnin qoyuluşu, aprior, parametrləşdirmə;
b) məsələnin qoyuluşu, informasiya, aprior;
c) məsələnin qoyuluşu, informasiya, identifikasiya, veritikasiya;
d) parametrləşdirmə, informasiya, identifikasiya.

1.7. Modelin identifikasiysı mərhələsində modelin
a) adekvatlılığı yoxlanılır;
b) parametrlər qiymətləndirilir;
c) parametrlər qiymətləndirilir və statistik analiz aparılır;
d) statistik analiz aparılır.

1.8. Seşimi xətti reqressiya tənliyində reqressiya parametrləri
a) Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (ƏKKÜ)-ilə təyin olunur;
b) Momentlər üsulu ilə təyin olunur;
c) Ümumiləşmiş ƏKKÜ (ÜƏKKÜ) ilə təyin olunur;
d) qradiyent üsulu ilə təyin olunur.

1.9.Modelin statistik analizi (modelin parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi)

a) aprior mərhələsinə aiddir;
b) informasiya mərhələsinə aiddir;
c) identifikasiya mərhələsinə aiddir;
d) verifikasiya mərhələsinə aiddir.

1.10. Baxılan modeldə xarici dəyişənlər necə adlanır?
a) endogen; b) ekzogen; c) laq; d) interaktiv.

1.11. Ekonometrika dedikdə nə başa düşülür?
a) nəzəri nəticələrin məcmusu;
b) riyazi üsullardan istifadə etməklə müxtəlif iqtisadi tədqiqatlar məcmusu;
c) xüsusi elm sahəsi;
d) statistik üsulların tətbiqi.

Çalışmalar

Məsələ 1.1. Müəssisənin gəliri y (milyon p.v.) və x reklam xərcləri 10 il üçün cədvəldə verilmişdir:

y	5	7	12	16	23	21	19	18	16	17
x	0,8	1,1	1,8	2,5	4,1	5,5	7,3	8,1	8,9	7,1

Korrelyasiya sahəsini qurun və baxılan göstəricilər arasındakı asılılığın forması haqda hipotezi söyləyin.

Məsələ 1.2. Tutaq ki, müəyyən məhsula tələbatla (y) onun qiyməti (x_1) və istehlakçının gəliri (x_2) arasında

$$y(x_1, x_2) = 0{,}82 x_1^{-2{,}63} x_2^{1{,}11}$$

asılılığı müəyyənləşdirilmişdir. Tələbatın səbəbiyyət faktorlarına nəzərən xüsusi elastiklik əmsallarını tapın və onların interpretasiyalarını verin.

Məsələ 1.3. $n = 50$ həcmli seçimdə nəzəri dispersiyanın $\hat{\sigma}^2 = 9{,}8$ meylli qiymətləndirməsi alınmışdır. Baş külliyyatın dispersiyasının meylsiz qiymətləndirilməsini tapın.
Cavab. 10.

Məsələ 1.4. Son 5 ildə A aktivinin illik artımı orta hesabla 20% təşkil etmişdir və onun kvadratik meyli 5% olmuşdur. Əgər ilin əvvəlində maliyyə aktivinin qiyməti 100 p.v. olarsa, onda gələn ilin sonuna 95% ehtimallı inam intervalını qurun.
Cavab. Gələn ilin sonuna aktivinin qiyməti 105 p.v. -ilə 135 p.v. arasında dəyişir.

Məsələ 1.5. Normal baş məcmudan götürülmüş $n_1 = 9$ və $n_2 = 16$ həcmli asılı olmayan seçimlərdən uyğun olaraq korrektə olunmuş seçimi $s_x^2 = 34{,}02$ və $s_y^2 = 12{,}15$ düsturları alınmışdır. $\alpha = 0{,}01$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ hipotezini ona konkurent $H_0 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$ hipotezinə nəzərən yoxlayın.
Cavab. H_0 hipotezi qəbul olunur.

Məsələ 1.6. Firmanın mağazalarında satışın pul vahidlərilə həcmi reklam kompaniyasından əvvəl və reklamdan sonrakı zaman anları üçün cədvəldə verilir. $\alpha = 0{,}10$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində reklam kompaniyasının satışın həcminin ciddi artımına səbəb olduğunu söyləmək olarmı?

Mağazalar	1	2	3	4	5	6	7
Reklama qədər satış həcmi	10	15	12	13	14	11	15
Reklamdan sonrakı satış həcmi	17	20	13	11	16	10	18

Cavab: Ciddi artıma səbəb olur.

Məsələ 1.7. Gəlirləri $\exp\{N(a, \sigma^2)\}$ normal paylanma qanunu ilə xarakterizə olan əhali qrupu arasında seçim aparılmışdır. 10 nəfərlik seçimdə belə nəticələr alınmışdır: 4722; 2907; 4974; 2763; 3659; 5493; 3161; 3175; 4521; 3698 p.v. a və σ^2 parametrlərinin qiymətləndirmələrini Maksimal Həqiqətə Oxşarlıq Üsulu ilə

hesablayın. Gəlirləri 4000-p.v.-dən 5000 p.v.-ə qədər olan əhalinin xüsusi çəkisini tapın.
Cavab. $\hat{a}$ =8,244; σ^2 =0,059; xüsusi çəki 29%.

Məsələ 1.8. Cədvəldə verilmiş $(x_i,\ y_i),\ i=\overline{1,18}$ cütlükləri arasında xətti asılılığın parametrlərini ƏKKÜ-ilə tapın.

x_i	1	3	2	5	2	5	6	2	3	6	4	1	3	4	6	5	1	4
y_i	3	5	3	4	3	6	7	2	3	8	6	2	4	4	8	6	1	5

Cavab. $\hat{y} = 0{,}71 + 1{,}07x$.

Məsələ 1.9. Məsələ 1.8-in şərtlərinə əsasən korrelyasiya əmsalını tapın x və y arasındakı asılılığı xarakterizə edin.
Cavab. $r_{xy} = 0{,}987$; dəyişənlər arasınada sıx xətti asılılıq mövcuddur.

Məsələ 1.10. İllər üzrə məhsul buraxılışının həcmi cədvədlə verilmişdir:

İllər	1	2	3	4	5	6	7
Həcm vahidi	30,1	34,9	44,3	27,0	31,0	34,5	47,0

Normal yaxınlaşmadan istifadə edərək 95% əhəmiyyətlilik səviyyəsində orta qiymət üçün inam intervalını qurun.
Cavab: (28, 64; 42, 44)

FƏSİL II

CÜT REQRESSİYA ANALİZİ

Tətbiqi iqdisadi tədqiqatlarda verilmiş statistik göstəricilər həmişə çoxölçülü normal məcmunun seçimi verilənləri olmur. Məsələn, baxılan dəyişənlərdən biri təssadüfi kəmiyyət olmadıqda və ya reqressiya xətti aşkar şəkildə düz xətt olmadıqda belə hallar olur. Belə vəziyyətdə ƏKKÜ mənasında ilkin verilənlərə daha yaxın əyrinin (səthin) müəyyənləşdiriləməsinə cəhd edilir. Uyğun yaxınlaşma üsulları reqressiya analizi üsulları adlanır. Reqressiya analizinin üsulu və modelləri ekonometrikanın riyazi aparatında əsas yerləri tuturlar. Reqressiya analizinin məqsədi dəyişənlər arasında asıllıqların formasının müəyyənləşdirilməsi, reqressiya funksiyasının qiymətləndirilməsi, asılı dəyişənin naməlum qiymətinin (proqnoz qiymətlərinin) qiymətləndirilməsi məsələləridir (bax.[1,2]).

§2.1. Funksional, statistik və korrelyasiya asılılqları

Təbiət elmlərində funksional asılılıq dedikdə bir dəyişənin hər bir qiymətinə digər dəyişənin tam müəyyən qiymətinin uyğunluğu başa düşülür. İqdisadiyyatda isə, əsasən bir dəyişənin hər bir qiymətinə diğər dəyişənin hər hansı müəyyən qiyməti deyil, onun mümkün qiymətləri coxluğunun uyğun gəldiyi məsələlərin öyrənilməsi zərurəti yaranır. Başqa sözlə, burada bir dəyişənin hər bir qiymətinə digər dəyişənin müəyyən (şərti) paylanması uyğun gəlir. Belə asılılıq statistik və ya stoxastik, ehtimal asılılığı adlanır. Statistik asılılığın yaranması onunla əlaqədardır ki, asılı dəyişən bir sıra nəzarətdən kənar və ya nəzərə alınmayan faktorların təsirinə məruz qalır. Həm də dəyişənlərin qiymətlərinin ölçülməsində müəyyən təsadüfi səhvlərə yol verilməsi mümkündür. Misal olaraq, istifadə olunan gübrənin miqdarı ilə məhsul yığımı miqdarı arasındakı asıllığı, müəsisənin əmək məhsuldarlığı ilə onun enerjisilahlandırılması arasındakı asılılığı və s. statistik asılılıqıar hesab etmək olar.

Əgər iki dəyişən arasındakı asılılıq belə təsvir olunursa ki, bir dəyişənin hər bir qiymətinə digər dəyişənin müəyyən şərti riyazi gözləməsi (orta qiyməti) uyğun gəlsin, onda belə statistik asılılıq korrelyasiyalı asılılıq adlanır. Başqa sözlə, iki dəyişən arasındakı korreliyasiya asılılığı onların birinin hər bir qiyməti ilə digərinin şərti riyazi gözləməsi arasındakı funksional asılılıqdır.

Korrelyasiya asılılığı belə ifadə oluna bilər:

$$M_x(y) = f_1(x) \text{ və ya } M_y(x) = f_2(y), \quad f_1(x),\ f_2(y) \neq const \quad (2.1)$$

Reqressiya analizində (determinik) asılı olmayan bir (və ya bir neçə) x dəyişəni ilə təsadüfi y dəyişəni arasında bir tərəfli asılılığa baxılır. Belə asılılıq, məsələn, x dəyişəninin hər bir qeyd olunmuş qiymətində uyğun y dəyişəninin qiymətlərinin bir sıra nəzarətdə olmayan faktorların təsiri nəticəsində təsadüfi yayınmalara məruz qaldıqda yarana bilər. y -in x -lə belə asılılığı (2.1) modeli ilə reqressiya asılılığı kimi göstərilə bilər. Belə olan halda y dəyişənini həmçinin təsirə münasibət funksiyası, izaholunan, cıxış, nəticə, endogen dəyişən, x dəyişənini isə izahedən, giriş, prediktor, ekzogen dəyişən, reqressor kimi də adlandırırlar.

Tərif 2.1. (2.1) *tənliyi reqressiya tənliyi adlanır.* $f_1(x)\,(f_2(y))$ *funksiyası reqressiya funksiyası, onun qrafikinə reqressiya xətti deyilir.*

Reqressiya tənliyini dəqiq təsvir etmək üçün x dəyişəninin hər bir qeyd olunmuş $X=x$ qiymətində asılı y dəyişənin şərti paylanma qanunun məlum olması zəruridir. Tədqiqatçının yalnız n həcimli seçimi $(x_i\,,\ y_i)$ cütlüyü ilə kifayətlənməsi statistik praktikada qəbul olunmuş hal olduğundan, reqressiya funksiyasının seçimi verilənlərə nəzərən qiymələndirilməsi (approksimasiya) məsələsinə baxılır. Belə qiymətləndirmə

$$\hat{y} = \hat{f}\,(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n, x) \qquad (2.2)$$

seçimi reqressiya əyrisi ilə reallaşdırılır. Burada $\hat{y}$ x dəyişəninin $X=x$ qeyd olunmuş qiymətində y dəyişəninin şərti ortası, $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n$ əyrinin parametrləridir. Bu tənliyə seçimi reqressiya tənliyi deyilir. Approksimasiya edən $\hat{f}\,(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n, x)$ funksiyası düzgün seçildikdə seçimlərin həcmi artdıqda ($n \to \infty$) ehtimala görə $f(\alpha, x)$ reqressiya funksiyasına yığılır.

Cüt və çoxdəyişənli reqressiya modelləri fərqləndirilir.

Cüt reqressiya modeli asılı y dəyişəninin orta qiyməti ilə bir asılı olmayan x dəyişəni arasındakı asılılığı təsvir edir.

$$\hat{y} = f(x). \qquad (2.3)$$

Cüt reqressiya modeli o zaman tətbiq edilir ki, öyrənilən izah olunan dəyişənə daha güclü təsirə malik dominant faktor məlum olsun, yəni bu dəyişənin nəticə faktorunun qiymətinin dəyişməsində daha çox payı vardır.

Çoxdəyişənli reqressiya modellərində isə, nəticə faktorları bir neçə əsas asılı olmayan faktorların təsiri mövcuddur və reqressiya funksiyası

$$\hat{y} = \hat{f}\,(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) \qquad (2.4)$$

kimi göstərilə bilər

Analitik asılılıqların (1.2) – (1.9) formalarına

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_p x^p \qquad (2.5)$$

polinomial asılılığını,

$$\hat{y}_t = k a^{bt} \qquad (2.6)$$

Hompers iqtisadi artım əyrisini (burada a və b müsbət parametrlərdir və $b<1$, k parametri funksiyanın qrafiki asimptotudur) [4, səh. 49] və

$$\hat{y}_t = \frac{1}{1+ae^{-bt}} \tag{2.7}$$

loqistik [4, səh. 50-51] əyrisini və digər iqtisadi artım əyrilərini [4, səh. 47-52] əlavə etmək olar.

Asılı olmayan x dəyişəninin qiymətləri artdıqda y dəyişəninin qiymətləri müəyyən həddi aşmırsa, onda $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$ və ya (2.7) asılılığından istifadə etmək olar. x faktorunun dəyişmə oblastında y dəyişəni maksumum və ya minimum qiymətləri alınsa, onda reqressiya tənliyinə x -in nəinki 1-ci tərtib, hətta 2-ci və ya daha çox dərəcələrini daxil etmək olar.

x dəyişəni olaraq zaman faktoru t istfadə olunduqda iqdisadi proseslərin mövsümi rəqsləri modellərində harmonik analiz üsullarından istifadə olunur ki, belə proseslərin zaman sıraları

$$y_t = f(\alpha_0,...,\alpha_n,t) + \sum_{k=1}^{P}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{n}kt\right) + b_k \sin\frac{2\pi}{n}kt\right), \tag{2.8}$$

$$t = \overline{1,n}$$

modelləri kimi təsvir oluna bilir. Bu sinif modellərin müəyyən hallarda parametrlərinin qiymətləndirilməsində ƏKKÜ-nun tətbiqi [4, səh.24-27] –də göstərilmişdir.

§2.2. Cüt xətti reqressiya modeli və onun elementlərinin statistik qiymətləndirilməsi

Cüt xətti reqressiya modeli ümumi şəkildə belə təsvir olunur:

$$y = f(\alpha, x) + \varepsilon = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon, \tag{2.9}$$

burada y - asılı dəyişən (prediktor); x -asılı olmayan dəyişən (reqressor), $f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ determinik tərkib, ε təsadüfi tərkib (təsadüfi qalıq) $M\varepsilon = 0$, $D\varepsilon = \sigma^2$, α_0, α_1 seçimi verilənlərlə təyin olunması nəzərdə tutulan reqressiya parametrləridir.

α_1 parametri asılı olmayan dəyişəni bir vahid artırdıqda (məsələn, işçi qüvvəsini) asılı dəyişənin (məsələn, istehsal olunan məhsulun qiymətini) ortalama qiymətinin nə qədər dəyişməsini göstərir, α_0 parametri isə, x dəyişəni zamanı ifadə etdikdə öyrənilən iqdisadi göstəricinin başlanğıc anında qiymətini göstərir, fəza dəyişəni halında isə, ümumilikdə iqtisadi interpretasiyaya malik deyil. Yalnız reqressiya xəttinin y oxu ilə kəsişdiyi nöqtəyə yaxınlığını göstərir. Asılı olmayan x dəyişəni təsadüfi olmayan kəmiyyət, asılı y dəyişəni isə onun ifadəsinə təsadüfi tərkib daxil olduğundan, təsdüfi kəmiyyətdir. Ancaq x dəyişəninin qiymətlərinin dəyişməsinin y asılı dəyişənininin varasiyası mənbələrini özündə əks etdirməməsi təsadüfi ε tərkibinin modeldə yazılışını zəruri edir ki, bu kəmiyyət digər faktorların asılı dəyişənə ümumilikdə təsirini ifadə edir.

Tərif 2.2. *Modelin statistik təhlili və onun parametirlərinin qiymətləndirilməsinə modelin identifikasiyası deyilir*. Parametrlərin qiymətləndirilməsi ya (y_i, x_i), $i=\overline{1,n}$ fəza seçimlərinə, ya da (y_t, x_t), $t=\overline{1,n}$ zaman seçimlərinə nəzərən aparılır. Birinci halda informasiya daşıyıcıları olaraq müəyyən mənada eyni tipə məxsus müxtəlif iqtisadi obyeklər göstərilir. İkinci halda isə, informasiya daşıyıcısı kimi müxtəlif zaman anlarında vahid iqdisadi obyekt təsvir olunur. Müəyyən hallarda isə, qarışıq fəza-zaman seçimlərindən istifadə olunur.

Müəyyənlik üçün fərz edək ki, n həcimli konkret (y_i, x_i), $i=\overline{1,n}$ fəza seçimləri mövcuddur. Onda cüt reqressiya modeli halında aşağıdakı seçimi tənlikləri yaza bilərik:

$$y_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \varepsilon_j,\ \ j=\overline{1,n} \qquad (2.10)$$

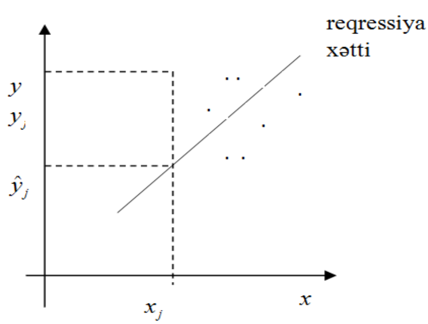
Bu münasibətlər konkret və təsadüfi seçimlər üçün müxtəlif halda mənalandırılır. Birinci halda hər bir seçimi (y_j, x_j) müşahidələri sadəcə olaraq ikiölçülü fəzada ədədlər cütlüyü və ya nöqtələrdir. Ona görə də (2.10) münasibətində $e_j = y_j - (\alpha_0 + \alpha_1 x_j)$ kəmiyyətləri təsadüfi ε_j kəmiyyətinin realizasiyasaları olan konkret ədədlərdir. İkinci halda ε_j-lər real təsadüfi kəmiyyətlərdir və ona görə də y_j-lər təsadüfi kəmiyyətlərdir. Bu halda mənalandırmaya zərurət alınmış qiymətləndirmənin keyfiyyətinin yoxlanılması zamanı yaranır ki, bunu isə, bütün mümkün halların baxılması (yəni təsadüfi seçimlərlə) ilə reallaşdırmaq olar. Sonuncu halda adətən ε_i və ε_j fərqli qiymətlərinin korrelə olunmaması şərti qoyulur: $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j$.

§2.2.1. Cüt xətti reqressiya modelində parametrlərin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsi

(2.10) tənliyində α_0, α_1 parametrlərinin $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ qiymətləndirmələrini almaq üçün ƏKKÜ tətbiq edilir ki, bu üsula əsasən parametrlərin elə qiymətləndirimələri seçilir ki, emprik y_i qiymətləri ilə $\hat{y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_i,\ i = \overline{1,n}$ qiymətləri arasındakı fərqlərin kvadrat cəmləri minumal olsun:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_i)\right]^2 \to \min\ . \qquad (2.11)$$

Həndəsi olaraq (2.11) cəminin minimallaşdırılması α_0, α parametrli bütün düz xəttlərdən elə xəttin seçilməsidir ki, bu xətt $(y_j, x_j),\ j = \overline{1,n}$ seçimi nöqtələr sisteminin ordinatına daha yaxın olsun.



Minimallaşdırma üçun zəruri şərtlərə əsasən Q funksiyasın-dan $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$-ə nəzərən 1-ci tərtib xüsusi törəmələr alıb onları sıfra bəabərləş-dirməklə aşağıdakı nor-mal tənliklər sistemi alınır.

$$\begin{cases} n\hat{\alpha}_0 + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\hat{\alpha}_1 = \sum_{j=1}^{n} y_j, \\ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\hat{\alpha}_0 + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\hat{\alpha}_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \end{cases} \tag{2.12}$$

Bu sistemin həlli belə göstərilir:

$$\hat{\alpha}_0 = \bar{y} - \bar{x}\hat{\alpha}_1, \quad \hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j^2}. \tag{2.13}$$

Burada $z_j = x_j - \bar{x}$; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j$.

(2.13)-də 1-ci ifadəni $\hat{y} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x$ reqresiya təliyində nəzərə alsaq

$$\hat{y} = \bar{y} - \hat{\alpha}_0\bar{x} + \hat{\alpha}_1 x \quad \text{və ya} \quad \hat{y} - \bar{y} = \hat{\alpha}_1(x - \bar{x}) \tag{2.14}$$

münasibətin alarıq.

$\hat{\alpha}_1$ əmsalına y-in və x-ə nəzərən seçimi reqressiya əmsalı deyilir. Bu əmsal x dəyişənin bir vahid artırdıqda y dəyişəninin ortalama neçə vahid dəyişməsini göstərir

(2.14) reqressiya tənliyindən alınir ki, reqressiya xətti $(\bar{x}, \bar{y})$ nöqtəsindən keçir.

İndi göstərək ki, ƏKKÜ ilə alınmış $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirmələri meylsiz və tutarlı qiymətləndirmələrdir. Əvvəlcə göstərək ki, qiymətləndirmələrin riyazi gözləmələri parametrlərin α_0, α_1 qiymətlərinə bərabərdir. Doğrudan da, $\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right) = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$ olduğu üçün

$$M\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j M y_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j(\alpha_0 + \alpha_1 x_j)}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2}} = \alpha_0, \qquad (2.15)$$

$$M\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} My_j - M\,\bar{x}\hat{\alpha}_1 = \alpha_0 + \alpha_1\,\bar{x} - \bar{x}\alpha_1 = \alpha_0$$

$\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirmələrinin α_0, α_1 parametrlərinə ehtimal mənada yığılmalarını göstərmək üçün

$$P\left\{\left|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\hat{\alpha}_1}{\varepsilon^2} \qquad (2.16)$$

Çebışev bərabərsizliyindən ([bax. 5, səh. 216]) istifadə etməklə və seçimlərin həcmini kifayət qədər artırmaqla bu qiymətləndirmələrin meylsizliyini nəzərə alsaq, $D\hat{\alpha}_1 \to 0 (n \to \infty)$ olduqda $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\alpha}_1 - \alpha_1\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$ tutarlılıq münasibəti alınır. $D\hat{\alpha}_1 \to 0 (n \to \infty)$ olduğunu əsaslandırmaq üçün

$$\sigma_{\hat{\alpha}_0}^2 = D\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{(\sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2})^2}\sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2} Dy_j = \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\,2}} \qquad (2.17)$$

münasibətindən $\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2} \to \infty (n \to \infty)$ olduqda $D\hat{\alpha}_1 \to 0$ alınır. Bu şərt isə $z_j = x_j - \bar{x} \neq 0,$ yəni sonlu sayda nöqtələrdən başqa yerdə qalan nöqtələrdə x_j-nin özünün orta qiyməti ilə üst-üstə düşmədiyi halda ödənilir.

Eyni ilə,

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}_0} = D\bar{y} = \frac{\sigma^2}{n} (\text{burada}\, \hat{\alpha}_0 = \bar{y}), \qquad (2.18)$$

$$\sigma^2_{\hat{\alpha}_0} = D\alpha_0 = D\bar{y} + \bar{x}^2 D\hat{\alpha}_1 - 2\operatorname{cov}(\bar{y}, \bar{x}\hat{\alpha}_1) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}^2\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2}}$$

Çünki,

$$\operatorname{cov}(\bar{y}, \hat{\alpha}_1) = \operatorname{cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j, \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{n\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2}} \sum_{j=1}^{n} z_j \operatorname{cov}(y_i, y_j) = \frac{\sigma^2}{n\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2}} \sum_{j=1}^{n} z_j = 0.$$

Ona görə də,

$$D\hat{\alpha}_0 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}^2\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2}} \to 0 \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} z_j^{\ 2} \to 0, n \to \infty \right).$$

Deməli, ƏKKÜ ilə α_0, α_1 parametrlərinin $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirmələri tutarlıdır.

İndi isə, təsadüfi tərkibin $\hat{\sigma}^2$ qiymətləndirilməsinə baxaq. Bu qiymətləndirmə $e_j = y_j - \hat{y}_j$ qiymətləndirilməlırinin kvadratları cəmi üzrə aparıldığından,

$$\hat{\sigma}^2 = h\sum_{j-1}^{n}(y_j - \hat{y}_j)^2 \qquad (2.19)$$

ifadəsində h sabitini elə seçək ki, qiymətləndirmə meylsiz olsun.

$$M(y_j - \hat{y}_j) = M\big((\alpha_0 - \hat{\alpha}_0)(\alpha_1 - \hat{\alpha}_1)x_j + \varepsilon_j\big) = 0$$

olduğundan

$$M\hat{\sigma}^2 = h\sum_{j-1}^{n}(y_j - \hat{y}_j)^2 = h\sum_{j-1}^{n}D(y_j - \hat{y}_j) \qquad (2.20)$$

$\text{cov}(y_j, y_i) = 0, i \neq j, \text{cov}(y_j, y_j) = \sigma^2$ olduğunu nəzərə alıb $\hat{y}_j = \bar{y} + \hat{\alpha}_1 z_j$ ifadəsindən alırıq:

$$D(y_j - \hat{y}_j) = Dy_j + D\hat{y}_j - 2\,\text{cov}(y_j, \hat{y}_j) =$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{z_j{}^2\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} z_j{}^2} - 2\left(\frac{\sigma^2}{n} + \frac{z_j{}^2\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} z_j{}^2}\right) =$$

$$= \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{z_j{}^2}{\sum_{j=1}^{n} z_j{}^2}\right).$$

Bu ifadəni (2.20)-də nəzərə alsaq,

$$M\hat{\sigma}^2 = h\sigma^2(n-2),$$

buradan $h = \frac{1}{n-2}$, ona görə də dispersiyanın

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j-1}^{n}(y_j - \hat{y}_j)^2 \qquad (2.21)$$

qiymətləndirməsi meylsiz qiymətləndirmədir.

§2.2.2. Korrelyasiya asılılığının sıxlığının qiymətləndirilməsi

y və x dəyişənləri arasındakı korrelyasiya asılılığı sıxlığının qiymətləndirilməsinə baxaq. Bunun üçün (2.14) tənliyini belə ekvivalent formada yazaq:

$$\frac{\hat{y}-\bar{y}}{S_y} = \hat{\alpha}_1 \frac{S_x}{S_y} \frac{x-\bar{x}}{S_x} . \qquad (2.22)$$

Burada S_x və S_y uyğun dəyişənlərin orta kvadratik meylləridir. Bu sistemdə $r = \hat{\alpha}_1 \cdot \frac{S_x}{S_y}$ kəmiyyəti x dəyişənini bir S_x vahidi qədər artırdıqda y dəyişəninin ortalama nə qədər S_y dəyişməsini göstərir.

Tərif 2.3. *r kəmiyyəti xətti əlaqənin sıxlığı göstəricisidir və seçimi korrelyasiya əmsalı adlanır.*

Əgər $r > 0$ $(\hat{\alpha}_1 > 0)$ olarsa, onda dəyişənlər arasındakı korrelyasiya asılığı düz, əgər $r < 0$ $(\hat{\alpha}_1 < 0)$ olarsa, bu asılılıq əks asılılıq hesab olunur. Düz (əks) asılılıqda dəyişənlərdən birinin artımı digərinin şərti (qrupla) ortasının artımına (azalmasına) səbəb olur.

(2.12) sistemindən həm də $\hat{\alpha}_1 = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S^2{}_x}$ eyniliyi alınır ki, buradan $r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_x S_y}$ münasibəti alınır. Bu münasibətdən aşağıdakı modifikasiyalar alınır:

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{nS_x S_y}; \tag{2.23}$$

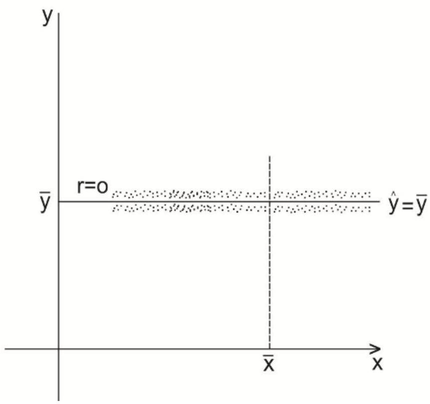
$$r = \frac{n\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)}{\sqrt{n\sum_{j=1}^{n} x_j^{\ 2} - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{j=1}^{n} y_j^{\ 2} - \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)}} . \tag{2.24}$$

İki təsadüfi kəmiyyət arasındakı korrelyasiya əmsalı kimi seçimi korrelyasiya əmsalı da aşağıdakı xassələrə malikdir:

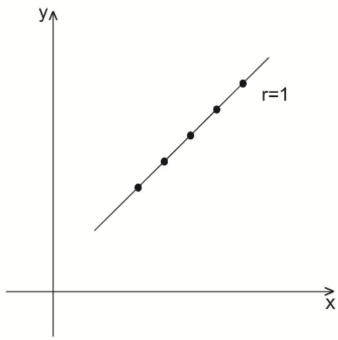
1. Korrelyasiya əmsalının qiymətləri [-1,1] parçasındadır. $|r|$ vahidə nə qədər yaxındırsa, asılılıq o qədər sıxdır.

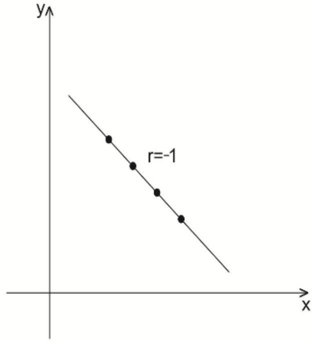
2. $r = \pm 1$ olduqda korrelyasiya asılılığı xətti funksional asılılıq olur. Belə ki, müşahidə olunan qiymətlər eyni xətt üzərində yerləşir.

3. $r = 0$ olduqda xətti korrelyasiya asılılığı mövcud deyil və reqressiya xətti OX oxuna paralel olur:



Yuxarıda seçimi korrelyasiya əmsalı bilavasitə korrelyasiya sahəsindəki nöqtələrin reqressiya xəttinə daha yaxın olmasına görə daxil edildiyindən, onu baş məcmunun elementləri arasındakı asılılığın korrelyasiya əmsalının qiymətləndirilməsi kimi qəbul etmək ümumiyyətlə düzgün deyil. r seçimi əmsalı yalnız o halda əsas korrelyasiya əmsalının qiymətləndirilməsi hesab olunur ki, (x, y) iki ölçülü normal qanunla paylansın.





Qeyd edək ki, cüt korrelyasiya əmsalı y və x arasındakı xətti asılılığın ölçüsünü xarakterizə edir. Əgər bu dəyişənlər arasında $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ reqressiya tənliyi ilə təsvir olunan asılılıq mövcuddursa, onda r_{xy} əmsalı vahiddən kifayət qədər kənarda qiymət ala bilər. Bu halda çevirmələrlə məsələni xəttiləşdirmək lazımdır. $x^2 = z$ qəbul etsək, reqressiyanın parabolik tənliyi $\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 z$ şəklinə düşür ki, bu tənlik isə xətti çoxfaktorlu reqressiyaya adekvatdır.

§2.2.3. Cüt reqressiya analizində Qauss-Markov teoremi

Teorem (Qauss-Markov) 2.1. *Tutaq ki, (2.10) modelində* $M_x(y) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ *xətti reqressiya funksiyasının parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün seçimi* (y_i, x_i), $i = \overline{1,n}$ *verilənləri və* $\varepsilon_i, i = \overline{1,n}$ *təsadüfi tərkibi aşağıdakı şərtləri ödəyir:*

1. *Modeldə* ε_i *(və ya* y_i *dəyişəni) təsadüfi kəmiyyət, izahedici* $x_i, i = \overline{1,n}$ *dəyişənləri isə təsadüfi olmayan verilənlərdir;*

2. ε_i*-lərin riyazi gözləmələri sıfra bərabərdir:* $M(\varepsilon_i) = 0, i = \overline{1,n}$ *;*
3. ε_i*-lərin dispersiyası bütün* i*-lər üçün sabitdir:* $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ *;*
4. ε_i *və* ε_j *(və ya* y_i *və* y_j*) korrelə olunmayıblar:* $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, i \neq j$ *;*
5. ε_i*-lər (və ya* y_i *dəyişənləri) normal qanunla paylanmışlar.*

Onda α_0 *və* α_1 *parametrlərinin ƏKKÜ ilə alınmış* $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ *qiymətləndirmələri eyni seçimi həcmlərdə digər üsullarla alınmış meylsiz qiymətləndirmələrdən ən kiçik dispersiyaya malik olan qiymətləndirilmələrdir*.

Qauss-Markov teoreminin şərhində izahedici x_i dəyişənləri determinik kəmiyyət olduğundan $M(x_i, \varepsilon_i) = 0,$ və bu şərtin ödənimısi $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirməsinin meylsizliyini təmin edir. Bu şərtlə 2-ci şərt birlikdə ödənildikdə $\hat{\alpha}_0$ qiymətləndirməsi meylsiz olur. 5)-ci şərtin ödənilməsi $\hat{\alpha}_0$ $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirmələrinin (2.13) ifadələri üzərində onların dəqiqliyinin kəmiyyət qiymətləndirməsini aparmağa imkan verir.

Model qurulduqdan sonra e_i qalıqlarının hesablanmasında Qauss-Markov şərtlərinin yoxlanılması zəruridir. Çünki bu halların ödənilməməsi modelin keyfiyyətinin aşağı salınmasına səbəb olur. Göstərilən şərtlər pozulduqda uyğun olaraq modeli modifikasiya etmək lazımdır.

§2.2.4. Reqressiya funksiyası və onun parametrləri üçün inam intervallarının qurulması

Növbəti statistik təhlil olaraq reqressiya fuksiyası və parametrlər üçün inam intervalının qurulması məsələsinə baxaq.

Reqressiya funksiyası üçün inam intervalının qurulması elə bir intervalın tapılması deməkdir ki, bu interval əvvəlcədən verilmiş $\gamma = 1-\alpha$ etibarlılıq ehtimalı (inam ehtimalı) ilə şərti riyazi gözləmənin $M_x(y)$ naməlum qiymətini öz daxilində saxlasın. (2.14) düsturundan alırıq ki,

$$\sigma_{\hat{y}}^{2} = \sigma_{\bar{y}}^{2} + \sigma_{\hat{\alpha}_1}^{2}(x-\bar{x})^2 \qquad (2.25)$$

$\bar{y}$ seçimi otanın dispersiyası

$$\sigma_{\bar{y}}^{2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{y_i}^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (2.26)$$

$\hat{\alpha}_1$ kəmiyyətinin dispersiyası

$$\sigma_{\hat{\alpha}_1}^{2} = \sigma^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\ddot{x})^2}\right) =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}. \qquad (2.27)$$

σ^2-ın əvəzinə onun S^2 qiymətlndirməsini qoymaqla (2.25)-dən alırıq:

$$S_{\hat{y}}^{2} = S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right). \qquad (2.28)$$

Qauss-Markov teoreminin 1-5 şərtləri ödənildikdə $t = \dfrac{\hat{y} - M_x(y)}{S_{\hat{y}}}$ statistikası $k = n-2$ sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasına malikdir və şərti $M_x(Y)$ riyazi gözləməsi üçün

$$\hat{y} - t_{1-\alpha,k}\cdot S_{\hat{y}} \le M_x(Y) \le \hat{y} + t_{1-\alpha,k}\cdot S_{\hat{y}} \qquad (2.29)$$

inam intervalı mövcuddur. (2.28)-(2.29) düsturlarından alınır ki, bu intervalın uzunluğu $x = \overline{x}$ olduqda minimaldır və nöqtənin bu xəttdən uzaqlaşmasından asılı olaraq artır.

Reqressiya modelinin reqressiya funksiyasının interval qiymətləndirilməsi ilə bərabər α_1 və σ^2 parametrlərinin interval qiymətləndirmələri də önəmli məsələlərdəndir. Teoremin 5-ci şərti ödənildikdə $t = \dfrac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_1}{\sigma_{\hat{\alpha}_1}}$ statistikası standart normal paylanmaya malikdir. Onda (2.27) düsturunda σ^2-nı onun S^2 qiymətləndirməsi ilə əvəz etsək,

$$t == \frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_1}{S}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \qquad (2.30)$$

statistikası $k = n-2$ sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasına malik olar və α_1 parametrinin α əhəmiyyətlilik səviyyəsində interval qiymətləndirməsi belə şəkildə göstərilir:

$$\hat{\alpha}_1 - t_{1-\alpha,n-2}\frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \le \alpha_1 \le \hat{\alpha}_1 + t_{1-\alpha,n-2}\frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}, \quad (2.31)$$

σ^2 parametrinin qiymətləndirilməsində isə nəzərə alınır ki, $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ statistikası $k=n-2$ sərbəst dərəcəli χ^2 paylanmasına malikdir. Ona görə də α əhəmiyyətlilik səviyyəsində qiymətləndirmə aşağıdakı kimi olar:

$$\frac{nS^2}{\chi^2_{\alpha/2\,n-2}} \le \sigma^2 \le \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha/2\,n-2}}. \quad (2.32)$$

Burada inam intervalı elə seçilir ki,

$$P(\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-2}) = P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

§2.2.5. Reqressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyinin qiymətləndirilməsi. Determinasiya əmsalı

Ümumi halda, reqressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyinin qiymətləndirilməsi dəyişənlər arasındakı asılılığı təsvir edən riyazi modelin eksperimental verilənlərə uyğun gəlməsi, tənliyə daxil olan izahedici dəyişənlərin sayının izah olunan dəyişənin təsviri üçün kifayət edib-etməməsi məsələlərinin müəyyənləşdirilməsidir. Reqressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması dispersiya analizi əsasında aparılır. Bu analizin mahiyyətinə əsasən

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}[(\hat{y}_i-\bar{y})+(y_i-\hat{y}_i)]^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})(y_i-\hat{y}_i) \quad (2.33)$$

və ya

$$Q = Q_R + Q_e \quad . \qquad (2.34)$$

Burada Q- asılı dəyişənin onun ortasından meyletməsinin kvadratları cəmi, Q_R və Q_e isə uyğun olaraq reqressiya ilə şərtlənən kvadratları cəmi və nəzərə alınmayan faktorların təsirini xarakterizə edən qalıq kvadratları cəmidir. (2.33)-də 3-cü hədd üçün alırıq ki,

$$y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i = y_i - (\bar{y} - \hat{\alpha}_1 \bar{x}) - \hat{\alpha}_1 x_i =$$

$$(y_i - \bar{y}) - b_1(x_i - \bar{x}) \Rightarrow$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})(y_i - \hat{y}_i) = 2\hat{\alpha}_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) -$$

$$2\alpha_1^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0.$$

Dispersiya analizi sxemini belə cədvəldə göstərmək olar (bax. 29, səh. 70-74]):

Dispersiyanın komponentləri	Kvadratları cəmi	Sər. Dər. sayı	Orta kvadratlar
reqressiya	$Q_R = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	m-1	$S_R{}^2 = \frac{Q_R}{m-1}$
qalıq	$Q_R = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$	n-m	$S^2 = \frac{Q_e}{n-m}$
ümumi	$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$	n-1	

Əgər asılı olmayan x və asılı y dəyişəni arasında xətti asılılıq mövcud deyilsə, onda $S_R^2 = \frac{Q_R}{m-1}$ və $S^2 = \frac{Q_e}{n-m}$

təsadüfi kəmiyyəti uyğun olaraq *m*-1 və *n*-*m* sərbəst həddli χ^2 paylanmasına, onların nisbəti isə həmin sərbəst həddli F-Fişer paylanmasına malikdir. Ona görə də α əhəmiyyətlilik səviyyəsində reqressiya tənliyi o zaman əhəmiyyətlidir ki,

$$F = \frac{Q_R(n-m)}{Q_e(m-1)} = \frac{S_R^2}{S^2} > F_{\alpha,k_1,k_2} \qquad (2.35)$$

olsun. Burada F_{α,k_1,k_2} kəmiyyəti F-Fişer-Snedekor meyarının α əhəmiyyətlilik səviyyəsi və $k_1=m-1$, $k_2=n-m$ sərbəstlik dərəcəsi ilə müəyyən edilən cədvəl qiymətidir. F kəmiyyətinin qiyməti reqressiyanın asılı dəyişənin qiymətinin onun ortası ilə müqayisədə nə qədər yaxşı qiymətləndirməsini göstərir.

Cüt xətti reqressiya halında m=2 və reqressiya tənliyi α əhəmiyyətlilik səviyyəsində o zaman əhəmiyyətlidir ki, $F = \dfrac{Q_R(n-2)}{Q_e} > F_{\alpha,1,n-2}$ olsun.

Qeyd edək ki, cüt xətti reqressiya tənliyinin əhəmiyyətliliyini α_1 əmsalının əhəmiyyətliliyini qiymətləndirməklə də yoxlamaq olar. Bu qiymətləndirmə $k=n-2$ sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasına malik olduğundan statistik hipotez olaraq H_0 reqressiya tənliyində $\alpha_1=0$ hipotezinə baxılır. α əhəmiyyətlilik səviyyəsində cüt xətti reqressiya tənliyi və ya α_1 əmsalı əhəmiyyətli hesab olunur o halda ki,

$$t == \frac{\hat{\alpha}_1 - 0}{S}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (2.36)$$

statistikası mütləq qiymətcə kritik qiymətdən böyük olsun ($H_0:\alpha_1=0$ rədd edilir): $|t| > t_{1-\alpha,n-2}$. Cüt xətti reqressiya üçün əhəmiyyətliliyin yoxlanılmasında F və t meyarlarından istifadə eynigüclüdür, çünki bu meyarlar $F=t^2$ münasibətilə bağlıdır.

Bir sıra tətbiqi məsələlərdə r korrelyasıya əmsalının əhəmiyyətliliyinin qiymətləndirilməsi də vacib məsələ olduğundan, $t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ statistikasına baxılır ki, bu statistika $n-2$ sayda sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasıdır. α əhəmiyyətlilik səviyyəsində r korrelyasiya əmsalının əhəmiyyətliliyini yoxlamaq üçün H_0:- baş məcmunun ρ korrelyasiya əmsalının sıfra bərabərliyi hipotezinə baxılır. Əgər

$$|t|=\frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}>t_{1-\alpha,n-2} \qquad (2.37)$$

olarsa, onda $H_0:\rho=0$ hipotezi rədd edilir.

Reqressiya tənliyinin keyfiyyət ölçüsünü, reqressiya modelinin adekvatlığının ən yaxşı qiymətləndirməsini determinasiya əmsalı ilə daha effektiv şəkildə təhlil etmək olar. Bu əmsal

$$R^2=\frac{Q_R}{Q}=1-\frac{Q_e}{Q}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} \qquad (2.38)$$

düsturu ilə hesablanır. (2.34)-ü nəzərə almaqla buradan alınır ki, R^2 determinasiya əmsalı izahedici dəyişənin dispersiyasının izaholunan dəyişənin dispersiyasında xüsusi çəkisini göstərir. Məsələn, $R^2=0{,}56$ olması o deməkdir ki, uyğun reqressiya tənliyi nəticə faktorunun dispersiyasının (variasiyasının) 56%-ni izah edir. $0\le Q_R\le Q$ olduğu üçün $0\le R^2\le 1$. Bu əmsal 1-ə nə qədər yaxındırsa empirik verilənləri reqresiya daha yaxşı approksimasiya edir. Əgər $R^2=1$ olarsa, onda (x_i,y_i) empirik nöqtələri reqressiya xətti üzərində yerləşir, y və x dəyişənləri arasındakı asılılıq funksional asılılıq olur. Əgər $R^2=0$ olarsa, onda asılı dəyişənin dispersiyası (variasiyası) tam olaraq reqressiyada nəzərə alınmayan faktorların dəyişməsi ilə şərtləndirilir və reqressiya xətti absis oxuna paraleldir. Bu isə o deməkdir ki, dominant asılı olmayan dəyişən düzgün seçilməmişdir. R^2-ın sıfıra yaxın olması ya dominant faktorun tam müəyyən edilməməsinə, ya da reqressiya funksiyasının qeyri - xətti olmasına dəlalət edir.

Xətti asılılıq halında seçimi korrelyasiya əmsalı r_{xy} ilə R^2 determinasiya əmsalı arasındakı asılılq belədir:

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\alpha}_1^2(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} =$$

$$= \frac{\frac{\hat{\alpha}_1^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\hat{\alpha}_1^2 S_x^2}{S_y^2} = \left(\frac{\hat{\alpha}_1 S_x}{S_y}\right)^2 = r^2. \qquad (2.39)$$

Qeyd edək ki, R^2 determinasiya əmsalı yalnız reqressiya tənliyində sərbəst hədd olduqda mənalandırılır. Ancaq bu halda (2.34) və deməli, (2.38) münasibəti doğrudur.

(2.34) düsturundan istifadə etməklə (2.35) düsturunda F - Fişer kəmiyyətini R^2 - la ifadə etmək olar:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-2}{1} \; . \qquad (2.40)$$

Nümunə olaraq tutaq ki, 30 müşahidənin verilənləri nəticəsində $y = 50{,}5 + 3{,}2x$ reqressiya tənliyi alınmışdır və $R^2 = 0.60$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində bu tənliyin əhəmiyyətliliyini yoxlayaq. F-statistikasını təyin edək:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-2}{1} = \frac{0{,}6}{1-0{,}6}\frac{28}{1} = 42.$$

F-Fişer meyarı cədvəlində $F_{krit} = 4{,}20$. $F = 42 > F_{krit} = 4{,}20$ olduğundan, reqressiya tənliyinin statistik əhəmiyyətliliyi əsaslandırılır.

Qeyd edək ki, statistik əhəmiyyətlilik üçün müşahidələrin sayının faktorların sayından ən azı 8-9 dəfə çox olması vacibdir. Məsələn, $n = 2$ halında $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ cütlükləri üçün xətti reqressiya modelində Ən Kiçik Kvadratlar Üsulunun tətbiqi iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyinin qurulmasına gətirilir. Burada heç bir ekonometrik təhlilin mənası yoxdur. Çünki təsadüfi meyletmələr olmur və korrelyasiya əmsalı göstəricilər arasında asılılığın olub-olmamasına fərq etmədən vahidə bərabərdir. $n = 1$ halında isə, bir nöqtədən keçən sonsuz düz xətt alınır və onların parametrləri qeyri-müəyyən olur.

§2.3. Qeyri -parametrik xətti reqressiya

Tutaq ki, n sayda eksperimentin nəticəsi olaraq $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ verilənləri məlumdur. Əvvəlki mövzuda (2.10) reqressiya modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsində ƏKKÜ-dan istifadə etdik. Təsadüfi $\varepsilon_i,\ i = \overline{1, n}$ tərkibləri üzərinə qoyulan Qauss-Markov şərtləri daxilində bu üsulun xətti qiymətləndirilmə üsullarından ən effektiv üsul olması haqda Qauss-Markov teoremi alınır. Əgər bu şərtlər ödənmirsə, onda bu teoremin tətbiqinə şübhə yarana bilər. Bu halda reqressiya modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsində qeyri-parametrik üsuldan istifadə oluna bilər. Bu üsul müşahidələrin ranqlarına əsaslanır. Onun tətbiqi üçün aşağıdakı sadə reqressiya sxeminə baxaq

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{2.41}$$

burada $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ -eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Fərz edək ki, onlar kəsilməz paylanmışlar. y

və x arasındakı asılılıq nəticəsini y-in ranqlarına əsaslanaraq təhlil edək. (2.41) modelinin də parametləri haqda hər hansı fikir söyləmək olmur. Çünki, bütün y_i-lərin eyni sabit dəqiqliyi ilə dəyişməsi $y_1,...,y_n$-in ranqını dəyişmir. Ona görə də ancaq α_1 parametri maraq doğurur. Onun qiymətləndirilməsini tapaq. Bunun üçün müşahidələri elə nömrələyək ki, $x_1 < x_2 < ... < x_n$ olsun. Belə nömrələmədə qalıqların davranışını izləmək asanlaşır. Əgər y_i müşahidə olunan kəmiyyətlərindən $\alpha_1 x_i$, $i = \overline{1,n}$ qiymətlərini çıxsaq, onda $y_i - \alpha_1 x_i = \alpha_0 + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,n}$ qalıqları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığını doğurur. α_1-in qiymətinin naməlum olduğunu nəzərə almaqla y_i-dən $\hat{\alpha}_1 x_i$ (burada $\hat{\alpha}_1$ dəyişməsini ekonometrist müəyyənləşdirir) dəyişən kəmiyyətini çıxaq. $y_i - \hat{\alpha}_1 x_i$ qalıqları eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətin məcmusu ilə uzlaşır. Bu uzlaşma $\hat{\alpha}_1$ kəmiyyəti α_1-ə nə qədər yaxın olarsa, daha qabarıq büruzə verir. Əks halda,

$$y_i - \hat{\alpha}_1 x_i = y_i - \alpha_1 x_i + x_i(\alpha_1 - \hat{\alpha}_1) = \alpha + \varepsilon_i + x_i(\alpha_1 - \hat{\alpha}_1) \quad (2.42)$$

olduğundan, $(\alpha_1 - \hat{\alpha}_1)$ fərqinin işarəsindən asılı olaraq, qalıqlar i - nömrəsinə uyğun olaraq artma və ya azalma tendensiyasına malik olur. Belə ki, bu fərq müsbətdirsə, i-nömrəsi artdıqca $y_i - \hat{\alpha}_1 x_i$ qalıqları yüksək qiymətlər alır. $y_i - \hat{\alpha}_1 x_i$ qalıqlarının dəyişmə tendensiyasının korrelyasiya əmsalını hesablamaqla müəyyənləşdirmək olar. Paylanma qanunu məlum olmadığından, ranq korrelyasiya əmsalından istifadə edirik. Bunun üçün $(x_i, y_i - \hat{\alpha}_1 x_i)$ məcmusuna nəzərən Pirsonun seçimi korrelyasiya əmsalının düsturunu tətbiq edək:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\left[(y_i-\bar{y})-\hat{\alpha}_1(x_i-\bar{x})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i-\bar{y})-\hat{\alpha}_1(x_i-\bar{x})\right]^2}}. \qquad (2.43)$$

$y_i-\hat{\alpha}_1x_i$ qalıqlarının x_i-dən $\left(i=\overline{1,n}\right)$ ən zəif asılılıqlarına $r=0$ qiyməti uyğun gəldiyindən, $\hat{\alpha}_1$ parametrinə nəzərən buradan aşağıdakı tənlik alınır:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\hat{\alpha}_1\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \qquad (2.44)$$

Bu tənliyin $\hat{\alpha}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ həlli isə, bizə Qauss-Markov şərtli təsadüfi tərkiblərə malik (2.10) modelinin ƏKKÜ -ilə $\hat{\alpha}_1=\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_{x^2}}$ qiymətləndirilməsini verir.

Beləliklə, Pirson korrelyasiya əmsalından istifadə etməklə reqressiya əmsalının qiymətləndirilməsi onun ƏKKÜ -ilə qiymətləndirilməsi ilə üst-üstə düşür. Lakin bu yanaşmalar reqressiya modelinin təsadüfi tərkibinin paylanma qanunu üzərinə qoyulan şərtlərin xarakteri ilə fərqləndirilir.

İndi isə,

$$\begin{matrix} y_1-\hat{\alpha}_1x_1, & y_2-\hat{\alpha}_1x_2, & \ldots, & y_n-\hat{\alpha}_1x_n \\ x_1 & x_2 & ,\ldots, & x_n \end{matrix} \qquad (2.45)$$

ədədlərindən düzəldilmiş iki sıra üçün ρ-Spirmen, τ - Kendal ranq korrelyasiya əmsallarını müəyyənləşdirək. Spirmenin ρ-korrelyasiya əmsalı (2.43) düsturunda $y_i-\hat{\alpha}_1x_i$ və x_i kəmiyyətlərini onların ranqları ilə əvəzedilməsindən alınır. Nəzərə alsaq ki, x_i-lər artmaya görə nizamlanmışlar, x_i-nin ranqı i-yə bərabərdir (fərz edirik ki, x_i-lərdən üst-üstə düşəni yoxdur). Ona görə də

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right)^2}}, \qquad (2.46)$$

burada R_i kəmiyyəti $y_i-\hat{\alpha}_1 x_i$ kəmiyyətinin ranqıdır. R_i-lər 1-dən n-ə qədər qiymətlər aldığından,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n\left(n^2-1\right)}{12}.$$

(2.46)-nın sürətində çevirmələr aparmaqla aşağıdakı düstur alınır:

$$\rho = 1-\frac{6}{n\left(n^2-1\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(i-R_i\right)^2. \qquad (2.47)$$

τ-Kendall korrelyasiya əmsalı isə, bu düsturla hesablanır:

$$\tau=\frac{2(P-Q)}{n(n-1)}=\frac{2K}{n(n-1)}.$$

Burada Q və P uyğun olaraq $i<j$ şərtini ödəyən bütün i, j-lər üçün $\left(y_i-\hat{\alpha}_1 x_i, x_i\right)$və $\left(y_j-\hat{\alpha}_1 x_j, x_j\right)$ cütlüklərinin uzlaşma və uzlaşmamalarının sayını göstərir. Burada $\left(y_i-\hat{\alpha}_1 x_i, x_i\right)$və $\left(y_j-\hat{\alpha}_1 x_j, x_j\right)$ cütlüklərinin üzlaşması dedikdə $x_i>x_j$ olduqda $y_i-\hat{\alpha}_1 x_i>y_j-\hat{\alpha}_1 x_j$ və ya $x_i<x_j$ olduqda $y_i-\hat{\alpha}_1 x_i<y_j-\hat{\alpha}_1 x_j$ bərabərsizliklərinin ödənilməsi başa düşülür. Əks halda cütlüklər uzlaşmayan hesab edilir $K=P-Q$ kəmiyyəti Kendall statistikasıdır. Onu belə yazmaq olar:

$$K=\sum_{1\le i<j\le n} sign\left(y_j-\hat{\alpha}_1 x_j-y_i+\hat{\alpha}_1 x_i\right)=\sum_{1\le i<j\le n} sign\left(R_j-R_i\right).$$

Qeyd edək ki, ρ və τ əmsalları $\hat{\alpha}_1$-dən asılıdır. Bu ranq əmsallar ilə ölçülən (2.45) sıraları arasındakı asılılığı ən kiçik etmək üçün $\hat{\alpha}_1$-i elə seçə bilərik ki, o

$$\tau(\hat{\alpha}_1) = 0 \text{ və ya } \rho(\hat{\alpha}_1) = 0 \qquad (2.48)$$

tənliklərinin həlli olsun. (2.48) tənliklərindən hər hansı birini həll etmək üçün onların sol tərəfinin $\hat{\alpha}_1$-dən necə asılı olduğunu aydınlaşdıraq. $\hat{\alpha}_1$-in kifayət qədər kiçik mənfi qiymətlərində (mütləq qiymətcə böyük) $y_i - \hat{\alpha}_1 x_i$, $i = \overline{1,n}$ fərqlərinin düzülüşü $x_1, x_2, \dots, x_n$ ədədləri ilə müəyyən olunur və onların düzülüşü ilə üst-üstə düşür. Onda $\hat{\alpha}_1 \to -\infty$ olduqda $\tau(\hat{\alpha}_1)$ və $\rho(\hat{\alpha}_1)$ vahidə yaxınlaşır.

İndi tutaq ki, $\hat{\alpha}_1$ artmağa başlayaraq müsbət OX oxuna yaxınlaşır. $y_i - \hat{\alpha}_1 x_i, i = \overline{1,n}$ qalıqlarının düzülüşünün 1-ci dəyişməsi onlardan ilk ikisinin üst-üstə düşməsindən baş verəcək

$$y_i - \hat{\alpha}_1 x_i = y_j - \hat{\alpha}_1 x_j \text{ (hər hansı } i, j \text{ üçün).} \qquad (2.49)$$

Bu halda hər iki ranq korrelyasiyası azalacaq. $\hat{\alpha}_1$-in sonrakı artmalarında $\tau(\hat{\alpha}_1)$, $\rho(\hat{\alpha}_1)$ asılılıqlarında dəyişikliklər (2.46) münasibəti ödənildikdə baş verəcək. Əgər bütün x_i-lər fərqlidirsə, $\tau(\hat{\alpha}_1)$, $\rho(\hat{\alpha}_1)$ asılılıqlarındakı dəyişmələr (sıçrayışlar)

$$\alpha_{ij} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \ 1 \le i < j \le n \qquad (2.50)$$

nöqtələrində olur. Əgər x_i-lər arasında üst-üstə düşənləri varsa, onda (2.50) -də $x_j - x_i \ne 0$ şərtini ödəyən i, j iştirak edir. $\tau(\hat{\alpha}_1)$, $\rho(\hat{\alpha}_1)$ funksiyaları elədir ki, onların simmetrik yerləşən sıçrayışları bir-birinə bərabərdir. Ona görə də, onların qrafikləri elə $\tilde{\alpha}_1$-da sıfırdan keçir ki, $\tilde{\alpha}_1$-dan sağda və solda eyni sayda kəsilmə nöqtəsi qalır. Yəni,

$$\tilde{\alpha}_1 = \underset{Me}{med}\left\{\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}, \quad 1 \le i < j \le n, \quad x_i \ne x_j\right\}. \qquad (2.51)$$

(2.51) ifadəsi reqressiya xəttinin bucaq əmsalının yeni qiymətləndirilməsidir. Qauss şərtli modellərdən fərqli olaraq bu qiymətləndirmə aşağı dəqiqlidir, lakin daha geniş şərtlər daxilində tətbiq edilir.

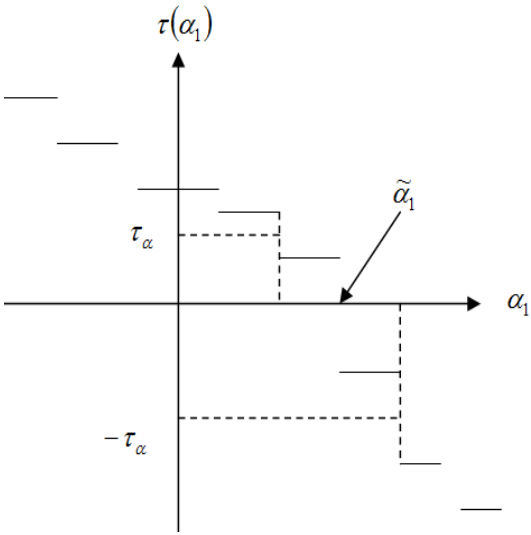
$\tau(\hat{\alpha}_1)$, $\rho(\hat{\alpha}_1)$ funksiyalarına əsaslanmaqla naməlum α_1 parametrinin inam intervallarını qurmaq olar. İnam əmsalı olaraq $1-2\alpha$ qəbul edək. Verilmiş n həcmli müşahidələr üçün τ_α (uyğun olaraq ρ_α) ilə τ - ranq korrelyasiyasının (uyğun olaraq ρ-nun) yuxarı kritik qiymətini işarə edək. Onda

$$P\{|\tau| \le \tau_\alpha\} = 1-2\alpha \quad \left(P\{|\rho| \le \rho_\alpha\}\right) = 1-2\alpha\,. \qquad (2.52)$$

τ və ρ - nun mümkün qiymətləri arasındakı ehtimal paylanmasının diskret xarakterli olması ona gətirib çıxarır ki, (2.52) bütün α-lar üçün ödənilmir. Ya α-nı elə seçmək lazımdır ki, (2.52) ödənilsin, ya da τ_α-nin (və ya ρ_α-nin) qiyməti olaraq $P\{|\tau| \le \tau_\alpha\} \ge 1-2\alpha$ (ρ_α- üçün uyğun olaraq) münasibətini ödəyən minimal qiymət götürmək lazımdır. İnam əmsalı $1-2\alpha$-dan kiçik olmayan $\hat{\alpha}_1$ üçün inam intervalı belə olur:

$$\{\hat{\alpha}_1 : |\tau(\hat{\alpha}_1)| \le \tau_\alpha\} \text{ və ya } \{\hat{\alpha}_1 : |\rho(\hat{\alpha}_1)| \le \rho_\alpha\} \qquad (2.53)$$

$n = 50$ olduqda $\tau(\hat{\alpha}_1)$ funksiyasının qrafiki belə təsvir olunur:



$\tau(\hat{\alpha}_1)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələri inam intervallarını ayırır. $\rho(\hat{\alpha}_1)$ funksiyasının qrafiki isə, onun sıçrayış nöqtələrinin sabit olmaması səbəbindən, daha mürəkkəbdir. Sadəlik üçün $\tau(\hat{\alpha}_1)$ funksiyasına baxaq. Paylanma cədvələri τ üçün deyil, K-Kendall statistikası üçün tərtib olunduğundan,

$$K(\hat{\alpha}_1) = \frac{n(n-1)}{2}\tau(\hat{\alpha}_1)$$

funksiyasını daxil edək. $K(\hat{\alpha}_1)$ funksiyası yuxarıda $\tau(\hat{\alpha}_1)$ üçün qeyd etdiyimiz xassələri özündə saxlayır. Məsələn, $1-2\alpha$ inam əmsallı α_1 üçün inam intervalı $\{\hat{\alpha}_1 : |K(\hat{\alpha}_1)| \le K_\alpha\}$ olur. Burada K_α $p\{|K| \le K_\alpha\} = 1-2\alpha$ tənliyinin həllidir. Belə ki, P ehtimalına (2.45) -dəki iki ədədlər ardıcıllığının asılı olmaması hipotezi ödəndikdə baxılır ([47, səh.219-230]).

İkinci fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

2.1. Reqressiya funksiyası nədir?

2.2. Reqressiya modeli reqressiya funksiyasından nə ilə fərqlənir?
2.3. Reqressiya modelində təsadüfi meyletmənin mövcudluğunun əsas səbəbləri nədir?
2.4. Cüt reqressiya modelində spesifikasiya necə reallaşdırılır?
2.5. Empirik və nəzəri reqressiya tənliklərinin fərqi nədədir?
2.6. Ən Kiçik Kvadratlar Üsulunun mahiyyətini izah edin?
2.7. Qauss-Markov teoreminin şərtləri ödənildikdə və ya ödənilmədikdə nəticəni izah edin.
2.8. Funksional, statistik və korrelyasiya asılılıqları arasındakı fərqləri izah edin.
2.9. Cüt reqressiya modelinin əhəmiyyətliliyinin statistik yoxlanılmasında hansı testlərdən istifadə olunur?
2.10. Qeyri-parametrik xətti reqressiyanın mahiyyətini izah edin. Kendal statistikasından qeyri-parametrik xətti reqressiyada nə üçün istifadə olunur?

Testlər

2.1. Cüt reqressiya modelində reqressiya əmsalı α_1 nəyi göstərir?
a) x asılı olmayan dəyişənini bir vahid artırdıqda y dəyişəni ortalama neçə vahid dəyişir;
b) $x = 0$ olduqda asılı dəyişənin proqnozlaşdırılan qiymətini;
c) $x > 0$ olduqda asılı dəyişənin proqnozlaşdırılan qiymətini;
d) $x < 0$ olduqda asılı dəyişənin proqnozlaşdırılan qiymətini.

2.2. Qiymətləndirmə o halda tutarlıdır ki,
a) digər seçimi qiymətləndirmələrlə müqayisədə ən kiçik dispersiyaya malik olsun;
b) kiçik həcmli seçimlərdə dəqiq qiyməti verir;
c) onun riyazi gözləməsi giymətləndirilən parametrə bərabərdir;
d) böyük həcmli seçimlərdə dəqiq qiyməti verir.

2.3. Xətti reqressiya modelində təsadüfi tərkiblər bir müşahidədən digər müşahidəyə keçdikdə dispersiyanın sabit səviyyəsini saxlamırsa, modelə ... deyilir.
a) heteroskedastik qalıqlı;
b) perpendikulyar qalıqlı;

c) homosqedastik qalıqlı;
d) bircins qalıqlı.

2.4. Cüt xətti reqressiya modelində t-Styudent meyarının kritik qiymətləri necə müəyyən olunur?
a) iki sərbəstlik dərəcəsi ilə;
b) əhəmiyyətsizlik səviyyəsi ilə;
c) üç və daha çox sərbəstlik dərəcəsi ilə;
d) əhəmiyyətlilik səviyyəsi və bir sərbəstlik dərəcəsi ilə.

2.5. Determinasiya əmsalı nəyi xarakterizə edir?
a) asılı y dəyişəninin ümumi dispersiyasında reqressiya tənliyi ilə izah olunan dispersiyasının payını göstərir;
b) asılı dəyişənin ümumi dispersiyasında təsadüfi tərkibin dispersiyasının payını göstərir;
c) reqressiya tənliyinin seçilməsində effektivliyin qiymətləndirilməsinin hesablanmasında istifadə olunur;
d) reqressiyaya daxil olan faktroların əhəmiyyətliliyini qiymətləndirir.

2.6. Qiymətləndirmənin meylsizliyi nəyi xarakterizə edir?
a) qalıqların riyazi gözləməsinin sıfır olmasını;
b) qalıqların ən kiçik dispersiyalı olmasını;
c) qiymətləndirmənin seçimlərin həcmindən asılığını;
d) seçimlərin həcmini artırdıqda qiymətləndirmənin dəqiqliyinin artmasını.

2.7. Qauss-Markov teoreminin şərtləri hansıdır?
a) təsadüfi meyletmələrin bir-birilə korrelə olunmaması;
b) təsadüfi meyletmələrin heteroskedastikliyi;
c) təsadüfi tərkiblərin dispersiyasının bütün müşahidələr üçün sabit olmaması;
d) təsadüfi tərkibin sıfır olması.

2.8.Ümumi, faktor və qalıq dispersiyasında sərbəstlik dərəcəsinin sayı nə ilə əlaqəlidir?
a) külliyyatda olan faktorların sayı ilə;

b) külliyyatda olan faktorların sayı və reqressiya tənliyinin növü ilə;
c) tədqiq olunan dəyişənlərin xarakteri ilə;
d) yalnız reqressiya tənliyinin növü ilə.

2.9. Qeyri-parametrik xətti reqressiya qiymətləndirilməsindən hansı halda istifadə olunur?
a) Reqressiya tənliyinin asılı olmayan qalıq həddləri eyni paylanma qanunu ilə təsvir olunduqda;
b) Reqressiya tənliyinin qalıq həddləri asılı olduqda;
c) Reqressiya tənliyinin qalıq həddləri sıfır olduqda;
d) Reqressiya tənliyinin qalıq həddlərinin dispersiyası müşahidələrə nəzərən dəyişdikdə.

Çalışmalar

Məsələ 2.1. Cədvəldə 1 ay ərzində 10 ailənin gəliri və xərcləri verilmişdir. Xərclərin gəlirə nəzərən $y = \alpha_1 x$ xətti reqressiyanı tədqiq edib α_1 parametrini qiymətləndirin. Gəliri ancaq 2500 p.v. olan ailənin xərcini qiymətləndirin.

1ay ərzində xərclər	1 ay ərzində gəlir	1ay ərzində xərclər	1 ay ərzində gəlir
2406	2508	2281	2522
2464	2572	2641	2700
2336	2408	2385	2531
2297	2390	2460	2448
2416	2595	2524	2685

Cavab: $\hat{\alpha}_1 \approx 0{,}949$; ailənin 1 aylıq gəliri 2500 p.v. olduqda onun xərclərinin qiymətləndirilməsi 2372 p.v. olur.

Məsələ 2.2. Tutaq ki, y-in x-ə nəzərən xətti reqressiyasında $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ kəmiyyətləri α_0, α_1 parametrlərinin ƏKKÜ qiymətləndirmələridir. Göstərin ki, $(y+c_1)$ funksiyasının $(x+c_2)$-yə nəzərən $(c_1, c_2 \neq 0)$ reqressiyasında $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$ ƏKKÜ qiymətləndirmələri üçün $\tilde{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_1$; $\tilde{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0 + c_1 - c_2\hat{\alpha}_1$ münasibətləri doğrudur.

Məsələ 2.3. Sərbəst həddsiz $y_i = \alpha_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,n}$ modeli üçün göstərin ki,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2,$$

burada $\hat{y}_i = \hat{\alpha}_i x_i$, $e_i = y_i - \hat{y}_i$.

Məsələ 2.4. (x, y) cütlükləri arasınada 16 sayda müşahidələrin nəticələri belədir:

$$\sum_{i=1}^{16} y_i^2 = 526, \ \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 657, \ \sum_{i=1}^{16} x_i y_i = 492,$$

$$\sum_{i=1}^{16} y_i = 64, \ \sum_{i=1}^{16} x_i = 96.$$

$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,16}$ reqressiyasını qiymətləndirin və $\alpha_1 = 1.0$ olması haqda hipotezi yoxlayın.

Cavab: $\hat{\alpha}_0 = -4$; $\hat{\alpha}_1 = \frac{4}{3} \approx 1.33$, $H_0 : \alpha_1 = 1$ hipotezi 5%-lik əhəmiyyətlilik səviyyəsində rədd edilir.

Məsələ 2.5. $y_i = \alpha_0 + \varepsilon_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ reqressiya modelində α_0 və σ^2 - nın ƏKKÜ- ilə qiymətləndirmələrini, $\hat{\alpha}_0$ qiymətləndirməsinin dispersiyasını tapın. Göstərin ki, $\dfrac{\hat{\alpha}_0 - \alpha_0}{S_{\hat{\alpha}_0}}$ statistikası $t(n-1)$ paylanmasına malikdir. R^2-nı hesablayın.

Cavab: $\hat{\alpha}_0 = \bar{y}$, $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ qiymətlədirlməsi σ^2 - nın meylsiz qiymətləndirməsidir; $\sigma_{\hat{\alpha}_0} = \frac{1}{n}\sigma^2$; $R^2 = 0$.

Məsələ 2.6. $y_i = \alpha_1 x_i + \varepsilon_i,\ \ i = 1,2,...,n$ modelində α_1 və σ^2 nın ƏKKÜ- ilə qiymətləndirməsini tapın, $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirməsinin dispersiyasını müəyyənləşdirin. Göstərin ki, $\frac{\hat{\alpha}_1 - \alpha_1}{S_{\hat{\alpha}_1}}$ statistikası $t(n-1)$ paylanmasına malikdir.

Cavab: $\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; $\sigma_{\hat{\alpha}_1} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$;

Məsələ 2.7. $\hat{y}_x = 21{,}5 + 4{,}35x$ reqressiya tənliyində $\bar{y} = 250,\ \bar{x} = 52$ olduqda orta elastiklik əmsalını tapın.
Cavab: 0,90.

Məsələ 2.8. Tutaq ki, fakfaktorlar arasındakı elastiklik əmsalı $E = 1{,}5$-dir və faktorların qiymətlərinin dəyişməsi nəzərə tutulur. Əgər qiymətlərin dəyişməsinə qədər y və x faktorlarının qiymətləri $y = 10,\ x = 40$ olarsa, x faktorunun qiymətini 2 vahid dəyişdikdə y faktoru nə qədər dəyişir?
Cavab: 0,75.

Məsələ 2.9. Tutaq ki, 30 qiymətli kağızlar potfelinin illik gəlirliyi (%-lə) və onun riski (onun orta kvadratik meylləri %-lə) aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

i	y_i	x_i	i	y_i	x_i
1	14,6	16,3	16	15,1	19,1
2	10,0	9,2	17	11,4	14,1
3	10,5	13,5	18	17,4	21,8
4	12,0	16,3	19	11,3	12,5
5	11,9	15,6	20	10,0	10,4
6	12,4	12,1	21	16,2	20,8
7	14,8	16,8	22	17,6	22,7
8	15,7	19,3	23	14,4	17,8
9	10,9	13,7	24	10,4	10,2
10	14,4	15,9	25	13,1	16,0
11	11,0	11,9	26	10,7	13,3
12	15,2	19,2	27	14,4	19,4
13	14,6	18,7	28	16,1	20,9
14	16,4	21,5	29	11,3	12,0
15	16,0	21,7	30	13,8	16,9

Xətti reqressiya modeli üçün parametrləri qiymətləndirin və interpretasiya verin.
Cavab: $\hat{\alpha}_0 = 4{,}01; \ \hat{\alpha}_1 = 0{,}58$. Orta kvadratik meyli 1% artırdıqda, potfelin illik gəliri orta hesabla 0,58% artır. Əgər investisiya potfeli risksizdirsə, onda gəlir ortalama 4,01% təşkil edir.

Məsələ 2.10. Məsələ 2.9-un verilənlərə əsasən potfelin illik orta gəliri ilə onun riski arasında xətti asılığın gücünü qiymətləndirin. $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində korrelyasiya əmsalının əhəmiyyətliliyi haqda hipotezi yoxlayın.
Cavab: $r(x, y) = 0{,}09;$ Portfelin illik orta gəlirliyi ilə riski arasında güclü xətti düz əlaqə mövcuddur; $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində korrelyasiya əmsalını əhəmiyyətli hesab etmək olar.

FƏSIL III

ÇOXDƏYİŞƏNLİ XƏTTİ REQRESSİYA ANALİZİ

§3.1. Çoxdəyişənli xətti reqressiya və onun parametrlərinin qiymətləndirilməsi

İqtisadi təzahürlər və proseslər çoxlu sayda faktorların eyni zamanda məcmu təsiri ilə xarakterizə olunur. Məsələn, hər hansı güzərana tələbat nəinki onun qiyməti ilə müəyyən edilir, həm də onu əvəz edən və ya tamamlayan güzəranın qiyməti, istehlakçının gəliri və digər formalarla müəyyən edilir. Belə hallarda cüt reqressiya əvəzinə çoxdəyişənli reqressiyadan istifadə edilir. Çoxdəyişənli reqressiya tələb-təklif funksiyalarının öyrənilməsində, istehsal xərcləri funksiyasının tədqiqində, makroiqtisadi hesablamalarda və bir sıra digər iqtisadi məsələlərin həllində istifadə olunur (məsələn, bax. [3, 8-15, 22, 23, 31, 43-44, 52-54]). Bu tip reqressiyanın əsas məqsədi çoxlu sayda formalarla modellərin qurulması, hər bir faktorun ayrılıqda və ya bütün faktorların birgə modelləşdirilən göstəriciyə təsirini öyrənməkdir. Çoxdəyişənli reqressiya analizi cüt reqressiya analizinin çoxfaktorlu asılılıqlara davam etdirilməsidir. Lakin burada yeni məsələlərin öyrənilməsi zərurəti yaranır ki, onlardan ikisini qeyd edək. Birinci məsələ konkret faktorların asılı dəyişənə təsirinin tədqiqi, bu təsirin sərhəddinin müəyyənləşdirilməsi, digər faktorların təsirinin öyrənilməsi məsələləridir. İkinci mühüm məsələ modelin spesifikasiyası məsələsidir ki, bu halda hansı faktorların modelə salınması, hansıların modeldən çıxarılması məsələləri əhəmiyyətlidir. Ona görə də, əksər hallarda asılı y dəyişəni ilə bir neçə asılı olmayan $x_1,\dots,x_k$ dəyişənləri arasındakı asılılığın tədqiqinə zərurət yaranır. i-ci müşahidə nəticəsində dəyişənlərin qiymətlərini $(y_i, x_{i1},\dots,x_{ik}),\ i=\overline{1,n}$ işarə edək. Onda çoxdəyişənli xətti reqressiya modelini aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$y=\tilde{y}(x)+\varepsilon=\alpha_0+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i+\varepsilon. \tag{3.1}$$

Burada y-asılı dəyişən (prediktor); $x_i,\ i=\overline{1,k}$ asılı olmayan dəyişənlər (reqressorlar); $\tilde{y}(x)=\alpha_0+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$ determinik tərkib, asılı olmayan dəyişənlərdən asılı xətti funksiya; $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k$ reqressiyanın parametləri, $\alpha_1,...,\alpha_k$ uygun faktorların marjinal effektivliyi; ε-təsadüfi tərkibdir (təsadüfi qalıq), $M\varepsilon=0,\ D\varepsilon=\sigma^2$.

$\alpha_1,...,\alpha_k$ parametrləri i-ci asılı olmayan dəyişənin qiymətlərini bir vahid artırdıqda asılı dəyişənin qiymətinin ortalama nə qədər dəyişməyini ifadə edir. Burada həm də fərz edilir ki, asılı olmayan dəyişənlər təsadüfi kəmiyyətlər deyil, asılı dəyişən isə, onun tərkibində həm də təsadüfi qalıqlar olduğundan, təsadüfi kəmiyyətdir. Təsadüfi tərkiblər determinik tərkibə daxil olmayan və asılı dəyişənə təsir edən çoxlu sayda faktorları təsvir edir. Belə təsirlərin faktor yükü zəifdir. Reqressiyanın parametrlərinin qiymətləndirilməsində $(y_i,x_{i1},...,x_{ik}),\ i=\overline{1,n}$ fəza seçimi verilənləri ilə yanaşı $(y_t,x_{t1},...,x_{tk}),\ t=\overline{1,n}$ zaman anları seçimlərinə də baxmaq olar.

$y_i,\ i=\overline{1,n}$ asılı dəyişənin seçimi verilənlərini sütun vektoru, asılı olmayan dəyişənlərin seçimi verilənlərini isə, matris verilənləri kimi işarə edək:

$$(n\times 1)\ \ Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ ...\\ y_n\end{pmatrix},\ (n\times(k+1))\ \ X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k}\\ ... & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk}\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Fərz edək ki, model bütün seçimi müşahidələr üçün ödənilir:

$$y_j = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{ji} + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Burada $\operatorname{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_{j'}) = 0, \ j \neq j'; \ \operatorname{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_{j'}) = D\varepsilon$, yəni təsadüfi qalıqlar homosqedastiklik şərtlərini ödəyir.

(3.3) seçimi tənliklərini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$Y = X\alpha + \varepsilon. \tag{3.4}$$

Burada $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k)'$ – reqressiya əmsallarından düzəlmiş sütun vektoru, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_j, ..., \varepsilon_n)'$ – təsadüfi qalıqların sütun vektorudur.

Reqressiya əmsallarının $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_k$ qiymətləndirilməsini almaq üçün, cüt xətti reqressiyada olduğu kimi, ƏKKÜ tətbiq edilir ki, bu üsulun mahiyyətinə əsasən parametrlərin elə qiymətləri seçilir ki, bu qiymətlərdə asılı dəyişənlərin faktiki qiymətləri ilə onların hamarlanmış qiymətləri arasındakı fərqlərin kvadratları cəmi minimal olsun:

$$Q(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k) = \sum_{j=1}^{n} \left[y_j - \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{ji} \right) \right]^2 \to \min. \tag{3.5}$$

Burada asılı dəyişənin j-cu müşahidə üçün hamarlanmış qiyməti dedikdə

$$\hat{y}_j = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i x_{ji}$$

qiyməti başa düşülür ki, bu qiymət $(k+1)$ ölçülü fəzada $y = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i x_i$ hipermüstəvisində yerləşir, sağ tərəfdəki $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n$ parametrləri isə ƏKKÜ-ilə tapılır.

Şərh olunan meyara əsasən optimal qiymətləndirmələr $Q(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)$ kvadratik formasından $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ -rə nəzərən 1-ci tərtib törəmələrinin sıfra bərabərləşdirilməsi nəticəsində alınan aşağıdakı normal tənliklər sistemindən alına bilər (çoxdəyişənli funksiyaların ekstremumu üçün zəruri şərtlər):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 2\sum\limits_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\hat{\alpha}_0 + \sum\limits_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i x_{ji} \right)\right](-1) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_e} = 2\sum\limits_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\hat{\alpha}_0 + \sum\limits_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i x_{ji} \right)\right](-x_{j\ell}) = 0, \qquad \ell = \overline{1,k}\ . \end{cases} \tag{3.6}$$

(3.6) sistemini aşağıdakı standart halda yazaq:

$$\begin{aligned} & n\hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ji} \right)\hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} y_j, \\ & \left(\sum_{j=1}^{n} x_{je} \right)\hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{je}x_{ji} \right)\hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{j\ell}y_j, \qquad \ell = \overline{1,k} \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7) sistemi $(k+1)$ sayda tənlikdən ibarətdir və naməlum dəyişənlər $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k$ $-$lar onun həlli isə, $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,...,\hat{\alpha}_n$ qiymətləndirmələri olmalıdır, sistemin əmsalları $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j,\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{j\ell}y_j,\ \ \ell=\overline{1,k},\ \ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{j\ell}x_{ji},\ i=\overline{1,k}$ cəmindən formalaşdığından, onun həll olunmasını sadələşdirmək üçün modelin (3.4) vektor - matris yazılışından istifadə edək. $Q(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n)$ kvadratik formasını ε sütun vektoru ilə, ε' sətir vektorunun skalyar hasili kimi yaza bilərik. Vektor və matrislərin hasili qaydalarını nəzərə almaqla sadə çevirmələrlə alırıq:

$$\begin{aligned} & Q(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n) = \varepsilon'\varepsilon = (Y - X\alpha)'(Y - X\alpha) = Y'Y - \alpha'X'Y - \\ & - Y'X\alpha + \alpha'X'X\alpha = Y'Y - 2\alpha'X'Y + \alpha'X'X\alpha \end{aligned}$$

(3.7) sisteminin vektor formasında yazılışı $\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0$ olur və sol tərəfdə diferensiallama əməliyyatı vektora nəzərəndir. Əvvəlki ifadəni nəzərə alsaq,

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha}=\frac{\partial\left(Y'Y-2\alpha'X'Y+\alpha'X'X\alpha\right)}{\partial \alpha}=-2X'Y+2X'X\alpha=0 \Rightarrow X'X\alpha=X'Y.$$

Buradan alınır ki, əgər $X'X$ matrisi cırlaşmayandırsa, yəni $\det X'X\neq 0$ olarsa, onda $\alpha=\left(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k\right)$ parametrlərinin optimal qiymətləndirmə vektoru

$$\hat{\alpha}=\left(X'X\right)^{-1}X'Y \qquad (3.8)$$

düsturu ilə təyin olunur.

$X'X$ matrisi o halda cırlaşan olur ki, X matrisinin heç olmazsa bir sütunu onun digər sütunlarının xətti kombinasiyası şəklində göstərilsin. Cırlaşma halında $\left(X'X\right)^{-1}$ matrisi mövcud olmur. Həllin tapılmasında digər kafi şərt müşahidələrin sayının faktorların sayından çox olması şərtidir: $n\geq k+1$. Əks halda (3.7) sisteminin birqiymətli həllini tapmaq olmur, çünki sistemdə naməlum dəyişənlərin sayı tənliklərin sayından çox olur. $n=k+1$ olduqda parametrlərin qiymətləndirmələri ƏKKÜ-nu tətbiq etmədən $\left(y_i,x_{i1},...,x_{ik}\right)$, $i=\overline{1,n}$ qiymətlərini $\hat{y}=\alpha_0+\alpha_1x_1+...+\alpha_kx_k$ ifadəsində nəzərə almaqla yeganəliklə almaq olar. Burada $(k+1)$ sayda tənlik və həmin sayda dəyişən alınır ki, bu sistem adi üsullarla həll edilir. Lakin statistik yanaşma nöqteyi nəzərdən məsələnin belə həlli etibarlı olmur, çünki müşahidə nəticəsində alınmış qiymətlər müəyyən xətalarla olur. Ona görə də modelin parametrlərinin etibarlı qiymətləndirmələrini almaq üçün müşühidələrin sayı parametrlərin sayından kifayət qədər çox olmalıdır.

Nümunə 3.1. Aşağıdakı cədvəldə şərti verilənlərə nəzərən y dəyişəninin (idxal) Ümumdaxili Milli Məhsuldan (x_1) və istehlak qiymətləri indeksindən (x_2) xətti reqressiya asılılığının parametrlərini tapaq:

İllər	1-ci il	2-ci il	3-cü il	4-cü il	5-ci il
x_1	636	689	753	796	868
x_2	93	95	97	100	104
y	28	32	38	41	53

$$Y = \begin{pmatrix} 28 \\ 32 \\ 38 \\ 41 \\ 53 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 636 & 93 \\ 1 & 689 & 95 \\ 1 & 753 & 97 \\ 1 & 796 & 100 \\ 1 & 868 & 104 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 636 & 689 & 753 & 796 & 868 \\ 93 & 95 & 97 & 100 & 104 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 636 & 93 \\ 1 & 689 & 95 \\ 1 & 753 & 97 \\ 1 & 796 & 100 \\ 1 & 868 & 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3742 & 489 \\ 3742 & 2833266 & 367516 \\ 489 & 367516 & 47899 \end{pmatrix};$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2452,8 & 1,822 & -39,02 \\ 1,822 & 0,0014 & -0,03 \\ -39,02 & -0,03 & 0,625 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\alpha} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} -150,99 \\ 0,02 \\ 1.78 \end{pmatrix},$$

$$\hat{y} = -150,99 + 0,02x_1 + 1,78x_2 .$$

§3.2. Çoxdəyişənli xətti reqressiyanın parametrlərinin qiymətləndirilmələrinin xassələri

(3.8) düsturu ilə müəyyənləşdirilən $\hat{\alpha}_i,\ i=\overline{0,k}$ qiymətləndirilmələri təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan, onlara $\alpha_i,\ i=\overline{0,k}$ parametrləri ilə $\Delta\hat{\alpha}_i,\ i=\overline{0,k}$ təsadüfi səhvlərin cəmi kimi baxmaq olar. Onda qiymətləndirmənin keyfiyyətini $\Delta\alpha_i,\ i=\overline{0,k}$ səhvlərinin xassələrinə görə təhlil etmək olar. Baxmayaraq ki, α_i-nin həqiqi qiyməti məlum deyil, $\Delta\alpha_i$-nin müəyyən xarakteristikalarını və onun xassələrini müəyyənləşdirmək olar. Bunun üçün (3.8) düsturunda Y-in əvəzinə onun $X\alpha+\varepsilon$ ifadəsini nəzərə alaq:

$$\hat{\alpha}=(X'X)^{-1}X'(X\alpha+\varepsilon)=(X'X)^{-1}X'X\alpha+ \\ +(X'X)^{-1}X'\varepsilon=\alpha+(X'X)^{-1}X'\varepsilon. \tag{3.9}$$

Burada $(X'X)^{-1}X'\varepsilon=\Delta\hat{\alpha}$.

Modelin əmsallarının qiymətləndirmələrinin təsadüfi xarakterli olması onların meylsizlik və effektivlilik xassələrini əsaslandırır. Əvvəlcə bu qiymətləndirmələrin meylsizliyini nəzərdən keçirək. Bu o deməkdir ki, $M[\hat{\alpha}_i]=\alpha_i,\ i=\overline{0,k}$. $X'X$ matrisinin tərsinin varlığı şərtilə (3.9)-un sağ və sol hissəsinin riyazi gözləməsini tapaq:

$$M[\hat{\alpha}]=\alpha+M\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]. \tag{3.10}$$

(3.10)-dan alınır ki, $\hat{\alpha}_i,\ i=\overline{0,k}$ qiymətləndirmələrinin meylsiz olması üçün

$$M\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]=0 \tag{3.11}$$

olması zəruridir. X matrisi sıfır martis olmadığından, (3.11)-

in ödənilməsi üçün $M[\varepsilon]=0$ olması və ε-la x_k faktorlarının asılı olmaması şərti zəruri şərtlərdir. Bu şərtlər ödənildikdə $(X'X)^{-1}X'\varepsilon$ hasilinin riyazi gözləməsini $(X'X)^{-1}X'$ sabit matrisinin və təsadüfi vektorun riyazi gözləmələrinin hasili kimi göstərmək olar və buradan alınır ki, (3.11) ödənilir. $\hat{\alpha}_i,\ i=\overline{0,k}$ qiymətləndirmələrinin dispersiyasını onların kovariasiya matrisinin diaqonal elementləri kimi tapmaq olar:

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha})=\begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1) & \dots & \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_k) \\ \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_0) & \sigma_1^2 & \dots & \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_k,\hat{\alpha}_0) & \operatorname{cov}(\hat{\alpha}_k,\hat{\alpha}_1) & \dots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Burada $\sigma_i^2=D(\hat{\alpha}_i)$ i-ci qiymətləndirmənin dispersiyası, $\operatorname{cov}(\hat{\alpha}_i,\hat{\alpha}_j)$ i və j-cu $i,j=\overline{0,k}$ parametrlərin qiymətləndirmələrinin kovariasiyasıdır $\operatorname{cov}(\hat{\alpha})=M[\Delta\hat{\alpha}\Delta\hat{\alpha}']$ sətir və sütun vektorları hasili münasibəti doğru olduğundan, (3.9)-u nəzərə almaqla aşağıdakı münasibəti yazmaq olar:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\hat{\alpha})&=M\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]= \\ &=(X'X)^{-1}X'M[\varepsilon\varepsilon']X(X'X)^{-1}=(X'X)^{-1}X'\operatorname{cov}(\varepsilon)X(X'X)^{-1}.\end{aligned} \quad (3.13)$$

Burada

$$\operatorname{cov}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \operatorname{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \dots & \operatorname{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & \sigma_\varepsilon^2 & \dots & \operatorname{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \operatorname{cov}(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \dots & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

(3.13) -ü nəzərə almaqla buradan alınır ki, $\hat{\alpha}_i,\ i=\overline{0,k}$ qiymətləndirmələrinin $\sigma_0^2,\sigma_1^2,\dots,\sigma_k^2$ dispersiyası o halda minimal olur ki,

$$M[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma_\varepsilon^2 E_n \qquad (3.15)$$

olsun. Burada E_n - n tərtibli vahid matrisdir. Bu halda $\hat{\alpha}$ qiymətləndirmə matrisinin kovariasiya matrisi sadələşir:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\hat{\alpha}) &= (X'X)^{-1} X' \operatorname{cov}(\varepsilon) X (X'X)^{-1} = \\ &(X'X)^{-1} X' \sigma_\varepsilon^2 X (X'X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}. \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Beləliklə, əgər (3.15) şərti ödənərsə, onda xətti çoxdəyişənli reqressiya modelinin əmsallarının qiymətləndirilməsi effektivdir. Təcrübədə $\hat{\alpha}_i,\ i = \overline{0,k}$ qiymətləndirmələrinin kovariasiya və dispersiyaları $\sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$ matrisinin elementləri kimi qiymətləndirilə bilər. $C = (X'X)^{-1}$ işarə edək. Onda (3.9) düsturundan xüsusi halda alınır ki,

$$D\hat{\alpha}_i = \sigma^2 c_{ii} \text{ və ya } \sigma_{\hat{\alpha}_i} = \sigma \sqrt{c_{ii}}\ .$$

İndi göstərək ki, ƏKKÜ ilə qiymətləndirmə tutarlıdır. Bunun üçün (3.7) sistemində 1-ci tənliyi $\hat{\alpha}_0$-ə nəzərən həll edək:

$$\overline{\alpha}_0 = \overline{y} - \sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i \hat{\alpha}_i .$$

Bu ifadəni sistemin digər tənliklərində nəzərə alsaq, $\hat{\alpha}_1,...,\hat{\alpha}_k$ qiymətləndirmələri üçün aşağıdakı normal tənliklər alınır:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_{j\ell} - \overline{x}_\ell)(x_{ji} - \overline{x}_i) \right) \hat{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{n} (x_{j\ell} - \overline{x}_\ell) y_j, \quad \ell = \overline{1,k} \qquad (3.17)$$

$z_{ji} = x_{ji} - \overline{x}_i,\ \ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,k}$ qəbul etsək, (3.17)-ni belə yazmaq olar:

$$\left(Z'Z\right)\hat{\alpha}^1 = Z'Y \tag{3.18}$$

burada $\hat{\alpha}^1 = \left(\hat{\alpha}_1,...,\hat{\alpha}_k\right)'$ sütun vektor, Z - isə $\left(n \times k\right)$ tərtibli matrisdir:

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1k} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ z_{n1} & \dots & z_{nk} \end{pmatrix};$$ $Z'Z$ -isə $\left(k \times k\right)$ tərtibli matrisdir:

$$Z'Z = \left\| \sum_{j=1}^{n} z_{jr} z_{ij} \right\|.$$

$$\frac{1}{n} Z'Z = \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_{jr} z_{ij} \right\| = \left\| \mathrm{cov}\left(z_r z_i\right) \right\| = \mathrm{cov}\left(Z\right) = MZZ'.$$

$\mathrm{cov}\left(Z\right)$ kovariasiya matrisinin məxsusi ədəd və normallaşmış məxsusi vektorlarını

$$\mathrm{cov}\left(Z\right)\ell_i = \lambda_i \ell_i, \quad i = \overline{1,k}$$

düsturundan tapıb məxsusi vektorlardan $L = \left(\ell_1,...,\ell_k\right)$ ortoqonal matrisini düzəldək. Ortoqonal çevirmə vasitəsilə $z = \left(z_1,...,z_k\right)'$ mərkəzləşdirilmış və korreləolunmuş göstəricilərdən mərkəzləşdirilmiş və korreləolunmayan $f = \left(f_1,..., f_k\right)'$ baş komponentlər göstəricilərinə keçək:

$$z = Lf, \quad f = L'z. \tag{3.19}$$

Məxsusi vektorlar ortoqonal olduğundan

$$\left\|\operatorname{cov}\left(f_i, f_r\right)\right\| = Mff' = ML'ZZ'L = L'MZZ'L = L'\operatorname{cov}(z)L =$$

$$= \left\|\ell_i \operatorname{cov}(z)\ell_r\right\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} = \Lambda, \quad \lambda_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ji}^2,$$

$$\operatorname{cov}(z) = MZZ' = MLff'L' = LMff'L' = L\Lambda L',$$

$$ZZ' = n\operatorname{cov}(z) = L\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{j1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{n} f_{j2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} f_{jk}^2 \end{pmatrix}L' \quad \text{olduğundan}$$

$$\left\|c_{ik}\right\| = \left(ZZ'\right)^{-1} == \left(L'\right)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{j1}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{j2}^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} f_{jk}^2} \end{pmatrix}L^{-1} =$$

$$= L\begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{j1}^2\right)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\sum_{j=1}^{n} f_{j2}^2\right)^{-1} & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \left(\sum_{j=1}^{n} f_{jk}^2\right)^{-1} \end{pmatrix} L' = \left\| \sum_{r=1}^{k} \frac{\ell_{ir}\ell_{sr}}{\sum_{j=1}^{n} f_{jr}^2} \right\|,$$

buradan

$$c_{ii} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\ell_{ir}^2}{\sum_{j=1}^{n} f_{jr}^2}. \qquad (3.20)$$

(3.20)-dən alınır ki, əgər bütün r -lər üçün $n \to \infty$ olduqda baş komponentlərin kvadratları cəmi sonsuzluğa yaxınlaşırsa $\left(\sum_{j=1}^{n} f_{jr}^2 \to \infty\right)$, onda $c_{ii} \to 0$. Lakin $D\hat{\alpha}_i = \sigma^2 c_{ii}$ olduğundan, ƏKKÜ- ilə qiymətləndirmənin tutarlı olması üçün asılı olmayan dəyişənlərin qiymətlərinin (sonlu sayda həddən başqa) fərqli olması kafi şərtdir. Bu halda komponentlərin qiymətləri də fərqli olur.

İndi isə, təsadüfi tərkibin dispersiyasının qiymətləndirilməsinə baxaq. Qiymətləndirməni $e_j = y_j - \hat{y}_j$ təsadüfi qalıqlarına nəzərən təhlil edək

$$\hat{\sigma}^2 = h\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2, \quad \hat{y}_j = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i x_{ji}, \; j = \overline{1,n} \qquad (3.21)$$

münasibətində h sabitini elə seçək ki, dispersiyanın qiymətləndirilməsi meylsiz olsun. Aşağıdakı münasibətləri yaza bilərik:

$$M\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-\hat{y}_j\right)^2=M\sum_{j=1}^{n}e_j^2=Me'e,\quad e=\left(e_1,e_2,\ldots,e_n\right)'. \qquad (3.22)$$

$$e=Y-\hat{Y}=X\alpha+\varepsilon-X\hat{\alpha}=X\alpha+\varepsilon-X\left(X'X\right)^{-1}X'\left(X\alpha+\varepsilon\right)=$$
$$=\left(E_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\varepsilon=H\varepsilon.$$

Burada $H=E_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'$ olduğundan, $e'e=\varepsilon'H'H\varepsilon$ və $H'=E_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'=H$, yəni H simmetrik olduğundan, $e'e=\varepsilon'H^2\varepsilon$. Digər tərəfdən

$$H^2=\left(E_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)\left(E_n-X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)=$$
$$=E_n-2X\left(X'X\right)^{-1}X'+X\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}X'=$$
$$=E_n-X\left(X'X\right)^{-1}X=H,$$

yəni H idempotent olduğundan,

$$Me'e=M\varepsilon'H\varepsilon=\sum_{j,r=1}^{n}M\varepsilon_j h_{jr}\varepsilon_r=\sum_{j=1}^{n}h_{jj}M\varepsilon_j^2=\sigma^2 trH.$$
$$\left(M\varepsilon_j\varepsilon_r=0,\ j\neq r\right).$$

(Burada trH ilə H matrisinin izi, yəni onun diaqonal elementlərinin cəmi işarə edilmişdir).

$$trH=trE_n-tr\left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]=n-tr\left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]=n-k-1.$$

Buradan alırıq ki, $M\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-\hat{y}_j\right)^2=\sigma^2\left(n-k-1\right)$. Ona görə də, təsadüfi tərkibin dispersiyasının qiymətləndirilməsi belə olur:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-k-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-\hat{y}_j\right)^2. \qquad (3.23)$$

§3.3. Çoxdəyişənli xətti reqressiyada Qauss-Markov teoremi və onun şərtlərinin yoxlanılması testləri (Qoldfeld-Kvandt, Spirmen ranq korrelyasiya testləri, t-Styudent, F-Fişer, DW Darbin Uotson, χ^2-uzlaşma meyarları)

§3.2.-də şərh olunan reqressiya parametrlərinin qiymətləndirmələrinin xassələrindən çoxdəyişənli xətti reqressiya modeli üçün aşağıdakı Qauss - Markov teoremi nəticə kimi alınır.

Teorem (Qauss-Markov) 3.1. *Tutaq ki, (3.4) modelində* ε *- təsadüfi vektor,* X *-təsadüfi olmayan matrisdir və aşağıdakı şərtlər ödənir:*

1. $M(\varepsilon)=0_n$ *(burada* 0_n *- n tərtibli sıfır matrisdir);*

2. $\mathrm{cov}(\varepsilon)=M(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2E_n,\ \ \mathrm{cov}(\varepsilon_j,\varepsilon_{j'})=0,\ \ j\neq j'$ *(*E_n *- n tərtibli vahid matrisdir)*

3. ε *normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətdir, yəni* $\varepsilon\sim N(0_n,\sigma^2E_n)$;

4. Təsadüfi qalıqlar modelə daxil olan faktorların qiymətlərindən asılı deyil: $\mathrm{cov}(\varepsilon_i,x_j)=0,\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,k}$;

5. $r(X)=k+1<n$ *(burada* $r(X)$ *- matrisin ranqıdır).*

Onda ƏKKÜ-ilə alınmış $\hat{\alpha}=(X'X)^{-1}X'Y$ *qiymətləndirməsi xətti meylsiz qiymətləndirmələr sinfində ən kiçik dispersiyaya malikdir və ən effektiv qiymətləndirmədir, yəni istənilən meylsiz* $\tilde{\alpha}=CY$ *qiymətləndirməsi üçün* $D\tilde{\alpha}_i\geq D\hat{\alpha}_i,\ \ i=\overline{1,k}.$

(3.16) və (3.23) düsturlarından aşağıdakı teorem alınır.

Teorem 3.2. *Əgər Qauss-Markov teoreminin 1)-4) şətrləri ödənərsə, onda*

a) $\hat{\alpha}$ *qiymətləndirmə vektoru çoxölçülü normal paylanma qanununa tabedir:*

$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma^2 (X'X)^{-1}\right)$;

b) $(n-k-1)S^2/\sigma^2$ *statistikası* $(n-k-1)$ *sərbəst dərəcəli* χ^2 *paylanmasına tabedir və* $\hat{\alpha}$ *qiymətləndirmə vektoru ilə qarşılıqlı asılı deyil.*

Qeyd edək ki, praktikada Qauss-Markov şərtlərinin ödənilməsinin yoxlanılması reqressiya tənliyinin parametrləri müəyyən edildikdən sonra reallaşır. Statistik analiz təsadüfi tərkiblər üzərində aparılır. Əgər y təsadüfi kəmiyyət, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ faktorları təsadüfi deyilsə, onda təsadüfi qalıqların paylanma qanunu nəticənin paylanma qanunu ilə eyni olmalıdır. y_i təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinin faktorların verilmiş qiymətlərində nəticənin hamarlanmış qiymətinə bərabər olması fərz edildiyindən, təsadüfi qalıqların riyazi gözləmələri sıfır olur. Nəticənin i-ci qiymətinin standart meyli isə, i-ci qalığın standart meyli ilə eynidir. Real iqtisadi hesablamalarda hər bir təsadüfi qalığın bir realizasiyası olduğundan, ƏKKÜ-nun şərtlərini bütün qalıqlar küllüsü üçün yoxlamaq lazımdır.

Tərif 3.1. *Təsadüfi tərkiblərin eyni sabit dispersiyaya malik olması homoskedastiklik adlandırılır. Əksinə, bu dispersiyalar eyni deyilsə, qalıqlar heteroskedastik hesab olunur.*

Qalıqların homoskedastikliyi onların qrafikləri əsasında vizual və ya xüsusi meyarlar vasitəsilə yoxlanıla bilər. Empirik reqressiya tənliyindən meyletmələrin qrafiki qurulması heteroskedastikliyin mövcudluğunun müəyyənləşdirilməsinə vizual şəkildə imkan verir. Bu halda absis oxu üzərində izahedici x_i dəyişənlərinin (cüt reqressiya halında) və ya $\alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \ldots + \alpha_k x_{ik}$, $i = \overline{1,n}$ xətti kombinasiyalarının (çoxdəyişənli reqressiya halında) qiymətləri qeyd edilir. Ordinat oxu üzrə isə, ya e_i meyletmələri, ya da e_i^2, $i = \overline{1,n}$

onların kavdratları qeyd olunur. Əgər bütün e_i^2 meyletmələri eni sabit olan qorizontal zolaqda yerləşirsə, onda hesab edilir ki, e_i^2-nin dispersiyaları izahedici dəyişənlərin qiymətlərindən asılı deyil və homoskedastiklik şərti ödənilir. Digər hallarda $\hat{y}_i$ və e_i^2 arasında sistematik dəyişiklər baş verir və belə hallar heteroskedastikliyə dəlalət edir.

Ekonometrikada əsasən Qoldfeld-Kvandt, Spirmen rang korrelyasiyası testləri və digər testlərdən istifadə olunur. Qoldfeld-Kvandt testi təsadüfi qalıqlar normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlər olduqda tətbiq edilir. Yoxlama proseduru belədir:

1. Qalıqların dispersiyasının artmasına təsiri şərtləndirilən hər hansı faktorun artma ölçüsünə nəzərən bütün müşahidələr nizamlandırılır;
2. Nizamlanmış küllü üç hissəyə bölünür. Belə ki, 1-ci və sonuncunun həcmi eyni və həcm vahidlərinin sayı modelin parametrlərinin sayından çox olmalıdır. Tutaq ki, 1-ci və 3-cü qruplar üçün p sayı seçilmişdir;
3. 1-ci və 3-cü qruplara görə reqressiya tənliyinin parametrləri və qalıqlar tapılır;
4. 1-ci və 3-cü qruplara nəzərən tapılmış qalıqların verilənlərindən istifadə etməklə onların nisbətinin

$$F = \frac{\sum_{i=n-p-1}^{p} e_i^2}{\sum_{i=1}^{p} e_i^2} \tag{3.24}$$

F - Fişer faktiki qiyməti hesablanır. Ümumi halda surətin qiyməti məxrəcin qiymətindən böyük olmalıdır. Əgər dispersiyanın faktorun qiymətinin əksinə asılılığı nəzərdə tutulursa, onda (3.24) -də surət və məxrəcin yerini dəyişmək lazımdır.

5. F -meyarının faktiki qiyməti $df_1 = df_2 = p - k - 1$ sərbəst dərəcəli F -cədvəl qiyməti ilə müqayisə olunur. Əgər F -faktiki qiyməti cədvəl qiymətindən böyükdürsə, onda heteroskedastikliyin mövcud olması haqda hipotez rədd edilir.

Spirmen rang korrelyasiyası testi də eynilə təsadüfi qalıqların hər hansı faktorun qiymətindən asılı olması fərziyyəsinə əsaslanır. Bu testlə yoxlamada qalıqların modulca qiymətləri və həmin faktorun qiymətləri ranjirə edilir (məsələn, artmaya nəzərən). Sonra

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \tag{3.25}$$

düsturu ilə Spirmen rang korrelyasiya əmsalı hesablanır. Burada d_i i-ci qalığın və i-ci faktorun qiymətinin ranqları fərqini göstərir. Hesablanmış əmsalın əhəmiyyətliliyi yoxlanılır.

Bunun üçün

$$t_\rho = \frac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

t-Styudent meyarının faktiki hesablanmış qiyməti onun $df = n - 2$ sərbəst həddli cədvəl qiyməti ilə müqayisə olunur. Əgər bu qiymət cədvəl qiymətindən böyükdürsə, onda qalıqların homoskedastikliyi haqda hipotez qəbul olunmur.

Qalıqların heteroskedastikliyinə səbəb reqressiya tənliyinin funksional formasının düzgün seçilməməsi, tədqiq olunan külliyyatın bircins olmaması və digər xarakteristikalar ola bilər. Ona görə də onun aradan qaldırılmasına uyğun formalı reqressiya tənliyinin seçilməsi, külliyatın bircins qruplara bölünməsilə nail olmaq olar.

Qauss - Markov teoremində 2-ci şərtin $\left(\mathrm{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_{j'}) = 0,\ j \neq j'\right)$ yoxlanılmasında **Darbin - Uotson** testindən istifadə edilir. Müəyyənlik üçün bu meyara $\left(y_t, x_{t1}, \ldots, x_{tk}\right)$, $t = \overline{1, n}$ zaman anları seçimlərində baxaq (fəza dəyişənləri seçimində t-indeksi əvəzinə i-indeksi yazmaq lazımdır). Burada kriteriya olaraq təsadüfi qalıqların qiymətləndirmələrinin 1-ci tərtib fərqlərinin kvadratları cəminin qalıqların kvadratları cəminə nisbəti qəbul olunur:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}. \qquad (3.26)$$

Burada $e_t = y_t - \hat{y}_t, \;\; \hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \sum_{t=2}^{n}\hat{\alpha}_i x_{ti}, \quad i = \overline{0,k}$ - reqressiyanın parametrlərinin ƏKKÜ- ilə qiymətləndirməsidir.

d - statistikasının paylanmasının tədqiqi iki qonşu qiymətlər arasındakı korrelyasıyanın mövcud olmaması haqda H_0 hipotezinin ödənilməsi şərtilədir, yəni $H_0 : r = 0$ qəbul olunur.

(3.26) -nı aşağıdakı çevirmələrlə hesablanma baxımından əlverişli hala salaq:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} =$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - e_1^2 + \sum_{t=2}^{n} e_t^2 - e_n^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} =$$

$$= 2\left[1 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}\right] - \frac{e_1^2 + e_n^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}.$$

Müşahidələrin sayı n çox olduqda $e_1^2 + e_n^2$ cəmi $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$

cəmindən kifayət qədər kiçik olur və

$$d \approx 2\left(1-\frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^{\,2}}\right).$$

$\sum_{t=1}^{n} e_t = 0$ olduğundan və $\dfrac{2\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^{\,2}} = r$, deməli, $d \approx 2(1-r)$.

Burada r iki qonşu müşahidə arasında seçimi korrelyasiya əmsalıdır. Korrelyasiya mövcud olmadıqda r sıfırdan cüzi fərqlənə bilər və d statistikasının qiyməti 2-yə yaxın olur. Müşahidə olunan qiymətin sıfra yaxınlığı müsbət korrelyasiyanın olmasını, 4-ə yaxınlığı isə mənfi korrelyasiyanı göstərir. Kriteriyanın statistikasının paylanmasının müşahidələrin və reqressorların sayından, əhəmiyyətlilik səviyyəsindən asılı iki d_y və d_a sərhəd qiymətləri mövcuddur ki, əgər d-nin müşahidə olunan faktiki qiyməti $d_y < d < 4 - d_a$ bərabərsizliyini ödəyirsə, onda korrelyasiyanın mövcudluğu haqda hipotez qəbul edilir; əgər $d_a < d < d_y$ və ya $4 - d_y < d < 4 - d_a$ olarsa, onda hipotezin qəbul olunub olunmaması məsələsi açıq qalır (kriteriyanın qeyri-müəyyənlik oblastı); $0 < d < d_y$ olduqda müsbət korrelyasiyanın olması haqda alternativ hipotez qəbul edilir; $4 - d_a < d < 4$ olduqda isə mənfi korrelyasiyanın mövcudluğu haqda alternativ hipotez qəbul edilir. Beləliklə, əgər qonşu təsadüfi qalıqlar arasında korrelyasiya mövcud deyilsə, onda kriteriya: d statistikası $d = 2$ qiymətindən çox fərqlənməməlidir. Qeyd edək ki, ardıcıl iki qalıqlar arasındakı korrelyasiyanın mövcudluğuna avtokorrelyasiya mövcudluğu da deyilir.

Qauss-Markov teoremində qalıqların normal paylanmaya malik olması şərti modelin keyfiyyətinin analizi üçün statistik hipotezlərin yoxlanılmasında t-Styudent kriterisindən istifadə olunmasına və interval qiymətləndirməsinin qurulmasına imkan verir. Həm cüt reqressiya halında, həm də onun çoxölçülü analoqunda qalıqların normal paylanması haqda nəticəni qalıqların histoqramı, assimmetriya və eksessin ədədi xarakteristikalarına, Pirson kriterisinə nəzərən söyləmək olar. Məsələn, vizual olaraq normallığı müəyyənləşdirmək üçün normal paylanmanın sıxlığı əyrisini qalıqların tezliklərinin histoqramı ilə müqayisə etmək lazımdır. Əgər histoqram düzbucaqlılarının yuxarı tərəflərinin ortalarını birləşdirən xətt normal paylanma sıxlığının əyrisinə yaxındırsa, onda qalıqların normal paylanması şərti qəbul edilir. 2-ci halda nəzərə alsaq ki, normal paylanma üçün assimmetriya və exsses sıfra bərabərdir, onda assimmetrik paylanmada əyrinin təpəsi seçimi ortanın ordinatına nəzərən sürüşür. Əgər asimmetriya sıfrdan böyükdürsə onda təpə sağa, əks halda sola sürüşür. Exsses normal paylanma ilə müqayisədə paylanmanın nisbi itisonluğunu və hamarlığını xarakterizə etdiyindən, müsbət exsses paylanmanın nisbi itisonluğunu, mənfi exsses nisbi hamarlanmış paylanmanı xarakterizə edir. Nəticənin daha etibarlı (0,95 ehtimalı ilə) olması Pirsonun uzlaşma[5, səh. 314] meyarı ilə yoxlanılır. Normal paylanma haqda hipotez irəli sürülür. Bu hipotezin yoxlanması üçün $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ statistikasından istifadə edilir ki, bu statistika $(k - r - 1)$ sayda sərbəst dərəcəlidir. Burada r-seçimə nəzərən qiymətləndirilən paylanmanın parametrlərinin sayı, n-seçimlərin həcmi, k-seçimi qiymətlərdən ibarət kəsişməyən intervalların sayı, n_i - i-ci intervala düşən $(i = 0,1,\ldots,k-1)$ seçimi qiymətlərin sayı, p_i təsadüfi kəmiyyətin bu intervallara düşən qiymətlərinin ehtimalıdır. Seçimə nəzərən $\chi^2_{\text{müş}}$ statistikasının qiyməti hesablanır. α əhəmiyyətlilik səviyyəsində χ^2-paylanmasının cədvəl qiymətindən $\chi_{kr}^2 = \chi^2 \ (\alpha; k - r - 1)$ tapılır. Əgər $\chi_{\text{müş}}^2 < \chi_{kr}^2$ olarsa, onda verilmiş əhəmiyyətlilik səviyyəsində təsadüfi tərkibin normal paylanması haqda hipotez qəbul edilir. Əgər $\chi_{\text{müş}}^2 \geq \chi_{kr}^2$ olarsa, onda hipotez qəbul edilmir.

§3.4. Çoxdəyişənli xətti reqressiya modelində reqressiya parametrləri haqda hipotezlərin yoxlanılması

(3.1) çoxdəyişənli xətti reqressiya modelinin və ya onun seçimi müşühidələr üçün yazılmış (3.3) modelinin bütün parametrlərinə nəzərən aşağıdakı hipotezlər yoxlanılır:

$H_0 : \alpha_i = 0, \ \ i = \overline{1, k}$ (i-ci asılı olmayan dəyişən nəticəyə təsir etmir);

$H_0 : \alpha_i = 0, \ \ i = \overline{1, k}$ (i-ci asılı olmayan dəyişən nəticəyə təsir edir).

Hökm olunan hipotezlərin yoxlanılması üçün qurulan kriterilər təsadüfi tərkiblərin normal paylanması şərtinə əsaslanır: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Kriterial statistika, yəni qiymətləndirmənin t-əhəmiyyətliliyi olaraq

$$\tilde{t}_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_i}}$$

statistikasına baxaq.

Göstərək ki, H_0 hipotezi qəbul olunduqda bu statistika $(n - k - 1)$ sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasına malikdir. Bunun üçün tam variasiyanı izahedən və qalıq variasiyaların çəmi şəklində yazaq:

$$Q = Q_e + Q_R \ . \tag{3.27}$$

Burada $Q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \bar{y})^2$ -tam variasiya, $Q_R = \sum_{j=1}^{n} (\hat{y}_j - \bar{y})^2$ -

izahedici variasiya, $Q_e = \sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2$ -qalıq variasiyasıdır. Bu ayrılış (2.34) düsturunda cüt reqressiya üçün alınmışdır. Onu çoxdəyişənli üçün isbat edək.

$$Q = \sum_{j=1}^{n}\left(y_j \pm \hat{y}_j - \bar{y}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\hat{y}_j - \bar{y}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 +$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)\left(\hat{y}_j - \bar{y}\right) = Q_e + Q_R + 2\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)\left(\hat{y}_j - \bar{y}\right)$$

olduğundan, göstərək ki, sağ tərəfdə 3-cü toplanan sıfra bərabərdir.

$\hat{y}_j = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i x_{ji} = \bar{y} + \sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i z_{ji}$, $z_{ji} = x_{ji} - \bar{x}_i$ olduğundan,

$\hat{y}_j - \bar{y} = \sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_e z_{je}$, $\quad y_j - \hat{y}_j = y_j - \bar{y} - \sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i z_{ji}$. Buradan,

$\sum_{j=1}^{k} z_{ji} = 0$ və $\bar{y}\sum_{i=1}^{k} z_{ji} = 0$ olduğunu nəzərə almaqla alırıq ki,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)\left(\hat{y}_j - \bar{y}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y} - \sum_{i=1}^{k}\hat{\alpha}_i z_{ji}\right)\sum_{\ell=1}^{k}\hat{\alpha}_\ell z_{j\ell} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n}\hat{\alpha}_\ell\left[\sum_{j=1}^{n} y_j z_{j\ell} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(z_{ji} z_{j\ell}\right)\hat{\alpha}_i\right] = 0.$$

İndi isə, $\tilde{t}_i$ statistikasına qayıdaq. H_0 hipotezi ödənildikdə $\hat{\alpha}_i$ $\sim N(0, \sigma_{\hat{\alpha}_i})$, burada $\sigma_{\hat{\alpha}_i} = \sigma^2\sqrt{c_{ii}}$, ona görə də $\frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma^2\sqrt{c_{ii}}} \sim N(0,1)$. Lakin σ naməlum olduğundan, standart meyli onun qiymətləndirməsi ilə əvəz edək

$$\tilde{t}_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\sigma\sqrt{c_{ii}}} = \frac{\dfrac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}}}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sigma}} = \frac{\dfrac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2}{n-k-1}}}. \tag{3.28}$$

Göstərək ki, $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2$ statistikası χ^2 $(n-k-1)$ paylanmasına malikdir. (3.23) düsturunun çıxarılışında $\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 = (y-\hat{y})'(y-\hat{y})$ statistikasını nəzərdən keçirmişdik. Həmin hesablamalara nəzərən $Y - \hat{y} = H\varepsilon$ (burada $H = E_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'$, H - simmetrik $\left(H' - H\right)$ və idempotent $\left(H^2 = H\right)$ matrisdir).

$$\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 = \varepsilon' H' H\varepsilon = \varepsilon' H\varepsilon.$$

Ona görə də

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)' H\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \xi' H\xi. \tag{3.29}$$

Burada $\xi' = \left(\xi_1, ..., \xi_n\right)$, $\xi_i \sim N(0,1)$, $i = \overline{1,n}$. $H = E_n - X\left(X'X\right)^{-1}X' = E_n - XCX'$, $C = \left(X'X\right)^{-1}$ olduğundan $rang(E_n) \leq$ $\leq rang(H) + rang(B)$ (burada $B = X\left(X'X\right)^{-1}X' = XCX'$), $rang(H) \geq n - rang(B)$ və $rang(B) \leq \min\left(rang(X), rang(C), rang(X')\right) = k+1$. Ona görə də $rang(H) = n-k-1$. Digər tərəfdən H idempotent, müsbət müəyyən olduğundan, bu matrisin $(n-k-1)$ sayda məxsusi ədədləri vardır və onlar vahidə bərabərdirlər, digər $(k+1)$ sayda məxsusi ədədlər sıfra bərabərdir. Məxsusi ədədlər və məxsusi vektorlar

$$H\ell_i = \lambda_i \ell_i,\ i = \overline{1,n},\ \ell\ = (\ell_{1i}, \ell_{2i}, \dots, \ell_{ji}, \dots, \ell_{ni})' \qquad (3.30)$$

tənliyindən tappılır. λ_i-lər $\det(H - \lambda E_n) = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləridir. ℓ_i normallaşmış məxsusi vektoruna baxaq. Müxtəlif məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi vektorlar ortoqonal olduğundan, normallaşmış vektorlardan ibarət $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ matrisi ortoqonaldır və

$$L'HL == \left\| \lambda_j \lambda_r \ell'_j \ell_r \right\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{n-k-1} & \overbrace{\dots \quad 0}^{k+1} \\ 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 & \dots \quad 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 & \dots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 & \dots \quad 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 & \dots \quad 0 \end{pmatrix}.$$

İndi L' ortoqonal çevirməsini ξ təsadüfi qalıqlar vektoruna tətbiq edək:

$\xi = L\eta,\ \eta = L'\xi.$ Onda statistikanın (3.28) ifadəsi belə olur:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-\hat{y}_j\right)^2=\xi' H\xi=\eta' L' HL\eta=\eta'\Lambda\eta=\sum_{j=1}^{n-k-1}\eta_i^2. \qquad (3.31)$$

Yeni $\eta=\left(\eta_1,...,\eta_n\right)'$ qalıqları mərkəzləşdirilmiş ($M\eta=M\left(L'\xi\right)=L'M\xi=0$) , normallaşdırılmış

$$\left(\begin{array}{l} D\eta_i=M\eta_i^2=M\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\ell_{ji}\xi_j\right)\left(\sum_{r=1}^{n}\ell_{ri}\xi_r\right)\right]= \\ =\sum_{j,r=1}^{n}\ell_{ji}\ell_{ri}M\xi_j M\xi_r=\sum_{j=1}^{n}\ell_{ji}^2=1 \end{array}\right)\text{olur.}$$

$$\operatorname{cov}\left(\eta_i,\eta_s\right)=M\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\ell_{ji}\xi_j\right)\left(\sum_{r=1}^{n}\ell_{ri}\xi_r\right)\right]=$$

$$=\sum_{j,r=1}^{n}\ell_{ji}\ell_{rs}M\xi_j M\xi_r=\sum_{j=1}^{n}\ell_{ji}\ell_{js}=0,\quad i\neq s$$

olduğundan və $\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\ell_{ji}\xi_j$ ifadəsində $\xi_j\in N(0,1)$ standart normal qanunla paylandığından, (3.31) -dan alırıq ki,

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-\hat{y}_j\right)^2=\sum_{i=1}^{n-k-1}\eta_i^2=\chi^2(n-k-1).$$

Nəticədə (3.28) düsturundan alınır ki, $\tilde{t}_i=t(n-k-1)$ statistikası $(n-k-1)$ sərbəst dərəcəli t -Styudent paylanmasına malikdir.

Beləliklə, əgər qiymətləndirmənin t hesablanmış qiyməti modulca onun t_α cədvəl qiymətini aşmırsa, onda H_0 hipotezi qəbul olunur:

$\left|\tilde{t}_i\right|\leq t_\alpha\rightarrow H_0$, yəni qiymətləndirmə əhəmiyyətli deyil. Əksinə, əgər qiymətləndirmə əhəmiyyətlidirsə H_1 hipotezi qəbul olunur:

$$|\tilde{t}_i| > t_\alpha \rightarrow H_1 \qquad P(H_1/H_0) = P\{|\tilde{t}_i| > t_\alpha / H_0\} = P\{|t| > t_\alpha\} = \alpha$$

olduğundan, kriteriya 1-ci növ α səhvinə malikdir.

İndi isə, reqressiya əmsallarının interval qiymətləndirməsini nəzərdən keçirək. $\alpha_i \neq 0$ olduqda $\dfrac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}}$ statistikası $(n-k-1)$ sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasına malikdir. Ona görə də bu paylanmanın ikitərəfli kritik sərhədlərindən istifadə etməklə inam intervalını qurmaq olar: $P\{|t| \leq t_\alpha\} = 1-\alpha$.

Burada t-nin yerinə $\dfrac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}}$ statistikasını qoymaqla alırıq:

$P\left\{\left|\dfrac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}}\right| \leq t_\alpha\right\} = 1-\alpha$, buradan isə, aşağıdakı inam intervalı alınır:

$$P\{\hat{\alpha}_i - t_\alpha\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}} \leq \alpha_i \leq \hat{\alpha}_i - t_\alpha\hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}\} = 1-\alpha, \;\; i = 1,\ldots,k.$$

§3.5. Çoxdəyişənli reqressiya modelinin keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi

Əksər praktiki hesablamalarda çoxdəyişənli reqressiya tənliyinin keyfiyyətinin qiymətləndirilməsində (3.27) düsturundan təyin olunan $R^2 = \dfrac{Q_R}{Q}$ determinasiya əmsalı tətbiq edilir. Yəni izahedici variasiyanın bütün variasiyada payı göstərilir. Bu pay nə qədər çox olarsa, o qədər reqressiya tənliyi öyrənilən prosesi yaxşı təsvir edir. Lakin bu əmsal vahidə daha yaxındırsa, onda asılı olmayan dəyişənlər arasında asılı dəyişənlə funksional asılılıqda olanı istisna olmur. Ona görə də tənliyin keyfiyyəti adətən F testi ilə yoxlanılır. H_0 hipotezi olaraq fərz edilir ki, xətti reqressiya mövcud deyil, H_0 : $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$ Alternativ H_1 hipotezində fərz edilir ki, heç olmasa bir $\alpha_i \neq 0,\ i = \overline{1,k}$, H_1: heç olmasa bir $\hat{\alpha}_i \neq 0.$ §3.4.-də göstərildiyi kimi H_0 hipotezində $\frac{1}{\sigma^2}\hat{S}^2 = \chi^2(k),\ \ \frac{1}{\sigma^2}S^2 = \chi^2(n-k-1)$. Ona görə də bu hipotez ödənilərsə $\tilde{F} = \frac{\hat{S}^2 / k}{S_R^2 / (n-k-1)}$ nisbəti $(k, n-k-1)$ sərbəsr dərəcəli Fişer paylanmasına malikdir. $\tilde{F}$ -nisbəti həm də determinasiya əmsalı ilə belə ifadə olunur:

$$\tilde{F} = \frac{R^2 / k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \quad . \tag{3.32}$$

Burada $R^2 = 1 - \frac{\hat{Q}_e}{Q} = 1 - \frac{(Y - X\hat{\alpha})'(Y - X\hat{\alpha})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})'}$ düsturu ilə hesablanır.

H_0 və H_1 hipotezlərinin yoxlanılması üçün aşağıdakı meyarlardan istifadə olunur:

$$\tilde{F} \leq F_\alpha \rightarrow H_0,\ \ \tilde{F} > F_\alpha \rightarrow H_1 .$$

Burada F_α - Fişer paylanmasının sağ kritik sərhəddidir. Bu meyar 1-ci növ α səhvinə malikdir:

$$P(H_1/H_0) = P\left\{\tilde{F} > F_\alpha / H_0\right\} = P\{F > F_\alpha\} = \alpha.$$

F - nisbətinin hesablanma qiyməti nə qədər böyükdürsə, model öyrənilən prosesi o qədər yaxşı təsvir edir.

Reqressiya tənliyinə nəzərən nöqtəvi proqnozlaşdırma asılı olmayan dəyişənlərin qiymətlərini determinik tərkiblərin $\left(x = \left(x_1, \ldots, x_k\right)\right)$ qiymətləndirilməsində nəzərə almaqla yerinə yetirilir:

$$\hat{y}_j = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i x_i = \bar{y} + \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i \left(x_i - \bar{x}_i\right).$$

§3.2-də göstərildiyi kimi, reqressiya parametrlərinin qiymətləndirmələri meylsiz olduğundan, bu proqnoz meylsizdir. Proqnozun dəqiqliyi onun dispersiyası ilə müəyyən olunur (dispersiya nə qədər kişikdirsə, proqnoz o qədər dəqiqdir):

$$\sigma^2_{\hat{y}_j} = D\hat{y}_j = D\bar{y} + D\left[\sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i \left(x_i - \bar{x}_i\right)\right] + 2\operatorname{cov}\left(\bar{y}_j, \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i \left(x_i - \bar{x}_i\right)\right),$$

$$\operatorname{cov}\left(\bar{y}, \hat{\alpha}_i\right) = \operatorname{cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} y_r, \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} c_{i\ell} z_{j\ell} y_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k} c_{i\ell} \sum_{j=1}^{n} z_{j\ell} \operatorname{cov}\left(y_r, y_j\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\sum_{\ell=1}^{k} c_{i\ell} \sum_{j=1}^{n} z_{j\ell} = 0, \quad i = \overline{1,k},$$

olduğundan

$$\sigma^2_{\hat{y}_j} = D\bar{y} + D\left[\sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i \left(x_i - \bar{x}_i\right)\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \sum_{i,\ell=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_i\right) \operatorname{cov}\left(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_\ell\right)\left(x_i - \bar{x}_\ell\right) =$$

$$= \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \sum_{i,\ell=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_i\right) c_{i\ell} \left(x_i - \bar{x}_\ell\right)\right].$$

İnterval proqnozu da parametrlərin interval qiymətləndirməsi kimi qurulur: inam intervalının ortası olaraq

$\hat{y}(x)$ determinik tərkibinin nöqtəvi qiymətləndirməsi qəbul olunur. Sonra isə intervalın ortasından $\hat{\sigma}_{\hat{y}(x)}$ qiymətləndirmənin standart meyli proporsionallığı ilə kənarlaşma aparılır. Proporsionallıq əmsalı α ehtimalına uyğun t_α-Styudent paylanmasının ikitərəfli kritik sərhəddinə bərabər hesab edilir. Nəticədə $\hat{y}(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ determinik tərkibi üçün inam intervalı aşağıdakı kimi olur:

$$P\{\hat{y}(x) - t_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{y}(x)} \le y(x) \le \hat{y}(x) + t_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{y}(x)}\} = 1 - \alpha,$$

burada

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}(x)} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \sum_{i,\ell=1}^{k}(x_i - \bar{x}_i)c_{i\ell}(x_i - \bar{x}_\ell)},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{j=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Determinasıya əmsalı R^2-nın statistik əhəmiyyətliliyi (3.32) statistikası üzrə yoxlanılır. H_0 hipotezi olaraq $R^2 = 0$, alternativ H_1 hipotezi olaraq $R^2 > 0$ araşdırılır. (3.32) statistikası Qauss-Markov şərtləri və H_0 hipotezi ödənildikdə Fişer paylanmasına malikdir. (3.32)-dən göründüyü kimi, $\tilde{F}$ və R^2 göstəriciləri ya eyni zamanda sıfır, ya da eyni zamanda sıfırdan fərqlidir. Əgər $\tilde{F} = 0$ olarsa, onda $R^2 = 0$ və $y = \bar{y}$ reqressiya xətti ƏKKÜ üzrə ən yaxşı yaxınlaşmadır və deməli, y nəticə faktoru $x_1,\ldots,x_k$ faktorlarından asılı deyil. α əhəmiyyətlilik səviyyəsində H_0 hipotezinin yoxlanılması üçün Fişer paylanmasının cədvəl qiymətindən $F_{kr}(\alpha; k; n-k-1)$ qiyməti tapılır. Əgər $\tilde{F} > F_{kr}$ olarsa, onda H_0 hipotezi qəbul olunmur. Bu isə, R^2-nın statistik əhəmiyyətliliyi deməkdir, yəni $R^2 > 0$.

Çoxdəyişənli reqressiya modellərində R^2 izahedici dəyişənlərin sayına nəzərən artan funksiyadır. Yeni dəyişənlərin modelə daxil olması R^2-nın qiymətini azaltmır. Çünki hər bir sonrakı asılı olmayan dəyişən asılı dəyişənin davranışının izah olunmasına yeni informasiya verir.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} \tag{3.33}$$

düsturunda qalıq dispersiya vardır ki, o azalmaya doğru sistematik səhvləri özündə saxlayır. Bu azlma verilmiş n həcmli müşahidələrdə reqressiya tənliyinin parametrləri nə qədər çox müəyyən olunursa, o qədər kifayətlidir. Əgər parametrlərin sayı $(k+1)$ n-ə yaxınlaşarsa, onda qalıq dispersiya sıfra yaxınlaşır və determinasiya əmsalı, hətta faktorların nəticə ilə zəif əlaqəsi olduqda, vahidə yaxınlaşır. Ona görə də (3.33)-ün sürət və məxrəcində qalıq və ümumi dispersiyanın sərbəstlik dərəcələrinin sayında korrektə edilir:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 / (n-k-1)}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 / (n-1)}. \tag{3.34}$$

(3.33) düsturu ilə verilən R^2 izahedici faktorların sayını hətta əsassız artırdıqda belə çoxaldığından, (3.34) korrektə olunmuş determinasiya əmsalı bu artmanı kompensasiya edir.

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k-1} = \frac{n-1}{n-k-1}R^2 - \\ - \frac{k}{n-k-1} = R^2 - \frac{k}{n-k-1}(1 - R^2) \tag{3.35}$$

olduğundan k-nın artması ilə $\frac{k}{n-k-1}$ münasibəti artır və deməli R^2-nın azalmaya doğru korrektə ölçüsü artır. (3.35)-dən aydındır ki, $k > 1$olduqda $\overline{R}^2 < R^2$. k-nın artımı ilə $\overline{R}^2$ R^2-na nəzərən zəif artır. Başqa sözlə, o, izahedicinin sayı artdıqca, azalmaya doğru korrektə olunur. Belə ki, $\overline{R}^2 = R^2$ yalnız $R^2 = 1$olduqda mümkündür. $\overline{R}^2$ hətta mənfi qiymətlər də ala bilər (məsələn, $R^2 = 0$olduqda). Ona görə (3.35)-in korrektə olunmasında ciddi riyazi əsaslandırma yoxdur. Yeni izahedici dəyişənləri modelə daxil etdikdə $\overline{R}^2$ o zaman artır ki, həmin dəyişənlərin t-statistikası modulca vahiddən böyük olsun.

F - Fişer statistikasından istifadə olunmasında digər mühüm istiqamət reqressiya əmsallarının bütünlükdə deyil, yalnız onların müəyyən hissəsinin sıfra bərabər olması haqda hipotezin yoxlanılmasıdır. Bu yanaşma modelə əlavə faktorların daxil edilməsini və ya modeldəki faktorların sayının azaldılmasını statistik əsaslandırır. Tutaq ki, n müşahidəyə nəzərən qurulmuş reqressiya modeli (3.3) kimi təsvir olunur və onun determinasiya əmsalı R_1^2-dır. Modeldən p sayda izahedici dəyişən kənarlaşdıraq. Ümumiliyi pozmadan fərz edək, ki bu dəyişənlər sonuncu k sayda dəyişənlərdir. İlkin n müşahidə verilənlərinə nəzərən modeldə qalan faktorlar üçün yeni reqressiya tənliyi quraq:

$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_{k-p} x_{k-p} \ . \qquad (3.36)$$

Onun determinasiya əmsalını R_2^2-la işarə edək. Aydındır ki, $R_2^2 \le R_1^2$, çünki hər bir əlavə olunmuş faktor asılı dəyişənin müəyyən səpələnməsini izah edir. Asılı dəyişənin davranışının təsvirinin keyfiyyətcə təbii pisləşməsini $H_0 : R_1^2 - R_2^2 = 0$ hipotezini yoxlamaqla müəyyənləşdirmək olar. Bunun üçün

$$F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \frac{n-k-1}{p} \qquad (3.37)$$

statistikasından istifadə olunur. H_0 hipotezi doğru olduqda bu statistika k və $(n-k-1)$ sayda sərbəst dərəcələri olan Fişer paylanmasına malikdir. Burada $R_2^2 \le R_1^2$ bərabərsizliyi k sayda faktoru kənarlaşdırdıqda tənliyin keyfiyyətinin aşağı salınmasını, k- ortaya çıxan əlavə sərbəstlik dərəcəsini, $1-R_1^2/(n-k-1)$ isə ilkin tənliyin izaholunmayan dispersiyasıdır. Əgər (3.37) kəmiyyəti $F_{kr} = F(\alpha,\ p, n-k-1)$ kritik qiymətini α əhəmiyyətlilik səviyyəsində aşırsa, onda hipotez qəbul olunmur. Bu halda eyni zamanda k sayda faktorun kənarlaşması korrekt deyil, çünki R_1^2 R_2^2 -ni ciddi aşır. Bu isə o deməkdir ki, ilkin reqressiya tənliyinin ümumi keyfiyyəti faktorların kənarlaşdırılmış reqressiya modelinin keyfiyyətindən ciddi yaxşıdır, çünki ilkin tənlik asılı dəyişənin dispersiyasının daha çox hissəsini izah edir. Əgər $F_{müş} < F_{kr}$ olarsa, onda $R_1^2 - R_2^2$ fərqi cüzidir və eyni zamanda k sayda faktorların kənarlaşmasını məqsədəuyğun hesab etmək olar. Çünki bu halda reqressiya tənliyinin ümumi keyfiyyətinin ciddi pisləşməsinə səbəb olmur. Onda H_0 hipotezi qəbul olunmalıdır.

Modelə p sayda yeni faktorların əlavə olunmasının əsaslandırırlmasında analoji müşahidələrdən istifadə etmək olar. Bu halda

$$F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1-R_2^2}\frac{n-k-1}{p} \qquad (3.38)$$

statistikasına baxılır. Əgər bu statistika F_{kr} qiymətini aşırsa, onda əlavə olunmuş yeni faktorlar asılı dəyişənin dispersiyasının izah olunmayan hissəsinin kifayət qədərinin izaholunmasına ciddi təsir göstərir və deməli, əlavəolunmalar əsaslandırılır. Faktorların bir-birinin ardınca əlavə olunması məqsədə uyğun hesab olunur. Bundan başqa faktorları əlavə etdikdə korrektə edilmiş determinasiya əmsalından istifadə etmək lazımdır. Əlavə olunmuş faktordan sonra izaholunan dispersiyanın xüsusi çəkisi cüzi dəyişirsə, onda $\overline{R}^2$ azala bilər. Bu halda həmin faktorun əlavə olunması məqsədə uyğun deyil.

§3.6. Çoxdəyişənli reqressiyada xüsusi korrelyasiya, xüsusi determinasiya və xüsusi elastiklik əmsalları

(3.3) düsturu ilə verilmiş ekonometrik modelin asılı olmayan $x_i,\ i=\overline{1,k}$ dəyişənlərinin müxtəlif iqtisadi mənaları, ölçü vahidləri və dəyişmə oblastları mövcuddur. Baxdığımız halda nəticə faktoru və təsiredici faktorlar kəmiyyət göstəriciləri kimi təsvir olunurdu. Sadə halda fərz edilir ki, onlar $(-\infty,\infty)$aralığında dəyişir və təsiredici faktorların qiymətləri determinikdir. Modelin qurulmasında fərz edilir ki, bir faktorun nəticəyə təsiri digər faktorun bu təsirindən asılı deyil. Əks halda hər hansı faktorun qiymətinin dəyişməsi nəticəyə birbaşa və dolayı (digər faktorun vasitəsilə) olur. Bu isə korrelyasiya - reqressiya analizinin nəticələrinin iqtisadi interpretasiyasında səhvlərə səbəb olur. Faktorların müxtəlif ölçü vahidlərində verilməsi və müxtəlif dəyişmə oblastlarına malik olması da həm hesablamada, həm də nəticələrin iqtisadi mənalandırılmasında ciddi çətinliklər yaradır. Ona görə də, məsələn, y nəticə faktorunun dəyişməsinə hər bir izahedici $x_i,\ i=\overline{1,k}$ faktorunun ayrıca nisbi təsirini müəyyənləşdirmək lazımdırsa, onda x_i dəyişənlərini müqayisə olunma (qarşı qoyma) səviyyəsinə salmaq lazımdır. Buna $t_y, t_{x_1}, t_{x_2}, \ldots, t_{x_k}$ standartlaşma dəyişənləri daxil etməklə aşağıdakı çevirmələrlə nail olmaq olar:

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}, \quad i = \overline{1,k}. \qquad (3.39)$$

Burada $\bar{y}, \bar{x}_i$ orta qiymətlər; σ_y, σ_{x_i} isə uyğun olaraq y və x_i dəyişənlərinin orta kvadratik meylləridir. Standartlaşmış dəyişənlərin orta qiyməti sıfra, orta kvadratik meyylər isə, vahidə bərabərdir. Məsələn, nəticə faktoru üçün alırıq:

$$\bar{t}_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_1 - \bar{y})}{n\sigma_y} = \frac{0}{n\sigma_y} = 0,$$

$$\sigma_{t_y} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{y_i} - \bar{t}_{y_i}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} t_{y_i}^{\ 2}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_1 - \bar{y})^2}{n\sigma_y^2}}\sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2}} = 1.$$

(3.3) çoxdəyişənli reqressiya tənliyi standartlaşmış dəyişənlərlə aşağıdakı kimi yazılır:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \ldots + \beta_k t_{x_k} + u. \qquad (3.40)$$

β_i - əmsalları standartlaşmış əmsallar adlanır. Onların (3.3) tənliyinin $\alpha_i,\ i = \overline{1,k}$ əmsalları ilə əlaqəsi belə düsturla verilir:

$$\alpha_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}} \ \text{ və ya } \ \beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y}, \ i = \overline{1,k}. \qquad (3.41)$$

(3.3) -dəki α_0 parametrini isə,

$$\alpha_0 = \bar{y} - \alpha_1\bar{x}_1 - \alpha_2\bar{x}_2 - \ldots - \alpha_k\bar{x}_k \qquad (3.42)$$

düsturundan tapmaq olar.

β_i standartlaşmış reqressiya əmsalları digər faktorların qiymətlərini orta səviyyədə saxlamaqla uyğun faktorun qiymətini onun orta kvadratik meylinin bir vahidi qədər dəyişdikdə nəticə faktorunun qiymətinin orta kvadratik meylinin neçə vahidi qədər dəyişməsini göstərir.

(3.3) modelinə ƏKKÜ-nun tətbiqi (3.7) normal tənliklər sistemini verir ki, sistemin 1-ci tənliyindən (3.42) alınır ($\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_k$ əvəzinə $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$ qoyulmaqla). Modelin standartlaşdırılmış formasında sərbəst hədd sıfra bərabərdir. Çünki, ona daxil olan bütün dəyişənlərin ortası sıfra bərabərdir. ƏKKÜ-nun (3.40) modelinə tətbiqi aşağıdakı sistemi verir:

$$\begin{cases} \beta_1 \sum t_{x_1}^2 & + \beta_2 \sum t_{x_1 x_2} & + & ... & + \beta_k \sum t_{x_1 x_k} & = \sum t_{x_1} t_y \\ \beta_1 \sum t_{x_2 x_1} & + \beta_2 \sum t_{x_2}^2 & + & ... & + \beta_k r_{x_p x_2} & = \sum t_{x_2} t_y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \beta_1 \sum t_{x_k x_1} & + \beta_2 \sum t_{x_k x_2} & + & ... & + \beta_k \sum t_{x_k}^2 & = \sum t_{x_k} t_y \end{cases}$$

(3.43)

$$\sum t_{x_i} t_{x_j} = \sum \frac{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} = n r_{x_i x_j} \ ,$$

$\sum t_y t_{x_i} = n r_{y x_i}$, $\sum t_{x_i}^2 = n r_{x_i x_i} = n$ olduğundan,

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 & + \beta_2 r_{x_1 x_2} & ... & + \beta_k r_{x_1 x_k}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_1 x_2} & + \beta_2 & ... & + \beta_k r_{x_k x_2}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{yx_k} = \beta_1 r_{x_1 x_k} & + \beta_2 r_{x_2 x_k} & ... & + \beta_k. \end{cases} \qquad (3.44)$$

Xüsusi halda, iki faktorlu model üçün buradan alırıq:

$$\beta_1 = \frac{r_{x_1y} - r_{x_2y}r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}; \qquad \beta_2 = \frac{r_{x_2y} - r_{x_1y}r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}. \qquad (3.45)$$

Bu standartlaşdırılmış əmsallar öz aralarında müqayisə olunur ki, bununla nəticəyə təsir gücünə nəzərən faktorları ranjirə etmək olar.

Qeyd edək ki, cüt xətti reqressiya halında standartlaşmış reqressiya əmsalı r_{yx} xətti korrelyasiya əmsalına bərabər olur.

Bir neçə faktor arasında korrelyasiya əlaqəsinin olmasını (multikollienarlıq əlaqəsi)

$$r_{xx} = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_2x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & \dots & r_{x_kx_k} \end{pmatrix}, \left(r_{x_ix_i} = 1, \quad r_{x_ix_j} = r_{x_jx_i}\right) \quad (3.46)$$

matrisinin determinantını hesablamaqla müəyyənləşdirmək olar. Əgər faktorlar arasıda əlaqə mövcud deyilsə, dioqonaldan kənardakı elementlər sıfra bərabər olur və matrisin determinantı vahiddır. Əgər faktorlar arasında sıx əlaqə mövcuddursa, onda matrisin determinantı sıfra yaxın olar.

(3.3) tənliyi əsasında digər faktorları orta səviyyədə saxlamaqla nəticə faktoru ilə yalnız bir faktor arasında asılılığı ifadə edən aşağıdakı xüsusi reqressiya tənliklərini almaq olar:

$$\begin{aligned} & y_{x_1 \cdot x_2, x_3, \dots, x_k} = f(x_1), \; y_{x_2 \cdot x_1, x_3, \dots, x_k} = \\ & = f(x_2), \dots, \; y_{x_k \cdot x_1, x_2, \dots, x_{k-1}} = f(x_k). \end{aligned} \qquad (3.47)$$

Burada

$$\begin{aligned} & y_{x_j \cdot x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k} = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_{j-1} \bar{x}_{j-1} + \\ & + \alpha_j x_j + \alpha_{j+1} \bar{x}_{j+1} + \dots + \alpha_k \bar{x}_k + \varepsilon, \quad j = \overline{1,k}. \end{aligned}$$

Bu tənliklər faktiki olaraq cüt reqressiya tənlikləridir. Onları belə yazmaq olar:

$$\hat{y}_{x_j \cdot x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_k} = A_j + \alpha_j x_j, \quad j = \overline{1,k}$$

Bu ifadənin sərbəst həddləri aşağıdakı bərabərliklərdən müəyyənləşdirilir:

$$A_j = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{x}_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \bar{x}_{j-1} + \alpha_{j+1} \bar{x}_{j+1} + \ldots + \alpha_k \bar{x}_k, \quad j = \overline{1,k}\ .$$

Digər faktorlar dəyişməz səviyyədə qaldığından, xüsusi reqressiya tənlikləri baxılan faktorun nəticəyə təsirini izoləolunmuş şəkildə xarakterizə edir. Cüt reqressiya halında isə bu təsir fərqlidir. Xüsusi reqressiyada digər faktorların təsir effekti çoxdəyişənli reqressiyanın sərbəst həddində cəmlənmiş olur. Bu effekt imkan verir ki, xüsusi reqressiya tənlikləri əsasında xüsusi elastiklik əmsalları müəyyənləşdirilsin:

$$E_j = \alpha_j \frac{x_j}{\hat{y}_{x_j \cdot x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_k}} \tag{3.48}$$

Nümunə 3.2. Tutaq ki, ölkənin bir sıra bölgələrində müəyyən məhsulun idxal həcminin onun yerli istehsalı x_1, ehtiyat dəyişənləri x_2 və daxili bazarda tələbatı x_3 -dən reqressiya asılılığı aşağıdakı şəkildə alınmışdır:

$$\hat{y} = -66{,}028 + 0{,}135 x_1 + 0{,}476 x_2 + 0{,}343 x_3 .$$

Belə ki, orta qiymətlər
$\bar{y} = 31{,}5;\quad \bar{x}_1 = 245{,}7;\quad \bar{x}_2 = 3{,}7;\quad \bar{x}_3 = 182{,}5.$ olmuşdur. Bu verilənlərə nəzərən orta məcmu elastiklik göstəriciləri $\bar{E}_j = \alpha_j \dfrac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$ düsturu ilə hesablana bilər:

$$\overline{E}_1 = 0{,}135 \cdot \frac{245{,}7}{31{,}5} = 1{,}053\%; \quad \overline{E}_2 = 0{,}476 \cdot \frac{3{,}7}{31{,}5} = 0{,}056\%;$$

$$\overline{E}_3 = 0{,}343 \cdot \frac{182{,}5}{31{,}5} = 1{,}987\%.$$

Buradan görünür ki, yerli istehsalın həcmini 1% artırdıqda, ehtiyat və istehlak həcmləri dəyişmirsə, ümumilikdə bölgələrdə idxalın həcmi 1,053% artacaq. Uyğun olaraq, digər elastiklik göstəriciləri də interpretasiya oluna bilər. Orta elastiklik göstəricilərini bir-biri ilə müqayisə etməklə faktorları onların nəticəyə təsir etmə gücünə nəzərən ranjirə etmək olar. Baxılan nümunədə idxalın həcminə ən çox təsir daxili istehlakın həcmidir, ən az təsir isə ehtiyatların dəyişməsi olur. Hər bir bölgənin özünəməxsus faktor qiymətlərinin uyğunlaşması olduğundan (3.48) ifadəsi əsasında bu bölgələrin ayrılıqda xüsusi elastiklik əmsalını tapmaq olar. Bunun üçün hər faktora nəzərən xüsusi reqressiya tənliklərini quraq:

$$\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 \overline{x}_3,$$
$$\hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3} = \alpha_0 + \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \overline{x}_3,$$
$$\hat{y}_{x_3 \cdot x_1, x_2} = \alpha_0 + \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \alpha_3 x_3.$$

və ya, verilmiş konkret qiymətləri nəzərə almaqla

$$\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3} = -66{,}028 + 0{,}135 x_1 + 0{,}476 \cdot 3{,}7 + 0{,}343 \cdot 182{,}5,$$
$$\hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3} = -66{,}028 + 0{,}135 \cdot 245{,}7 + 0{,}476 \cdot x_2 + 0{,}343 \cdot 182{,}5,$$
$$\hat{y}_{x_3 \cdot x_1, x_2} = -66{,}028 + 0{,}135 \cdot 245{,}7 + 0{,}476 \cdot 3{,}7 + 0{,}343 \cdot x_3.$$

Tutaq ki, müəyyən bölgə üçün $x_1 = 160{,}2$; $x_2 = 4{,}0$; $x_3 = 190{,}5$. Onda bu bölgə üçün xüsusi elastiklik əmsalları:

$$\overline{E}_1 = \alpha_1 \cdot \frac{x_1}{\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3}} = 0{,}135 \cdot \frac{160{,}2}{-1{,}669 + 0{,}135 \cdot 160{,}2} = 1{,}084\%;$$

$$\overline{E}_1 = \alpha_2 \cdot \frac{x_2}{\hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3}} = 0{,}476 \cdot \frac{4{,}0}{29{,}739 + 0{,}476 \cdot 4{,}0} = 0{,}06\%;$$

$$\overline{E}_1 = \alpha_3 \cdot \frac{x_3}{\hat{y}_{x_3 \cdot x_1, x_2}} = 0{,}343 \cdot \frac{190{,}5}{-31{,}097 + 0{,}343 \cdot 190{,}5} = 1{,}908\%;$$

Buradan alıınr ki, baxılan bölgə üçün xüsusi elastiklik əmsalları ümumi bölgələr üzrə uyğun orta göstəricilərdən fərqlənir. Ona görə də bu göstəricilər konkret bölgənin inkişafı ilə bağlı müəyyən qərar qəbuletmə məsələlərində tətbiq oluna bilər.

Çoxdəyişənli reqressiya analizində R^2 determinasiya əmsalından başqa onunla sıx əlaqəli digər göstəricidən də istifadə olunur ki, bu göstəriciyə məcmu korrelyasiya əmsalı deyilir. Onun hesablanması R^2 -dan kök almaqladır:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_k} = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \, . \tag{3.49}$$

Onun dəyişmə oblastı cüt reqressiyada olduğu kimi $[0, 1]$ parçasıdır. Göstəricinin qiyməti vahidə nə qədər yaxındırsa, nəticə faktoru bütün faktorlar dəsti ilə o qədər sıx əlaqəlidir.

Standartlaşdırılmış reqressiya əmsalları üçün məcmu korrelyasiya əmsalı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_k} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}} \, . \tag{3.50}$$

Burada β_i -lər standartlaşdırılmış reqressiya əmsalları, r_{yx_i} - nəticənin hər bir faktorla cüt korrelyasiya əmsallarıdır.

Xətti asılılıq mövcud olduqda məcmu korrelyasiya əmsalını reqressiya tənliyini qurmadan və onun parametrlərini qiymətləndirmədən də, almaq olar:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_k} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}\,, \tag{3.51}$$

burada $\Delta\, r$ -cüt korrelyasiya əmsalları matrisinin determinantı:

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \ldots & r_{yx_k} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & \ldots & r_{x_1x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{x_ky} & r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.52}$$

Δr_{11} isə, faktorların korrelyasiya matrisinin determinantıdır:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \ldots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2x_3} & \ldots & r_{x_2x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \ldots & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.53}$$

Xüsusi halda, iki faktorlu modellər üçün

$$R^2_{yx_1x_2} = \frac{r^2_{yx_1} + r^2_{yx_2} - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}\,.$$

Faktorlar arasında məcmu determinasiya əmsalını analiz etməklə multikollienarlığın mövcudluğunu da müəyyənləşdirmək olar. Bu halda asılı dəyişən olaraq hər bir faktora baxılır. Məsələn, $R^2_{x_1x_2x_3,\ldots,x_k}$ əmsalı

$\hat{x}_1 = c + d_2x_2 + d_3x_3 + ... + d_kx_k$ reqressiyası ilə hesablanır. Burada 1-ci faktor nəticə faktoru kimi, digər faktorlar isə asılı olmayan dəyişənlər qismində d-ci faktora təsir edən faktorlar kimi qəbul olunur. R^2 vahidə nə qədər yaxındırsa, faktorların multikollienarlığı daha çox büruzə verir. Reqressiya tənliyində minimal R^2-lı faktorları saxlamaqla faktorların seçimi məsələsini həll etmək olar. Bu halda

$$F_j = \frac{R^2}{1-R_j^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} \qquad (3.54)$$

statistikası hesablanır. Əgər R_j^2 statistik əhəmiyyətlidirsə, onda $F_j > F_{cedv}(\alpha, k-1, n-k)$ və x_j digər faktorların xətti kombinasiyası olur, onu reqressiyadan kənarlaşdırmaq lazımdır.

İndi isə, çoxdəyişənli reqressiya modelinin spesifikasiyası ilə bağlı digər məsələyə baxaq. Bu məsələ xüsusi korrelyasiya məsələsidir. Xüsusi korrelyasiya əmsalları vasitəsilə faktorlar nəticəyə təsir dərəcələrinə nəzərən ranjirə olunur.Asılı dəyişəni x_0 ilə işarə etməklə cüt korrelyasiya əmsalları martisinin determinantını belə yazmaq olar:

$$\det R = \begin{vmatrix} 1 & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0k} \\ r_{10} & 1 & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{k0} & r_{k1} & r_{k2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3.55)$$

Onda xüsusi korrelyasiya əmsalı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$r_{x_i x_j \cdot x_0 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_k} = \frac{-R_{ii}}{\sqrt{R_{ii} R_{jj}}}, \qquad (3.56)$$

burada R_{ii}-(3.55) determinantında r_{ii} elementinin cəbri tamamlayıcısıdır.

Xüsusi korrelyasiya əmsalları reqressiya tənliyinə daxil olan faktorlardan biri ilə nəticə faktoru arasındakı əlaqənin sıxlığını digər faktorların təsirinin aradan qaldırılması şərti ilə xarakterizə etdiyindən, bu göstəricilər yeni faktorların modelə əlavə olunması ilə qalıq dispersiyanın tənzimlənməsində mühüm əhəmiyyətlidir. (3.56) xüsusi korrelyasiya əmsallarının əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması cüt korrelyasiya əmsalının əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması üçün (2.37) düsturuna uyğun olur. Burada n əvəzinə $n' = n - k + 1$ götürməklə

$$t = \frac{r_{x\,x_j \cdot x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_k} \sqrt{n-k-1}}{\sqrt{1 - r^2_{x\,x_j \cdot x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_k}}} \tag{3.57}$$

statistikasına baxılır. Bu statistika $n-k-1$ sərbəst dərəcəli t-Styudent paylanmasına malikdir. Əgər $t > t_{1-\alpha, n-k-1}$ olarsa, onda xüsusi korrelyasiya əmsalı əhəmiyyətli hesab olunur.

Nümunə 3.3. Xüsusi korrelyasiya asılılığının təsirinin ciddiliyini nümunədə təhlil edək. y dəyişəninə və korrelyasiya asılılığında olan x_1 və x_2 faktorlarına baxaq. Fərz edək ki, $r_{yx_1} = 0{,}54$, $r_{yx_2} = 0{,}1$, $r_{x_1 x_2} = 0{,}6$. (3.56) düsturu iki x_1 və x_2 faktorları halında belə yazılır:

$$r_{yx_1x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}. \tag{3.58}$$

(3.57) düsturuna nəzərən hesablamaqla alırıq:

$$r_{yx_1x_2} = \frac{0{,}54 - 0{,}1 \cdot 0{,}6}{\sqrt{\left(1 - 0{,}1^2\right)\left(1 - 0{,}6^2\right)}} = \frac{0{,}48}{\sqrt{0{,}99 \cdot 0{,}64}} = 0{,}60;$$

$$r_{yx_2x_1} = \frac{0{,}1 - 0{,}54 \cdot 0{,}6}{\sqrt{\left(1 - 0{,}54^2\right)\left(1 - 0{,}6^2\right)}} = -\frac{0{,}224}{\sqrt{0{,}78 \cdot 0{,}64}} = -0{,}33.$$

r_{yx_1} və $r_{yx_1x_2}$ əmsallarının qiymətləri bir-birinə yaxındır, r_{yx_2} və

$r_{yx_2x_1}$ qiymətləri isə, bir-birindən üç dəfə fərqlənir və fərqli işarəlidir.

§3.7. Ümumiləşmiş Ən Kiçik Kavadratlar Üsulu (ÜƏKKÜ)

§3.3-də Qauss-Markov teoreminin 2-ci şərtində fərz edilirdi ki, çoxdəyişənli xətti reqressiya modelinin təsadüfi tərkibləri korrelə olunmamışlar və sabit dispersiyaya malikdir:

$$\operatorname{cov}(\varepsilon) = M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 E_n, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_{j'}) = 0, \;\; j \neq j',$$

(E_n -n tərtibli vahid matrisdir).

Əgər mövcud statistik verilənlər kifayət qədər bircinsdirsə, onda şərtin 1-ci hissəsi qəbul olunur. Digər hallarda isə, bu şərt pozula bilər. Məsələn, istehlak xərcləri ilə gəlirlərin səviyyəsi arasındakı asılılığa baxdıqda nəzərdə tutmaq olar ki, daha imkanlı ailələrin xərclərindəki variasiyalar az imkanlı ailələrin xərclərinin variasiyasından çoxdur, yəni qalıqların dispersiyası eyni deyil. §3.3.-də həm də heteroskedastiklik, homoskedastikliyin mövcudluğu haqda Qoldfeld-Kvandt, Spirmen testlərini nəzərdən keçirmışdik. Burada iki ardıcıl müşahidə arasında korrelyasiyanın (avtokorrelyasiyanın) mövcudluğunu yoxlamaq üçün Darbin - Uotson testini də təhlil etmişdik. Yuxarıdakı şərtlər pozulduqda ƏKKÜ- ilə qiymətləndirmə effektiv olmur. Ona görə də burada ümumiləşmiş xətti reqressiya modelinə və onun ÜƏKKÜ-ilə həllinə baxacağıq. Bu üsul ƏKKÜ-nun tətbiqində təsadüfi tərkiblərin dispersiyasının sabit olmaması və onların öz aralarında korrelə olunması hallarında tətbiq edilir.

Ümumiləşmış xətti reqressiya modeli və modelin şərtləri aşağıdakı kimi yazılır:

$$Y = X\alpha + \varepsilon. \qquad (3.59)$$

1. Burada ε təsadüfi vektor; X determinik matrisdir;
2. $M(\varepsilon) = 0_n$ (burada 0_n n tərtibli sıfır matrisdir);

3. $\text{cov}(\varepsilon) = M(\varepsilon\varepsilon') = \Omega$, (burada Ω - müsbət müəyyən matrisdir);

4. $ranq(X) = r(X) = k + 1 < n$, (burada k - izahedici dəyişənlərin sayı, n - müşahidələrin sayıdır).

(3.59) ümumiləşmiş modelinin (3.1)-(3.4) modeli ilə müqaisəsi kovariasiya matrislərində fərqliliyi göstərir. Klassik modeldən fərqli olaraq ümumiləşmiş modeldə izahedici dəyişənlərin kovariasiya və dispersiyaları ixtiyari ola bilər.

(3.59) modelinə də, ƏKKÜ-nu tətbiq edib (3.8) düsturu ilə verilən $\hat{\alpha} = (X'X)^{-1} X'Y$ qiymətləndirməsini almaq olar. Bu qiymətləndirmə tutarlı və meylsiz olur. Lakin bu düstur $\hat{\alpha}$ qiymətləndirməsinin kovariasiya matrisi üçün (3.59) halında qəbul olunmur. Çünki (3.13) -ü nəzərə alsaq, ümumiləşmiş model üçün

$$\text{cov}(\hat{\alpha}) = (X'X)^{-1} X'M[\varepsilon\varepsilon']X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1} X'\Omega X(X'X)^{-1}, \quad (3.60)$$

klassik model üçün isə, (3.16) düsturuna əsasən

$$\text{cov}(\hat{\alpha}) = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}. \quad (3.61)$$

(3.21)-(3.23) çevirmələrinə analoji olaraq ümumiləşmiş (3.59) modeli üçün

$$M(e'e) = tr\left[\left(E_n - X(X'X)^{-1} X'\right)\Omega\right],$$

$$M(S^2) = M\left(\frac{e'e}{n-k-1}\right) = \frac{tr\left[\left(E_n - X(X'X)^{-1} X'\right)\Omega\right]}{n-k-1} \quad (3.62)$$

(3.61)-də $\text{cov}(\hat{\alpha})$ kovariasiya matrisinin qiymətləndirməsi olaraq σ_ε^2-ni S^2-la əvəz etsək

$$M(\text{cov}(\hat{\alpha})) = M(S^2)(X'X)^{-1} = \\ = \frac{tr\left[\left(E_n - X(X'X)^{-1} X'\right)\Omega\right]}{n-k-1}(X'X)^{-1}. \quad (3.63)$$

Yəni, ümumi halda qiymətləndirmənin kovariasiya matrisinin riyazi gözləməsi (3.61) -lə üst-üstə düşmür. Bu isə o deməkdir ki, ümumiləşmiş (3.59) modelinə ƏKKÜ-nun tətbiqi $\hat{\alpha}$ vektorunun kovariasiya matrisinin qiymətləndirməsi meylsizdir.

(3.59) modelində α vektorunun xətti meylsiz qiymətləndirməsinin effektivliyi aşağıdakı teoremlə ifadə olunur:

Teorem (Aytken) 3.3. *Ümumiləşmiş (3.59) modelində α vektorunun xətti meylsiz qiymətlər sinfində*

$$\hat{\alpha}_* = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}Y \tag{3.64}$$

qiymətləndirməsi ən effektiv qiymətləndirmədir.

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, $\hat{\alpha}_*$ qiymətləndirməsi meylsizdir. (3.59) -u nəzərə almaqla, (3.64)-ü belə yazaq:

$$\hat{\alpha}_* = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}(X\alpha+\varepsilon) = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}\left(X'\Omega^{-1}X\right)\alpha +$$
$$+\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}\varepsilon = \alpha + \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}\varepsilon.$$

$M(\varepsilon)=0$ olduğundan, $M(\hat{\alpha}_*)=\alpha$.

Optimallığı (ən effektivliyi) göstərmək üçün müəyyən çevirmələrlə (3.59)-u klassik model halına salaq. Ω matrisi üçün elə $(n\times n)$ ölçülü cırlaşmayan P matrisi tapmaq olar ki, $\Omega = PP'$ olsun. Onda $\Omega^{-1} = \left(P^{-1}\right)' P^{-1}$.

$$P^{-1}\Omega\left(P^{-1}\right)' = P^{-1}.(PP')(P')^{-1} = \left(P^{-1}P\right)P'(P')^{-1} = E_n.$$

(3.59)-un hər tərəfini soldan P^{-1} matrisinə vursaq alarıq:

$$Y_* = X_*\alpha + \varepsilon_*, \tag{3.65}$$

burada $Y_* = P^{-1}Y,\ X_* = P^{-1}X,\ \varepsilon_* = P^{-1}\varepsilon.$

$$M(\varepsilon_*) = M\left(P^{-1}\varepsilon\right) = P^{-1}M(\varepsilon) = 0,$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_*) = M(\varepsilon_*\varepsilon_*') = M\left[\left(P^{-1}\varepsilon\right)M\left(P^{-1}\varepsilon'\right)'\right] = M\left[P^{-1}\varepsilon\varepsilon'\left(P^{-1}\right)'\right] =$$

$$= P^{-1}M(\varepsilon\varepsilon')\left(P^{-1}\right)' = P^{-1}\Omega\left(P^{-1}\right)' = E_n,$$

$r(X) = p + 1 < n$ (P-cirlaşmayandır) olduğundan §3.2.-dəki klassik Qauss-Markov teoreminin bütün şərtləri ödənir. Bu teoremə görə

$$\hat{\alpha} = \left(X_*'X_*\right)^{-1}X_*'Y_*$$

qiymətləndirməsi ən effektiv qiymətləndirmədir. İlkin X, Y dəyişənlərinə qayıtmaqla alırıq:

$$\hat{\alpha}_* = \left[\left(P^{-1}X\right)'\left(P^{-1}X\right)\right]^{-1}\left(P^{-1}X\right)'P^{-1}Y =$$
$$= \left[X'\left(P^{-1}\right)'P^{-1}X\right]^{-1}X'\left(P^{-1}\right)'Y = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}Y. \tag{3.66}$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, teoremin isbatında P^{-1} matrisi olaraq $\operatorname{cov}(\varepsilon) = \left\|\operatorname{cov}(\varepsilon_r, \varepsilon_s)\right\|$ matrisisnin tərsini qəbul etmək olar. Təsadüfi tərkiblərin heteroskedastikliyi halında

$$\operatorname{cov}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$ olduqda, yəni

$D\varepsilon_i = \sigma_i^2,\ i = \overline{1,n};\ \ \operatorname{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_{j'}) = 0,\ \ j \neq j'$ münasibətləri ödəndikdə, $\sigma_i^2,\ i=\overline{1,n}$ qiymətləri məlum olarsa, heteroskedastiklik asanlıqla aradan çıxır. Doğrudan da, X və Y dəyişənləri əvəzinə onların σ_i -lərə nəzərən normallaşmış $Z=\dfrac{Y}{\sigma_i},\ v_j=\dfrac{x_i}{\sigma_i},\ i=\overline{1,n}$ qiymətlərini götürməklə

$$z_i=\alpha_0'+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j' v_{ij}+v_i,\ i=\overline{1,n},\ \alpha_0'=\frac{\alpha_0}{\sigma_i},\ v_j=\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{3.67}$$

modeli alınır ki, onun təsadüfi tərkibinin dispersiyası vahidə bərabərdir: $D(v_i)=1,\ i=\overline{1,n}.$ (3.67) modeli homoskedastiklik şərtini ödəyir, $\operatorname{cov}(v)=E_n$ və model klassik modelə çevrilir.

Təsadüfi tərkiblərin kovariasiya matrisi diaqonal formalı olduqda ÜƏKKÜ-na çəkili ən kiçik kvadratlar üsulu (çəkili ƏKKÜ)-da deyilir. Bu halda

$$[\operatorname{cov}(\varepsilon)]^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}$$

və ÜƏKKÜ-ilə parametrlərin qiymətləndirməsi aşağıdakı kvadratik formanın minimallaşdırılmasına gətirilir:

$$\tilde{Q}(\alpha)=(Y-X\alpha)'\left[\operatorname{cov}(\varepsilon)\right]^{-1}(Y-X\alpha)= \\ =\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^{-1}\rightarrow \min \qquad (3.68)$$

Buradan (3.7) tipli matris və koordinat formalı normal tənliklər sisteminin aşağıdakı ifadələri alınır:

$$\left(X\left[\operatorname{cov}(\varepsilon)\right]^{-1}X\right)\alpha=X'\left[\operatorname{cov}(\varepsilon)\right]^{-1}Y \ , \qquad (3.69)$$

$$\begin{cases}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}=\alpha_0\sum\frac{1}{\sigma_i^2}+\alpha_1\sum\frac{x_{1i}}{\sigma_i^2}+\alpha_2\sum\frac{x_{2i}}{\sigma_i^2}+...+\alpha_k\sum\frac{x_{ki}}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{y_ix_{1i}}{\sigma_i^2}=\alpha_0\sum\frac{x_{1i}}{\sigma_i^2}+\alpha_1\sum\frac{x_{1i}^2}{\sigma_i^2}+\alpha_2\sum\frac{x_{2i}x_{1i}}{\sigma_i^2}+...+\alpha_k\sum\frac{x_{ki}x_{1i}}{\sigma_i^2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum\frac{y_ix_{ii}}{\sigma_i^2}=\alpha_0\sum\frac{x_{ki}}{\sigma_i^2}+\alpha_1\sum\frac{x_{1i}x_{ki}}{\sigma_i^2}+\alpha_2\sum\frac{x_{2i}x_{ki}}{\sigma_i^2}+...+\alpha_k\sum\frac{x_{ki}^2}{\sigma_i^2}\end{cases} \qquad (3.70)$$

(3.70) normal tənliklər sistemi

$$\frac{y_i}{\sigma_i}=\alpha_0\frac{1}{\sigma_i}+\alpha_1\frac{x_{1i}}{\sigma_i}+\alpha_2\frac{x_{2i}}{\sigma_i}+\ldots+\alpha_k\frac{x_{ki}}{\sigma_i}+u_i, \quad i=\overline{1,n} \qquad (3.71)$$

modelinə uyğun gəlir ki, burada $u_i=\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$ və $\sigma_{u_i}^2=1$.

İndi tutaq ki, (3.59) modelində təsadüfi tərkiblərin homoskedastikliyi şərti ödənilir ($D\varepsilon_i=\sigma^2,\ i=\overline{1,n}$), lakin onların korrelyasiya əmsalları $r(\varepsilon_r,\varepsilon_s)=\rho|r-s|,\ |\rho|<1,\ r\neq s$ düsturu ilə asılıdır. Onda bu əlaqə $|r-s|$ artdıqca zəifləyir. Kovariasiya matrisi

$$\operatorname{cov}(\varepsilon)=\sigma^2\begin{pmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2}\\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1\end{pmatrix}=\sigma^2\Omega_0\,. \qquad (3.72)$$

Baxılan modelin homoskedastik təsadüfi tərkibli halında dispersiyanın meylsiz qiymətləndirməsi aşağıdakı kimi olur:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-k-1}\left(Y-X\hat{\alpha}\right)'\Omega_0^{-1}\left(Y-X\hat{\alpha}\right). \qquad (3.73)$$

Burada sağ tərəfdə ÜƏKKÜ qiymətləndirməsidir.
(3.59) modelində 1-4 şərtlərinə əlavə olaraq 5-ci şərt kimi təsadüfi tərkiblərin normal qanunla paylanması fərz olunursa, yəni $\varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2\Omega_0)$ olarsa, onda (3.64) qiymətləndirməsi də normal qanunla paylanır: $\hat{\alpha}_* \sim N\left(\alpha, \sigma^2\left(X'\Omega_0^{-1}X\right)^{-1}\right)$.

Qeyd edək ki, klassik çoxdəyişənli reqressiya modelindən fərqli olaraq, ümumiləşmiş çoxdəyişənli modelin determinasiya əmsalı

$$R^2=1-\frac{\left(Y-X\hat{\alpha}_*\right)'\left(Y-X\hat{\alpha}_*\right)}{\left(Y-\bar{Y}\right)'\left(Y-\bar{Y}\right)} \qquad (3.74)$$

modelin keyfiyyət ölçüsünün qiymətləndirilməsində əhəmiyyətli deyil. Ümumi halda onun qiyməti $[0, 1]$ parçasından kənara çıxa bilər, izahedici dəyişənlərin modeldən çıxarılması (əlavə olunması) isə, heç də onun azalmasına (artmasına) səbəb olmur. Buna səbəb odur ki, (3.27) düsturunun alınmasında fərz edilirdi ki, sərbəst hədd mövcuddur. Lakin (3.59) ilkin modelində sərbəst hədd iştirak etməsinə baxmayaraq, həmin hədd çevirmələrlə alınmış yeni

(3.65) modelində iştirak etməyə bilər. Ona görə də ümumiləmiş modeldə R^2 determinasiya əmsalı modelin keyfiyyətinin təqribi xarakterisrikası kimi istifadə oluna bilər.

§3.8. Maksimal Doğruya Oxşarlıq Üsulu (MDOÜ) ilə çoxdəyişənli reqressiya modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi

Reqressiya modellərinin parametrlərinin qiymətləndirilməsində kifayət qədər geniş yayılmış üsullardan biri də Maksimal Doğruya Oxşarlıq Üsuludur (MDOÜ). Bu üsul o meyara əsaslanır ki, parametrlərin optimal qiymətləndirilməsi doğruya-oxşarlıq funksiyasına maksimum qiymət verməlidir. Bu funksiya və onun xassələri haqda ([5, səh.292-300]) ətraflı şərhlər verildiyindən, biz burada onun çoxdəyişənli reqressiya analizində ƏKKÜ-ilə müqayisəli təhlilinə baxacağıq. Doğruya-oxşarlıq funksiyası daha ümumi $f(\alpha, x_t)$ funksionallı (1.1) ekonometrik modeli vasitəsilə asılı olmayan $x_{ij}, \ i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1,k}$ faktorları və asılı $y_i, \ i=\overline{1,n}$ dəyişənlər verildikdə modelin naməlum $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$ parametrlərinin şərti $\varphi(\alpha, y, x)$ birgə paylanma sıxlığı kimi interpretasiya oluna bilər. Bu halda $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n$ optimal qiymətləndirmələri maksimal ehtimalla xarakterizə olunur və bu ehtimal $f(\alpha, x_t)$ funksionalının $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_n$ koordinatlarında qiymətinə bərabərdir. Belə qiymətlən-dirmələrə MDO qiymətləndirmələri deyilir. MDOÜ-nun əsasını aşağıdakı mühakimələr təşkil edir:

1. Baxılan model y_i asılı dəyişənin dəyişməsi prosesinə adekvat olmalıdır. Belə ki, onun forması və faktorların tərkibi prosesin qanunauyğunluqlarını müəyyənləşdirən səbəbiyyət-nəticə əlaqələrini düzgün ifadə etməlidir. Təsadüfi tərkibin

paylanma qanunu $\hat{y}_i$ hesablanma qiymətlərinə nəzərən y_i-nin paylanma qanununu ifadə etməlidir. Burada

$$M[y_i] = \hat{y}_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \ldots + \alpha_k x_{ki},\ i = \overline{1,n}.$$

y_i-nin onun riyazi gözləməsindən meyli bu prosesə müəyyən təsadüfi təsirlər nəticəsində olur.

2. ƏKKÜ-nun tətbiq olunduğu modellərdən fərqli olaraq, MDOÜ- tətbiq olunan modellərdə $y_i,\ i = \overline{1,n}$ qiymətlərinin paylanma qanunu məlum olmalıdır. Əksər hallarda fərz edilir ki, bu paylanma normal qanunla paylanmış paylanmadır. $x_{ij},\ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,k}$ asılı olmayan faktorların məlum qiymətlərində $y_i,\ i = \overline{1,n}$ qiymətlərinin şərti birgə paylanma sıxlığı $\varphi\left(\alpha, y_i\big|_{x_i}\right) \sim N\left(\hat{y}_i, \hat{\sigma}^2_{y_i}\right)$ düsturu ilə müəyyənləşir. Burada $\hat{\sigma}^2_{y_i}$ - y_i-nin dispersiyasıdır və onun $\hat{y}_i$ riyazi gözləməsinə nəzərən təyin olunur.

3. $\varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}$ təsadüfi tərkiblərinin paylanma qanununun sıxlığı funksiyası y_i dəyişəninin uyğun funksiyasına ekvivalent olmalıdır, yəni $\varphi(\varepsilon_i) \sim \varphi(y_j),\ i = \overline{1,n}$ $y_1,\ldots,y_n$ təsadüfi kəmiyyətlər məcmusu üçün birgə paylanma sıxlığını $\varphi(y_1,\ldots,y_n|X) \sim N(M[Y], W_y)$ kimi yazmaq olar. Burada $M[Y]$- $y_1,\ldots,y_n$ qiymətlərinin riyazi gözləmə vektoru, W_y isə y_i -lərin kovariasiya matrisidir:

$$W_y = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 & \operatorname{cov}(y_1, y_2) & \ldots & \operatorname{cov}(y_1, y_n) \\ \operatorname{cov}(y_2, y_1) & \hat{\sigma}_2 & \ldots & \operatorname{cov}(y_2, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{cov}(y_n, y_1) & \operatorname{cov}(y_n, y_2) & \ldots & \hat{\sigma}_n \end{pmatrix}$$

MDOÜ-nun klassik variantında fərz edilir ki, $i=\overline{1,n}$ indeklərinin müxtəlif qiymətlərində y_i paylanmaları asılı deyil və onların dispersiyası sabitdir. Onda $W_y=\hat{\sigma}^2E_n$ və deməli, $\varphi(\varepsilon_i)\sim N(0,W_\varepsilon)$ $y_i=\alpha_0+\alpha_1x_{1i}+\ldots+\alpha_kx_{ki}+\varepsilon_i$ olduğundan, ε_i və y_i-in asılı olmaması şərtindən alınır ki, $\dfrac{\partial\varepsilon_i}{\partial y_i}=1,\ \dfrac{\partial\varepsilon_i}{\partial y_{i-j}}=0,\ i\neq j$.

Qeyd edək ki, y_i və ε_i, $i=\overline{1,n}$ dəyişənlərinin birgə paylanma sıxlığı arasında $\varphi(Y|X)=\varphi(e)J\left\|\dfrac{\partial e}{\partial y}\right\|$ (burada J - Yakobiyandır) asılılığı var. Burada

$$\varphi(e)J\left\|\frac{\partial e}{\partial y}\right\|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial\varepsilon_2}{\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial\varepsilon_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varepsilon_n}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial\varepsilon_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}.$$

$\dfrac{\partial\varepsilon_i}{\partial y_j}=1,\ i=j,\ \dfrac{\partial\varepsilon_i}{\partial y_j}=0,\ i\neq j$ olduğunu nəzərə alsaq $\varphi(Y|X)=\varphi(\varepsilon)$. Buradan isə, $\varphi(\varepsilon_i)\sim N(0,\sigma^2_{\varepsilon_i})$, $\sigma^2_{\varepsilon_i}=\hat{\sigma}^2$; $\varphi(e)\sim N(0,W_\varepsilon)$, $W_\varepsilon=W_y$.

MDOÜ-nun əsasında belə bir fərziyyə durur ki, bu fərziyyəyə əsasən,

$$y_i=\alpha_0+\alpha_1x_{1i}+\ldots+\alpha_kx_{ki}+\varepsilon_i\,,\ i=\overline{1,n} \tag{3.75}$$

modelində ən yaxşı $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_k$ qiymətləndirməsinə $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ təsadüfi tərkiblərinin ən ehtimallı $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\ldots,\hat{e}_n$ səhv qiymətləndirmələri uyğun gəlməlidir. Deməli, xüsusi ehtimal paylanmalarının $\varphi_1(e_1)\cdot\varphi_1(e_2)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(e_n)$ hasilinin maxsimumu $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ –lərin qiymətlərinin ən ehtimallı uyğunlaşması ilə uzlaşmalıdır ki, bu uzlaşma (3.75) modelinin parametrlərinin ən yaxşı qiymətləndirməsini təmin edir. Burada nəzərdə tutulur ki, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ faktiki səhvlərinin istənilən dəsti üçün $\varphi_1(e_1)\cdot\varphi_1(e_2)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(e_n)$ hasili onların $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ parametrlərinin qiymətləndirmələrinin müəyyən dəstinə uyğun olan qiymətlərinin birgə ehtimal paylanmasını ifadə edir. Qeyd olunanları nəzərə almaqla (3.75) modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsini aşağıdakı məqsəd funksiyasının maksimallaşdırılması ilə almaq olar:

$$L(e)=\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_1(\varepsilon_2)\ldots\varphi_1(\varepsilon_n)=$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\exp\left\{-\frac{y_i-\alpha_0-\alpha_1x_{1i}-\ldots-\alpha_kx_{ki}}{2\sigma_\varepsilon^2}\right\}. \qquad (3.76)$$

Burada $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ və σ_ε^2 naməlum parametrlər, $y_i,\ x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,k}$ ilkin verilənlər massividir. (3.76) məqsəd funksiyasına maksimal həqiqətə oxşarlıq funksiyası deyilir. $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ və σ_ε^2 parametrlərinin optimal $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_k$ və σ_e^2 qiymətləndirmələri

$$\ell(e)=\ln L(e)=\ln\left[\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_1(\varepsilon_2)\ldots\varphi_1(\varepsilon_n)\right]=\sum_{i=1}^{n}\ln\varphi_1(\varepsilon_i)$$

funksiyasına da maksimum qiymət verir. ε_i və ε_j $(i\neq j)$ asılı olmadıqda bu funksiyanı aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\ell(e) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left\{ -\frac{y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_{1i} - \ldots - \alpha_k x_{ki}}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}^2 \right) = \tag{3.77}$$

$$= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_{1i} - \ldots - \alpha_k x_{ki})^2$$

$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_k$ və σ_e^2 parametrlərinin optimal qiymətləri $\ell(e)$ funksiyasından $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ və σ_ε^2 -na nəzərən 1-ci tərtib xüsusi törəmələrin sıfra bərabərləşməsi ilə alına bilər (çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu üçün zəruri şərtlər):

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_{1i} - \ldots - \alpha_k x_{ki}) = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_F} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}x_{ri}(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_{1i} - \ldots - \alpha_k x_{ki}) = 0, \quad r = \overline{1,k}, \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{n}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_{1i} - \ldots - \alpha_k x_{ki})^2 = 0,$$

(3.78) tənliyinin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ və σ_ε^2 kökləri $\ell(e) = (y_1, \ldots, y_n,\ x_1, \ldots, x_n,\ \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k,\ \sigma_\varepsilon^2)$ funksiyasının həm maksimumu, həm minimumu və həm də əyilmə nöqtəsi ola bilər. Ona görə də optimallıq üçün (1.21), (1.22) Hesse tipli matrisin elementlərini hesablamaqla kafi şərtləri yoxlamaq lazımdır. Hesablamaları kompaktlaşdırmaq üçün (3.78) sistemini ekvivalent matris sistem kimi yazaq:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \dfrac{1}{\sigma^2}(Y - X\alpha)' X = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{(Y - X\alpha)'(Y - X\alpha)}{2\sigma_\varepsilon^4} = 0. \end{cases} \tag{3.79}$$

burada $Y = X\alpha + \varepsilon$; $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n) \Rightarrow Y \sim N(X_\alpha, \sigma^2 E_n)$.

(3.79) sistemindən MDOÜ-ilə (3.75) çoxdəyişənli xətti reqressiya modelinin parametrlərinin aşağıdakı qiymətləndirməsi alınır:

$$\hat{\alpha} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y\,,\ \hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2. \qquad (3.80)$$

Burada $e = Y - X\hat{\alpha}$ qalıq vektorunu ifadə edir. Qeyd edək ki, MDOÜ-ilə $\hat{\alpha}$ qiymətləndirməsi ƏKKÜ-ilə alınmış (3.8) qiymətləndirməsi ilə üst-üstə düşür. Lakin MDOÜ-ilə alınmış $\hat{\sigma}^2$ qiymətləndirməsi ƏKKÜ -ilə alınmış (3.23) qiymətləndirməsi ilə eyni deyil.

(3.77)-ni aşağıdakı kimi yazaq:

$$\ell(e) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(Y - X\alpha\right)'\left(Y - X\alpha\right)}{\sigma^2}. \qquad (3.80)$$

Onda 2-ci tərtib xüsusi törəmələr üçün alırıq:

$$\frac{\partial^2\ell(e)}{\partial\alpha\partial\alpha'} = -\frac{X'X}{\sigma^2}, \quad \frac{\partial^2\ell(e)}{\partial\sigma^2\partial\alpha'} = -\frac{\left(Y - X\alpha\right)' X}{\sigma^4},$$

$$\frac{\partial^2\ell(e)}{\left(\partial\sigma^2\right)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\left(Y - X\alpha\right)'\left(Y - X\alpha\right)}{\sigma^6}. \qquad (3.81)$$

Bu törəmələrdən riyazi gözləmə alaq (əks işarə ilə)

$$-M\left(\frac{\partial^2\ell(e)}{\partial\alpha\partial\alpha'}\right) = \frac{X'X}{\sigma^2}, \quad -M\left(\frac{\partial^2\ell(e)}{\partial\sigma^2\partial\alpha'}\right) = 0,$$

$$M\left(\frac{\partial^2\ell(e)}{\left(\partial\sigma^2\right)^2}\right) = \frac{n}{2\sigma^4}, \qquad (3.82)$$

(burada nəzərə aldıq ki, $M\left(\left(Y - X\alpha\right)'\left(Y - X\alpha\right)\right) = n\sigma^2$ və $M\left(Y - X\alpha\right) = 0$). (3.82)-dən çoxölçülü parametrlər halında Fişer informasiya matrisi alınır (birölçülü halda bax ([5, səh. 269-274]) .

$$F_n\left(\alpha,\ \sigma^2\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2}X'X & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

Asimptotik informasiya matrisi isə:

$$F\left(\alpha,\ \sigma^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}F_n\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2}Q & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

burada fərz olunur ki, $Q=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)X'X$ müsbət müəyyən matrisi mövcuddur

$$F^{-1}=\begin{pmatrix} \sigma^2 Q^{-1} & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{pmatrix}$$

olduğundan, $\frac{\hat{\sigma}^2}{n}Q^{-1}$ $\hat{\alpha}$ qiymətləndirmələrinin asimptotik kovariasiya matrisinin qiymətləndirməsidir. Praktikada kovariasiyaların asimptotik matrisi $\hat{\sigma}^2\left(X'X\right)^{-1}$ -lə appoksimasiya olunur (çünki $\hat{\alpha}$ vektorunun dəqiq kovariasiya matrisi $\sigma^2\left(X'X\right)^{-1}$ matrisidir). $\hat{\sigma}^2$ qiymətləndirməsinin asimptotik dispersiyasını $2\frac{\hat{\sigma}^4}{n}$ -lə qiymətləndirmək olar.

Beləliklə, yuxarıdakı nəticələrdən alınır ki, §3.3.-dəki Qauss-Markov şərtləri ödənildikdə reqressiya modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsində ƏKKÜ və MDOÜ-ilə qiymətləndirmə yanaşmalarını tətbiq etməklə eyni nəticələr alınır. Analaoji üst-üstə düşmələr bu qiymətləndirmələrin kovariasiya matrislərində də öz təsdiqini tapır.

Üçüncü fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

3.1. Çoxfaktorlu xətti reqressiya dedikdə nə başa düşülür?
3.2. Çoxdəyişənli xətti reqressiya tənliyinin qurulmasında hansı məsələlər həll edilir?
3.3. Çoxdəyişənli xətti reqressiya modelinin spesifikasiyasında hansı məsələlər həll edilir?
3.4. Xətti reqressiya tənliyinə daxil olan faktorlar üzərinə hansı şərtlər qoyulur?
3.5. Faktorun kollienarlığı və multikollienarlığı dedikdə nə başa düşülür?
3.6. Faktorlar arasında kollienarlığın və multikollienarlığın mövcud olması necə yoxlanılır?
3.7. Çoxdəyişənli reqressiya modelinə ƏKKÜ-nun tətbiqində normal tənliklər sistemi necə olur?
3.8. Məcmu determinasiya əmsalı və korrektə olunmuş məcmu determinasiya əmsalının hesablanması düsturları necədir?
3.9. Reqressiya tənliyinin və onun əmsallarının əhəmiyyətlliyi necə yoxlanılır?
3.10. Hansı halda ÜƏKKÜ tətbiq olunur?
3.11. Orta xüsusi elastiklik əmsalları necə hecablanır?
3.12. Faktorların əhəmiyyətliliyi necə qiymətləndirilir?
3.13. Xüsusi korrelyasiya əmsalları necə hesablanır?
3.14. Qalıqların homoskedastikliyi və heteroskedastikliyi dedikdə nə başa düşülür. Qalıqların homoskedastikliyi haqda hipotez necə yoxlanılır?
3.15. Modelin düzgün olmayan spesifiksının hansı nəticələri ola bilər?

Testlər

3.1. Çoxdəyişənli reqressiya modeli dedikdə

a) asılı y dəyişəninin orta qiymətinin asılı olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənlərindən asılılığını təsvir edən model başa düşülür;

b) asılı dəyişənin mütləq qiymətinin asılı olmayan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dəyişənlərin orta qiymətindən asılılığını təsvir edən model başa düşülür;

c) asılı y dəyişənin mütləq qiymətinin asılı olmayan $x_1, x_2,..., x_n$ dəyişənlərinin mütləq qiymətlərindən asılılığını təsvir edən model başa düşülür;

d) asılı dəyişənin dispersiyasının asılı olmayan $x_1, x_2,..., x_n$ dəyişənlərin dispersiyasınadan xətti asılılıq modeli başa düşülür.

3.2. ÜƏKKÜ hansı halda tətbiq olunur?
a) səbəbiyyət faktorları asılı olduqda;
b) faktorların multikollienarlığı halında;
c) dəyişənin avtokorrelyasiyası halında;
d) qallqların avtokorrelyasiyası halında.

3.3. Xüsusi elastiklik əmsalı nəyi xarakterizə edir?
a) Modelə daxil olan digər faktorların qiymətləri dəyişmədikdə uyğun faktorun qiymətini 1% dəyişdikdə nəticə faktorunun orta hesabla neçə faiz dəyişməsini göstərir;
b) Modelə daxil olan digər faktorların qiymətləri dəyişmədikdə uyğun faktorun qiymətini bir vahid artırdıqda nəticənin orta hesabla nə qədər dəyişməsini göstərir;
c) Modelin qalıq həddinin homoskedastikliyini göstərir;
d) Modelin qalıq həddinin dispersiyasının dəyişməsini göstərir.

3.4. Darbin - Uotson testi ilə nə yoxlanılır?
a) qalıq həddin iki ardıcıl qiymətləri arasında korrelyasiyanın mövcudluğu yoxlanılır;
b) qalıq həddin dispersiyasının zamandan asılılığı yoxlanılır;
c) faktorlar arasında multikollienarlıq yoxlanılır;
d) modelin əhəmiyyətliliyi yoxlanılır.

3.5. $y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \varepsilon$ xətti reqressiya tənliyində $t_y = \dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$; $t_{x_i} = \dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$, $i = \overline{1,k}$ standartlaşdırılmış dəyişənlərinin hansı xassələri var?
a) $\bar{t}_y = \bar{t}_{x_i} = 0,\ \sigma_{t_y} = \sigma_{t_{xi}} = 1$;

b) $\bar{t}_y = \bar{t}_{x_i} = 1, \ \sigma_{t_y} = \sigma_{t_{x_i}} = 0;$

c) $\bar{t}_y = \bar{t}_{x_i} = \sigma_{t_y} = \sigma_{t_{x_i}} = 0;$

d) $\bar{t}_y = \bar{t}_{x_i} = \sigma_{t_y} = \sigma_{t_{x_i}} = 1.$

3.6. Aşağıdakı hallardan hansı multikollienarlığın nəticəsi ola bilər?
a) reqressiyanın ƏKKÜ-ilə qiymətləndirməsində t -statistika azalır;
b) qiymətləndirmənin standart səhvi azalır;
c) ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmə verilənlərin dəyişkənliyinə qarşı həssas deyil;
d) reqressiyanın ƏKKÜ-ilə qiymətləndirməsində t -statistika artır.

3.7. Aşağıdakı hallardan hansı heteroskedastikliyin nəticəsi ola bilər?
a) ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmə xəttilik və meylsizlik xassələrini saxlayır, lakin effektivlik xassəsini itirir;
b) ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmənin dispersiyası meylsizdir;
c) t - statiska aşağı düşür;
d) F -statistika aşağı düşür.

3.8. Darbin - Uotson kriteriyasında DW-nin hansı qiymətində mənfi avtokorrelyasiya mövcuddur?
a) $DW \approx 2$; b) $DW \approx 0$; c) $DW \approx 4$; d) $DW \approx 1$.

3.9. Qoldfeld-Kvandt testi hansı məqsədlə istifadə olunur?
a) reqressiya qalıqlarında heteroskedastikliyin yoxlanılmasında;
b) faktorlar arasınada multikollienarlığın yoxlanılmasında;
c) modelin adekvatlığının yoxlanılmasınada;
d) reqressiyanın qalıqlarının asılı olmamasının yoxlanılmasında;

3.10. $\hat{y}_x = 21{,}5 + 4{,}35x_1 + 2{,}1x_2$ reqressiya tənliyinin parametrlərinin interpretasiyası necədir?
a) x_1 faktorunu bir vahid artırdıqda $\hat{y}_x$ kəmiyyəti 4,35 qədər dəyişir, x_2 faktorunu bir vahid artırdıqda isə, 2,1 qədər dəyişir;

b) x_1 faktorunu 1% dəyişdikdə $\hat{y}_x$ kəmiyyəti 4,35% dəyişir, x_2 faktorunu 1% dəyişdikdə isə, $\hat{y}_x$ kəmiyyəti 2,1% dəyişir;
c) parametrlər interpretasiya olunmur;
d) parametrlərinin hər birini bir vahid artırdıqda $\hat{y}_x$ nəticəsi 6,45 qədər artır.

Çalışmalar

Məsələ 3.1. y, x_1, x_2 faktorları arasında korrelyasiya matrisi verilmişdir.

	y	x_1	x_2
y	1		
x_1	0,35	1	
x_2	0,56	0,86	1

faktorlar arasında xətti kollienarlığın mövcudluğunu yoxlayın.
Cavab: x_2 və x_3 kollineardır.

Məsələ 3.2. $\hat{y}_x = 20 + 4x_1 + 2{,}5x_2$ reqressiya tənliyinə əsasən $\bar{x}_1 = 5,\ \bar{x}_2 = 20,\ \bar{y} = 100$ olduqda xüsusi elastiklik əmsallarını tapın.
Cavab: (0,2; 0,5).

Məsələ 3.3. $n = 25$ müşahidələrin sayı olduqda $\hat{y}_x = 21{,}5 + 4{,}35x_1 + 2{,}1x_2$ reqressiya tənliyi üçün məcmu korrelyasiya əmsalı 0,56 olduqda $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində onun əhəmiyyətliliyini yoxlayın.
Cavab: Əhəmiyyətlidir.

Məsələ 3.4. Müəyyən servis müəssisəsinin 12 il ərzində y_1 (min p.v.) xidmət həcmi, burada çalışan işçilərin x_1 (yüzlərlə) sayı və əsas istehsal vasitələrinin (min p.v.) x_2 həcmi cədvəldə göstərilmişdir.

Illər	y	x_1	x_2
1	11	2,1	11
2	13	2,2	11
3	16	2,3	12
4	24	2,4	13
5	24	2,5	15
6	26	2,5	17
7	27	2,6	17
8	28	2,7	18
9	29	2,6	18
10	33	2,7	19
11	33	2,7	19
12	36	2,7	22

y, x_1, x_2 faktorları arasında xətti reqressiyanın olduğunu fərz dərək, onun analitik ifadəsini tapın.

Cavab: $\hat{y}_x = -42,23 + 20,27x_1 + 1,04x_2$.

Məsələ 3.5. Məsələ 3.4-ün şərtləri daxilində qurulmuş modelin dispersiyasını, reqressiyanın və reqressiya əmsallarının standart səhvlərini tapın. Modelin dispersiyasının 90% -lik inam intervalını qurun.

Cavab: $\hat{\sigma}^2 = 3,52;\quad 1,87 < \sigma^2 < 9,51$, kovariasiya matrisinin qiymətləndirilmiş forması

$$\begin{pmatrix} 170,23 & -100,93 & 5,15 \\ -100,93 & 62,30 & -3,42 \\ 5,15 & -3,42 & 0,21 \end{pmatrix},$$ reqressiya əmsallarının standart səhvləri $s_{\alpha_0} \approx 13,05;\quad s_{\alpha_1} \approx 7,89;\quad s_{\alpha_2} \approx 0,46.$

Məsələ 3.6. Məsələ 3.4-ün şərtləri daxilində qurulmuş modelin 0,05 əhəmiyyətlilik səviyyəsində reqressiya əmsalının əhəmiyyətliliyini yoxlayın

Cavab: α_0 parametrinin əhəmiyyətliliyi haqda hipotez qəbul olunur;

α_1 parametrinin əhəmiyyətliliyi haqda hipotez qəbul olunur; α_2 parametri əhəmiyyətsizdir.

Məsələ 3.7. Məsələ 3.4-ün şərtləri daxilində qurulmuş modelə əsasən xüsusi elastiklik əmsallarını və reqressiyasının standartlaşdırılmış əmsallarını tapın.
Cavab: xüsusi elastiklik əmsalları: 2,03; 0,67 standartlaşdırılmış reqressiya əmsalları təqribi olaraq 0,53 və 0,46-dır.

Məsələ 3.8. y nəticə faktoru və x_1, x_2, x_3 səbəbiyyət faktorlarının 30 sayda müşahidə qiymətləri cədvəldə verilmişdir.

y	x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3
113	10	38	163	120	16	38	160
124	5	37	165	125	10	37	167
124	10	38	163	118	12	37	163
122	13	36	163	122	8	38	162
128	9	37	152	133	29	39	184
140	14	39	176	136	9	39	167
117	12	36	155	136	91	37	166
113	15	36	164	138	14	39	166
122	13	38	175	124	12	38	176
139	27	38	194	123	11	38	156
126	8	39	167	149	8	39	194
125	17	38	164	126	11	38	182
124	7	37	175	109	8	37	164
121	15	37	162	120	20	38	170
123	24	38	168	115	16	37	165

a) korrelyasiya matrisini qurun və multikollienarlığı yoxlayın;
b) xətti çoxdəyişənli reqressiya tənliyini qurun.
Cavab: a) faktorlar arasınada multikollienarlıq mövcud deyil;
b) $y = -99{,}816 + 0{,}154x_1 + 4{,}459x_2 + 0{,}324x_3 + \varepsilon$.

Məsələ 3.9. Məsələ 3.8-in verilənlərinə əsasən qurulmuş modeldə

a) məcmu korrelyasiya və determinasiya əmsallarının qiymətlərini hesablayın;
b) reqressiya tənliyinin və reqressiya əmsallarının əhəmiyyətliliyini yoxlayın.
Cavab: a) 0,748; 0,560; b) qurulan tənlik $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində əhəmiyyətlidir, bu səviyyədə α_0, α_2, α_3 parametrlərinin qiymətləndirilmələri əhəmiyyətli, α_1 parametrinin qiymətləndirilməsi isə, əhəmiyyətsizdir.

Məsələ 3.10. Məsələ 3.8-in verilənləri əsasında qurulmuş modelə və məsələ 3.9-un həllinə əsasən, ancaq əhəmiyyətli faktorlarla reqressiya tənliyini qurun və $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində qalıq sıranın homoskedastikliyi haqda hipotezi yoxlayın.
Cavab: $y = -89{,}520 + 4{,}082x_2 + 0{,}361x_3$; x_2 və x_3 dəyişənlərinə nəzərən qalıqların dispersiyası sabitdir, yəni qalıqlar homoskedastikdir.

Məsələ 3.11. Tutaq ki, $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i,\ i = \overline{1{,}12}$ modelində $\alpha_0 = 2{,}5$; $\alpha_1 = 0{,}3$; $x_i = i,\ i = \overline{1{,}12}$ və qalıqlar $\{-1{,}0;\ 2{,}0;\ -0{,}5;\ 0{,}5; -2{,}0;\ -1{,}1;\ 3{,}0;\ 1{,}0;\ 2{,}5;\ 1{,}0;\ -3{,}0;\ 2{,}0\}$ ardıcıllığı ilə verilib. Avtokorrelyasiya əmsalını hesablayın və DW (Darbin-Uotson) statistikası ilə 0,05 əhəmiyyətlilik səviyyəsində qalıqların avtokorrelyasiyası haqda hipotezi yoxlayın.
Cavab: -0,16; 1-ci tərtib avtokorrelyasiyanın olmaması haqda hipotez qəbul olunur.

FƏSİL IV

QEYRİ-XƏTTİ REQRESSİYA MODELLƏRİ

İkinci və üçüncü fəsillərdə asılı olmayan dəyişənlərə və parametrlərə nəzərən xətti reqressiya modellərini araşdırdıq. Lakin sosial-iqtisadi təzahürlərin və proseslərin qarşılıqlı əlaqələrini, iqtisadi göstəricilər arasındakı asılılıq münasibətlərini həmişə xətti reqressiya asılılıqları kimi tədqiq etmək olmur. Çoxlu sayda iqtisadi asılılıqlar məzmunlarına nəzərən xətti asılı deyil. Ona görə də bu asılılıqların modelləşdirilməsi qeyri-xətti reqressiya modellərinə əsaslanır. Asılılığın riyazi formasının seçilməsi tədqiq olunan obyektin iqtisadi məzmununun təhlilinə əsaslanır. Məsələn, məhsul buraxılışı həcmi ilə əsas istehsal faktorları (əmək və kapital faktorları) arasında əlaqə (Kobb-Duqlas istehsal funksiyası), mala və ya xidmətə tələbat ilə qiymət və ailənin adambaşına gəliri (tələbat funksiyası) arasındakı əlaqə qeyri-xəttidir.

Qeyri-xətti modellərin parametrlərinin qiymətləndirilməsində iki yanaşmadan istifadə olunur. Birinci yanaşma modelin xəttiləşdirilməsinə əsaslanır və mahiyyəti ondan ibarətdir ki, uyğun çevirmələrlə ilkin dəyişənlər arasındakı aslılıq yeni dəyişənlər arasındakı xətti asılılığa gətirilir. Əgər 1-ci yanaşmanın tətbiqi yeni xətti reqressiyaya gətirmirsə, onda ilkin dəyişənlər əsasında qeyri-xətti optimallaşdırma üsullarından istifadə olunur.

§4.1. Qeyri-xətti reqressiya modellərinin xəttiləşdirilməsi

Qeyri-xətti reqressiya modellərinin xəttiləşdirilməsi prosesi həm asılılıq dəyişənlərinə, həm də parametrlərə nəzərən qeyri-xətti modellərə tətbiq edilə bilər. Bu proses dəyişənlərin əvəz olunması, tənliyin hər iki tərəfindən loqarifm alınması, kombnasıyalı yanaşmalara əsasalanır.

§4.1.1. Dəyişənlərin əvəz olunması üsulu

Bu üsulun tətbiqində qeyri - xətti modelin izahedici dəyişənlərini əvəz etmə ilə yeni model almaq olar ki, onun izahedici dəyişənləri xətti olur. Polinomial

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k + \varepsilon \qquad (4.1)$$

modelini $x^j = x_j,\ j = \overline{1,k}$ əvəzləməsi ilə

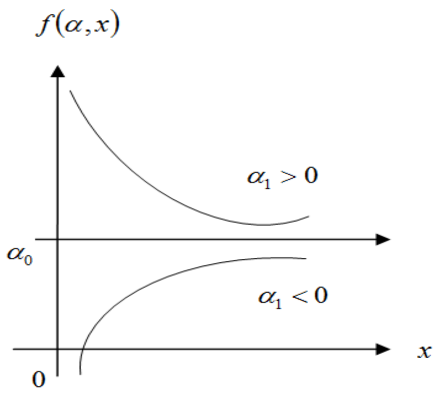
$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + \varepsilon \qquad (4.2)$$

çoxdəyişənli xətti reqressiya modelinə gətirmək olar. Bu modellərdən ən çox istifadə olunanları kvadratik və kubik parabolalar modelləridir. Polinomların dərəcələri atrdıqca reqressiya əyrilərinin əyilmə nöqtələri çoxalır və bunun nəticəsində endogen faktorun qiymətləri dəstinin bircinsliyi azalır.

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x} + \varepsilon \qquad (4.3)$$

hiperbolik tipli reqressiya əyrisi iki asimptotla xarakterizə olunur:

$\tilde{x} = \frac{1}{x}$ əvəzləməsi ilə (4.3) -lə ifadə olunan model $y = \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{x} + \varepsilon$ yeni modelinə çevrilir. Uyğun olaraq ƏKKÜ-ilə $\alpha_0,\ \alpha_1$ parametrlərinin qiymətləndirilməsində



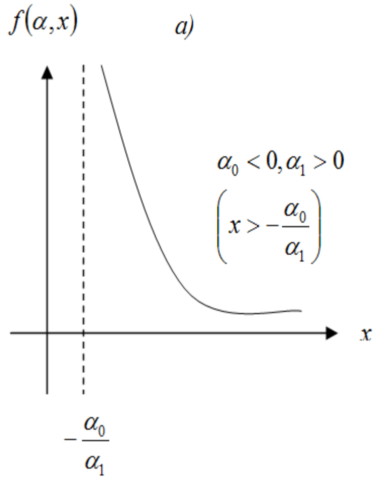
X matrisinin ikinci sütunu $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$ ədədlərindən formalaşır. Bu model asılı olmayan dəyişənin qiyməti qeyri-məhdud artdıqda nəticə faktorunun qiymətlərinin sonlu limitə yaxınlaşması hallarında tətbiq olunur. $\alpha_1 > 0$ olduqda əks asılılıq olur ki, $x \to \infty$ olduqda asılılıq aşağı asimptotla (y-in minimal limit qiyməti ilə) xarakterizə olunur. $\alpha_1 < 0$ olduqda isə, $x \to \infty$ olduqda y maksimal limit həddinə yaxınlaşır. Model, məsələn, materiallar və enerjinin nisbi sərfi ilə məhsul buraxılışı həcmi arasındakı asılılığı təsvir edə bilər (loqistikada anbarlarda mal dövriyyəsi məsələsi [37, səh. 64-66] təsvir olunmuşdur).

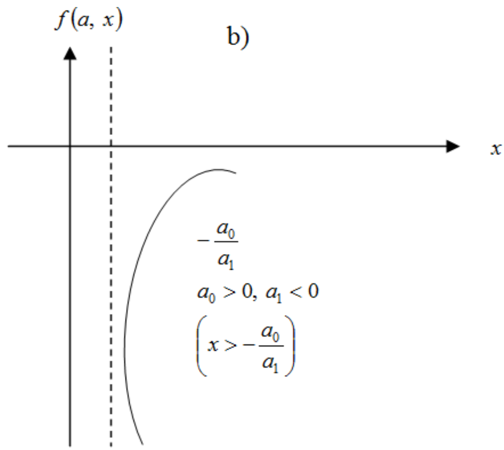
Bərabər tərəfli hiperbolaya nümunə olaraq klassik Filips əyrisini qeyd etmək olar ki, bu əyri işsizlik norması ilə əmək haqqının artımı (faizlərlə) arasındakı qeyri-xətti asılılığı təsvir edə bilər.

Əgər x, y dəyişənləri və təsadüfi reqressiya qalıqları arasındakı statistik asılılıq

$$y = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon}, \quad \left\{-\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < x < \infty\right\} \tag{4.4}$$

formasındadırsa,onda $y' = \frac{1}{y}$ əvəz etməklə yeni $y' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon$ xətti modeli alınır ki, onun α_0, α_1 parametrlərinin ƏKKÜ -ilə qiymətləndirilməsində asılı dəyişənin qiymətləri olaraq $y' = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, ..., \frac{1}{y_n}\right)$ vektorundan istifadə etmək lazımdır.



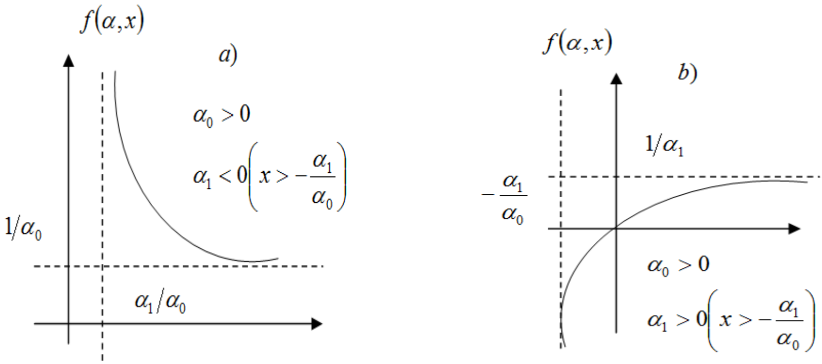


Əgər reqressiya modelinin forması

$$y = \frac{1}{\alpha_0 x + \alpha_1 + \varepsilon x}, \quad \left\{ -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < x < \infty \right\} \tag{4.5}$$

kimi təsvir olunursa, onda $y' = \frac{1}{y}$, $x' = \frac{1}{x}$ əvəzləməsi ilə yeni

$y' = \alpha_0 + \alpha_1 x' + \varepsilon$ modeli alınır $\alpha_0,\ \alpha_1$ qiymətləndirilməsinin



hesablanmasında $x_i' = \dfrac{1}{x_i}$ $y_i' = \dfrac{1}{y_i}$, $i = \overline{1,n}$ qiymətlərindən istifadə olunur.

Qeyd edək ki, (4.3) reqressiya modeli $\alpha_1 < 0$ olduqda və (4.5) modeli isə, $\alpha_0 > 0,\ \ \alpha_1 > 0\ \left(x > -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)$ olduqda müəyyən hallarda Engel əyrisinin (bax. [4, səh.44-47]) qurulmasında tətbiq oluna bilər ki, bu əyri müəyyən mala və ya xidmət növünə olan tələbatla istehlakçının gəlirləri arasında asılılığı təsvir edir.

$y = \dfrac{\alpha_0 x}{x + \alpha_1}$ funksiyası da $y' = \dfrac{1}{y}$, $x' = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{\alpha_0} = \alpha_0',\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} = \alpha_1'$ əvəzləmələri ilə $y' = \alpha_0' + \alpha_1' x'$ xətti halına gətirilə bilər.

§4.1.2. Yarımloqarifmik modellər

Bu modellər əsasən

$$\ln y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon \text{ və } y = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x + \varepsilon \qquad (4.6)$$

formasında verilir. Onlar hər hansı iqtisadi göstəricinin artım tempi və ya nisbi artım tempinin müəyyənləşdirilməsində tətbiq edilir. Məsələn, banka qoyulmuş vəsaitlərin ilkin qoyuluşlara və faiz dərəcələrinə nəzərən təhlilində, istehsal həcminin nisbi artımı ilə istehsal resuraslarının nisbi artımı arasında əlaqənin təhlilində, büdcə kəsirinin ÜDM-in nisbi artımının asılılığının təhlilində, infilyasiyanın artım tempinin pul kütləsinin həcmindən asılılığının tədqiqində bu modellərdən istifadə oluna bilər. (4.6)-da 1-ci model $y' = \ln y$ əvəzləməsi ilə xətti model halına salınır. Modeldə α_1 əmsalı y dəyişəninin x dəyişəninə nəzərən nisbi artım tempini göstərir. Çünki

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{dy/y}{dx} \qquad (4.7)$$

(4.6) -da 2-ci model əsasən asılı olmayan faktorun nisbi dəyişməsinin asılı dəyişənin qiymətinin mütləq dəyişməsinə necə təsir etməsini tədqiq olunmasında istifadə olunur. Məsələn, $y =$ ÜMM (ümummilli məhsul), $x = M$ (pul kütləsi) arasındakı asılılıq $y' = \alpha_0 + \alpha_1 \ln M + \varepsilon$ modeli ilə verilə bilər. Buradan alınır ki, pul kütləsinin 1% artımı ÜMM-in orta qiymətinin $0{,}01\alpha_1$ qədər artımına səbəb olur. Model $x' = \ln x$ əvəzləməsi ilə xətti hala qətirilir. Yeni alınmış modellərin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsi [4, səh.23]-də verilmişdir.

§4.1.3. Multiplikativ modellər

Ekonometrik tədqiqtlarda $y=\alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \cdot \varepsilon$ formalı modellər geniş istifadə olunur. Bərabərliyin hər iki tərəfini loqarifmləyib, $y' = \ln y,\ x_j' = \ln x_j,\ \varepsilon' = \ln \varepsilon\ (j=\overline{1,k})$ $\alpha_0' = \ln \alpha_0$ işarə etməklə $y',\ x_j'$ və ε' nəzərən $y' = \alpha_0' + \alpha_1 x_1' + \ldots + \alpha_k x_k' + \varepsilon'$ modelini almaq olar. $\alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_k'$ parametrlərinin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsində y' - sütun vektoru və X' matrisi ilkin $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, y_i),\ i=\overline{1,n}$ verilənləri vasitəsilə $y' = (\ln y_1, \ln y_2, \ldots, \ln y_n)'$ kimi, X' matrisinin j-cu sütunu isə, $(\ln x_{1j}, \ln x_{2j}, \ldots, \ln x_{nj})',\ j=\overline{1,k}$ (X' - matrisinin 1-ci sütunu vahidlərdir) ilə təyin olunur.

Əgər üstlü funksiya istehsal həcminin istehsal faktorlarından asılılığını ifadə edirsə, onda bu asılılığı

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} \varepsilon \tag{4.8}$$

düsturu ilə təsvir etmək olar. Burada A- elmi texniki tərəqqini ifadə edən sabit, K -kapital faktorunu, L-əmək resursları faktorunu göstərir α və β əmsalları uyğun olaraq K və L-ə nəzərən xüsusi elastiklik əmsallarıdır. (4.8)-i $\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}}{L^{\alpha}}\varepsilon,\ \beta = 1-\alpha$ kimi göstərməklə $\frac{Y}{L}$ əmək məhsuldarlığının $\frac{K}{L}$ kapital silahlandırılmasından asılılığı alınır. Onun hər iki tərəfini loqarifmləməklə

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right)_i = \ln A + \alpha \ln\left(\frac{K}{L}\right)_i + \ln \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n} \qquad (4.9)$$

xətti modeli alınır.

§4.1.4. Eksponensial asılılıqlar

Kifayət qədər geniş sinif iqtisadi göstəricilər zamana və ya asılı olmayan dəyişənə nəzərən sabit artım tempi ilə xarakterizə olunur. Belə asılılıqlar

$$y = \alpha_0 e^{\alpha_1 x + \varepsilon} \qquad (4.10)$$

modeli ilə təsvir oluna bilər. $\varepsilon = 0$ qəbul etməklə $\frac{dy}{dx} = \alpha_0 \alpha_1 e^{\alpha_1 x} = \alpha_1 y$ düsturundan alınır ki, y-in zaman vahidində nisbi artımı (x- faktorunun vahid miqdarına nəzərən) $\frac{dy}{y} = \alpha_1$ ifadəsi ilə müəyyən olur. $y' = \ln y$ əvəzləməsi ilə $y' = \alpha_0' + \alpha_1 x + \varepsilon$ (burada $\alpha_0' = \ln \alpha_0$) xətti modelini almaq olar. $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ müşahidələrindən $(\ln y_1, \ln y_2, \ldots, \ln y_n)' = y'$ vektor-sütununun formalaşdırmaqla ƏKKÜ-ilə $\hat{\alpha}_0', \hat{\alpha}_1'$ qiymətləndirməsini və nəticədə $\alpha_0 = e^{\alpha_0'}$ qiymətləndirilməsi ilə ilkin tənliyin α_0 parametrini qiymətləndirmək olar.

§4.1.5. Kombinasiyalı üsul

Tutaq ki, statistik asılılıq

$$y = \alpha_0 e^{\frac{\alpha_1}{x} + \varepsilon} \qquad (4.11)$$

modeli ilə təsvir olunur. $y' = \ln y,\ x' = \dfrac{1}{x}$ əvəzləməsi ilə yeni xətti model alınır: $y' = \alpha_0' + \alpha_1 x' + \varepsilon$ ($\alpha_0' = \ln \alpha_0$.) Yeni modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsində ilkin $(x_i, y_i),\ i = \overline{1,n}$ verilənləri ilə ifadə olunan

$$y' = (\ln y_1, \ln y_2, \ldots, \ln y_n)', \qquad X' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ 1/x_1 & \ldots & 1/x_n \end{pmatrix}'$$

matrislərindən istifadə olunur.

§4.1.6. Loqistik əyri

İqtisadi artım əyriləri sinfinə aid olan loqistik əyrilərin analitik ifadələri [4, səh 47-52]-də verilmişdir. Bu sinifdən olan xüsusi şəkilli reqressiya funksiyası üçün aşağıdakı ekonometrik modelə baxaq:

$$y = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-x} + \varepsilon}, \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{4.12}$$

$f(x, \alpha) = \dfrac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-x}}$ loqistik əyrisi $y = 0$ və $y = \dfrac{1}{\alpha_0}$ horizontal asimptotuna və $x_0 = \ln\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}\right),\ y_0 = \dfrac{1}{2\alpha_0}$ əyilmə nöqtəsinə malikdir. Bu asılılığın xəttiləşdirilməsi $y' = \dfrac{1}{y}$ və $x' = e^{-x}$ əvəzləməsi ilə olur. ƏKKÜ-da istifadə olunan Y' sütun vektoru və X' matrisi ilkin $(x_i, y_i),\ i = \overline{1,n}$ verilənləri ilə

$$Y' = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \ldots, \frac{1}{y_n}\right)', \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ e^{-x_1} & \ldots & e^{-x_n} \end{pmatrix}'$$ kimi ifadə olunur.

§4.1.7. Loqxətti model

$y_t = y_0(1+r)^t \varepsilon$ formalı modellər maliyyə və bank analizində geniş istifadə olunur. Burada y_0 y dəyişəninin başlanğıc qiyməti (Məsələn, banka ilkin əmanət qoyuluşu); y_t y kəmiyyətinin t anındakı qiyməti; r y kəmiyyətinin mürəkkəb artım tempidir (faiz dərəcəsi). Bu model $\ln y_t = \ln y_0 + t\ln(1+r) + \ln \varepsilon_t$ loqarifmləməsindən sonra $\ln y_0 = \alpha_0$, $\ln(1+r) = \alpha_1$ və $\ln \varepsilon_t = \varepsilon_{0t}$ əvəzləməsi ilə $\ln y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_{0t}$ yarımloqorifmik halına gətirilir.

Qeyri - xəttilik reqressiya parametrlərinə nəzərən olduqda onların qiymətləndirilməsində ƏKKÜ-nun tətbiqi bir sıra cətinliklər yaradır. Bu tip modellərə

$$y_i = \alpha_0\, x_{i1}^{\alpha_1} x_{i2}^{\alpha_2} \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{4.13}$$

$$y_i = e^{\alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2}} \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n} \tag{4.14}$$

və digər modelləri nümunə göstərmək olar. Bir sıra hallarda modellər xətti hala salınır. (4.13), (4.14) modelləri loqarifmləmə ilə xətti hala gətirilə bilər. Məsələn, (4.13) üçün yeni alınmış model

$$\ln y_i = \ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln\ x_{i1} + \alpha_2 \ln\ x_{i2} + \ln \varepsilon_i,\ \ i = \overline{1,n}\,. \tag{4.15}$$

Bu modelə xətti reqressiyanın adi üsulları tətbiq oluna bilər. Lakin normal reqressiya üçün tətbiq olunan əhəmiyyətlilik meyarları və parametrlərin interval qiymətləndirmələri üçün $\ln \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n)$ olmalıdır. Burada 0 - n ölçülü sıfır vektor, E_n-isə n-ölçülü vahid matrisdir.

Əgər $y_i = \alpha_0\, x_{i1}^{\alpha_1} x_{i2}^{\alpha_2} + \varepsilon_i,\ \ i = \overline{1,n}$ model formasındadırsa, onu xətti hala salmaq olmur.

§4.2. Qeyri-xətti reqressiya modellərinin parametrlərinin qeyri-xətti optimallaşdırma metodları ilə qiymətləndirilməsi

Tutaq ki, (1.1) reqressiya modelində $f(\alpha, x)$ reqressiya funksiyası qeyri-xətti funksiyadır. Bu halda $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)$ parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (f(\alpha, x_i) - y_i)^2 \tag{4.16}$$

funksionalına baxılır.

Q funksionalının ədədi minimallaşdırılmasında Nyuton-Rafson üsulundan (bax. [20]) istifadə etmək olar. Üsulun mahiyyətinə görə $\alpha^0 = (\alpha_1^0,...,\alpha_k^0)$ başlanğıc yaxınlaşması seçilir və aşağıdakı iterasiya prosesi qurulur:

$$\alpha^{t+1} = \alpha^t + h_t\left(Q^H(\alpha^t)^{-1} \nabla Q(\alpha^t)\right), \tag{4.17}$$

burada $\nabla Q(\alpha^t)$ - Q funksionalının α^t nöqtəsində qradiyenti, $Q^H(\alpha^t)$ hessian (törəmələrdən ibarət matris), h_t - addımların sayıdır (sadə halda addımlar vahidə bərabər qəbul olunur).

Qradiyentin komponentləri

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_j} = 2\sum_{i=1}^{n} (f(\alpha, x_i) - y_i) \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\alpha, x_i) \tag{4.18}$$

dusturu ilə, hessianın komponentlər isə,

$$\frac{\partial^2 Q(\alpha)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_\ell} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\alpha, x_i) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i) - 2\sum_{i=1}^{n} (f(\alpha, x_i) - y_i) \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_j \partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i), \quad j = \overline{1,k};\ \ell = \overline{1,k} \tag{4.19}$$

düsturu ilə hesablanır. Xəttiləşdirmə prosesində (4.19)-un sağ tərəfində 2-ci hədd sıfra bərabər qəbul olunur.

$f(x,\alpha)$ funksiyası verildiryindən, qradiyent və hessian ədədi olaraq asan hesablanır. Əgər bu funksiya kifayət qədər hamardırsa (məsələn, 2-ci tərtib kəsilməz differensiallanırsa), onda onu α^t vektorunun carı qiyməti ətrafında xəttiləşdirmək olar:

$$f(\alpha, x_i) = f(\alpha^t, x_i) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\alpha_j, x_i)}{\partial \alpha_j} (\alpha_j - \alpha^t). \tag{4.20}$$

Hessiyanda f-i onun xəttiləşdirilmış forması ilə əvəz edək. Bu o deməkdir ki, hessianda 2-ci hədd sıfır hesab edilir. Onda $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_j \partial \alpha_\ell}(\alpha, x_i)$ ikinci tərtib törəmələrinin hesablanmasına ehtiyac qalmır. Belə yanaşma Nyuton - Qauss yanaşmasıdır. $F_t = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\alpha^t, x_i) \right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,k}}$ matris işarələməsini qəbul edək. Bu matris t-ci iterasiyada birinci tərtib törəmələrdən ibarət $n \times k$ tərtibli matrisdir. Həm də, $f_t = \left(f(\alpha^t, x_i) \right)_{i=\overline{1,n}}$ -ilə t-ci iterasiyada approksimasiya edən funksiyanın qiymətini işarə edək. Onda Nyuton-Qauss üsulunun matris yazılışında t-ci iterasiya düsturu aşağıdakı formada verilir:

$$\alpha^{t+1} = \alpha^t - h_t \underbrace{(F_t' F_t)^{-1} F_t' (f^t - y)}_{\delta}. \tag{4.21}$$

Sağ tərəfdəki 2-ci hədd standart çoxölçülü reqressiya tənliyində qiymətləndirmədir. Bu qiymətləndirmə $\left\| F_t \delta - (f^t - y) \right\|^2 \to \min$ məqsəd funksiyasının minimallaşdırılması ilə olur. Beləliklə, Nyuton -Qauss üsulu ilə qeyri-xətti reqressiya xətti reqressiya məsələləri ardıcıllığına gətirilir.

Yuxarıda qeyd olunan alqoritmin reallaşmasına aşağıdakı nümunədə baxaq.

$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad \alpha + \beta = 1,$ Kobb-Duqlas istehsal funksiyası üçün $\frac{Y}{L} = U$; $\frac{K}{L} = W$ işarə etməklə $U = AW^{\alpha}$ və ümumi halda $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ istehsal funksiyasına baxaq. 1-ci hal üçün (4.16) düsturu

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - AW_i^{\alpha}\right)^2 \to \min$$

2-ci hal üçün isə

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - AK_i^{\alpha}L_i^{\beta}\right)^2 \to \min$$

minimallaşdırma məsələsi olur. Alqoritmin əsas elementləri uyğun Q_1, Q_2 funksiyaları üşün qradiyent funksiyaları, Hesse matrisidir. Tutaq ki, $q_i = \left(U_i - AW_i^{\alpha}\right)$. Onda $Q_i = \sum_{i=1}^{n} q_i^2$. Onun qradiyent funksiyası $\nabla Q_1 = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial A}, \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}\right)'$ (burada $\frac{\partial Q_1}{\partial A} = -2\sum_{i=1}^{n} q_i W_i^{\alpha}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n} q_i A W_i^{\alpha} \ln W$), Hesse matrisi isə

$$H\left(Q_1\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial A \partial \alpha} \\ \\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial A \partial \alpha} & \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \alpha^2} \end{pmatrix}',$$

burada

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial A^2} = 2\sum_{i=1}^{n} W_i^{2\alpha},\ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial A \partial \alpha} = 2\left(A^2 \sum_{i=1}^{n} W_i^{2\alpha} \ln W_i - \sum_{i=1}^{n} q_i W_i^{\alpha} \ln W_i \right),$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \alpha^2} = 2A\left(A\sum_{i=1}^{n} (\ln W)^2 W_i^{2\alpha} - \sum_{i=1}^{n} (\ln W_i)^2 q_i W_i \right).$$

2-ci hal üçün $Y_i - AK_i^{\alpha} L_i^{\beta} = g_i$ işarə etməklə $Q_2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \to \min$ minimalladırma məsələsinə baxılır. Bu zaman qradiyent şərti $\nabla Q_2 = \left(\frac{\partial Q_2}{\partial A}, \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} \right)'$, onun komponentləri isə,

$$\frac{\partial Q_2}{\partial A} = -2\sum_{i=1}^{n} q_i \Omega_i,\ \left(\Omega_i = K_i^{\alpha} L_i^{\beta}\right),\ \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n} q_i A \Omega_i \ln K_i,$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{n} q_i A \Omega_i \ln L_i$$

ifadələridir.

Hesse matrisi $H(Q_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial A \partial \alpha} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial A \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \alpha \partial A} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 Q_2}{\partial A \partial \beta} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}$, onun elementləri

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial A^2} = 2\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial A \partial \alpha} = 2\left(A\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^2 \ln K_i - \sum_{i=1}^{n} g_i \Omega_i \ln K_i \right),$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial A \partial \beta} = 2\left(A\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^2 \ln L_i - \sum_{i=1}^{n} g_i \Omega_i \ln L_i \right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \alpha^2} = 2A\left(A\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^2 (\ln K_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} g_i \Omega_i^2 (\ln K_i)^2 \right),$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \alpha \partial \beta} = 2A\left(A\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^2 \ln L_i \ln K_i - \sum_{i=1}^{n} g_i \Omega_i \ln K_i \ln L_i \right),$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial \beta^2} = 2A\left(A\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^2 (\ln L_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} g_i \Omega_i^2 (\ln L_i)^2 \right).$$

Qeyd edək ki, qeyri-xətti optimallaşdırma üsulları ilə qeyri - xətti reqressiya modellərinin parametrlərinin qiymətləndirilməsində üsulların keyfiyyətini $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)$ meyletmələrinin mütləq qiymətinin orta kəmiyyətinə və ya $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{y}_i}$ meyletmənin nisbi qiymətinin orta kəmiyyətinə nəzərən müəyyənləşdirmək olar. Burada y_i y dəyişəninin i-ci müşahidədə aldığı qiymət, $\hat{y}_i$ - onun reqressiya tənliyinə nəzərən alınmış qiymətləndirilməsidir.

Yuxarıdakı ədədi hesablama əməliyyatları və qiymətləndirmələrinin keyfiyyətinin yoxlanılması müasir proqram paketlərindən istifadə etməklə reallaşdırılır (Stat, Satatistika, Statqrafics, EXCEL, Eviews və s.).

Dördüncü fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

4.1. Hansı qeyri-xətti modelləri bilirsiniz?
4.2. Dəyişənlərə və parametrlərə nəzərən qeyri-xətti modellərə dair nümunələr göstərin.
4.3. Qeyri-xətti modelləri xəttiləşdirmək üçün hansı çevirmələrdən istifadə olunur?
4.4. Faktorların əlaqə istiqamətində dəyişiklik müşahidə olunmadıqda, 2-ci dərəcəli parabola hansı qeyri-xətti funksiya ilə əvəz oluna bilər?
4.5. ƏKKÜ-nun dəyişənlərə və parametrlərə nəzərən qeyri-xətti modellərə tətbiqində fərq nədən ibarətdir?
4.6. Müxtəlif növ reqressiya modelləri üçün elastiklik əmsalları necə müəyyənləşdirilir?
4.7. Loqarifmik və üstlü reqressiya modellərinin istifadəsinə dair iqtisadi nümunələr göstərin. Belə modellərdə reqressiya əmsallarının iqtisadi mənalarını xarakterizə edin.
4.8. Tərs, loqistik modellərin istifadəsinə dair nümunələr göstərin və parametrlərin iqtisadi interpretasiyasını verin.
4.9. İqtisadi artım modellərinə dair nümunələr göstərin və parametrlərin iqtisadi interpretasiyasını verin.
4.10. İstehsal funksiyalarında reqressiya əmsallarının cəmi hansı iqtisadi mənanı xarakterizə edir. Burada reqressiya əmsallarının cəminin vahiddən böyük olması necə iqtisadi interpretasiya olunur?

Testlər

4.1. İzahedici dəyişənlərə nəzərən qeyri-xətti,parametrlərə nəzərən isə, xətti modelləri göstərin

a) $y=\alpha_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x^2+\varepsilon$; b) $y=\alpha_0 x_1^{\alpha_1}\cdot\varepsilon$;

c) $y=\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{x}+\varepsilon$; d) $y=\alpha_0 a_1^x \varepsilon_1$.

4.2. $y=\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{x}+\varepsilon$ modeli

a) əvəzetmə ilə çoxdəyişənli reqressiya modelinə gətirilir;
b) əvəzləmə ilə cüt xətti reqressiya modelinə gətirilir;
c) xətti modellər sinfinə aiddir;
d) xətti modellərə gətirilir.

4.3. $\hat{y} = 9{,}32\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{-0{,}488}$ modelində izahedici faktor 1% dəyişdikdə $\hat{y}$ ortalama
a) 0, 488% artır; b) 0, 488% öz azalır; c) öz ölçü vahidində 0,488 artır; d) öz ölçü vahidində 0,488 vahid azalır.

4.4. Qurulmuş $\hat{y} = -1{,}2x_1^{6{,}57}x_2^{-0{,}21}x_3^{7{,}8}$ reqressiya modeli göstərir ki,
a) x_1 faktorunun ölçü vahidində 1 vahid artım y faktorunun ölçü vahidində 6,57 vahid artıma səbəb olur;
b) x_1 faktorunun ölçü vahidində 1 vahid artım y faktorunun ölçü vahidində 6,57 vahid azalmaya səbəb olur;
c) x_1 faktorunun ölçü vahidində 1% artım y faktorunun ölçü vahidində 6,57% artıma səbəb olur;
d) x_1 faktorunun ölçü vahidində 1% artım faktorunun ölçü vahidində 6,57% azalmaya səbəb olur.

4.5. $y_i = \alpha \exp(-\beta x_i) + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}$ modeli cəbri çevirmələrlə parametrə nəzərən hansı xətti reqressiya modelinə gətirilə bilər:
a) cüt xətti reqressiya modelinə;
b) ikidəyişənli xətti reqressiya modelinə;
c) xətti reqressiyaya gətirilə bilməz;
d) loqarifmik xətti reqressiya modelinə.

4.6. $y_i = \dfrac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{x_i} + \varepsilon},\ i = \overline{1,n}$ modeli hansı modellər sinfinə aiddir?
a) loqistik; b) loq xətti; c) multiplikativ; d) loqarifmik.

4.7. $Y_i = AK^{\alpha}L^{\beta}\varepsilon_i, \quad i=\overline{1,n}$ istehsal funksiyası modeli hansı modellər sinfinə aiddir?
a) loqistik; b) multiplikativ; c) üstlü; d) loqarifmik.

4.8. Tutaq ki, $y_x = \alpha_0 x^{\alpha_1}$ reqressiya funksiyasında y dəyişəni illik hər hansı məhsula olan istehlak xərclərini, x dəyişəni isə, illik gəlirləri göstərirsə və empirik reqressiya funksiyası $y_x = 5{,}11x^{0,2}$ düsturu ilə ifadə olunursa, onda 0,2 əmsalı necə interpretasiya olunur?
a) illik gəlirlərin 1% artması, həmin məhsula olan xərclərin
   ortalama 0,42% artımına səbəb olur;
b) illik gəlirlər 1 ölçü vahidi artarsa, həmin məhsula olan
   xərclərin ortalama artımı 0,2 qədər olur;
c) illik gəlirlər 1 ölçü vahidi artarsa, həmin məhsula olan xərclər
   0,42% artar;
d) illik gəlirlər 1% artarsa, həmin məhsula olan xərclər 0,42 vahid
   artır.

4.9. Tutaq ki, empirik verilənlər əsasında hər hansı məhsula olan tələbatın həcmi ilə zaman anları arasında asılılıq $\hat{y}_t = 3{,}5e^{0,012t}$ reqressiya funksiyası ilə verilir. Əmsallar necə interpretasiya olunur?
a) $t=0$ anında məhsula tələbatın həcmi 3,5 (şərti vahid) olmuş,
   seçimi period ərzində məhsula tələbat hər bir diskret zaman
   anında orta hesabla 1,2% artmışdır;
b) $t=0$ anında məhsula tələbatın həcmi 3,5 (şərti vahid) olmuş,
   seçimi period ərzində məhsula tələbat hər bir diskret zaman
   anında orta hesabla 0,012 şərti vahid qədər artmışdır;
c) $t=0$ anında məhsula tələbatın həcmi 3,5 (şərti vahid) olmuş,
   seçimi period ərzində məhsula tələbat hər bir diskret zaman
   anında $e^{0,012}$ şərti vahid qədər azalmışdır;
d) $t=0$ anında məhsula tələbatın həcmi 3,5 (şərti vahid) olmuş,
   seçimi period ərzində məhsula tələbat hər bir diskret zaman
   anında $e^{0,012}$ şərti vahid qədər artmışdır.

4.10. $y_i = \dfrac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i}$, $i = \overline{1, n}$ reqressiya modelində y faktorunun x faktoruna nəzərən elastiklik əmsalı hansı düsturla hesablanır?

a) $E_x(y) = \dfrac{-\alpha_1 x}{\alpha_0 + \alpha_1 x}$;

b) $E_x(y) = x \ln \alpha_1$;

c) $E_x(y) = \dfrac{\alpha_1 x}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon}$;

d) $E_x(y) = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1}{x}$.

Çalışmalar

Məsələ 4.1. Tutaq ki, x və y faktorlarının qiymətləri belə cədvəldə verilib

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	7	9	12	10	12		11	13	12

Bu asılılığın $y_i = \alpha_0 x_i^{\alpha 1} + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$ reqressiya asılılığı ilə ifadə olunduğunu fərz etməklə, α_0, α_1 parametrlərini və y-lə $\hat{y}_x$ arasındakı korrelyasiya əmsalını tapın.

Cavab: $\hat{y}_x = 5{,}11 x^{0,42}$, $\hat{\sigma} = 1{,}67$; $r(y, \hat{y}) = 0{,}88$.

Məsələ 4.2. $y = \dfrac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-x}}$ funksiyasını hansı əvəzləmələrlə $y' = \alpha_0' + \alpha_1' x'$ xətti halına gətirmək olar?

Cavab: $y' = \dfrac{1}{y}$; $x' = e^{-x}$; $\alpha_0' = \alpha_0$; $\alpha_1' = \alpha_1$.

Məsələ 4.3. $y = \dfrac{\alpha_0 x}{\alpha_1 + x}$ funksiyasını hansı əvəzləmələrlə $y' = \alpha_0' + \alpha_1' x'$ xətti halına gətirmək olar?

Cavab: $y' = \dfrac{1}{y}$; $x' = \dfrac{1}{x}$; $\alpha_0' = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}$; $\alpha_1' = \dfrac{1}{\alpha_0'}$.

Məsələ 4.4. $y_i = \alpha_0 \alpha_1^x \alpha_2 x^2$ reqressiya funksiyası üçün ƏKKÜ-nu tətbiq etməklə normal tənliklər sistemini yazın.

Cavab: $$\begin{cases} n \lg \alpha_0 + \lg \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \lg \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lg y_i \\ \lg \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \lg \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lg \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \lg y_i \\ \lg \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lg \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \lg \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lg y_i \end{cases}$$

Məsələ 4.5. Tutaq ki, müəyyən məhsula olan tələbat modeli əvəzedici məhsulların qiyməti nəzərə alınmaqla

$$y = 11{,}080 x_1^{-0{,}630} x_2^{0{,}345} x_3^{0{,}455}$$

formasındadır. Buarada x_1 məhsulun qiyməti, x_2 və x_3 uyğun olaraq onun əvəzedicilərinin qiymətidir. Modelin parametrlərinin interpretasiyasını verin.

Məsələ 4.6. Tutaq ki, x və y faktorlarının 11 müşahidədə aldıqları qiymətlər belə cədvəldə verilib

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	0,95	1,8	2,1	2,9	4,2	6	6,7	6,5	6,8	6,75	6,9

Faktorlar arasında əlaqənin reqressiya funksiyasının $y_x = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x$ olduğunu fərz etməklə, modelin əmsallarının qiymətləndirmələrini tapın.

Cavab: $\hat{\alpha}_0 = -0{,}057;\ \hat{\alpha}_1 = 2{,}9839$.

Məsələ 4.7. 4.6-cı məsələdəki cədvəl verilənləri üçün faktorlar arasında əlaqənin reqressiya funksiyasının $y = \alpha_0 x^{\alpha_1}$ olduğunu fərz etməklə, modelin əmsallarının qiymətləndirilməsini tapın.
Cavab: $y = 0{,}9353x^{0{,}9049}$.

Məsələ 4.8. Tuatq ki, x və y faktorlarının 7 müşahidədə aldıqları qiymətlər belə cədvəldə verilib:

x_i	45,1	59,0	57,2	61,8	58,8	47,2	55,2
y_i	68,8	61,2	59,9	56,7	55,0	54,3	49,3

Faktorlar arasındakı asılılığın reqressiya funksiyasını $y = \alpha_0 \alpha_1^x$ qəbul etməklə, modelin əmsallarını qiymətləndirin və korrelyasiya indeksini hesablayın.
Cavab: $y = 77{,}1(0{,}9947)^x$; $\rho_{xy} = 0{,}3589$ yəni faktorlar arasınada əlaqə zəifdir.

Məsələ 4.9. Tutaq ki, müəyyən ərzaq məhsuluna tələbatın ekonometrik modeli

$$\lg y = -1{,}25 - 0{,}858 \lg x_1 + 1{,}126 \lg x_2 + \varepsilon$$

formasındadır. Burada y adambaşına düşən ərzağın həcmi (kq), x_1 - onun qiyməti (p.v.), x_2 -adambaşına düşən gəlirdir (min p.v.). Tənliyin iqtisadi interpretasiyasını verin.

Məsələ 4.10. $y_i = \alpha_0 x_i^{\alpha_1} \varepsilon_i,\ \ i = \overline{1,n}$, modelini loqarifmləməklə xətti hala gətirib ƏKKÜ-nu tətbiq etmək üçün ε_i -lər hansı qanunla paylanmalıdır.

Cavab: ε_i -lər riyazi gözləməsi $M(\varepsilon_i) = e^{\sigma^2/2}$, dispersiyası

$D(\varepsilon_i) = e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$ olan loqnormal qanunla paylanmalıdır.

Məsələ 4.11.

x	2	3	5	5	7	8
y	5	3	3	2	2	1

cədvəl verilənlərinə nəzərən $y = \alpha_0 + \dfrac{\alpha_1}{x} + \varepsilon$ düsturundan α_0, α_1 əmsallarını qiymətləndirin.

Cavab: $\hat{\alpha}_0 = 0{,}43;\ \hat{\alpha}_1 = 8{,}94.$

Məsələ 4.12. Məsələ 4.11-in verilənlərinə əsasən $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \varepsilon$ düsturundan $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ əmsallarını qiymətləndirin.

Cavab: $\alpha_0 = 6{,}54;\ \alpha_1 = -1{,}11;\ \alpha_2 = 0{,}06$.

Məsələ 4.13.

x	1	2	2	3	4
y	1,61	1,78	1,92	1,90	2,06

cədvəl verilənlərinə əsasən

$$y_i = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-x_i} + \varepsilon}$$

loqistik modelində α_0, α_1 əmsallarını qiymətləndirin.

Cavab: $\hat{\alpha}_0 = 0{,}49;\ \hat{\alpha}_1 = 0{,}35.$

Məsələ 4.14.

K	2	3	5	5	7	9
L	4	6	7	7	9	4
y	34	53	81	81	113	97

cədvəl verilənlərinə əsasən $Y_i = AK^{\alpha}L^{\beta}(1+\varepsilon)$ Kobb-Duqlas istehsal funksiyası modelində $A,\ \alpha,\ \beta$ əmsallarını qiymətləndirin.

Cavab: $\hat{A} = 12;\ \hat{\alpha} = 0{,}69;\ \ \hat{\beta} = 0{,}41.$

Məsələ 4.15.

x	1	2	3
y	2	9	47

cədvəl verilənlərinə əsasən $y = \alpha_0 e^{\alpha_1 x} + \varepsilon$ modelində α_0, α_1 parametrlərini qiymətləndirin.

Cavab: $\hat{\alpha}_0 = 0,341$; $\hat{\alpha}_1 = 1,642$.

FƏSİL V

DƏYİŞƏN STRUKTURLU REQRESSİYA MODELLƏRİ. FİKTİV DƏYİŞƏNLƏR

Əvvəlki fəsillərdə baxdığımız reqressiya modellərində izahedici faktorlar olaraq kəmiyyət dəyişənləri (əmək mahsuldarlığı, məhsulun maya dəyəri, gəlir və s.) xarakterizə olunurdu. Lakin praktiki məsələlərdə iki və daha çox qradasiyalı keyfiyyət faktorlarının nəticə faktorlarına təsirinin tədqiqinə zərurət yaranır. Bu faktorlara, məsələn, cins (kişi, qadın), təhsil (ibtidai, orta, ali), mövsümü (qış, yaz, yay, payız) və s. faktorlarını nümunə göstərmək olar.

Keyfiyyət faktorları dəyişənlər arasındakı xətti və ya qeyri -xətti asılılığın strukturuna ciddi təsir göstərə bilər. Nəticədə reqressiya modelinin parametrlərinin sıçrayışlı dəyişmələri baş verə bilər. Bu zaman dəyişən strukturlu reqressiya modeli və ya qeyri-bircins verilənlərə nəzərən reqressiya modeli qurularaq təhlil olunmalıdır.

Məsələn, y əmək haqqının həcminin $x_1, x_2, ..., x_n$ kəmiyyət faktorlarından asılılığı ilə bərabər z_1 keyfiyyət faktorlarından (məsələn, işçinin cinsi) asılılığı öyrənildikdə hər bir keyfiyyət faktoru üçün ayrılıqda $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + ... + \alpha_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}$ reqressiya modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsini almaq olar, sonra isə nəticələrin müqayisəsi edilə bilər.

Lakin, xüsusi yanaşma ilə kəmiyyət faktorları ilə keyfiyyət faktorlarının nəticəyə təsirini eyni reqressiya modeli ilə vermək olar. Bu yanaşma modelə fiktiv dəyişənin daxil edilməsi ilə bağlıdır. Fiktiv dəyişənlər olaraq binar (bul) dəyişənləri daxil edilir ki, onun qiyməti ya "0", ya da "1" qəbul olunur (məsələn, bu dəyişənin kişi cinsi üçün qiyməti $z_1 = 1$, qadın cinsi üçün isə, $z_1 = 0$). Bu halda reqressiya modelini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \ldots + \alpha_k x_{ik} + \alpha_{11} z_{i1} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n} \quad , \qquad (5.1)$$

burada $z_{i1} = 1$ əgər i-ci işçi kişidir; $z_{i1} = 0$ əgər i-ci işçi qadindirsa.
(5.1) modelini qəbul etməklə nəzərdə tutulur ki, kişilər üçün orta əmək haqqı modelin digər parametrlərinin qiymətləri dəyişməz qaldıqda qadınların əmək haqqından $\alpha_{11} \cdot 1 = \alpha_{11}$ qədər çoxalır. $H_0 : \alpha_{11} = 0$ hipotezini yoxlamaqla əmək haqqının həcminə cins faktorunun təsirinin mühüm olması müəyyənləşdirilir.

§5.1. Fiktiv sürüşkən dəyişənli reqressiya modelləri

Reqressiya tənliyinin forması xətti funksiya qəbul edilən modelə baxaq. Faktorlar olaraq bir kəmiyyət dəyişən və bir fiktiv dəyişən götürək:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_{11} z_{11} + \varepsilon. \qquad (5.2)$$

Bu tənlikdən alınır ki, $z_{11} = 1$ olduqda y nəticə dəyişəni

$$y = (\alpha_0 + \alpha_{11}) + \alpha_1 x_1 + \varepsilon, \qquad (5.3)$$

$z_{11} = 0$ olduqda isə,

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \varepsilon. \qquad (5.4)$$

(5.3) və (5.4) tənliklərinin müqayisəsi göstərir ki, burada ancaq sərbəst həddlər fərqlidir. Qrafiki olaraq belə vəziyyət iki paralel düz xəttlə təsvir olunur. Kəmiyyət dəyişəni x_1-in əmsalı dəyişmədiyindən, bu faktorun qiymətinin dəyişkənliyi keyfiyyət dəyişəninin müxtəlif qiymətlərində nəticə faktoruna eyni təsirə malikdir. (5.2) tənliyində fiktiv dəyişənin qiyməti dəyişdikdə nəticə faktorunun qiyməti müəyyən orta qiymətlə dəyişir və bu dəyişkənlik kəmiyyət faktorunun qiymətindən asılı deyil. Belə dəyişənə həm də fiktiv sürüşkən dəyişən də deyilir. Onun qiymətinin dəyişməsi yeni paralel xəttə keçid deməkdir.

(5.2) tənliyinin çoxölçülü analoqu aşağıdakı modeldir:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{11} z_{11} + \alpha_{12} z_{12} + \ldots + \\ + \alpha_{21} z_{21} + \alpha_{22} z_{22} + \ldots + \alpha_{j1} z_{j1} + \alpha_{j2} z_{j2} + \ldots, \quad (5.5)$$

burada α_0 sərbəst hədd; $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ əmsalları $x_1, x_2,\ldots,x_k$ kəmiyyət faktorlarının yükləru, $\alpha_{11}, \alpha_{12},\ldots,$ əmsalları $z_{11}, z_{12},\ldots$ 1-ci növ keyfiyyət faktorunun əmsalları,..., α_{j1}, α_{j2} əmsalları isə j -cu keyfiyyət faktorunun yükləridir.

§5.2. Fiktiv maili dəyişənli reqressiya modelləri

Tutaq ki, reqressiya modelində kəmiyyət dəyişəninin əmsalı fiktiv dəyişənin qiymətindən asılıdır. Onda aşağıdakı bərabərlikləri yazmaq olar:

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_{11} x_1 \text{, əgər } z = 0 \text{ olarsa;} \quad (5.6)$$

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_{12} x_1 \text{, əgər } z = 1 \text{ olarsa;} \quad (5.7)$$

$$\alpha_{11} \neq \alpha_{12}. \quad (5.8)$$

Bu halda tədqiq olunan asılılıqda struktur dəyişikliyi baş verir. Reqressiya tənliyində onların nəzərə alınması üçün fiktiv dəyişəni kəmiyyət dəyişəninin əmsalına vuruq kimi daxil etmək lazımdır:

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_{111} x_1 z_{11}. \quad (5.9)$$

Burada α_{111} parametri həm x_1 həm də z_{11} dəyişənlərini birləşdirdiyindən üç indekslidir. Bu tənliyi $z_{11}=1$ və $z_{11}=0$ qiymətləri üçün yazaq:

$$z_{11}=0,\ \hat{y}=\alpha_0+\alpha_1 x_1,$$
$$z_{11}=1,\ \hat{y}=\alpha_0+\left(\alpha_1+\alpha_{111}\right)x_1.$$

Deməli, (5.7) modelində α_{12} əmsalı $\left(\alpha_1+\alpha_{111}\right)$-ə bərabərdir. Qrafiki olaraq (5.9) modeli müxtəlif bucaq əmsallı iki düz xətti əks etdirir ki, bu təsvir nəticənin kəmiyyət faktorundan asılılığını fiktiv dəyişənin müxtəlif qiymətlərində xarakterizə edir. Burada fiktiv dəyişən xarakterizə olunduğundan, onun modelə daxil olması düz xəttin bucaq əmsalını dəyişməyə imkan verir. Ona görə də belə fiktiv dəyişənlər fiktiv maili dəyişənlər kimi qəbul olunur. Uygun olaraq α_1 parametri kəmiyyət faktorunun bir qiymətində ($z_{11}=0$ olduğu halda) təsir gücü kimi, α_{111} parametri isə keyfiyyət dəyişəninin bir qiymətindən digər qiymətinə keçdikdə ($z_{11}=0$-dan $z_{11}=1$ qiymətinə keçdikdə) kəmiyyət faktorunun təsir güçünün ortalama dəyişməsi kimi interpretasiya olunur.

(5.9) modelinə ƏKKÜ-nun tətbiqi nəticəsində (3.7)-yə uyğun olaraq aşağıdakı normal tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} y_i = n\alpha_0+\alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}+\alpha_{111}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}z_{11i},\\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i}=\alpha_0\sum_{i=1}^{n} x_{1i}+\alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2+\alpha_{111}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 z_{11i},\\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i} z_{11i}=\alpha_0\sum_{i=1}^{n} x_{1i}z_{11i}+\alpha_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 z_{11i}+\alpha_{111}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 z_{11i}^2.\end{cases}\tag{5.10}$$

(5.10) sisteminin tənliyinin $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_{111}$ həlləri uyğun parametrlərin qiymətləndirmələri ola bilər. Onların statistik əhəmiyyətliliyi çoxdəyişənli reqressiya modellərində olduğu kimi, uyğun statistik meyarlarla yoxlanılır.

(5.9) modelinin çoxölçülü yazılışı (5.5) -ə uyğun formadadır:

$$\begin{aligned}\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{111} x_1 z_{11} + \alpha_{112} x_1 z_{12} + \ldots + \\ + \alpha_{1j1} x_1 z_{j1} + \alpha_{1j2} x_1 z_{j2} + \ldots + \alpha_{211} x_2 z_{11} + \alpha_{212} x_2 z_{12} + \ldots + \\ + \alpha_{2j1} x_2 z_{j1} + \alpha_{2j2} x_2 z_{j2} + \ldots + \alpha_{k11} x_k z_{11} + \alpha_{k12} x_k z_{12} + \ldots + \\ + \alpha_{kj1} x_k z_{j1} + \alpha_{kj2} x_k z_{j2} + \ldots,\end{aligned} \quad (5.11)$$

Xüsusi halda, (5.11) modelində ancaq fiktiv dəyişənləri ola bilər. Məsələn,

$$\hat{y} = \alpha_0 + \alpha_{11} z_{11} \quad (5.12)$$

sürüşkən fiktiv dəyişənli formadır (daha ətraflı, bax. [55, səh. 91-104]) .

§5.3. Struktur dəyişənlərinin Q.Çou testi ilə müəyyənləşdirilməsi

Bir sıra praktiki məsələlərdə asılı dəyişənlə izahedici dəyişənlərdən ibarət (x_i, y_i) cütlükləri iki seçimi verilənlərlə xarakterizə olunur. Məsələn, dəyişənlərin seçimi qiymətləri bir halda n_1 həcmli verilənlər, digər halda n_2 həcmli verilənlər ola bilər və hər iki seçim müxtəlif şərtlərlə verilə bilər. Bu zaman reqressiya mənada seçimlərin bircins olması məsələsinin aydınlaşdırılması zərurəti yaranır. Başqa sözlə, iki müxtəlif həcmli seçimləri birləşdirib y -in x -ə nəzərən vahid reqressiya modelinə baxılması məsələsi ortaya çıxır. Kifayət qədər böyük həcmli seçimlər üçün hər iki reqressiya parametrlərinin interval qiymətləndirməsini qurmaq olar və uyğun inam intervallarının üst-üstə düşməsi halında vahid reqressiya modelinə baxmaq olar. Əgər bu seçimlərdən heç olmazsa birinin həcmi kifayət qədər kıçıkdirsə, onda bu yanaşmanın imkanları kiçilir. Çünki bu halda hər hansı etibarlı qiymətləndirmə qurmaq olmur. Q.Çou testindən istifadə etməklə bu çətinliklər ciddi olaraq aradan qaldırılır. Hər bir seçimə nəzərən xətti reqressiya modelləri qurulur:

$$y_i = \alpha'_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha'_j x_{ij} + \varepsilon'_i, \quad i = \overline{1, n_1};$$
$$y_i = \alpha''_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha''_j x_{ij} + \varepsilon''_i, \quad i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2. \tag{5.13}$$

Yoxlanılan sıfırıncı hipotezin forması belədir: $H_0 : \alpha'_j = \alpha''_j, \; j = \overline{0, k}; \; D(\varepsilon') = D(\varepsilon'') = \sigma^2$, burada α'_j, α''_j iki modelin parametrləri, $\varepsilon', \varepsilon''$ -isə onların təsadüfi tərkibləridir.

Əgər H_0-cı hipotez doğrudursa, onda hər iki modeli birləşdirib $n = n_1 + n_2$ həcmli vahid reqressiya modelinə baxmaq olar:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \tag{5.14}$$

α -əhəmiyyətlilik səviyyəsində

$$F = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2 - \sum_{i=1}^{n_1} e_i^2 - \sum_{i=1}^{n_2} e_i^2 \right)(n - 2k - 2)}{\left(\sum_{i=1}^{n_1} e_i^2 + \sum_{i=1}^{n_2} e_i^2 \right)(k + 1)} > F_{\alpha, k+1, n-2k-2} \tag{5.15}$$

olarsa, onda H_0 hipotezi qəbul olunmur. Burada

$\sum_{i=1}^{n} e_i^2, \sum_{i=1}^{n_1} e_i^2, \sum_{i=1}^{n_2} e_i^2$ uyğun olaraq birləşdirilmiş, 1-ci və 2-ci seçimlər üçün qalıqların kvadratları cəmidir.

Q.Çou testi keyfiyyət faktorlarının təsiri də nəzərə alınmaqla modellərin qurulmasında da istifadə oluna bilər. Belə ki, əgər bu faktorun təsiri dərəcəsinə nəzərən müşahidələri qruplara ayırmaq mümükündürsə və tələb olunursa ki, vahid reqressiya modelindən istifadə olunsun, onda bu testi tətbiq etmək olar. Reqressiyanın qiymətləndirilməsində fiktiv dəyişənlərdən istifadə olunması daha informativ xarakterlidir. O mənada ki, bütün fiktiv dəyişənlərin asılı dəyişənə təsirinin ciddi olmasının qiymətləndirilməsi üçün t-kriterini tətbiq etmək olar.

§5.4. Parametrlərə nəzərən məhdudiyyətli ekonometrik modellər

Əvvəlki mövzularda öyrənilən reqressiya modellərində parametrlərin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsində onlar üzərinə heç bir şərt qoyulmurdu. Lakin real sosial - iqtisadi prosesləri təsvir edən bir sıra modellərdə parametrlər müəyyən məhdudiyyətlər çərçivəsində verilir. Məsələn, əksər hallarda müsbət qiymətlər alan parametrli modellərə baxıla bilər. Belə hallar, məsələn, məhsul buraxılışının investisiya qoyuluşundan asılılığının öyrənilməsində ortaya çıxa bilər. Modellərin qurulmasında fərz oluna bilər ki, əvvəlki zaman anlarındakı kapital qoyuluşları cari andakı məhsul buraxılışının həcminə ancaq müsbət təsir göstərir. Bu halda parametrlərin qiymətləndirilməsində nəzərə almaq lazımdır ki, reqressiya parametrləri ancaq müsbət qiymətlər almalıdır.

Bir sıra modellərdə ilkin məhdudiyyətlər olaraq parametrlərin müəyyən xətti bərabərlikləri ödəməsi şərti qoyula bilər. Məsələn, $Y = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ Kobb-Duqlas modelində faktorların genişlənməsində sabit məhsul artımı nəzərdə tutulursa, yəni $\alpha_1+\alpha_2=1,\ \alpha_i>0,\ i=\overline{1,2}$ şərtli modelin α_1,α_2 parametrlərinin qiymətləndirilməsinə baxılırsa, onda ƏKKÜ-nun tətbiqində bu şərt nəzərə alınmalıdır. Xüsusi hallarda, parametrlər üzərinə qoyulan şərtləri reqressiya modelində struktur dəyişikliyi edərkən nəzərə almaq olar. Məsələn, tutaq ki, 3 parametrli $y_i=\alpha_0+\alpha_1x_{1i}+\alpha_2x_{2i}+\alpha_3x_{3i}+\varepsilon_i,\ i=\overline{1,n}$ modelində $\alpha_1+\alpha_3=1$ şərti ödənilməlidir. $\alpha_1=1-\alpha_3$ yazmaqla $y=\alpha_0+(1-\alpha_3)x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\varepsilon$ münasibətindən $y-x_1=\alpha_0+\alpha_2x_2+\alpha_3(x_3-x_1)+\varepsilon$ bərabərliyi alınır. $y-x_1=y_1,\ x_3-x_1=x_4$ əvəz etməklə $y_1=\alpha_0+\alpha_2x_2+\alpha_3x_4+\varepsilon$ reqressiya modelinə ƏKKÜ-nu tətbiq etməklə $\alpha_0,\alpha_2,\alpha_3$ qiymətləndirilmələrini y_1,x_2,x_4-lə ifadə etmək olar. $\alpha_1=1-\alpha_3$ qiymətləndirilməsinin ifadəsi də müəyyənləşdirilir. Ümumi halda həmin şərtləri

$$R\alpha=r \tag{5.16}$$

kimi yazmaq olar. Burada r- məlum ℓ elementli sütun vektor $(\ell<k+1)$, R- isə məlum $\ell\times(k+1)$ tərtibli matrisdir. Onun elementləri (3.2) modelinin parametrləri arasındakı qarşılıqlı xətti asılılığın forması ilə müəyyən edilir. Məsələn, (3.2) modelində fərz edilirsə ki, $\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_3+1$ və $\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4=4$ onda r vektoru və R matrisi belə olur:

$$r=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix};\quad R=\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&1&3&2\end{pmatrix}.$$

Ümumi halda (5.16) məhdudiyyət şərtləri ilə verilmiş modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsində (3.5) kvadratik funksiyasının minimallaşdırılması məsələsinə

$$R\alpha=r,\qquad A\le\alpha_i\le B,\ \ i=\overline{0,k} \tag{5.17}$$

şərtləri ilə baxmaq olar. Burada Avə B uyğun olaraq α_i

parametrlərinin qiymətlər çoxluğunun aşağı və yuxarı sərhədləridir. (3.5), (5.17) məsələsində parametrlərin qiymətləndirmələri xətti məhdudiyyətli kvadratik məqsəd funksiyanın minimallaşdırmaqla müəyyənləşdirilir. Burada iterativ xarakterli hesablama prosedurlarından da istifadə etmək olar. Bununla belə, parametrlər üzərinə yalnız (5.16) şərti qoyulursa, ekonometrik modelin parametrlərinin qiymətləndirmələri analitik formada alına bilər. Belə həllin ƏKKÜ-ilə alınması alqoritminə ([45, səh.100-105]) baxaq. (3.4) modelinin (5.17) şərtləri ilə (3.5) məqsəd funksiyasını minimallaşdıran $\hat{\alpha} = \left(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_k\right)'$ qiymətləndirmələrinin analitik ifadələrini riyazi analiz kursundan məlum Laqranj vuruqları üsulundan istifadə etməklə almaq olar. Bu halda Laqranj funksiyasını aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$L(\hat{\alpha}, \lambda) = (Y - X\hat{\alpha})(Y - X\hat{\alpha}) - \lambda'(R\hat{\alpha} - r). \qquad (5.18)$$

Burada λ k sayda elementi olan Laqranj vuruqlarının sütun vektorudur və k məhdudiyyətlərin sayını göstərir.

$L(\hat{\alpha}, \lambda)$ funksiyasının $\hat{\alpha}$ -ya nəzərən minimallaşdırılması şərti

$$\frac{\partial L(\hat{\alpha}, \lambda)}{\partial \hat{\alpha}} = -2X'Y + 2(X'X)\hat{\alpha} - R'\lambda = 0 \qquad (5.19)$$

şərtidir. Buradan alırıq ki, $2(X'X)\hat{\alpha} = 2X'Y + R'\lambda$. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini soldan $R(X'X)^{-1}$-ə vursaq alarıq:

$$2R\hat{\alpha} = 2R(X'X)^{-1}X'Y + R(X'X)^{-1}R'\lambda. \qquad (5.20)$$

$(X'X)^{-1}X'Y = \tilde{\alpha}$ qiymətləndirməsi (3.2) modelinin parametrlərinin şərtsiz (3.8) qiymətləndirməsi olduğundan,

$$\lambda = 2\left(R\left(X'X\right)^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\tilde{\alpha}\right). \tag{5.21}$$

(5.21) -i (5.19)-da nəzərə alsaq

$$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + \left(X'X\right)^{-1}R'\left(R\left(X'X\right)^{-1}R'\right)^{-1}\left(r - R\tilde{\alpha}\right) \tag{5.22}$$

qiymətləndirməsini alarıq. Bu düstur göstərir ki, $R\alpha = r$ bərabərliyi $\tilde{\alpha}$ nöqtəsində nə qədər pozulursa, $\hat{\alpha}$ və $\tilde{\alpha}$ bir o qədər ciddi fərqlənirlər.

Şərtli modelin

$$\hat{e} = Y - X\hat{\alpha} \tag{5.23}$$

qiymətləndirilməsini müəyyənləşdirmək üçün onu belə yazaq:

$$\hat{e} = Y - X\tilde{\alpha} - X\left(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}\right) = e - X\left(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}\right). \tag{5.24}$$

Bu ifadə şərtli və şərtsiz modellərin qalıqlarının əlaqəsini verir. $X'e = e'X = 0$ olduğundan buradan alınır ki, şərtli modelin qalıqlarının kvadratları cəmi

$$\begin{aligned} \hat{e}'\tilde{e} &= \left(\left(e - X\right)\left(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}\right)\right)'\left(e - X\left(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}\right)\right) = \\ &= e'e + \left(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}\right)X'X\left(\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{5.25}$$

(5.22)-də $\tilde{\alpha}$ vektoru əvəzinə $\left(X'X\right)^{-1}X'\left(X\tilde{\alpha} + e\right)$ istifadəsini yazmaqla $\hat{\alpha}$ parametrinin qiymətləndirməsi üçün alırıq:

$$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + P\left(X'X\right)^{-1}X'e. \tag{5.26}$$

Burada P matrisi aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$P = E - \left(X'X\right)^{-1}R'\left(R\left(X'X\right)^{-1}R'\right)^{-1}R. \tag{5.27}$$

Beləliklə,

$$\Delta\hat{\alpha} = \hat{\alpha} - \tilde{\alpha} = P\left(X'X\right)^{-1}X'e \tag{5.28}$$

şərtli və şərtsiz modellərin parametrlərinin qiymətləndirmələri arasındakı xətanı verir.

$M\left[P\left(X'X\right)^{-1}X'e\right]=P\left(X'X\right)^{-1}X'M\left(e\right)=0$ olduğundan $M\left(\hat{\alpha}\right)=\tilde{\alpha}$ və

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\hat{\alpha})&=M\left[\left(\hat{\alpha}-\tilde{\alpha}\right)\left(\hat{\alpha}-\tilde{\alpha}\right)'\right]=\\&=M\left[P\left(X'X\right)^{-1}X'ee'X\left(X'X\right)^{-1}P'\right]=\sigma^2P\left(X'X\right)^{-1}P'.\end{aligned}\qquad(5.29)$$

$P\left(X'X\right)^{-1}P'=P\left(X'X\right)^{-1}$ olduğundan

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha})=\sigma^2P\left(X'X\right)^{-1}.\qquad(5.30)$$

Tətbiqi tədqiqatlarda ideal modelin σ_{ε}^2 dispersiyası onun $\sigma_{\tilde{e}}^2$ qiymətləndirməsi ilə əvəz olunur. Onun hesablanması düsturu belədir:

$$\sigma_{\tilde{e}}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{e}_i^2}{n-k-1}\ .\qquad(5.31)$$

(5.22) və (5.27) münasibətləri göstərir ki, (5.16) məhdudiyyət şətrtləri məhdudiyyətsiz reqressiya parametrlərinin qiymətləndirmələrində nə qədər ciddi pozulursa, həmin şərtlər bir o qədər əhəmiyyətli hesab olunur.

Əgər (5.16) şərti ödənirsə, onda

$$F=\frac{\left(\hat{e}'\hat{e}-\tilde{e}'\tilde{e}\right)/e}{\tilde{e}'\tilde{e}/\left(n-\left(k+1\right)\right)}\sim F_{\ell,n-k-1}\,.\qquad(5.32)$$

Əgər $F>F_{1-\alpha,\ell,n-k-1}$ olarsa, onda α -əhəmiyyətlilik səviyyəsində reqressiya əmsallarının sıfra bərabər olması haqda (sərbəst hədd α_0-dan başqa) H_0 hipotezi inkar olunur, $F<F_{1-\alpha,\ell,n-k-1}$ olduqda isə, H_0 hipotezi qəbul olunur. Sərbəstlik dərəcələri ilə korrektə olunmuş və şərtsiz reqressiya ilə müqayisədə şərtli reqressiyanın qalıqlarının kvadratları

cəminin nisbi artımına bərabər olan (5.32) Fişer statistikası onu göstərir ki, $\hat{e}'\hat{e}$ qalığı $\tilde{e}'\tilde{e}$ qalığından nə qədər çox olarsa, bir o qədər (5.16) məhdudiyyətləri qiymətləndirmədə əhəmiyyətlidir.

Beşinci fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

5.1. Hansı statistik verilənlərə qeyri bircins verilənlər deyilir?
5.2. Fiktiv dəyişənlər hansı xarakteristikalı dəyişənlərdir?
5.3. Fiktiv dəyişənlər hansı hallarda tətbiq olunur?
5.4. Fiktiv dəyişənlərin üstünlüyü nədədir?
5.5. Fiktiv sürüşkən dəyişənli reqressiya modellərinin mahiyyətini izah edin.
5.6. Fiktiv maili dəyişənli reqressiya modellərinin mahiyyətini izah edin.
5.7. Dəyişkən strukturlu modellərin fərqli xüsusiyyətləri necədir?
5.8. Çou testinin ideyası nədən ibarətdir?
5.9. Çou testi ilə hansı göstəricilər müqayisə olunur və bu halda hansı statistik meyardan istifadə olunur?
5.10. Sürüşkən və maili dəyişənli modellərdə fiktiv dəyişənin reqressiya əmsalı necə interpretasiya olunur?
5.11. Əgər 2 keyfiyyət faktorları vardırsa və onlardan biri üç mümkün qiymətləri, digəri 2 qiymət alırsa, onda neçə fiktiv dəyişən modelə daxil olunmalıdır?
5.12. Bir kəmiyyət və bir fiktiv dəyişənli reqressiya modeli ümumi halda necə yazılır?
5.13. Çou testinin tətbiq olunma oblastı necədir?

Testlər.

5.1. Çoxdəyişənli reqressiya tənliyində fiktiv dəyişənlər hansılardır?
a) kəmiyyət dəyişənlərinə çevrilmiş keyfiyyət dəyişənləri;
b) modelin adekvatlılığını artıran faktorların kombinasiyası;
c) modelə daxil olan dəyişənlərin müəyyən funksiyaları;
d) modelin keyfiyyətini artıran əlavə kəmiyyət dəyişənləri.

5.2. m sayda vəziyyəti xarakterizə edən keyfiyyət dəyişənini modeldə təsvir etmək üçün modelə adətən neçə fiktiv dəyişən daxil edilir?

a) $m+1$; b) $(m+1)^2$; c) $m-1$; d) $(m-1)^2$.

5.3. Dəyişən strukturlu reqressiya modelində

a) asılı kəmiyyət dəyişəninin qeyri-bircinsliyi keyfiyyət faktoru (fiktiv dəyişənin) ilə nəzərə alınır;
b) asılı olmayan kəmiyyət dəyişəninin qeyri-bircinsliyi fiktiv dəyişənlə nəzərə alınır;
c) asılı kəmiyyət dəyişəninin qiymətlərinə fiktiv dəyişənin qiyməti əlavə olunur;
d) asılı olmayan dəyişənin qiymətinə fiktiv dəyişənin qiyməti əlavə olunur;

5.4. Tutaq ki, keyfiyyət faktoru ilin fəsilləridir, fiktiv dəyişənlər hansılardır?

a) Əgər qış olarsa $z_1 = 1$, digər hallarda $z_1 = 0$;
b) Əgər qış olarsa, $z_1 = 1$, yaz olarsa $z_1 = 2$, yay olarsa, $z_1 = 3$, payız olarsa, $z_1 = 4$;
c) Əgər qış olarsa, $z_1 = 1$, digər hallarda $z_1 = 0$, əgər yaz olarsa, $z_2 = 1$ digər hallarda $z_2 = 0$;
d) bütün fəsillər üçün z_1, z_2, z_3, z_4-un qiyməti vahid götürülür.

5.5. Tutaq ki, eyni istehsal sahəsindəki müəssisələrdən seçim etmək üçün $y = \alpha_0 K^{\alpha} L^{\beta}$ Kobb-Duqlas istehsal funksiyası qiymətləndirilir. Belə hipotez vardır ki, eyni əmək və eyni kapital sərfi nəticəsində xüsusi müəssisələrdə istehsal həcmi dövlət müəssislərindəki istehsal həcmindən yüksəkdir. Xüsusi müəssisələr üçün $z_1 = 1$, dövlət müəssisəsi üçün $z_1 = 0$ qiymətli fiktiv dəyişəni daxil etməklə hansı reqressiya tənliyini almaq mümkündür?

a) $\ln y_i - \ln L_i = \alpha_0 + \alpha D_i + \beta(\ln K_i - \ln L_i)$;

b) $y = \alpha_0 D_i K^{\alpha} L^{\beta}$;

c) $y_i = \alpha_0 K^{\alpha + D_i} L^{\beta + D_i}$;

d) $y = (\alpha_0 + D_i)(K + D_i)^{\alpha}(L + D_i)^{\beta}$.

5.6. Fiktiv sürüşkən dəyişənli reqressiya modelində fiktiv dəyişənin əmsalı necə xarakterizə olunur?

a) $z = 1$ olduqda sərbəst α_0 həddinin, $z = 0$ olduqda sərbəst α_0 həddindən nə qədər fərqli olduğunu göstərir;

b) interpretasiya olunmur;

c) reqressiya əyrisinin bucaq əmsalını xarakterizə edir;

d) modelin efektivlik əmsalını xarakterizə edir.

5.7. Fiktiv z_1 və z_2 dəyişənləri arasında ciddi xətti asılılıq olduqda

a) reqressiya tənliyinin əmsalları birqiymətli təyin olunmur;

b) reqressiya tənliyinin əmsalları birqiymətli təyin olunur;

c) reqressiya tənliyinin əmsalları təyin olunmur;

d) bu vəziyyət kollienarlıq vəziyyətidir.

5.8. Fiktiv dəyişənin reqressiya əmsalı necə interpretasiya olunur?

a) Digər faktorların qiymətləri dəyişmədikdə keyfiyyət faktorunun bir vəziyyətindən digər vəziyyətinə keçdikdə asılı faktorun ortalama dəyişməsini göstərir;

b) Digər faktorların qiymətləri dəyişdikdə keyfiyyət faktorunun qiyməti vahid olduqda nəticə faktorunun dəyişməsini göstərir;

c) interpretasiya olunmur;

d) fiktiv dəyişənə uyğun elastiklik əmsalıdır.

5.9. Çou testindən

a) vahid reqressiya modeli qurulmasında istifadə olunur;

b) eyni reqressiya modelindən bir neçə modelin alınmasında istifadə olunur;

c) modelin adekvatlılığının yoxlanılmasında istifadə olunur;

d) multikollienarlığın yoxlanılmasında istifadə olunur.

5.10. Tutaq ki, tələbatın bir neçə faktordan asılılığı modeli qurulur.

Bu çoxdəyişənli modeldə istehlakçının hansı verilənləri fiktiv dəyişən deyil?
a) təhsil səviyyəsi; b) ailə vəziyyəti; c) gəliri; d) cinsi.

Çalışmalar

Məsələ 5.1. Tutaq ki, fərdi qayda da saathesabı əmək haqqı y (p.v.) dəyişəni ilə yekun testin x (ölçü vahidi baldır) nəticəsindən və işçinin cinsindən (fiktiv dəyişəndir və kişi olduqda 1, qadın olduqda isə, 0 qiymətlər alır) asılılığının qiymətləndirilməsi nəticəsində $\hat{y} = 2 + 37x + 2{,}4z$ modeli alınmışdır. Bütün əmsallar 1%-lik əhəmiyyətlilik səviyyəsində əhəmiyyətlidir. Test nəticələri eyni olduqda, kişi və qadınların saathesabı əmək haqqı necə fərqlənir.
Cavab: Testin nəticələri eyni olduqda kişilərin əmək haqqı qadınların əmək haqqından 2,4 p.v. çoxdur.

Məsələ 5.2. Tutaq ki, müşahidələr nəticəsində y ərzaq məhsullarına olan xərclərlə x gəlirləri arasında reqressiya funksiyası $\hat{y} = 2 + 0{,}6x + 0{,}07zx$ kimidir. Buarad z -fiktiv dəyişəndir və şəhər əhalisi üçün 1, kənd əhalisi üçün isə, 0-dır. Xətti asılılıqda kənd əhalisi üçün bucaq əmsalını tapın.
Cavab: 0,6.

Məsələ 5.3. 20 kişi və 60 qadın arasında müşahidələrlə qiymətləndirilmişdir ki, personal kompyüterlərə olan tələbatın y həcmi ilə ailənin hər nəfərinə düşən gəlirliyi x arasında reqressiya asılılığı belədir: $\hat{y}_x = 5{,}4 + 1{,}5x.$ ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmədə qalıq həddlərinin kvadratları cəmi 98-dir. Ancaq qadınlar və ancaq kişilər arasındakı asılılıqları tapın.
Cavab: $\hat{y}_x = 2{,}8 + 0{,}9x$ (qalıq həddlərinin kvadratları cəmi 29-dur); $\hat{y}_x = 7{,}3 + 2{,}5x$ (qalıq həddlərinin kvadratları cəmi 53-dür).

Məsələ 5.4. Məsələ 5.3-ün verilənlərinə əsasən Çou testinin köməyilə 0,05 əhəmiyyətlilik səviyyəsində kompyüterlərə tələbat asılılığında cinslər arasında struktur sürüşkənliyini müəyyənləşdirin.
Cavab: Struktur sürüməsi mövcuddur.

Məsələ 5.5. Cədvəldə verilmiş

x_1	2	3	3	4	5
x_2	3	4	6	1	7
y	3	5	5	6	7

x_1	4	6	6	7
x_2	7	8	9	9
y	9	9	10	12

iki seçimin $\alpha = 0{,}1$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində birləşdirilməsi mümkünlüyünü Çou testi ilə aydınlaşdırın
Cavab: mümkündür.

Məsələ 5.6. Məsələ 5.5-in verilənlərinə nəzərən iki seçimi birləşdirilməsini fiktiv dəyişən daxil etməklə yoxlayın.
Göstəriş $z,\ zx_1, zx_2$ dəyişənlərini daxil edib,

x_1	2	3	3	4	5	4	6	6	7
x_2	3	4	6	1	7	7	8	9	9
z	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$z\ x_1$	0	0	0	0	0	4	6	6	7
$z\ x_2$	0	0	0	0	0	7	8	9	9
y	3	5	5	6	7	9	9	10	12

cədvəlindən

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_{10} z + \alpha_{11} z x_1 + \alpha_{12} z x_2$$

modelinin əmsallarını qiymətləndirib, onların əhəmiyyətliliyini yoxlamaq lazımdır.

Məsələ 5.7. Tutaq ki, müəyyən içki məhsuluna tələbatın onun qiymətindən asılılığı kişilər və qadınlar arasında ayrıca öyrənilir və uyğun modellər

$y_1 = 120 - 1{,}8x + \varepsilon_1$ (kişilər)

$y_2 = 125 - 1{,}7x + \varepsilon_2$ (qadınlar)

kimidir. Kişilər üçün $z=1$, qadınlar üşün isə, $z=0$ qəbul etməklə, fərz edək ki, birləşdirilmiş reqressiya tənliyi
$y=126-1{,}75x-7z+\varepsilon$
formasındadır. Hər üç modelin əmsallarının interpretasiyasını verin.

Məsələ 5.8. Tutaq ki, x faktorunun nəticə faktoruna təsiri fiktiv dəyişənin fərqli qiymətləri üçün eyni deyil və bu halda $y=\alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_{10}z+\alpha_{11}zx+\varepsilon$ modeli qurulmuşdur. α_{11} əmsalının interpretasiyasını verin və modeli $y=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_{10}z+\varepsilon$ ilə müqayisə edib, faktorların təsir güclərini müqayisə edin.

Məsələ 5.9. Tutaq ki, müəyyən məhsula olan tələbatın ailənin bir üzvünə düşən gəlirdən asılılığı $y=111+2x+10z-6xz+\varepsilon$ reqressiya tənliyi ilə xarakterizə olunur. Burada, ailə başçısı büdcə sferasında (təhsil sistemində) işlədikdə $z=1$, ailə başçısı maliyyə sferasında (məsələn, bankda) işlədikdə isə, $z=0$ qəbul olunur. Fiktiv dəyişənin qiymətlərindən istifadə etməklə bu əlaqəni xarakterizə edib qrafiki təsvirlərlə izah edin.

Məsələ 5.10. Tutaq ki, x_t dəyişəni müəyyən istehsal şirkətinin t periodunda sərf olunan istehsal resurslarının həcmini, y_t -isə, bu periodda istehsal olunmuş məhsulun həcmini göstərir (həcmlər p.v. ilə ifadə olunur). Həm də, qəbul edək ki, istənilən zaman anında bu dəyişənlər arasında asılılıq xəttidir, lakin məlum t_0 anında reqressiya tənliyinin strukturu dəyişir. Formal olaraq belə asılılıq
$y_t=\alpha_0+\alpha_1x_t+\alpha_2(x_t-x_{t0})z_t+\varepsilon_t,\ t=1,2,\dots,n$
formasında təsvir oluna bilər. Burada $t\le t_0$ olduqda $z_t=0$, $t>t_0$ olduqda isə, $z_t=1$ qiymətləri ilə, z_t fiktiv dəyişən kimi daxil olunur. $t=1,2,\dots,5$ olduqda şərti götürülmüş (x_t,y_t)verilənləri üçün $t\le t_0$ və $t>t_0$ olduqda bu hissə-hissə xətti reqressiya modelinin bucaq əmsallarını qiymətləndirin və struktur dəyişmələrinin mövcudluğu haqda hipotezi yoxlayın.

Cavab: $t \le t_0$ olduqda $z_t = 0$; $t > t_0$ olduqda $z_t = 1$. $t \le t_0$ olduqda xətti reqressiya funksiyasının bucaq əmsalı α_1, $t > t_0$ olduqda isə, onun bucaq əmsalı $\alpha_1 + \alpha_2$ olur. $\alpha_2 = 0$ hipotezinin yoxlanılması reqressiya funksiyasının zamana nəzərən dəyişməzliyinin yoxlanılması ilə ekvivalent olduğundan, bu hipotezin yoxlanılması struktur dəyişmələrinin olmasını göstərir.

FƏSİL VI

STOXASTIK REQRESSORLAR VƏ INSTRUMENTAL DƏYIŞƏNLƏR

§ 6.1. Stoxastik reqressorlar

Cüt və çoxdəyişənli xətti reqressiya modellərinin parametrlərin qiymətləndirilməsində (§2.2, §3.3) Qauss-Markov teoreminin şərtlərində fərz edilirdi ki, asılı olmayan dəyişənlər təsadüfi kəmiyyətlər deyil. Burada reqressorlar stoxastik olduğu halı nəzərdən keçirəcəyik. Belə ki, əksər iqtisadi proseslərin öyrənilməsində asılı olmayan dəyişənlərin təsadüfi olması halına baxılması zərurəti yaranır. Bu dəyişənlərin qiymətlərinin ölçülməsində müəyyən təsadüfi xətalar ola bilər. Belə dəyişənlərə misal olaraq orta adambaşına düşən gəlir, orta adambaşına düşən tələbatı və s. göstərmək olar. Onların qiymətləri əhalinin baş məcmusundan müəyyən seçimlərlə təyin olunur. Analoji vəziyyətlər modelin ilkin verilənləri qismində baş məcmudan təsadüfi seçilmiş elementlər ola bilər. Məsələn, pərakəndə ticarətlə məşğul olan kiçik müəssələr toplusundan seçimlər formalaşdıqda seçilmiş müəsissələrin xarakteristikalaırna (gəlir, əmək haqqı, satış həcmi və s.) modelin asılı olmayan dəyişənlərinin qiymətləri kimi baxmaq olar. Belə hallarda asılı olmayan dəyişənlərin qiymətlərini müəyyən paylanma qanunlarına tabe olan təsadüfi kəmiyyətlərlə interpretasiya etmək olar. Bundan başqa, zaman sıralarının analizində t anında öyrənilən kəmiyyətin qiyməti onun əvvəlki zaman anlarındakı qiymətlərindən asılı ola bilər. Yəni, öyrənilən iqtisadi sistemin müəyyən tənliklərində bu qiymətlər asılı olmayan qiymətlər kimi, digər hallarda asılı dəuişənlər kimi (laq dəyişənli modellər) göstərilə bilər. Ona görə də stoxastik reqressorlu modellərə baxılması zərurəti yaranır.

Əvvəlcə stoxastik reqressorlu (2.9) ehtimal modelinə baxaq. Burada Y, X , ε təsadüfi kəmiyyətlərdir. Belə ki, Y və X müşahidə olunan, ε -isə müşahidə olunmayan stoxastik kəmiyyətlərdir. §2.2-də olduğu kimi, ε -təsadüfi kəmiyyəti modelə daxil edilməyən faktorların təsirini xarakterizə edir. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $M(\varepsilon / X) = 0$;
2) $M(\varepsilon^2 / X) = \sigma^2$;
3) $\varepsilon / X \sim N(0, \sigma^2)$.

(Burada $M(\varepsilon / X)$-lə X təsadüfi kəmiyyətinin qeyd edilmiş mümkün qiymətlərində ε təsadüfi kəmiyyətinin şərti riyazi gözləməsi (bax [5, səh. 170]) ~ -işarəsi ilə onun şərti paylanması işarə olunmuşdur).

Lemma 6.1. *Əgər 1) və 2) şərtləri ödənilirsə, onda*

a) $D(\varepsilon / X) = \sigma^2$;
b) $M\varepsilon = 0$ və $D(\varepsilon) = \sigma^2$;
c) $\operatorname{cov}(X, \varepsilon) = 0$.

İsbatı. Şərti dispersiyanın tərifinə əsasən (bax [5, səh. 170])

$$D(\varepsilon / X) = M(\varepsilon^2 / X) - (M(\varepsilon / X))^2 = \sigma^2.$$

Şərti riyazi gözləmənin xassəsinə əsasən (bax [5, səh. 170])

$$M\varepsilon = M_X(M(\varepsilon / X)) = 0, \quad D(\varepsilon) = M_X(D(\varepsilon / X)) = \sigma^2,$$
$$M(X\varepsilon / X) = XM(\varepsilon / X) = 0$$

olduğundan
$M(X\varepsilon) = M_X(M(X\varepsilon / X)) = 0$ və deməli,

$$\operatorname{cov}(X,\varepsilon) = M(X\varepsilon) - M\varepsilon - MX = 0.$$

Lemma 6.2. (2.9) reqressiya modelində 1) və 2) şərtləri ödənərsə, onda

$$\alpha_0 = MY - \alpha_1 MX, \qquad \alpha_1 = \frac{\operatorname{cov}(Y,X)}{D(X)} \quad (D(X) \neq 0).$$

İsbatı. $M\varepsilon = 0$ olduğundan,

$$MY = M(\alpha_0 + \alpha_1 X + \varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 MX + M\varepsilon = \alpha_0 + \alpha_1 MX.$$

$$\operatorname{cov}(Y,X) = \operatorname{cov}(\alpha_0 + \alpha_1 X + \varepsilon, X) =$$

$$= \alpha_1 \operatorname{cov}(X,X) + \operatorname{cov}(X,\varepsilon) = \alpha_1 D(X).$$

Teorem 6.1. (Qauss-Markov). *Tutaq ki, stoxastik reqressorlu (2.9) modelində 1) və 2) şərtləri ödənilir və* (x_i, y_i)*- təsadüfi seçimdir. Onda* α_0 *və* α_1 *parametrlərinin ƏKKÜ-ilə* $\hat{\alpha}_0$ *və* $\hat{\alpha}_1$ *qiymətləndirmələri ən kiçik şərti dispersiyalı xətti meylsiz, tutarlı qiymətləndirmədir.*

İsbatı. 1. Qiymətləndirmənin meylsizliyini göstərək:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\alpha_0 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \alpha_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

onda

$$M\left(\hat{\alpha}_1/x_1,\ldots,x_n\right)=\alpha_1+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})M\left(\varepsilon_i/x_1,\ldots,x_n\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\alpha_1.$$

Deməli,

$$M\left(\hat{\alpha}_1\right)=M\left(M\left(\hat{\alpha}_1/x_1,\ldots,x_n\right)\right)=\alpha_1,$$

$\hat{\alpha}_0=\bar{y}-\hat{\alpha}_1\bar{x}$ olduğundan

$$M\left(\hat{\alpha}_0/x_1,\ldots,x_n\right)=M\left(\bar{y}/x_1,\ldots,x_n\right)-\bar{x}M\left(\hat{\alpha}_1/x_1,\ldots,x_n\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(y_i/x_1,\ldots,x_n\right)-\alpha_1\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_0+\alpha_1x_i\right)-\alpha_1\bar{x}=$$

$$=\alpha_0+\alpha_1\bar{x}-\alpha_1\bar{x}=\alpha_0$$

və $M\left(\hat{\alpha}_0\right)=M\left(M\left(\hat{\alpha}_0/x_1,\ldots,x_n\right)\right)=\alpha_0.$

2. Reqressorlar determinik olduğu hala analoji olaraq stoxastik reqressorlar halında da asanlıqla göstərilir ki, Y-ə nəzərən xətti qiymətləndirmələrdən ƏKKÜ-ilə alınmış qiymətləndirmə minimal dispersiyaya malikdir:

$$D\left(\hat{\alpha}_0/x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{\sigma^2\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},$$

$$D\left(\hat{\alpha}_1/x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

3.ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmənin tutarlılığını göstərək:

$$\hat{\alpha}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\widehat{\operatorname{cov}}\left(X,Y\right)}{\hat{D}\left(X\right)}.$$

$\overset{\wedge}{\text{cov}}(X,Y)\xrightarrow{P}\text{cov}(X,Y)$ (seçimi kovariasiya məcmunun kovariasiyasının tutarlı qiymətləndirilməsidir) olduğundan və $n \to \infty$ olduqda $\hat{D}(X)\xrightarrow{P}D(X)$ ehtimal mənada yığıldığından, Slutski teoreminə əsasən (bax, [5, səh. 229-230])

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\overset{\wedge}{\text{cov}}(X,Y)}{\hat{D}(X)} \xrightarrow{P} \frac{\text{cov}(X,Y)}{D(X)} = \alpha_1.$$

$\overline{Y} \xrightarrow{P} MY,\ \overline{X} \xrightarrow{P} MX\ \ (n \to \infty)$ olduğunu nəzərə alsaq, Slutski teoremini tətbiq etməklə alırıq ki,

$\hat{\alpha}_0 = \overline{y} - \hat{\alpha}_1\overline{x} \xrightarrow{P} MY - \alpha_1 MX = \alpha_0.$ Teorem isbat edildi.

1), 2) və 3) şərtləri ödənildikdə ƏKKÜ-ilə reqressiya parametrlərinin qiymətləndirmələri və determinik əmsalı üçün determinik hala xas olan bütün statisik xassələr öz gücündə qalır. Burada statistik xassələri şərti paylanmalar mənada (məsələn, $t_1 / x_1,...,x_n \sim t_{n-2}$) xarakterizə etmək lazımdır.

İndi çoxdəyişənli (3.4) modelində reqressorların stoxastik hallarına baxaq. Tutaq ki, bu modeldə ε səhvləri üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $M(\varepsilon / x_1,...,x_k) = 0$ (martis halında $M(\varepsilon / X) = 0_n$);

2) $M(\varepsilon^2 / x_1,...,x_k) = \sigma^2$ (martis halında $M(\varepsilon^2 / X) = \sigma^2 E_n$);

3) $\varepsilon / x_1,...,x_k \sim N(0, \sigma^2)$ (martis halında $\varepsilon / X \sim N(0, \sigma^2)$).

1) və 2) şərtləri ödənildikdə

a) $D(\varepsilon / x_1,...,x_k) = \sigma^2$;

b) $M\varepsilon = 0$ və $D(\varepsilon) = \sigma^2$;

c) $\text{cov}(x_j, \varepsilon) = 0,\ \ j = \overline{1,k}.$

1) və 2) şərtləri ödənildikdə (3.4) modelindən alınır ki,

$$MY = M(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 M x_1 + ... + \alpha_k M x_k,$$

$$\operatorname{cov}(Y, x_j) = \operatorname{cov}(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k + \varepsilon_j x_j) =$$
$$= \alpha_1 \operatorname{cov}(x_1, x_j) + \alpha_2 \operatorname{cov}(x_2, x_j) + ... + \alpha_k \operatorname{cov}(x_k, x_j), \quad j = \overline{1,k}.$$

Əgər $\det\left(\operatorname{cov}(x_i, x_j)_{i,j=1}^{k}\right) = 0$ olarsa, onda reqressorlar multikollienar hesab edilir. Bu halda reqressorlardan biri digərlərinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilir və reqressiya əmsalları birqiymətli təyin olunur.

Teorem 6.2. (Qauss-Markov). *Tutaq ki, stoxastik reqressorlu (3.4) modelində 1), 2) şərtləri ödənilir,* $\det\left(\operatorname{cov}(x_i, x_j)_{i,j=1}^{k}\right) \neq 0$ *və* $\{y_i, x_{i1}, ..., x_{ik}\}_{i=1}^{n}$ *- faktorların təsadüfi seçimləridir. Onda* $\alpha_0, ..., \alpha_k$ *parametrlərinin ƏKKÜ-ilə alınmış* $\hat{\alpha}_0, ..., \hat{\alpha}_k$ *qiymətləndirilməsi minimal şərti dispersiyalı xətti meylsiz qiymətləndirmələrdir və bu qiymətləndirmələr tutarlıdır, yəni* $n \to +\infty$ *olduqda*

$$\hat{\alpha}_j \xrightarrow{P} \alpha_j, \quad j = \overline{0,k}.$$

İsbatı. Determinik reqressorlar halına uyğun olaraq alınır ki,
$M\left(\hat{\alpha}_j / x_1, ..., x_k\right) = \alpha_j, \quad j = \overline{0,k}.$ Buradan
$M\left(\hat{\alpha}_j / x_1, ..., x_k\right) = M\left(M\left(\hat{\alpha}_j / x_1, ..., x_k\right)\right) = \alpha_j.$

Buradan həm də alınır ki, Y-ə nəzərən xətti qiymətləndirmələrdən ƏKKÜ-ilə alınmış qiymətləndirmə minimal şərti dispaersiyaya malikdir.

Bu qiymətləndirmənin tutarlılığını göstərək. $n \to +\infty$ olduqda

$$\widehat{\operatorname{cov}}(Y, x_j) \xrightarrow{P} \operatorname{cov}(Y, x_j) \quad \hat{D}(x_j) \xrightarrow{P} D(x_j) \quad \left(j = \overline{1,k}\right)$$

olduğundan, $\left(\widehat{\operatorname{cov}}(x_i, x_j)_{i,j=1}^{k}\right) \xrightarrow{P} \left(\operatorname{cov}(x_i, x_j)_{i,j=1}^{k}\right).$ Buradan

Slutski teoreminə görə

$$\hat{\alpha} = \left(\overset{\wedge}{\mathrm{cov}}\left(x_i, x_j\right)_{i,j=1}^{k} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \overset{\wedge}{\mathrm{cov}}(Y, x_1) \\ \overset{\wedge}{\mathrm{cov}}(Y, x_2) \\ \dots \\ \overset{\wedge}{\mathrm{cov}}(Y, x_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} \left(\mathrm{cov}\left(x_i, x_j\right)_{i,j=1}^{k} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(Y, x_1) \\ \mathrm{cov}(Y, x_2) \\ \dots \\ \mathrm{cov}(Y, x_n) \end{pmatrix} = \alpha \ .$$

$\overline{Y} \xrightarrow{P} MY$, $\overline{x}_j \xrightarrow{P} Mx_j$ olduğundan, Slutski teoremini tətbiq etməklə,

$$\hat{\alpha}_0 = \overline{y} - \hat{\alpha}_1 \overline{x}_1 - \ldots - \hat{\alpha}_k \overline{x}_k \xrightarrow{P} MY - \alpha_1 Mx_1 - \ldots - \alpha_k Mx_k = \alpha_0 .$$

Indi tutaq ki, (3.4) çoxdəyişənli reqressiya modelində $\alpha_0 = 0$, X matrisi $n \times k$ tərtibli matrisdir və onun elementləri təsadüfi kəmiyyətlərdir. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1) $M\left(\varepsilon / X\right) = 0$;

2) $\mathrm{cov}\left(\varepsilon / X\right) = \sigma^2 E_n$;

3) Sanki bütün realizasiyalar üçün (yəni, vahid ehtimalla) X matrisinin ranqı k -dır.

Burada $M\left(\varepsilon / X\right)$-lə qeyd edilmiş X matrisi üçün ε - təsadüfi vektorunun şərti riyazi gözləməsi $\mathrm{cov}\left(\varepsilon / X\right) = M\left(\varepsilon\varepsilon' / X\right)$- ilə şərti kovariyasiya matrisi işarə olunmuşdur. Qeyd edək ki, 1),

2) şərtləri bu şərtlərlə ekvivalentdir:

1') $M(Y/X) = X\alpha$;

2') $\operatorname{cov}(Y/X) = \sigma^2 E_n$;

Tutaq ki, $\hat{\alpha} = (X'X)^{-1} X'Y$ qiymətləndirməsi ƏKKÜ-ilə alınmış α vektorunun qiymətləndirməsidir. Bu qiymətləndirmə 3) şərtinə görə X -in istənilən realizasiyası üçün mövcuddur. Reqressiya qalıqları vektoru

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\alpha} = Y - X(X'X)^{-1} X'Y =$$
$$= \left(E_n - X(X'X)^{-1} X'\right)Y = (E_n - N)Y = BY,$$

burada

$$B = E_n - N = E_n - X(X'X)^{-1} X'.$$

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{e'e}{n-k}$ ilə dispersiyanın qiymətləndirilməsini, $\operatorname{cov}(\hat{\alpha}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$ ilə $\hat{\alpha}$ kovariasiya matrisinin qiymətləndirilməsini işarə edək. Onda

$$M(\hat{\alpha}/X) = M\left(\alpha + (X'X)^{-1} X'\varepsilon/X\right) = \alpha + M\left((X'X)^{-1} X'\varepsilon/X\right) =$$
$$= \alpha + \left((X'X)^{-1} X'M(\varepsilon)/X\right) = \alpha;$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha}/X) = \operatorname{cov}\left((X'X)^{-1} X'Y/X\right) =$$
$$= (X'X)^{-1} X' \operatorname{cov}(Y/X) X (X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1};$$
$$M(e/X) = M(BY/X) = BM(Y/X) = BX\alpha = 0;$$
$$\operatorname{cov}(e/X) = \operatorname{cov}(BY/X) = B\operatorname{cov}(Y/X)B' = \sigma^2 B.$$

Buradan alınır ki,

$$M(e'e/X) = \sigma^2 tr(B);$$
$$M(\hat{\sigma}^2/X) = \sigma^2;$$
$$M(\operatorname{cov}(\hat{\alpha})/X) = M\left(\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}/X\right) = M(\hat{\sigma}^2/X)(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}.$$

Beləliklə, $\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}^2$ və $\operatorname{cov}(\hat{\alpha})$ qiymətləndirmələri X -ə nəzərən şərti meylsizdir. Təkrar riyazi gözləmələri tətbiq etməklə bu qiymətləndirmələrin aşağıdakı şərtsiz meylsiz qiymətləndirmə olmalarını almaq olar:

$$M(\hat{\alpha}) = M(M(\hat{\alpha}/X)) = M(\alpha) = \alpha;$$
$$M(\hat{\sigma}^2) = M(M(\hat{\sigma}^2/X)) = \sigma^2; \tag{6.1}$$
$$M(\operatorname{cov}(\hat{\alpha})) = M(M(\operatorname{cov}(\hat{\alpha})/X)) = \sigma^2 M((X'X)^{-1}) = \operatorname{cov}(\hat{\alpha}).$$

Burada Qauss-Markov teoreminin analoji variantı belə ifadə olunur ki, α vektorunun bütün şərti xətti meylsiz qiymətləndirmələrindən ƏKKÜ-ilə alınmış qiymətləndirməsi ən kiçik şərti kovariasiya matrisinə malikdir. Deməli, 1), 2), 3) şərtləri ödənildikdə stoxastik reqressorlu modelin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirməsi klassik modellərin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirməsindəki xassələrə uyğun xarakterlidir.

Qeyd edək ki, 1), 2) şərtləri X və ε matris - vektorlarının birgə paylanmasına xarakterikdir. Xüsusi halda, 1) şərtlərindən X və ε-un korrelə olunmaması alınır. Çünki, $M(\varepsilon) = M(M(\varepsilon/X)) = 0$ olduğundan, $\operatorname{cov}(x_{ij}, \varepsilon_m) = M(x_{ij}\varepsilon_m) = M(M(x_{ij}\varepsilon_m/X)) =$ $= M(x_{ij}M(\varepsilon_m/X)) = 0$. Bunun tərsi isə ümumiyyətlə doğru deyil. Lakin, X və ε asılı olmadıqda və $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon) = M(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ olduqda, 1), 2) şərtləri ödənilir.

İndi isə, stoxastik reqressorlar halında ƏKKÜ qiymətləndirməsində tutarlılıq məsələsinə baxaq. Yəni $\lim \hat{\alpha} \xrightarrow{P} \alpha \quad (n \to \infty)$ ehtimal yığılmasını təmin edən şərtləri tapaq. Aşağıdakı elementar çevirməni yerinə yetirək

$$\hat{\alpha} = (X'X)^{-1}X'Y = \alpha + (X'X)^{-1}X'\varepsilon = \alpha + \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}X'\varepsilon\right) \tag{6.2}$$

və fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər də ödənilir:

4) $\left(\frac{1}{n}\right)X'X \xrightarrow{P} A \ \left(n \to \infty\right)$ (burada yığılma ehtimal mənada başa düşülür) mövcuddur və A matrisi müsbət müəyyəndir.

5) $\frac{1}{n}X'\varepsilon \xrightarrow{P} 0 \ \left(n \to \infty\right)$.

Onda Slutski teoremindən ([5, səh. 229-230]) alınır ki, $\hat{\alpha} \xrightarrow{P} \alpha \ \left(n \to \infty\right)$, yəni $\hat{\alpha}$ tutarlı qiymətləndirmədir.

(6.2) ayrılışından alınır ki, X və ε arasında korrelyasıya mövcud olduqda ƏKKÜ qiymətləndirməsi ümumiyyətlə meyyli və tutarsız qiymətləndirmədir.

1), 2), 3) şərtləri daxilində ƏKKÜ qiymətləndirməsinin tutarlı olması üçün 4) şərtinin ödənilməsi kifayətdir, çünki

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma^2 M\left(\left(X'X\right)^{-1}\right) = \frac{1}{n}\sigma^2 M\left(\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\right) \xrightarrow{P} \alpha \ \left(n \to \infty\right)$$

və deməli $\hat{\alpha} \xrightarrow{P} \alpha \ \left(n \to \infty\right)$. 4), 5) şərtləri ödənildikdə ƏKKÜ qiymətləndirməsinin tutarlılığını göstərmək üçün $Y = X\alpha + \varepsilon$ modeli və ƏKKÜ qiymətləndirməsinin aşkar ifadəsi tələb olunur, 1), 2), 3) şərtləri isə aşkar şəkildə istifadə olunur. Əgər reqressorlar və səhvlər korrelə olunarsa, onda ƏKKÜ qiymətləndirməsi ümumi halda meyilli və tutarsız olur ([31, səh.134-137]).

§6.2. İnstrumental dəyişənlər

Əvvəlki mövzuda qeyd etdik ki, stoxastik reqressorlu modellərin tədqiqində asılı olmayan dəyişənlərlə təsadüfi qalıqlar arasında korrelyasiya asılılığı mövcud olduqda ƏKKÜ ilə parametrlərin qiymətləndirilməsi ümumi halda meylli və tutarsız olur. Bu çətinliyin aradan qaldırılmasında yanaşma olaraq digər asılı olmayan dəyişənlərdən istifadə olunmasıdır ki, bu dəyişənlər instrumental dəyişənlər hesab olunur. Belə dəyişənlərin modelə daxil edilməsinin mahiyyətini başa düşmək üçün əvvəlcə Keynsin aşağıdakı istehlak modelinə (bax. [29, səh. 240] baxaq:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t, \ t = \overline{1,n} \ , \tag{6.3}$$

burada C_t- adambaşına düşən real tələbat, Y_t- adambaşına düşən real gəlir və α_1- parametri tələbata meyllilik (tələbat norması) kimi interpretasiya olunur. Dövlət xərclərini nəzərə almamaqla qapalı iqtisadiyyat modeli ilə kifayətləndikdə, (6.3) modelinə əlavə olaraq

$$Y_t = C_t + I_t, \ t = \overline{1,n}$$

münasibətlərini də daxil etmək lazımdır. Burada I_t - adambaşına düşən real investisiyalardır. Onda aşağıdakı tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{cases} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t, & t = \overline{1,n} \\ Y_t = C_t + I_t, & t = \overline{1,n} \end{cases} \tag{6.4}$$

(6.4) sisteminə modelin struktur forması deyilir.

Sistemdə C_t və Y_t-ni I_t ilə ifadə etsək, modelin çevrilmiş formasını alarıq:

$$\begin{cases} C_t = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \dfrac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_t, \\ Y_t = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \dfrac{1}{1-\alpha_1} I_t + \dfrac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_t, & t = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Fərz edək ki, ε_t-lər normal qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir: $M(\varepsilon_t) = 0, \ D(\varepsilon_t) = \sigma^2 > 0$ və hər bir t üçün I_t

və ε_t kəmiyyətləri asılı deyil. Onda (6.5) sisteminin 2-ci tənliyindən alırıq:

$$\operatorname{cov}(y_t,\varepsilon_t)=\frac{1}{1-\alpha_1}\operatorname{cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_t)=\frac{\sigma^2}{1-\alpha_1}\neq 0,$$

yəni C_t üçün ilkin tənlikdə y_t izahedici dəyişən təsadüfi faktorla korrelə olunur. Bu halda ilkin tənliyin α_1 əmsalının ƏKKÜ- ilə $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirilməsi üçün

$$\hat{\alpha}_1\xrightarrow{P}\left(\alpha_1+\frac{\operatorname{cov}(y,\varepsilon_t)}{D(y_t)}\right)\quad (n\to\infty)$$

ehtimal mənada yığılma münasibəti doğru olur ki, burada

$$D(y_t)=\frac{1}{(1-\alpha_1)^2}\left(D(I_t)+\sigma^2\right)$$

və

$$\hat{\alpha}_1\xrightarrow{P}\left(\alpha_1+(1-\alpha_1)\frac{\sigma^2}{D(I_t)+\sigma^2}\right)\quad (n\to\infty). \qquad (6.6)$$

$\sigma^2>0$ olduğundan və Keyns modelində $0<\alpha_1<1$ bərabərsizliyi ödənildiyindən, $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirilməsi tələbat normasının qiymətinin həddindən artıq qiymətləndirilməsidir.

(6.5) sisteminin 1-ci tənliyini belə yazmaq olar:

$$C_t=\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1\tilde{I}_t+\tilde{\varepsilon}_t$$

burada $\tilde{\alpha}_0=\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1},\tilde{\alpha}_1=\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1},\tilde{\varepsilon}_t=\dfrac{\varepsilon_t}{1-\alpha_1},\ M(\tilde{\varepsilon}_t)=0,$

$$D(\tilde{\varepsilon}_t)=\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}=\frac{\sigma^2_{\varepsilon}}{(1-\alpha_1)^2}$$

ƏKKÜ-nu (6.7) tənliyinə tətbiq etməklə $\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1$ və $\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}$ qiymətləndirmələrini aldıqdan sonra,

$$\alpha_0 = \frac{\tilde{\alpha}_0}{(1+\tilde{\alpha}_1)}, \alpha_1 = \frac{\tilde{\alpha}_1}{(1+\tilde{\alpha}_1)}, \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2}{(1+\tilde{\alpha}_1)^2}$$

münasibətlərindən istifadə etməklə ilkin tənliyin parametrlərinin qiymətləndirilmələrini tapmaq olar.

İndi isə, instrumental dəyişənlər üsulunu təsvir etməzdən əvvəl ƏKKÜ-nun adi (2.10) cüt reqressiya modelinə tətbiqinə baxaq. Burada $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t = \overline{1,n}$. Bu halda α_1 əmsalının ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsi aşağıdakı normal tənliklər sistemini ödəyir:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i)x_i = 0. \qquad (6.8)$$

Bu sistem $e = (e_1,\dots,e_n)^T$ qalıq vektorunun (burada $e_i = y_i - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 x_i$ i-ci müşahidənin qalığıdır) $1 = (1,\dots,1)^T$ və $x = (x_1,\dots,x_n)^T$ vektorlarına ortoqonallığını ifadə edir. Ortoqonallıq şərtlərini belə ekvivalent formada yazmaq olar:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i 1 = 0, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i x_i = 0\ . \qquad (6.9)$$

(6.9) münasibətləri

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, 1) = 0, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, x_i) = 0, \; i = \overline{1,n}$$

nəzəri bərabərliklərinin seçimi analoqlarıdır. $M(\varepsilon_i) = 0$ olduğundan, sonuncu münasibətlərdən 1-cisi ödənilir, 2-ni isə, $M(\varepsilon_i x_i) = 0$ kimi yazmaq olar.

Əgər $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, x_i) \neq 0$ olarsa, onda $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i x_i \xrightarrow{P} 0$, $(n \to \infty)$ münasibəti doğru olmur və $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i x_i = 0$ nəzəri münasibətin empirik analoqu hesab edilmir. Ona görə də, digər elə bir z_i dəyişəni tapmaq lazımdır ki, $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, z_i) = M(\varepsilon_i z_i) = 0$ olsun və normal sistemin 2-ci tənliyinin sonuncu münasibətin seçimi analoqu ilə əvəzlənməsi təmin edilsin, yəni $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha_0-\alpha_1 x_i)z_i=0$ bərabərliyi ödənilsin. Əlbəttə, yeni sistemin həlli ilkin sistemin həllindən fərqlənir və biz əmsalların alınmış qiymətləndirilmələrini α_0^* və α_1^*-lə işarə etsək, onlar

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha_0^*-\alpha_1^* x_i)=0,\quad \sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha_0^*-\alpha_1^* x_i)z_i=0 \tag{6.10}$$

münasibətlərini ödəyir. Buradan da, α_1^* - üçün

$$\alpha_1^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})}$$

aşkar ifadəsi alınır ki, onu belə yazmaq olar:

$$\begin{aligned}\alpha_1^*&=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_1 x_i-\alpha_1\bar{x}+\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})(z_i-\bar{z})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})}=\\&=\alpha_1+\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})(z_i-\bar{z})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Burada

$$\operatorname*{\overset{P}{\lim}}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})(z_i-\bar{z})=\mathrm{cov}(\varepsilon_i,z_i)=0, \tag{6.12}$$

$\operatorname*{\overset{P}{\lim}}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})=\mathrm{cov}(x_i,z_i)=0$ ($\operatorname*{\overset{P}{\lim}}_{n\to\infty}$ -işarəsi ehtimala görə yığılmadır). Beləliklə, $\operatorname*{\overset{P}{\lim}}_{n\to\infty}\alpha_1^*=\alpha_1$, olması üçün $\mathrm{cov}(x_i,z_i)\neq 0$ şərtinin də ödənilməsi zəruridir.

Tərif 6.2. *Stoxastik reqressorlu (2.10) cüt reqressiya modelində reqressorlarla təsadüfi faktorlar arasında korrelyasiya asılılığı olduqda modelə daxil olunmuş yeni*

$z_i,\ i=\overline{1,n}$ *dəyişəni üçün*

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, z_i)=0,\quad \operatorname{cov}(x_i, z_i)\neq 0,\quad i=\overline{1,n}$$

şərtləri ödənirsə, onda belə z_i *dəyişəninə instrumental dəyişən deyilir.*

x_i stoxastik reqressorları ilə ε_i təsadüfi faktorları arasında korreyasiya asılılığı mövcud olduqda intrumental dəyişənin modelə daxil olunması, x_i dəyişəninin α_1 əmsalının tutarlı qiymətləndirilməsinin alınmasına imkan verir. İnstrumental dəyişən ekzogen dəyişən hesab edilir o mənada ki, bu dəyişən $y_i=\alpha_0+\alpha_1 x_i+\varepsilon_i$ baxılan tənliyindən kənarda müəyyənləşdirilir. Onda x_i dəyişəni baxılan kontekstdə endogen dəyişən hesab olunur. Çünki, bu tənlikdə o səhvlərlə korrelə olunur və x_i-nin qiymətləri ε_i-lə birgə müəyyənləşdirilir.

İnstrumental dəyişənlərindən istifadə etməklə alınan qiymətləndirirmələri $\hat{\alpha}_{0IV}$, $\hat{\alpha}_{1IV}$ (və ya $\hat{\alpha}_0^{IV}$, $\hat{\alpha}_1^{IV}$) işarə edək. Burada İV-indeksi İnstrumental Variables (instrumental dəyişənlər) mənasındadır. *Belə qiymətləndirmələrin alınması üsuluna instrumental dəyişənlər üsulu deyilir.*

Yenidən (6.4) Keyns isteklak sisteminə qayıdaq. Bu model üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtləri nəzərə alsaq, $\operatorname{cov}(y_t, \varepsilon_t)=\dfrac{\sigma^2}{1-\alpha_1}\neq 0$ olduğundan, y_t-dəyişəni endogen dəyişəndir. I_t və ε_t təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmadığından, $\operatorname{cov}(I_t, \varepsilon_t)=0$, yəni I_t - ekzogen dəyişəndir.

Çevrilmiş formanın 2-ci tənliyindən istifadə etsək alarıq:

$$\operatorname{cov}(y_t, I_t) = \operatorname{cov}\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_t, I_t\right) = \tag{6.13}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha_1} D(I_t) \neq 0.$$

Deməli, α_1 əmsalının tutarlı qiymətləndirilməsini almaq üçün I_t dəyişənindən instrument kimi istifadə etmək olar. Bu zaman

$$\hat{\alpha}_{1IV} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(C_t - \overline{C})(I_t - \bar{I})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(I_t - \bar{I})} \tag{6.14}$$

qiymətləndirilməsi alınır. $\hat{\alpha}_1$ əmsalının belə İV qiymətləndirilməsini formal olaraq aşağıdakı kimi də almaq olar:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_t + \varepsilon_t$$

struktur tənliyi ilə I_t arasındakı

$$\operatorname{cov}(C_t, y_t) = \operatorname{cov}(\alpha_0, I_t) + \alpha_1 \operatorname{cov}(y_t, I_t) + \operatorname{cov}(\varepsilon_t, I_t)$$

münasibətindən yuxarıdakı şərtlər daxilində alınır ki, $\operatorname{cov}(C_t, y_t) = \alpha_1 \operatorname{cov}(y_t, I_t)$, buradan isə $\alpha_1 = \dfrac{\operatorname{cov}(C_t, I_t)}{\operatorname{cov}(y_t, I_t)}$. Sonra isə, sağdakı nəzəri kovariyasiyaları onların nəzəri analoqları ilə əvəz etməklə

$$\hat{\alpha}_{1IV} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(C_t - \overline{C})(I_t - \bar{I})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(I_t - \bar{I})} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(C_t - \overline{C})(I_t - \bar{I})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})(I_t - \bar{I})}, \tag{6.15}$$

İV qiymətləndirilməsi alınır.

İndi isə, stoxastik reqressorlu çoxdəyişənli (3.4) modeli üçün $z_1,\ldots,z_\ell$ instrumental dəyişənlərinin seçilməsi məsələsinə baxaq. Yanaşmanın mahiyyəti ondan ibarətdir ki, elə yeni

$z_1,...,z_\ell$ dəyişənləri seçilməlidir ki, bu dəyişənlər $x_j,\ j=\overline{1,k}$ dəyişənləri ilə sıx korrelyasiya asılılığında olsunlar və modelin ε qalıqları ilə korrelyasiya asılılığında olmasınlar. $z_i,\ i=\overline{1,\ell}$ dəyişənlərinin sayı reqressorların sayından fərqli ola bilər. Adətən z_i dəyişənlərinin sayı reqressorların sayından çox olur.

Çoxdəyişənli reqressiya halında yuxarıda təhlil etdiyimizə analoji olaraq modelin α parametrlərinin İV qiymətləndirilməsi üçün

$$\hat{\alpha}_{IV}=\left(Z'X\right)^{-1}Z'Y=\left(\frac{1}{n}Z'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}Z'Y\right) \qquad (6.16)$$

qiymətləndirilməsini almaq olar. Burada Z,X,Y dəyişənlərin müşahidə olunan qiymətlərindən ibarət matrislərdir.

Tutaq ki, $\frac{1}{n}Z'X$ matrislər ardıcıllığı $n\to\infty$ olduqda ehtimal mənada müəyyən cırlaşmayan matrisə yığılır. Z-lə ε arasında korrelyasiya olmadığından, $\frac{1}{n}Z'\varepsilon$ həddi ehtimala görə sıfra yığılır. Onda

$$\hat{\alpha}_{IV}=\left(Z'X\right)^{-1}Z'\left(X\alpha+\varepsilon\right)=\alpha+\left(Z'X\right)^{-1}Z'\varepsilon=$$
$$=\alpha+\left(\frac{1}{n}Z'X\right)^{-1}\frac{1}{n}Z'\varepsilon$$

münasibətindən çıxır ki, $\hat{\alpha}_{IV}$ qiymətləndirilməsi tutarlıdır. Ümumi halda, $\hat{\alpha}_{IV}$ qiymətləndirilməsi meyllidir və qiymətləndirmədə kovariasiya matrisi minimal olmur, yəni effektiv deyil. İlkin X dəyişənləri ilə instrumental Z dəyişəni nə qədər sıx korrelə olunursa, $\hat{\alpha}_{IV}$ qiymətləndirilməsi bir o qədər effektiv olur. Bu zaman $\operatorname{cov}(Z,\varepsilon)=0$ şərti ödənilməlidir. Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, $z_j^*=x_j-M_\varepsilon(x_j),\ j=\overline{1,k}$

tipli dəyişənlər optimal instrumental dəyişənlərdir.

Cüt reqressiya halında yeganə X dəyişəni yeganə instrumental Z dəyişəni ilə əvəz olunur və (6.16) düsturu aşağıdakı şəklə düşür:

$$\tilde{\alpha}_{1IV} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}. \qquad (6.17)$$

Ümumiyyətlə, praktiki məsələlərdə instrumental dəyişənlərin seçimi imkanları o qədər də geniş deyil. Hətta ola bilər ki, müşahidə olunan instrumental dəyişənlər yoxdur.

Altıncı fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

6.1.Stoxastik reqressor nədir?
6.2.Stoxastik reqressorlu modellərə ƏKKÜ-nun tətbiqində hansı çətinliklər yaranır?
6.3. Slutski teoreminin mahiyyətini izah edin.
6.4. Hansı şərtlər ödənildikdə stoxastik reqressorlu modellərin ƏKKÜ- ilə əmsallarının qiymətləndirilməsi tutarlıdır?
6.5. Hansı şərtlər ödənildikdə stoxastik reqressorlu modellərin ƏKKÜ- ilə əmsallarının qiymətləndirilməsi həm şərti, həm də şərtsiz meylsizdir?
6.6. Əgər reqressorlar və qalıqlar korrelə olunursa, onda ƏKKÜ- ilə qiymətləndirmənin nəticəsi necə olur?
6.7. İnstrumental dəyişənlər necə xarakteristikalı dəyişənlərdir?
6.8. Modelə daxil olan instrumental dəyişənlər hansı şərtləri ödəməlidir.
6.9. İnstrumental dəyişənlər üsulunun mahiyyətini izah edin.
6.10. Stoxastik reqressorlu çoxdəyişənli modellərin verilənləri hansı şərtləri ödədikdə ƏKKÜ-ilə əmsalların qiymətləndiril-məsi tutarlıdır?

Testlər

6.1. Təsadüfi kəmiyyətin korrelə olunmaması nəyi göstərir?
a) onların arasında xətti əlaqənin olmamasını;
b) onların arasında istənilən əlaqənin olmamasını;
c) onların asılı olmamasını;
d) onların arasında qeyri-xətti əlaqənin olmamasını.

6.2. Reqressorlu xətti modelin əmsalları hansı üsulla qiymətləndirilir?
a) ƏKKÜ;
b) ÜƏKKÜ;
c) momentlər üsulu;
d) qradiyentlər üsulu.

6.3. Reqressorlu modelin qiymərləndirməsi o halda tutarlıdır ki,
a) digər seçimi qiymətləndirmələrlə müqayisədə ən kiçik dispersiyalı olsun;
b) kiçik seçimlər üçün dəqiq qiymətləndirməni versin;
c) onun riyazi gözləməsi qiymətləndirilən parametrə bərabər olsun;
d) böyük seçimlərdə dəqiq qiyməti versin.

6.4. Əgər çoxdəyişənli reqressiya modelində stoxastik x_i reqressorlarının kovariasiya matrisinin determinantı sıfra bərabərdirsə, onda
a) reqressorlardan biri digərlərinin xətti kombinasiyası şəklində göstərilir və reqressiya əmsalları birqiymətli təyin olunmur?
b) reqressorlar arasında korrelyasiya asılılığı yoxdur;
c) reqressiya əmsalları birqiymətli təyin olunmur;
d) ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmədə normal tənliklər sisteminin həlli yoxdur.

6.5. Əgər çoxdəyişənli reqressiya modelində stoxastik reqressorlar və qalıqlar korrelə olunursa, onda ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmə ümumi halda
a) meylli və tutarsız olur;
b) meylli və tutarlı olur;

c) meylsiz və tutarlı olur;
d) meylsiz və tutarsız olur.

6.6. Stoxastik reqressorlu modellərdə instrumental dəyişənlər hansı halda daxil edilir?
a) reqressorların qiymətləri ilə qalıqların qiymətləri arasında korrelyasiya asılılığı olduqda;
b) reqressorların özləri arasında multikollienarlıq olduqda;
c) qalıqlar arasında asılılıq olduqda;
d) stoxastik reqressorların kovariasiya matrisinin determinantı sıfra bərabər olduqda.

6.7. Modelə daxil olan yeni instrumental dəyişənlər hansı şərtləri ödəməlidir?
a) ilkin asılı olmayan dəyişənlərlə korrelə olunmalı, qalıqlarla isə, korrelə olunmamalıdır;
b) ilkin asılı olmayan dəyişənlərlə korrelə olunmamalı, qalıqlarla isə, korrelə olunmalıdır;
c) ancaq asılı olmayan dəyişənlərlə korrelə olunmalıdır;
d) ancaq qalıq hədlərli ilə korrelə olunmalıdır.

6.8. Stoxastik reqressorlu (2.9) modelinə z instrumental dəyişəninin daxil olması üçün hansı şərtlər ödənilməlidir?
a) $\operatorname{cov}(x_i, z_i) \neq 0, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, z_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}$;
b) $\operatorname{cov}(x_i, z_i) = 0, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, z_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}$;
c) $\operatorname{cov}(x_i, z_i) \neq 0, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, z_i) \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$;
d) $\operatorname{cov}(x_i, z_i) = 0, \quad \operatorname{cov}(\varepsilon_i, z_i) \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$.

6.9. İnstrumental dəyişənlərin tətbiqinda hansı problemlər yarana bilər?
a) müşahidələrin sayı çox olmadıqda qiymətləndirmənin meylsizliyi təmin olunmur;
b) alınmış qiymətləndirmənin tutarlılığı təmin olunmur;
c) qiymətləndirmənin asimtotik normallığı təmin olunmur;
d) qiymətləndirmədə problemlər ortaya çıxmır.

6.10. Əgər stoxastik reqressorlu çoxdəyişənli modeldə izahedici dəyişənlərlə reqressiyanın səhvləri korrelə olunmursa, onda ƏKKÜ-ilə əmsalların qiymətləndirilməsi
a) meylsiz və tutarlıdır;
b) meylli və tutarsızdır;
c) meylsiz və tutarsızdır;
d) meylli və tutarlıdır.

Çalışmalar
Məsələ 6.1. Tutaq ki, (3.4) modeli dinamik stoxastik reqressorlu modeldir (dinamik dedikdə, i-dəyişəni əvəzinə zaman anları başa düşülür), müəyyən qiymətləri müşahidə olunmayan z dəyişəni vardır ki, $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \beta_1 z_t + v_t$, $x_t = \lambda + \delta z_t + \xi_t$ tənliklərində β, γ əmsalları sıfırdan kifayət qədər fərqlidir və x_t eyni paylanmaya malik olan stoxastik reqressordur. $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t$ modeli üçün x_t reqressoru ilə ε_t səhvləri arasındakı qarşılıqlı asılılığın kovariasiya əmsalını tapın.
Cavab: $\mathrm{cov}(x, \varepsilon) = \beta_1 \delta \,\mathrm{cov}(z, z)$.

Məsələ 6.2. Tutaq ki, x_j reqressorunun qiymətləndirilməsində təsadüfi u_j xətasına yol verilir və $M(u_{tj}) = 0$. Yəni, modelin qurulması üçün x_{tj}-nin dəqiq müşahidə qiyməti deyil, onun xətalarla $(x_{tj})^* = x_{tj} + u_{tj}$ qiyməti verilir və faktiki olaraq (3.4)-ün analoqu $Y = X\alpha + v$ reqressiyasında α qiymətləndirilir. $Y = X\alpha + \varepsilon$ ilkin modeli üçün hansı dəyişənin qeyd olunmuş qiymətləri və hansı təsadüfi tərkib arasında korrelyasiya mövcuddur? Bu asılılığın korrelyasiya əmsalını tapın.
Cavab: x^*-la təsadüfi v tərkibi arasında; $\mathrm{cov}(x^*, v) = -\mathrm{cov}(U, U)\alpha$.

Məsələ 6.3. Tutaq ki, $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t$, $t = 1,2,...,n$ reqressiya modelində eyni paylanmaya malik x_t reqressoru ε-la cari zaman anında deyil, ondan əvvəlki zaman anlarında korrelə olunur. Göstərin ki, onun α_1 qiymətləndirilməsi tutarlıdır, lakin meylsizdir.

Məsələ 6.4. Tutaq ki, $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t$, $t = 1,2,...,n$ reqressiya tənliyi instrumental dəyişənlərlə qiymətləndirilir və x_t üçün instrumental olaraq z_t dəyişəni qəbul olunur. ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmədə $\hat{\alpha}_{0IV}$, $\hat{\alpha}_{1IV}$ instrumental qiymətləndirmələri hansı tənliklər sisteminin həlli olunmalıdır?

Cavab: $$\begin{cases} n\hat{\alpha}_{0IV} + \left(\sum\limits_{t=1}^{n} x_t\right)\hat{\alpha}_{1IV} = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t; \\ \left(\sum\limits_{t=1}^{n} z_t\right)\hat{\alpha}_{0IV} + \left(\sum\limits_{t=1}^{n} z_t x_t\right)\hat{\alpha}_{1IV} = \sum\limits_{t=1}^{n} z_t y_t. \end{cases}$$

Məsələ 6.5. Tutaq ki, y_t^* və x_t^* dəyişnləri $y_t^* = \alpha_0 + \alpha_1 x_t^*$ düsturu ilə asılıdır, lakin dəqiq qiymətlər əvəzinə $y_t = y_t^* + u_t$ və $x_t = x_t^* + v_t$ ölçülmüş qiymətləri müşühidə olunur (burada $v_t \sim N(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$, u_t və v_t, istənilən t və s üçün asılı deyil). $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t$ tənliyinin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsində ε_t səhvləri standart xətti modelin şərtini ödəyirmi? $\operatorname{cov}(x_t, \varepsilon_t)$-ni və $\hat{\alpha}_1$ qiymətləndirməsinin ehtimal mənada limitini tapın.

Cavab: ödəyir; $\operatorname{cov}(x_t, \varepsilon_t) = -\alpha_1\sigma_v^2 \neq 0$; $\overset{P}{\lim}\, \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 - \dfrac{\alpha_1\sigma_v^2}{\sigma_x^2 + \sigma_v^2}$

(yəni α_1 parametrinin qiymətləndirilməsi asimptotik meylli və tutarsızdır).

Məsələ 6.6. Tapşırıq 6.5-dəki reqressiya tənliyinin $\hat{\alpha}_{0IV}$, $\hat{\alpha}_{1IV}$ instrumental qiymətləndirməsini tapın.

Cavab: $\hat{\alpha}_{0IV} = \bar{y} - \hat{\alpha}_{1IV}\bar{x}; \quad \hat{\alpha}_{1IV} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n}(z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})}.$

Məsələ 6.7. Tutaq ki, $y_{ti} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{ti} + u_{ti}$. Burada $u_{ti} = \varepsilon_{ti} + \alpha_1 d_{ti}$ və d_{ti} reqressorunun qiymətləri məlum deyil. $D(x_{ti}) = D(d_{ti}) = 2;\ D(\varepsilon_{ti}) = 1,\ \text{cov}(x_{ti}, d_{ti}) = -2,$ $\text{cov}(\varepsilon_{ti}, d_{ti}) = 0,\quad \text{cov}(\varepsilon_{ti}, x_{ti}) = 0$ qəbul edək. ƏKKÜ -üsulu ilə α_1-in qiymətləndirməsinin tutarlı, meylsiz olub-olmadığını müəyyənləşdirin.
Cavab: ƏKKÜ qiymətləndirməsi tutarsız və meyllidir.

Məsələ 6.8. Tutaq ki, 6.7-ci tapçırıqda olan reqressiya tənliyində problemli x_{ti} reqressoru üçün $(\text{cov}(x_{ti}, \varepsilon_{ti}) \neq 0)$ z_{ti} instrumental dəyişəni məlumdur ($\text{cov}(z_i, x_i) = 1,\ \text{cov}(z_i, u_i) = 0$). $\hat{\alpha}_{1IV}$ qiymətləndirməsinin tutarlı olub-olmadığını müəyyənləşdirin.
Cavab: tutarlıdır.

Məsələ 6.9. 6.7-ci tapşırıqda olan reqressiya modelində $\text{cov}(x_{ti}, \varepsilon_{ti}) \neq 0$ olduqda instrumental z dəyişəni daxil etməklə əmsalların qiymətləndirilməsi mərhələlərini göstərin və müəyyən cədvəl verilənləri üçün onları qiymətləndirin.
Göstəriş. 1-ci mərhələdə x_{ti} dəyişənlərinin hər biri üçün z_{ti} instrumental dıəyişəninə nəzərən reqressiyanı qurub $\hat{x}_{ti}$ tapın. 2-ci mərhələdə x_{ti}-ni $\hat{x}_{ti}$-lə əvəz edib ilkin modelin $\hat{\alpha}_{0IV}$, $\hat{\alpha}_{1IV}$, $\hat{\alpha}_{2IV}$ qiymətləndirilməsini alın.

FƏSİL VII

EYNİZAMANLI TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

§7.1. Modelin struktur və çevrilmiş formaları

İqtisadi proseslər və təzahürlər çoxlu sayda parametrli mürəkkəb qarşılıqlı əlaqələrlə xarakterizə olunan mürəkkəb sistemlərdən ibarətdir. İqtisadi proseslərin yalnız bir reqresiya tənliyi vasitəsilə tədqiqi çox sadə hal hesab edilir. Bu zaman əsasən fərz edilir ki, faktorları bir-birindən asılı olmayaraq dəyişdirmək olar və asılı dəyişənin (nəticə faktorunun) dəyişməsi öyrənilən sistemin davranışına təsir etmir. Mürəkkəb iqtisadi sistemlərdə isə, ümumilikdə belə fərziyyə yerinə yetirilə bilməz, çünki sistemin qarşılıqlı əlaqəli meyarlarından hər hansı birinin dəyişməsi bütün sistemin meyarlarının dəyişməsinə səbəb olur. Belə vəziyyətlərdə ekonometrik modellər ekonometrik tənliklər sistemi formasında qurulur. Belə yanaşma daha geniş makroiqtisadi tədqiqatlarda, həm də, tələb və təklifin araşdırılmasında tətbiq edilir. Məsələn, bazar iqtisadiyyatında tarazlıq qiyməti tələb və təklifin qarşılıqlı əlaqəsinin nəticəsi kimi qəbul olunur. Bu zaman malın təklifi ciddi dərəcədə malın qiyməti mühitindən, qiymət isə, istehlakçının orta gəlirinin miqdarından və bazarda malın təklif miqdarından asılıdır. Uyğun model aşağıdakı tənliklər sistemi ilə müəyyənləşdirilir:

$$\begin{cases} Q_t = a_{10} + b_{11}P_t + \varepsilon_{1t}, \\ P_t = a_{20} + b_{21}Q_t + a_{11}I_t + \varepsilon_{2t}, \end{cases} \tag{7.1}$$

burada P_t-malın bir vahidinin orta qiyməti, Q_t-təklif olunan malın miqdarı, I_t-orta gəlir səviyyəsi, t-carı zaman periodu, $a_{10}, a_{20}, b_{11}, b_{21}$- sabit parametrlər, $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$-tənliklərin səhvləridir.

Ümumiyyətlə, iqtisadi göstəricilər (asılı dəyişənlər) arasında əlaqələrin tədqiqində eynizamanlı (struktur) tənliklər sistemindən istifadə olunur. Belə modellər çoxlu sayda faktorlar arasında asılılığı əks etdirilir və deməli, real iqtisadi proseslərə daha tam uyğundur. Əvvəlki fəsildə qeyd edildiyi kimi, reqressorların təsadüfi tərkiblərlə korrelə olunmasının bir səbəbi də odur ki, müəyyə faktorlar ola bilər ki, eyni zamanda həm reqressorların özünə, həm də reqressorların qeyd olunmuş qiymətlərində izaholunan dəyişənə təsir etsin. Başqa sözlə, baxılan iqtisadi vəziyyətdə izah olunan dəyişənin və reqressorun qiymətləri eynizamanda xarici faktorların təsiri ilə formalaşır. Bu o deməkdir ki, baxılan model tam deyil. Onu əlavə tənliklərlə tamamlamaq lazımdır ki, bu tənliklərdə izaholunan dəyişənlər qismində reqressorların özü olsun. Ona görə də, eynizamanlı tənliklər sisteminin öyrənilməsinə zərurət yaranır.

Eynizamanlı tənliklər sistemində dəyişənlər üç hissəyə bölünür:

1) Endogen dəyişənlər. Bu dəyişənlər modelin daxilində (sistemin daxilində) müəyyənləşdirilən bir-birindən asılı dəyişənlərdir. Sistemin i-ci tənliyində olan endogen dəyişən həmin tənliyin təsadüfi tərkibi ilə korrelə olunur.

2) Ekzogen dəyişənlər. Bu dəyişənlər sistemdən kənarda təyin olunur. Ekzogen dəyişənlər bütün zaman anlarında sistemin bütün tənliklərində təsadüfi tərkiblə korrelə olunmur.

3) Əvvəlcədən bilinən dəyişənlər. Əvvəlcədən bilinən dəyişənlər ardıcıl zaman anlarında aparılan müşahidələrin təsvirini ifadə edən sistemlərə aiddir. Endogen dəyişənlərin qiymətləri kimi, əvvəlcədən bilinən dəyişənlərin qiymətləri də, sistemin daxilində müəyyənləşdirilir. Lakin, əvvəlcədən bilinən dəyişənlərin i-ci tənlikdə t zamanında qiyməti həmin tənlikdəki təsadüfi dəyişənin qiyməti ilə $t, t+1, t+2$ anları üçün korrelə olunmamalıdır. Məsələn,

$$\begin{cases} Q_t = a_1 P_t + a_2 Q_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ P_t = b_1 Q_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \end{cases} \tag{7.2}$$

sistemində Q_t və P_t dəyişənləri endogen, Q_{t-1}-dəyişəni isə, əvvəlcədən bilinən dəyişəndir.

n sayda asılı y_i, $i = \overline{1,n}$ dəyişənli ekonometrik tənliklər sistemi ümumi halda aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + ... + b_{1n} y_n + a_{11} x_1 + ... + a_{1k} x_k + \varepsilon_1; \\ y_2 = b_{21} y_1 + b_{23} y_3 + ... + b_{2n} y_n + a_{21} x_1 + ... + a_{2k} x_k + \varepsilon_2; \\ .... \\ y_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + ... + b_{nn-1} y_{n-1} + a_{n1} x_1 + ... + a_{nk} x_k + \varepsilon_n \end{cases} \tag{7.3}$$

və ya matris forması

$$BY + AX = \varepsilon, \tag{7.4}$$

burada

$$B = \begin{bmatrix} -1 & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & -1 & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n2} & b_{n2} & ... & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{2k} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ ... \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Tərif 7.1. (7.3) *sisteminə eynizamanlı, qarşılıqlı asılı tənliklər sistemi deyilir. Bu sistem modelin bütün dəyişənləri arasındakı qarşılıqlı əlaqəni əks etdirdiyi üçün, ona həm də modelin struktur forması deyilir.*

Tərif 7.2. (7.3) *sistemində xüsusi halda,* y_i *asılı dəyişənləri yalnız ekzogen* x_i *dəyişənlərindən asılı olduqda, sistemə asılı olmayan tənliklər sistemi deyilir.*

Asılı olmayan tənliklər sistemi ümumi halda belə yazılır:

$$\begin{cases} y_1 = a_{01} + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1; \\ y_2 = a_{01} + a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{0n} + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n \end{cases} \tag{7.6}$$

Bu sistemin tənliklərində təsiredici faktorlar dəyişə bilər. Məsələn, 4 nəticə faktorlu sistemdəki asılılıqlar

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); \\ y_2 &= f_2(x_1, x_3, x_4, x_5); \\ y_3 &= f_3(x_2, x_3, x_5); \\ y_4 &= f_4(x_3, x_4, x_5) \end{aligned}$$

kimi göstərilə bilər. Bu və ya digər faktorun sistemin müəyyən tənliyində iştirak etməməsinin səbəbləri ola bilər. Bu səbəblərdən: a) nəticə faktoruna onun qeyri-təbii təsiri (bu faktor üçün t-kriterinin və ya xüsusi F-kriterinin əhəmiyyətsiz qiymətləri); b) modelə faktorun daxil olunmasının iqtisadi məqsədə uyğun olmaması. Sistemin hər bir tənliyinə ayrıca baxmaqla, onun parametrlərini qiymətləndirmək üçün ƏKKÜ-nu tətbiq etmək olar. Bu sistemin tənlikləri reqressiya tənlikləridir.

Tərif 7.3. *Əgər* (7.3) *sistemində hər bir asılı* y_i *dəyişəni yalnız* x_i *dəyişənlərinin və sistemin əvvəlki tənliklərində olan* y_i *dəyişəninin funksiysıdırsa, onda belə sistemə rekursiz tənliklər sistemi deyilir.*

Rekursiv tənliklər sistemi ümumi halda aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \varepsilon_1; \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \varepsilon_2; \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3k}x_k + \varepsilon_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nk}x_k + \varepsilon_n \end{cases} \quad (7.7)$$

Bu sistemdə bir tənlikdə olan y_i asılı dəyişəni digər tənlikdə səbəbiyyət faktoru kimi göstərilir.

Asılı olmayan və rekursiv tənliklər sistemində asılı dəyişənlərin qarşılıqlı təsirləri mövcud olmadığından, reqressiya analizinin şərtləri pozulmur və ona görə də, a_{ij}, b_{ij} struktur əmsallarının müəyyənləşdirilməsi üçün ƏKKÜ-na tətbiq etmək olar.

(7.3), (7.6), (7.7) modellərində sistemin tənliklərində sərbəst həddin olmaması dəyişənlərin qiymətlərinin əvvəlcədən mərkəzləşdirilməsi (orta səviyyədən meyllərlə ifadə olunurlar) ilə şərtləndirilir.

Qeyd edək ki, modelin struktur forması nəinki parametrləri (sabitlər ki, onları təyin etmək lazımdır) özündə saxlayan tənliklərdən, həm də müəyyən eyniliklərdən ibarət ola bilər. Bu eyniliklər parametrlərlə verilmir, ancaq dəyişənlər arasında müəyyən qeyd olunmuş münasibəti ifadə edir.

(7.3) sistemində endogen dəyişənlər arasında qarşılıqlı əlaqə mövcud olduğundan, burada izahedici dəyişənlərlə təsadüfi tərkiblər arasında asılılığın olmaması şərti pozulduğundan, ƏKKÜ-nun tətbiqi parametrlərin tutarsız, meylli qiymətləndirilməsi ilə nəticələnir.

Tərif 7.4. *Əgər müəyyən riyazi çevirmələrlə* (7.3) *sisteminin sağ tərəfindən asılı dəyişənləri yox etmək mümkündürsə, onda belə çevirmələrlə alınan yeni sistem* *modelin çevrilmiş forması deyilir.*

(7.3) struktur sisteminin yeni çevrilmiş formasını aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + ... + \delta_{1k}x_k + \xi_1; \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + ... + \delta_{2k}x_k + \xi_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + ... + \delta_{nk}x_k + \xi_n \end{cases} \qquad (7.8)$$

burada δ_{ij} parametrləri struktur dəyişənlərdər asılı cəbri funksiyalardır və çevrilmiş əmsallar adlanır, ξ_i-lər çevrilmiş modelin səhvləridir.

Sərbəst hədli üş tənlikli (7.6) sisteminə baxaq. Onun (7.8) çevrilmiş formasının tənlikləri uyğun olaraq A_1, A_2, A_3 sərbəst həddli olur. Bu modellərdə fərq ondan ibarətdir ki, struktur sistemin hər bir tənliyində ekzogen dəyişənlərlə endogen dəyişənlər arasındakı asılılıq müəyyən iqtisadi konsepsiyaya əsaslanmaqla təbiidir.

Struktur və çevrilmiş modellərin əmsalları müəyyən qeyri-xətti münsibətlərlə əlaqəlidir. Bunu sadə iki tənlikli struktur modeldə göstərək:

$$\begin{cases} y_1 = a_{01} + b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_{01} + b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases} \qquad (7.9)$$

struktur sistemi üçün uyğun çevrilmiş model belə olur:

$$\begin{cases} y_1 = A_1 + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \xi_1 \\ y_2 = A_2 + \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \xi_2 \end{cases} \qquad (7.10)$$

(7.9) -sisteminin 1-ci tənliyində y_2-ni digər həddlərlə ifadə edək:

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 - a_{11}x_1 - a_{01} - \varepsilon_1}{b_{12}} \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{02} + \varepsilon_2. \end{cases} \tag{7.11}$$

(7.11) -in sağ tərəflərini birləşdirməklə alırıq:

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1-b_{21}b_{12}}x_1 + \frac{a_{22}b_{12}}{1-b_{21}b_{12}}x_2 + \frac{a_{01}+a_{02}b_{12}}{1-b_{21}b_{12}} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2 b_{12}}{1-b_{21}b_{12}}. \tag{7.12}$$

Onda (7.10) -un uyğun əmsalları belə olur:

$$\begin{aligned} &A_1 = \frac{a_{01}+a_{02}b_{12}}{1-b_{21}b_{12}}, \ \delta_{11} = \frac{a_{11}}{1-b_{21}b_{12}}, \\ &\delta_{12} = \frac{a_{22}b_{12}}{1-b_{21}b_{12}}, \ \xi_1 = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2 b_{12}}{1-b_{21}b_{12}}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Analoji qayda ilə göstərilir ki, (7.10) sisteminin 2-ci tənliyinin uyğun əmsalları

$$\begin{aligned} &A_2 = \frac{a_{01}b_{21}+a_{02}}{1-b_{21}b_{12}}, \ \delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1-b_{21}b_{12}}, \\ &\delta_{22} = \frac{a_{22}}{1-b_{21}b_{12}}, \ \xi_1 = \frac{\varepsilon_1 b_{21}+\varepsilon_2}{1-b_{21}b_{12}}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Çevrilmiş formalı modellərin tənlikləri asılı olmadıqlarından, sistemin δ_{ij} parametrlərini adi ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmək olar. δ_{ij} parametrlərinin alınmış ədədi qiymətləri endogen dəyişənlərin model qiymətlərinin əvvəlcədən bilinən dəyişənlərlə ifadə olunmasına imkan verir. Bununla modelin qurulması prosesi bitmir, çünki iqtisadi interpretasiya üçün ancaq a_{ij}, b_{ij} struktur əmsallarının qiymətləri olmalıdır. ƏKKÜ-nu tətbiq etməklə, əvvəlcə çevrilmiş sistemin δ_{ij} əmsallaını qiymətləndirmək olar, sonra isə, endogen dəyişənlərin qiymətlərini ekzogen dəyişənlərlə qiymətləndirmək lazımdır. Çevrilmiş formaya keçməyin mənfi cəhəti ondan ibarətdir ki, endogen dəyişənlər arasında qarşılıqlı əlaqənin əmsalları aşkar şəkildə mövcud olmur.

§7.2. Modelin struktur formasının identifikasiyası

§7.1-də qeyd edildiyi kimi, modelin çevrilmiş formasının parametrlərinin qiymətləndirilməsi ciddi çətinliklər törətmir. Sonrakı mərhələdə struktur formalı modelin əmsallarının çevrilmiş modelin əmsallarının qiymətləndirilmələri ilə ifadə olunmasıdır. Burada identifikasiya problemi ortaya çıxır. Bu problemin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, struktur modelin əmsallarını çevrilmiş modelin əmsalları ilə həmişə birqiymətli ifadə etmək mümkün olmur. Bu onunla əlaqədardır ki, ümumi halda modelin struktur və çevrilmiş formaları fərqli sayda parametrləri özündə saxlayır. Bu parametrlərin uyğun olaraq struktur və çevrilmiş formada sayları $n(n-1)+nk$ və nk-dır. Parametrlərin sayını bərabərləşdirmək üçün modelin müəyyən struktur əmsallarının sıfra çevrilməsi şərtinin qoyulması zəruridir, məsələn $a_{11}+b_{12}=0$ şərtinin ödənilməsini zəruri şərt hesab etmək olar.

Nümunə kimi, üç endogen və üç ekzogen dəyişənli aşağıdakı modelə baxaq:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1; \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2; \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \varepsilon_3. \end{cases} \tag{7.15}$$

Bu modeldə sadəlik üçün bütün dəyişənlər mərkəzləşdirilmişdir, yəni onlar orta səviyyədən meyllərilə ifadə olunmuşdur və $a_{01}, a_{02}, a_{03}=0$, belə ki, onlar modelin identifikasiya məsələsinin həllinə təsir etmir. Model 15 struktur əmsallıdır. Onlardan 6-sı endogen, 9-u ekzogen dəyişənlərin əmsallarıdır. Burada $n=3, k=3$ və $3(3-1+3)=15$. Çevrilmiş model $3\cdot 3=9$ əmsallıdır və bu forma belədir:

$$\begin{cases} y_1=\delta_{11}x_1+\delta_{12}x_2+\delta_{13}x_3+\xi_1; \\ y_2=\delta_{21}x_1+\delta_{22}x_2+\delta_{23}x_3+\xi_2; \\ y_3=\delta_{31}x_1+\delta_{32}x_2+\delta_{33}x_3+\xi_3. \end{cases} \tag{7.16}$$

Buradan alınır ki, (7.16) sisteminin 9 əmsalına əsasən (7.15) struktur modelinin 15 əmsalının tapılması məsələsində həllərin yeganəliyi pozulur. Yeganə həllin tapılması üçün zəruri şərt olaraq meyarlar arasında zəif asılılığın olması kimi, uyğun struktur əmsallar sıfr olmalıdır. (7.15) modelində $b_{13}=b_{31}=a_{12}=a_{21}=a_{23}=a_{32}=0$ qəbul etməklə, struktur əmsalların sayını 9-a endirmək olar. Bu zaman yeni struktur modeli üçün çevrilmiş forma (7.16) kimi olur.

İdentifikasiya olunma nöqteyi nəzərdən struktur modelləri üç hissəyə ayırmaq olar:

- <u>İdentifikasiya olunan (eyniləşdirilən) sistemlər</u>. Bu sistemlərdə modelin struktur və çevrilmiş formalarında parametrlərin sayı eynidir və struktur əmsallar çevrilmiş modelin əmsalları vasitəsilə birqiymətli şəkildə qiymətləndirilir;
- <u>İdentifikasiya olunmayan (eyniləşdirilməyən) sistemlər</u>. Bu sistemlərdə struktur parametrlərin sayı çevrilmiş sistemdəki parametrlərin sayından artıq olur və struktur parametrlər çevrilmiş formalı modelin parametrləri vasitəsilə təyin olunmur;
- <u>Həddindən artıq identifikasiya olunan (eyniləşdirilən) sistemlər</u>. Belə sistemlərdə çevrilmiş sistemin parametrlərin sayı struktur parametrlərin sayından çox olar. Bu halda çevrilmiş sistemin parametrlərinin qiymətləndirilməsi vasitəsilə struktur parametrlərin qiymətlərini birqiymətli ifadə etmək olmur.

Struktur modelin identifikasiyası məsələsinin tədqiqində hər bir tənliyin yoxlanılması zəruridir. Model o zaman identifikasiya olunan hesab edilir ki, sistemin hər bir tənliyi identifikasiya olunsun. Əgər bu tənliklərin heç olmazsa biri idientifikasiya olunmursa, onda model identifikasiya olunan hesab edilmir. Həddindən artıq identifikasiya olunan model, ancaq identifikasiya olunan və həddindən artıq identifikasiya olunan tənliklərdən ibarətdir.

İdentifikasiya olunma şərtləri. H-ilə tənlikdə iştirak edən endogen dəyişənlərin sayını, D-ilə isə, baxılan tənlikdə iştirak etməyən, lakin sistemin digər tənliklərində iştirak edən əvvəlcədən bilinən dəyişənlərin sayını işarə edək. İdentifikasiya olunmanın zəruri şərtləri aşağıdakılardır

Tənlik identifikasiya olunursa, onda $D+1=H$.

Tənlik identifikasiya olunmursa, onda $D+1<H$.

Tənlik həddindən artıq identifikasiya olunursa, onda $D+1>H$.

Aşağıdakı stoxastik modelə baxaq:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon_1; \\ y_2 = a_2 + b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2; \\ y_3 = a_3 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varepsilon_3. \end{cases} \tag{7.17}$$

Bu sistemdə üç (y_1, y_2, y_3) endogen və dörd (x_1, x_2, x_3, x_4) ekzogen dəyişənləri var. 1-ci tənlikdə 3 endogen dəyişən olduğundan, $H=3$; Burada x_3 və x_4 iştirak etmədiyindən, $D=2$. Onda $D+1=H$ $(2+1=3)$. Bu onu göstərir ki, 1-ci tənlik identifikasiya olunandır. 2-ci tənlikdə $H=2$ (y_1 və y_2) $D=1$(x_4), yəni $D+1=H$; 3-cü tənlikdə isə, $H=3$ (y_1, y_2, y_3) və $D=2$ (x_1 və x_2), yəni, $D+1=H$. Deməli, (7.15) sistemi identifikasiya olunandır.

İndi tutaq ki, (7.15) sistemində $a_{21}=a_{33}=0$. Alınan yeni sistem üç endogen və 4 ekzogen dəyişəni əhatə etdiyindən, 1-ci tənlik identifikasiya olunur. 2-ci tənlik üçün

$H=2$, $D=2$ və $D+1>H$ olduğundan, bu tənlik həddindən artıq identifikasiya olunur. 3-cü tənlikdə $H=3$, $D=3$ olur və $D+1>H$. Bu tənlik də əvvəlki tənlikdəki xassəlidir.

Əgər (7.15) sisteminin sonuncu tənliyi

$$y_3 = a_3 + b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4 + \varepsilon_3$$

şəklindədirsə, onda bu tənlik identifikasiya olunmur, çünki $H=3$, $D=1$ və $D+1<H$. Uyğun olaraq onun parametrlərinin statistik həlləri mövcud olmur.

Qeyd edək ki, yuxarıdakı identifikasiya şərtləri zəruri şərtlərdir. Lakin kafi şərtlər deyil

(7.3) struktur sistemində olan endogen dəyişənlərin sayını M -ilə işarə edək.

Teorem 7.1. *Əgər (7.3) eynizamanlı struktur sistemin hər hansı tənliyində iştirak etməyən, lakin digər tənliklərdə iştirak edən dəyişənlərin (endogen və ekzogen) əmsallarından düzəlmiş matrisin determinantı sıfrdan fərqlidirsə və onun ranqı $M-1$-dən kiçik deyilsə, onda həmin tənlik identifikasiya olunandır.*

Modelin identifikasiyasının araşdırılmasında teorem 7.1-in şərtindəki matrisin determinantının sıfırdan fərqli olmasının yoxlanılması onunla əlaqədardır ki, elə hal ola bilər ki, sistemin bütün tənlikləri üçün yuxarıdakı zəruri identifikasiyalılıq şərtləri ödənilir, lakin matrisin determinantı sıfır olur. Bu halda zəruri şərtlər ödənilir, kafi şərtlər ödənilmir. Kafi şərtlər ödənilmədikdə isə, tənlik identifikasiya olunmur.

İqtisadi modellərdə parametrlərinin statistik qiymətləndirilməsi nəzərdə tutulan tənliklərdən başqa, eynizamanlı tənliklər sistemində dəyişənlərin əmsalları ± 1 olan balans eynilikləri də, iştirak edə bilər. Bu halda həmin eyniliklər üçün identifikasiyalılığın yoxlanılması lazım deyil.

Nümunə 7.1. Tutaq ki, iqtisadi model aşağıdakı tənliklər sistemi ilə verilir:

$$\begin{cases} y_1 = a_{01} + b_{13}y_3 + b_{14}y_4 + \varepsilon_1; \\ y_2 = a_{02} + b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + \varepsilon_2; \\ y_3 = a_{03} + b_{34}y_4 + a_{31}x_1 + \varepsilon_3; \\ y_4 = y_1 + y_2 + x_2. \end{cases} \tag{7.18}$$

Burada 4 endogen dəyişən vardır, belə ki, onlardan y_4 dəyişəni eyniliklə verilmişdir. Ona görə də, statistik həll sistemin ancaq 1-ci üç tənliyi üçün zəruridir və bunun üçün onların identifikasiyası lazımdır. Modelin 1-ci tənliyi üçün $H=3$, $D=2$ və $D+1=H$ zəruri şərti ödənilir. Teoremdə qeyd olunan matrisin aşağıdakı cədvələ əsasən ranqı 3-ə, onun determinantı $(-a_{31})$-ə bərabərdir.

Tənlik	y_2	x_1	x_2
2	-1	a_{21}	0
3	0	a_{31}	0
4	1	0	1

2-ci tənlik də, identifikasiya olunandır. Çünki, $H=2, D=1$ və $D+1=H$ zəruri şərti ödənilir və

Tənlik	y_1	y_4	x_2
1	-1	b_{14}	0
3	0	b_{34}	0
4	1	-1	1

cədvəlinə əsasən teoremdəki matrisin ranqı 3-ə, onun determinantı $(-b_{34})$-ə barabərdir.

Analoji olaraq alırıq ki, 3-cü tənlik də identifikasiya olunur. Burada $H=2,\ D=1,\ D+1=2,$

Tənlik	y_1	y_2	x_2
1	-1	0	0
2	0	-1	0
4	1	1	1

cədvəlindən teoremdəki matrisin ranqı 3-ə, determinantı 1-ə bərabərdir.

§7.3. Struktur modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsi

Eynizamanlı tənliklər sisteminin struktur əmsalları modelin formasından asılı olaraq onun identifikasiyası nöqteyi nəzərdən müxtəlif üsullarla qiymətləndirilə bilər. Əgər modelin bütün tənlikləri identifikasiya olunursa, onda parametrlərin qiymətləndirilməsi Dolayı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (DƏKKÜ)-ilə qiymətləndirilə bilər. Həddindən artıq identifikasiya olunan modellərin bütün tənlikləri bu xassəlidirsə, onda adətən aşağıdakı üsullardan istifadə olunur:
- İkiaddımlı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (İƏKKÜ);
- Üçaddımlı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (Üçaddımlı ƏKKÜ);
- Maksimal Doğruya Oxşarlıq Üsulu (MDOÜ).

Əgər model həm identifikasiya olunan və həm də, həddindən artıq identifikasiya olunan tənliklərlə verilirsə, onda həmin tənliklərə uyğun olaraq DƏKKÜ və İƏKKÜ (ÜƏKKÜ) üsullarını tətbiq etməklə parametrlərinin ststistik qiymətləndirilməsini almaq olar.

§7.3.1. Dolayı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (DƏKKÜ)

Bu üsulun mahiyyətini daha aydın şərh etmək üçün iki tənlikli (7.9) sisteminə baxaq. Onun çevrilmiş (7.10) formasında hər bir tənliyə ƏKKÜ-nu tətbiq etmək olar. Hesablamaların sadələşdirilməsi üçün fərz edək ki, y_1, y_2 dəyişənləri mərkəzləşdirilmişdır, yəni $a_{01} = a_{02} = 0$. Bu halda $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$ parametrlərinin ƏKKÜ-ilə aşağıdakı qiymətləndirmələri alınır:

$$\hat{\delta}_{11} = \frac{(x_2, x_2)(x_1, y_1) - (x_1, x_2)(x_2, y_1)}{(x_1, x_1)(x_2, x_2) - (x_1, x_2)^2};$$

$$\hat{\delta}_{12} = \frac{(x_2, x_1)(x_1, y_1) - (x_1, x_2)(x_1, y_1)}{(x_1, x_1)(x_2, x_2) - (x_1, x_2)^2};$$

$$\hat{\delta}_{21} = \frac{(x_2, x_2)(x_1, y_2) - (x_1, x_2)(x_2, y_2)}{(x_1, x_1)(x_2, x_2) - (x_1, x_2)^2}; \qquad (7.19)$$

$$\hat{\delta}_{22} = \frac{(x_1, x_1)(x_2, y_2) - (x_1, x_2)(x_1, y_2)}{(x_1, x_1)(x_2, x_2) - (x_1, x_2)^2};$$

burada $(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n} x_{ti} x_{tj}$, $(y_i, y_j) = \sum_{t=1}^{n} y_{ti} y_{tj}$, $(x_i, y_j) = \sum_{t=1}^{n} x_{ti} y_{tj}$, $x_{ti}, x_{tj}, y_{ti}, y_{tj}$-verilənləri x_i, x_j, y_i, y_j dəyişənlərinin qiymətləridir. (7.13) və (7.14) münsibətlərindən $a = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ parametrlərini $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$ parametrləri ilə ifadə etmək olar:

$$\hat{a}_{11} = \frac{\hat{\delta}_{11}\hat{\delta}_{22} - \hat{\delta}_{21}\hat{\delta}_{12}}{\hat{\delta}_{22}}, \ \hat{a}_{22} = \frac{\hat{\delta}_{11}\hat{\delta}_{22} - \hat{\delta}_{21}\hat{\delta}_{12}}{\hat{\delta}_{11}} \qquad (7.20)$$

$$\hat{b}_{12} = \frac{\hat{\delta}_{22}}{\hat{\delta}_{12}}, \ \hat{b}_{21} = \frac{\hat{\delta}_{21}}{\hat{\delta}_{11}}.$$

(7.20) qiymətləndirmələrinə DƏKKÜ-ilə qiymətləndirmələr deyilir. Bu qiymətləndirmələr tutarlıdır.

DƏKKÜ-nun tətbiqinə nümunə kimi aşağıdakı modelə baxaq.

Nümunə 7.2. Tutaq ki, identifikasiya olunan model iki endogen və iki ekzogen dəyişənlərdən ibarətdir və aşağıdakı asılılıqlarla təsvir olunur:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Həm də fərz edək ki, modelin qurulması üçün 5 iqtisadi obyekt üzrə məlumatlar belə cədvəl şəklində verilir:

obyekt	y_1	y_2	x_1	x_2
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6

Çevrilmiş modeli aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \xi_1 \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \xi_2. \end{cases}$$

Bu sistemin hər üç tənliyinə ayrılıqda ƏKKÜ-nu tətbiq etmək olar. Hesablamaları sadələşdirmək üçün $\tilde{y} = y - \bar{y},\ \tilde{x} = x - \bar{x}$ qəbul edək. Onda çevrilmiş sistemin 1-ci tənliyi üçün normal tənliklər sistemi

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} y_{1i}x_{1i} = \delta_{11}\sum_{i=1}^{5} x_{1i}^2 + \delta_{12}\sum_{i=1}^{5} x_{1i}x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{5} y_{1i}x_{2i} = \delta_{11}\sum_{i=1}^{5} x_{1i}x_{2i} + \delta_{12}\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^2 \end{cases}$$

kimi olur $\bar{y}_1 = 4;\ \bar{y}_2 = 6{,}2;\ \bar{x}_1 = 2{,}4;\ \bar{x}_2 = 3{,}4$ olduğundan, buradan alırıq ki,

$$\begin{cases} 5{,}2\delta_{11} + 4{,}2\delta_{12} = 6, \\ 4{,}2\delta_{11} + 17{,}2\delta_{12} = 10. \end{cases}$$

Bu sistemi həll etməklə çevrilmiş sistemin 1-ci tənliyi üçün

$$y_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373x_2 + \xi_1.$$

Eyni qayda ilə çevrilmiş sistemin 2-ci tənliyinə ƏKKÜ-nu tətbiq edirik:

$$y_2 = \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \xi_2 .$$

Bu tənlik üçün normal sistem

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} y_{2i} x_{1i} = \delta_{21} \sum_{i=1}^{5} x_{1i}^2 + \delta_{22} \sum_{i=1}^{5} x_{1i} x_{2i}, \\ \sum_{i=1}^{5} y_{2i} x_{2i} = \delta_{21} \sum_{i=1}^{5} x_{1i} x_{2i} + \delta_{22} \sum_{i=1}^{5} x_{2i}^2, \end{cases}$$

olur. Burada çədvəldəki qiymətləri nəzərə alsaq, alarıq:

$$\begin{cases} 5{,}2\delta_{21} + 4{,}2\delta_{22} = -0{,}4, \\ 4{,}2\delta_{21} + 17{,}2\delta_{22} = 10. \end{cases}$$

Nəticədə alırıq ki,

$$y_2 = -0{,}072 x_1 - 0{,}00557 x_2 + u_2 .$$

Beləliklə, modelin çevrilmiş forması belə olur:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}852 x_1 + 0{,}373 x_2 + u_1, \\ y_2 = -0{,}072 x_1 - 0{,}00557 x_2 + u_2. \end{cases}$$

Bu modeldən struktur modelə keçmək üçün sonuncu sistemin 2-ci tənliyində x_2-ni digər dəyişənlərlə ifadə edib 1-ci tənlikdə yerinə qoysaq alarıq:

$$x_2 = \frac{-0{,}072 x_1 - y_2}{0{,}00557}, \quad \hat{y}_1 = 0{,}852 x_1 + 0{,}373 \left(\frac{-0{,}072 x_1 - y_2}{0{,}00557} \right).$$

Nəticədə, struktur modelin 1-ci tənliyi üçün

$$\hat{y}_1 = -66{,}966 y_2 - 3{,}970 x_1 + \varepsilon_1 .$$

modeli alınır.

Uyğun yanaşma ilə çevrilmiş modelin 2-ci tənliyindən alırıq:

$$x_1 = \frac{y_1 - 0{,}373x_2}{0{,}852}$$

Buradan

$$\hat{y}_2 = -0{,}072\left(\frac{y_1 - 0{,}373x_2}{0{,}852}\right) - 0{,}00557\,x_2 \Rightarrow$$

$$\hat{y}_2 = -0{,}085y_1 - 0{,}026x_2.$$

Beləliklə, identifikasiya nəticəsində alınan model belə olur:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = -66{,}966y_2 - 3{,}970x_1 + \varepsilon_1, \\ \hat{y}_2 = -0{,}085y_1 - 0{,}026x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Əgər sistem həddindən artıq identifikasiya olunandırsa, onda DƏKKÜ tətbiq olunmur, çünki struktur əmsallar çevrilmiş modelin əmsalları ilə birqiymətli təyin olunmur.

Nümunə 7.3. Misal olaraq

$$\begin{cases} y_{1t} = a_1 y_{2t} + b_1 x_{1t} + b_2 x_{2t} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} = a_2 y_{1t} + b_3 x_{3t} + \varepsilon_{2t}, \end{cases}$$

struktur modelinə baxaq. Onun çevrilmiş forması

$$\begin{cases} y_{1t} = \delta_{11} x_{1t} + \delta_{12} x_{2t} + \delta_{13} x_{3t} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} = \delta_{21} x_{1t} + \delta_{22} x_{2t} + \delta_{22} x_{3t} + \varepsilon_{2t}, \end{cases}$$

Tutaq ki, çevrilmiş formanın parametrlərinin qiymətləndirilməsi belədir:

$$\begin{cases} y_{1t} = 2x_{1t} + 3x_{2t} + 3x_{3t}, \\ y_{2t} = 3x_{1t} + 4x_{2t} + 2x_{3t}, \end{cases}$$

Struktur formanın qiymətləndirilməsini alaq:

$$AZ = B,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Altı tənlikdən 3-nün sağ tərəfi sıfırdan fərqlidir. Buradan a_1, a_2 -nin tapılması üçün 3 tənlik alınır:

$$\begin{cases} -2a_1 + 3 = 0, \\ -2a_2 + 4 = 0, \\ 3 - 2a_1 = 0, \end{cases}$$

burada a_2 iki yanaşma ilə ifadə olunur və bu yanaşmalar bir-birinə əksdir. Bu isə, artıqlaması ilə identifikasiya olunma deməkdir.

§7.3.2. İkiaddımlı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (İƏKKÜ)

İƏKKÜ instrumental dəyişənlərin modelə daxil edilməsinə əsaslanır və universal üsuldur. Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, eynizamanlı tənliklər sistemində endogen dəyişənlərlə ifadə olunan faktorlarla olan tənliklərdə təsadüfi tərkiblər arasında asılılıq münasibətləri olur. Bu isə, ƏKKÜ-nun birbaşa tətbiqinə imkan vermir. Bu çətinliyi aradan qaldırmaq üçün tənliklərin sağ tərəfindəki endogen y_i dəyişənlərini köməkçi $\tilde{y}_i$ instrumental dəyişənləri ilə əvəz etmək olar. Belə ki, bu dəyişənlər ilkin endogen dəyişənlərlə daha yaxın olmalıdır və onlar tənliyin təsadüfi tərkibləri ilə asılılıq münasibətində olmamalıdır. Belə dəyişənlər qismində (7.8) çevrilmiş sistemin tənlikləri ilə müəyyənləşdirilən dəyişənləri götürmək olar.

İƏKKÜ-nun mahiyyətinə görə, struktur parametrlərin ədədi qiymətləri aşağıdakı ardıcıllıqla təyin olunur:

1) İlkin tənliklər sistemi riyazi çevirmələrlə (7.8) sisteminə

gətirilir və sonuncunun hər bir tənliyi üçün ayrılıqda ƏKKÜ-nu tətbiq etməklə δ_{ij} parametrlərinin ədədi qiymətləri müəyyənləşdirilir;
2) Çevrilmiş sistemin tənliklərindən hər bir müşahidə üçün endogen dəyişənlərinə uyğun $\tilde{y}_i$ instrumental dəyişənlərinin hesablanmış qiymətləri tapılır;
3) ƏKKÜ-ilə struktur tənliklərinin hər birindən parametrlərin qiymətləri müəyyənləşdirilir. Bunun üçün faktorlar qismində əvvəlcədən bilinən dəyişənlərin faktiki qiymətləri və $\tilde{y}_i$ instrumental dəyişənlərinin alınmış hesablanma qiymətlərindən istifadə olunur.

Əgər identifikasiya olunan tənliyin qiymətləndirməsində instrumental dəyişənlər qismində ekzogen dəyişənlərdən istifadə olunursa, onda alınmış qiymətləndirmə DƏKKÜ-lu qiymətləndirməsi ilə üst-üstə düşür. Burada çıxır ki, DƏKKÜ-u instrumental dəyişənlər üsulunun xüsusi halıdır.

Əgər sistem identifikasiya olunandırsa və x ekzogen dəyişənlərinin sayı y endogen dəyişənlərin sayı ilə eynidirsə, onda İƏKKÜ qiymətləndirməsi DƏKKÜ qiymətləndirməsi ilə eyni olur. Sistem identifikasiya olunmadıqda da, instrumental dəyişənlər üsulu tətbiq edilə bilər. Lakin, onun tətbiqində ekzogen dəyişənlər çatışmadığı halda xarici instrumental dəyişənlərdən istifadə etmək lazımdır.

Nümunə 7.4. İƏKKÜ-nun reallaşdırılmasına misal olaraq aşağıdakı şərti modelə baxaq:

$$\begin{cases} y_t = a_1 + b_1(C + D) + \varepsilon_{1t}, \\ C = a_2 + b_2 y_t + b_3 y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \end{cases}$$

burada y_t cari ildə Ümumi Daxili Məhsul (UDM), y_{t-1} əvvəlki ildə UDM, C- şəxsi istehlak, D-son tələbat (şəxsi tələbatdan əlavə); ε_{1t}, ε_{2t}-təsadüfi tərkiblər; son 9 ildə isə, bütün göstəricilərin nisbi artımı aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Illər	D	y_{t-1}	y_t	C
1	-6,8	46,7	3,1	7,4
2	22,4	3,1	22,8	30,4
3	-17,3	22,8	7,8	1,3
4	12,0	7,8	22,4	8,7
5	5,9	22,4	17,8	25,8
6	44,7	17,8	37,2	8,6
7	23,1	37,2	35,7	30,0
8	52,2	35,7	46,6	31,4
9	32,3	46,6	56,0	39,1
$\sum$	167,5	239,1	248,4	182,7

Bu sistem üçün çevrilmiş tənliklər sistemi belə olur:

$$\begin{cases} y_t = 8{,}219 + 0{,}6688D + 0{,}2610y_{t-1}, \\ C = 8{,}636 + 0{,}3384D + 0{,}2020y_{t-1}. \end{cases}$$

Burada endogen dəyişənlər y_t və C_t dəyişənləri, ekzogen dəyişənləri isə, D və y_{t-1}-dir. 2-ci tənlik identifikasiya olunur, çünki 2 endogen dəyişəni özündə saxlayır və sistemin 1 ekzogen dəyişənini özündə saxlamır. Identifikasiya olunmanın hesablanması qaydasına görə 2=1+1. Birinci tənlik həddindən artıq identifikasiya olunur. Burada C və D dəyişənlərinin parametrlərinə şərt qoyulur ki, onlar sıfra bərabər olmalıdır. Bu tənlikdə 1 endogen y_t dəyişəni vardır, C dəyişəninə isə, endogen dəyişən kimi baxılmır, çünki o tənlikdə sərbəst deyil, D-ilə birgə iştirak edir. Bu tənlikdə sistemdə olan ekzogen dəyişənlərdən 1-i iştirak etdiyindən identifikasiyanın hesablanması qaydasına əsasən 1+1=2, $D+1>H$ (bu bərabərsizlikdə D-ilə baxılan tənlikdə iştirak etməyən, lakin sistemin digər tənliklərində iştirak edən əvvəlcədən bilinən dəyişənlərin sayı, H-ilə tənlikdə iştirak edən endogen dəyişənlərin sayı işarə olunub və modeldəki D-son tələbatla eyni deyil) və deməli, sistem həddindən artıq identifikasiya olunandır və onun parametrlərinin müəyyənləşdirilməsi üçün İƏKKÜ-dan istifadə olunur:

<u>1-ci addım.</u> Çevrilmiş sistemin dəqiq identifikasiya olunan 2-ci tənliyindən C endogen dəyişəninin nəzəri qiyməti müəyyənləşdirilir. Bunun üçün

$$C = 8{,}636 + 0{,}3384D + 0{,}2020y_{t-1}$$

tənliyində D və y_{t-1} qiymətlərinin yerinə məsələnin şərtindəki qiymətləri qoymaqla

$\hat{C}_1 = 15{,}8;\ \hat{C}_2 = 16{,}8;\ \hat{C}_3 = 7{,}4;\ \hat{C}_4 = 14{,}3;\ \hat{C}_5 = 15{,}0;$

$\hat{C}_6 = 27{,}4;\ \hat{C}_7 = 24{,}0;\ \ \hat{C}_8 = 33{,}2;\ \ \hat{C}_9 = 29{,}0.$

<u>2-ci addım.</u> Modelin struktur formasının həddindən artıq identifikasiya olunan tənliyində C-nin faktiki qiyməti onun nəzəri $\hat{C}$ qiyməti ilə əvəz olunur və yeni $\hat{C} + D$ dəyişəni hesablanır; nəticə belə cədvəllə verilir:

Illər	D	$\hat{C}$	$\hat{C} + D$
1	-6,8	15,8	9,0
2	22,4	16,8	39,2
3	-17,3	7,4	-9,9
4	12,0	14,3	26,3
5	5,9	15,0	20,9
6	44,7	27,4	72,1
7	23,1	24,0	47,1
8	52,2	33,2	84,4
9	32,3	29,0	61,3
$\sum$	167,5	182,9	350,4

Sonra isə, həddindən çox identifikasiya olunan tənliyə ƏKKÜ-lu tətbiq edilir. $\hat{C} + D = Z$ yeni dəyişəni daxil edilməklə

$y = a_1 + b_1 Z$ tənliyi həll edilir. Bu zaman

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{9} y_t = 9a_1 + b_1 \sum_{t=1}^{9} Z_t \\ \sum_{t=1}^{9} y_t z_t = a_1 \sum_{t=1}^{9} Z_t + b_1 \sum_{t=1}^{9} Z_z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a_1 + 350,4b_1 = 248,4 \\ 350,4a_1 + 21142,02b_1 = 13508,71 \end{cases}$$

normal tənliklər sistemini həll etməklə $a_1 = 7,678, \quad b_1 = 0,512$ alınır və struktur modelin 1-ci tənliyi bu hala düşür:

$$y_t = 7,678 + 0,512(C_t + D_t).$$

§7.3.3. Üçaddımlı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu (Üçaddımlı ƏKKÜ)

Eynizamanlı tənliklər sistemi ilə təsvir olunan ekonometrik modelin müxtəlif tənliklərinin təsadüfi tərkibləri arasında korrelyasiya asılılığının mövcudluğu onların parametrlərinin statistik qiymətləndirmələrinin effektivlik xassələrinin itirilməsinə gətirir. Belə vəziyyətlərdə qiymətləndirmə yanaşması olaraq İƏKKÜ əvəzinə Üçaddımlı ƏKKÜ -dan istifadə olunması məqsədəuyğun hesab edilir. Bu üsul qiymətləndirmədə əlavə bir addımın öyrənilməsi ilə xarakterizə olunur ki, burada Ümumiləşmiş Ən Kiçik Kvadratlar Üsulundan (§3.7) istifadə olunur. Nəticədə Üçaddımlı Ən Kiçik Kvadratlar Üsulu modellər sisteminin struktur formasının ayrıca tənliklərinə deyil, onun bütün tənliklərinə bütövlükdə tətbiq edilməklə əmsalların statistik qiymətləndirilməsinə nail olunur.

Qarşılıqlı asılı ekonometrik modellər sisteminin struktur formasının Üçaddımlı ƏKKÜ- ilə parametrlərinin qiymətləndirilməsi prosesi aşağıdakı üç ardıcıl addımların yerinə yetirilməsinə əsaslanır:

Addım 1. Bu addımda ƏKKÜ-ilə çevrilmiş formalı sistemindən $\hat{y}_i$ dəyişənlərinin hesablanma qiymətləri tapılır;

Addım 2. İƏKKÜ-da olduğu kimi, bu addımda $\hat{y}_i$ qiymətlərindən istifadə etməklə sistemin hər bir tənliyinin struktur formasının əmsallarının qiymətləndirilməsi müəyyənləşdirilir;
Addım 3. Ümumiləşmiş ƏKKÜ-ilə ilkin sistemin struktur formasının əmsallarının yekun qiymətləndirilməsi müəyyənləşdirilir.

Əgər sistemin tənliklərindəki təsadüfi tərkiblərin arasında korrelyasiya asılılığı yoxdursa, onda Üçaddımlı ƏKKÜ-nun İƏKKÜ-dan üstünlüyü olmur. Üçaddımlı ƏKKÜ-nun tətbiqi zamanı müəyyən əlavə qaydalara riayət olunması zəruridir ki, bu zaman üçaddımlı hesablanma prosedurları ikiaddımlı prosedurlara nəzərən az universal yanaşma hesab edilir. Bu xüsusiyyətlər aşağıdakılardır:
1. Prosedura ancaq identifikasiya olunan və artıqlaması ilə identifikasiya olunan sistemin tənliklərinə tətbiq edilir.
2. Proseduranı identifikasiya olunan və artıqlaması ilə identifikasiya olunan tənliklər qrupuna ayrıca tətbiq etmək daha məqsədə uyğundur. Belə ki, əgər uyğun qrupa yalnız bir artıqlaması ilə identifikasiya olunan tənlik daxil olursa, onda həmin qrup üçün üçaddımlı prosedurlar ikiaddımlı prosedurlara çevrilir.

§7.3.4. Struktur modelin qiymətləndirilməsində MDOÜ

Tutaq ki, n sayda müşahidə üçün ℓ sayda eynizamanlı tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$YA = XB + \varepsilon, \tag{7.21}$$

burada

$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1\ell} \\ ..... & ..... & ...... \\ y_{n1} & \cdots & y_{n\ell} \end{pmatrix}$ - matrisi sistemə daxil olan ℓ-sayda endogen dəyişənlərin n sayda müşahidədəki qiymətlərindən formalaşan matris, $X=\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}$- matrisi k-sayda qiyməti bilinən dəyişənlərin n sayda müşahidədəki qiymətlərindən düzəldilmiş matris, $\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \dots & \varepsilon_{1\ell} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varepsilon_{n1} & \dots & \varepsilon_{n\ell} \end{pmatrix}$ sistemin ℓ-sayda struktur tənliklərində təsadüfi tərkiblərin n sayda müşahidədəki qiymətlərindən qurulmuş matris, $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\ell} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_{\ell 1} & \dots & \alpha_{\ell\ell} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1\ell} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \beta_{k1} & \dots & \beta_{k\ell} \end{pmatrix}$- əmsallardan düzəldilmiş matrisdir.

i-ci müçahidədə tənliklərin təsadüfi tərkiblərindən ibarət $\varepsilon_i=(\varepsilon_{i1},\dots,\varepsilon_{i\ell})$ verilənləri üzərinə aşağıdakı şərtləri qoyaq:

1. $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ vektorları eyni ℓ-ölçülü $N_e(0,\ \mathrm{cov}(\varepsilon))$ normal qanunla paylanmışdır, onun riyazi gözləməsi $0=\underbrace{(0,\dots,0)}_{\ell}$ vektoru, $\mathrm{cov}(\varepsilon)$ - isə, müsbət müəyyən kovariasiya matrisdir;
2. $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ vektorları öz aralarında asılı deyil.

Bu şərtlər daxilində $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ təsadüfi vektorlarının birgə paylanma sıxlığı (bax. [28, səh. 122-123]) belə olur:

$$\varphi_\varepsilon(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\ell}\sqrt{\det\mathrm{cov}(\varepsilon)}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon_i\left[\mathrm{cov}(\varepsilon)\right]^{-1}\varepsilon_i'\right\}\right] \quad (7.22)$$

$\varepsilon_i=y_iA-x_iB$ olduğundan, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ dəyişənlərindən $y_1,\dots,y_n$ dəyişənlərinə keçsək, $y_1,\dots,y_n$ verilənlərinin birgə paylanma sıxlığı üçün alırıq:

$$\varphi_Y(y_1,\ldots,y_n)=|J|\left(\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\ell}\sqrt{\det\operatorname{cov}(\varepsilon)}\right)^{-n}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_iA-x_iB)[\operatorname{cov}(\varepsilon)]^{-1}(y_iA-x_iB)'\right\},\qquad(7.23)$$

burada $|J|$- matrisi $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ dəyişənlərindən $y_1,\ldots,y_n$ dəyişənlərinə keçiddə Yakobiandır, $|J|=|\det A|^n$. Bu keçidin birqiymətli olması üçün $\det A\neq 0$ olmalıdır.

Bu münasibətdə sag hissəyə Y və X-in məlum qiymətlərində $A, B, \operatorname{cov}(\varepsilon)$ matrislərinin naməlum parametrlərindən ibarət funksiya kimi baxsaq, aşağıdakı doğruyaoxşarlıq funksiyasını alarıq:

$$L(A,B,\operatorname{cov}(\varepsilon)|Y,X)=|\det A|^n\left(\left(\sqrt{2\pi}\right)^{\ell}\sqrt{\det\operatorname{cov}(\varepsilon)}\right)^{-n}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_iA-x_iB)[\operatorname{cov}(\varepsilon)]^{-1}(y_iA-x_iB)'\right\}.\qquad(7.24)$$

Onun loqarifmi isə, belə olur:

$$\ln L(A,B,\operatorname{cov}(\varepsilon)|Y,X)=n\ln|\det A|-\frac{n}{2}\ln(\det\operatorname{cov}(\varepsilon))-$$

$$-\frac{n\ell}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_iA-x_iB)(y_iA-x_iB)'[\operatorname{cov}(\varepsilon)]^{-1}(y_iA-x_iB).\qquad(7.25)$$

Sonuncu ifadəni $[\operatorname{cov}(\varepsilon)]^{-1}$ matrisinin elementlərinə nəzərən differensiallayıb, A və B-nin qiymətləndirilməsi şərti ilə alınan törəmələri sıfra bərabərləşdirməklə aşağıdakı münasibəti almaq olar:

$$\operatorname{cov}(\varepsilon)=\frac{1}{n}(YA-XB)'(YA-XB).\qquad(7.26)$$

Qeyd edək ki, struktur formanın əmsallarının MDOÜ-ilə qiymətləndirilməsi tutarlı və asimptotik normaldır.

Struktur formanın MDOÜ-ilə qiymətləndirilməsinin reallaşdırılmasında iterativ prosedrurlardan istifadə olunur. Bu qiymətləndirmənin tutarlı və asimptotik normallığını təmin etmək üçün parametrlərin başlanğıc qiymətləri olaraq onların tutarlı qiymətlıəndirilmələrindən istifadə etmək zəruridir. Bu qiymətləndirmələri İƏKKÜ-ilə almaq olar. Sistem identifikasiya olunmursa, onda iterasiya prosesi dağıla bilər.

(7.25) mürəkkəb qeyri-xətti funksiyasının maksimumunun tapılması məsələsi S-PLUS, Microsoft Professional Edition ("Generalized Nonlinear Leaet Squares" proqramı) proqram sistemində reallaşdırıla bilər. Bu proqrama struktur formanın tənliklərini və X, Y ilkin verilənləri daxil etməklə, çıxışda A və B parametrlərinin $\hat{A}, \hat{B}$ nöqtəvi qiymətləndirmələri, onların standart səhvlərini, t-Styudent qiymətini, təsadüfi tərkibli hər bir tənliyin kovariasiya matrisinin qiymətləndirilməsini almaq olar. Proqram sistemi, həm də balans eynilikləri qəbul edir. Bu halda təsadüfi tərkib sıfr hesab olunur.

7-ci fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

7.1. Hansı hallarda ekonometrik model eynizamanlı tənliklər sistemi kimi qurulur?
7.2. Asılı olmayan tənliklər, qarşılıqla əlaqəli rekursiv tənliklər sisteminin mahiyyətini izah edin və iqtisadi nümunələr göstərin.
7.3. Modelin struktur və çevrilmiş formaları dedikdə nə başa düşürsünüz?
7.4. Modelin identifikasiya olunması probleminin mahiyyəti necədir?
7.5. Modelin identifikasiya olunma şərtləri necədir?
7.6. Modelin identifikasiya oluna bilməsi necə yoxlanılır?
7.7. Müxtəlif növ eyni zamanlı tənliklər sisteminin struktur dəyişənlərinin qiymətləndirilməsində hansı üsullardan istifadə olunur?
7.8. DƏKKÜ-nun, İƏKKÜ-nun, Üçaddımlı ƏKKÜ-nun mahiyyətini izah edin.

7.9. MDOÜ-u struktur modelin qiymətləndirilməsində necə tətbiq olunur?
7.10. Klassik Keyns modeli üçün struktur formadan çevrilmiş formaya keçidi və əks çevirmədə identifikasiya məsələsini izah edin.

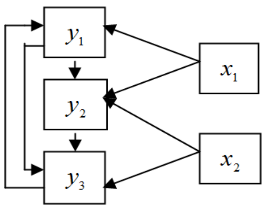
Testlər

7.1. Eynizamanlı tənliklər sisteminin identifikasiya olunması şərtlərindən biri
a) dəyişənlərin kollienar olması şərtidir;
b) tənliklərin sayı endogen dəyişənlərin sayına bərabər olması şərtidir;
c) dəyişənlərin komplanar olması şərtidir;
d) sistemin tənliklərinin sayının tədqiq olunan endogen dəyişənlərin sayından az olması şərtidir.

7.2. DƏKKÜ hansı sistemlərə tətbiq olunur?
a) identifikasiya olunmayan tənliklər sisteminə;
b) identifikasiya olunmayan rekursiv tənliklər sisteminə;
c) istənilən eynizamanlı tənliklər sisteminə;
d) identifikasiya olunan eynizamanlı tənliklər sisteminə.

7.3. Hansı tənliklər sistemi modelin struktur forması adlanır?
a) qeyd olunmuş tənliklər sistemi;
b) qarşılıqlı əlaqəli tənliklər sistemi;
c) asılı olmayan tənliklər sistemi;
d) rekursiv tənliklər sistemi;

7.4. Aşağıdakı sxem üzrə qurulmuş modelin struktur formasında



neçə ekzogen dəyişən var:
Cavab:
a) 2; b) 4; c) 3; d)5.

7.5. $\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$ sisteminin çevrilmiş forması hansıdır?

Cavab:

a) $\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \xi_1; \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \xi_2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + u_1; \\ y_2 = \delta_{21}x_2 + u_2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \xi_1; \\ y_2 = a_{21}x_2 + \xi_2; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \xi_1; \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + u_2; \end{cases}$

7.6. Modelin struktur və çevrilmiş formaları arasındakı uyğunluğun yeganəliyinin pozulması eynizamanlı tənliklər sistemində hansı problemi yaradır?
a) identifikasiya problemini;
b) faktorların multikollienarlığı problemini;
c) qalıqların heteroskedastikliyi problemini;
d) verilənlərin qeyri-bircinsliyi problemini.

7.7. İdentifikasiya olunmayan sistemlərdə
a) struktur parametrlərin sayı çevrilmiş sistemdəki parametrlərin sayından artıqdır;
b) struktur parametrlərin sayı çevrilmiş sistemdəki parametrlərin sayından aşağıdır;
c) struktur parametrlərin sayı çevrilmiş sistemdəki parametrlərin sayına bərabərdir;
d) sistemdəki tənliklər asılı deyil.

7.8. H -ilə tənlikdə iştirak edən endogen dəyişəninin sayını, D -ilə isə, baxılan tənlikdə iştirak etməyən, lakin sistemin digər tənliklərində iştirak edən qiyməti əvvəlcədən bilinən tənliklərin sayını işarə etsək, onda identifikasiya olunma şərti hansıdır?
a) $D = H$; b) $D+1 = H$; c) $D-1 = H$; d) $D > H$.

7.9. Həddindən artıq identifikasiya olunan sistemlərə İƏKKÜ-nun tətbiqi parametrlərin

a) yeganə qiymətləndirilməsini təmin edir;
b) bir neçə qiymətləndirilməsini təmin edir;
c) qiymətləndirilməsində qeyri-müəyyənliklər əmələ gəlir;
d) qiymətləndirilmə mümkün olmur.

7.10. Hansı halda Üçölçülü ƏKKÜ tətbiq olunur?
a) modelin müxtəlif tənliklərinin təsadüfi tərkibləri arasında korrelyasiya asılılığı olduqda;
b) modelin ekzogen dəyişənləri arasında multikollienarlıq olduqda;
c) modelin endogen dəyişənləri arasında asılılıq olmadıqda;
d) rekursiz tənliklər sistemində.

Çalışmalar

Məsələ 7.1. $\begin{cases} C_t = a + b_1 Y_t + b_2 Y_{t-1}, \\ Y_t = C_t + I_t + Q_t, \end{cases}$ (burada a, b_1, b_2 sabitlərdir)

tənliklər sistemində endogen və qiyməti əvvəlcədən bilinən dəyişənləri ayırın.

Cavab: endogen dəyişənlər C_t, Y_t; qiyməti əvvəlcədən bilinən dəyişənlər I_t, Q_t, Y_{t-1}.

Məsələ 7.2. $\begin{cases} C_t = b_{11} Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = b_{21} Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + Q_t, \end{cases}$

makroiqtisadi modelində Y_t ümumdaxili milli gəliri; C_t -şəxsi istehlakı, I_t -investisiyaları, Q_t -dövlət xərclərini, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ -təsadüfi səhvləri göstərir. Onun çevrilmiş formasını qurun.

Cavab: $\begin{cases} C_t = \delta_{11} Q_t, \\ I_t = \delta_{21} Q_t, \\ Y_t = \delta_{31} Q_t. \end{cases}$

Məsələ 7.3. $\begin{cases} C_t = b_{11}Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + Q_t, \end{cases}$

modelinin identifikasiya olunmasını yoxlayın.
Cavab: həddindən artıq identifikasiya olunan sistemdir.

Məsələ 7.4. $\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + Q_t, \end{cases}$

(burada dəyişənlər 7.2-ci çalışmadakı dəyişənlərdir) modelini çevrilmiş formaya salın.

Cavab: $\begin{cases} C_t = A_1 + \delta_{11}Y_{t-1} + \delta_{12}Q_t, \\ I_t = A_2 + \delta_{21}Y_{t-1} + \delta_{22}Q_t, \\ Y_t = A_3 + \delta_{31}Y_{t-1} + \delta_{32}Q_t. \end{cases}$

Məsələ 7.5. $\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \xi_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}R + b_{22}I_{t-1} + \xi_2, \\ R = a_3 + b_{21}Y_t + b_{22}M_{t-1} + \xi_3, \\ Y_t = C_t + I_t + Q_t, \end{cases}$

modelinə baxaq. Burada C_t, I_t, Y_t, R endogen dəyişənlər və qiyməti əvvəlcədən bilinən 4 (2 ekzogen M_t və Q_t dəyişənləri, iki laq C_{t-1} və I_{t-1} dəyişənləri) dəyişənlər vardır. Modelin tənliklərinin identifikasiya olunması üçün zəruri şərti yoxlayın.
Cavab: 1,2,3-cü tənliklər üçün zəruri şərt ödənilir və tənliklər həddindən artıq identifikasiya olunur, 4-cü tənlik isə, eynilikdir.

Məsələ 7.6. 7.5-ci tapşırıqdakı modelin identifikasiya olunması üçün teorem 7.1-dəki kafi şərti yoxlayın.
Cavab:

	C_t	Y_t	C_{t-1}	I_t	R	I_{t-1}	M_t	Q_t
1-ci tənlik	-1	b_{11}	b_{12}	0	0	0	0	0
2-ci tənlik	0	0	0	-1	b_{21}	b_{22}	0	0
3-cü tənlik	0	b_{31}	0	0	-1	0	b_{32}	0
eynilik	1	-1	0	1	0	0	0	1

1,2,3-cü tənliklər üçün uyğun olaraq

$$\begin{pmatrix} -1 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrislərinin ranqı 3-ə bərabərdir və kafi şərt ödənilir, 4-cü tənlik isə, eynilikdir.

Məsələ 7.7. $\begin{cases} Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + \varepsilon_t, \\ Q_t^s = b_0 + b_1 P_t + \xi_t, \\ Q_t^s = Q_t^d, \end{cases}$ (burada Q_t^d, Q_t^s uyğun olaraq t anında məcmu tələb və təklifin həcmi, P_t -isə həmin anda qiyməti göstərir) klassik tələb- təklif modelində göstərin ki, ekzogen dəyişən yoxdur və identifikasiya olunmur.

Məsələ 7.8. $\begin{cases} Q_t^d = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + \varepsilon_t, \\ Q_t^s = b_0 + b_1 P_t + \xi_t, \\ Q_t^s = Q_t^d = Q_t, \end{cases}$ (burada Y_t məcmu gəlirdir, digər dəyişənlər isə, tapşırıq 7.7-dəki dəyişənlərdir) modelinin

identifikasiya olunmasını araşdırın.
Cavab: tələbatı təsvir edən tənlik identifikasiya olunmur, təklifi təsvir edən tənlik isə, identifikasiya olunur.

Məsələ 7.9. Tutaq ki, 7.8-ci tapşırıqdakı modeldə sərbəst həddlər yoxdur və Y_t ekzogen dəyişəni təsadüfi tərkiblərlə korrelə olunmayıb. $\operatorname{cov}(P_t, \xi_t)$-ni tapın.

Cavab: $\operatorname{cov}(P_t, \xi_t) = \dfrac{\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \xi_t) - \sigma^2_{\varepsilon_t}}{b_1 - a_1}$.

Məsələ 7.10. Tutaq ki, $\begin{cases} y_{t1} = \alpha_0 + \varepsilon_{t1}, \\ y_{t2} = \alpha_1 x_t + \varepsilon_{t2}, \end{cases}$ modeli verilmişdir və 50 müşahidə nəticəsində hər bir tənlik üçün belə nəticələr alınmışdır.

$$\sum_{t=1}^{50} x_t = 100,\ \sum_{t=1}^{50} x_t^2 = 600,\ \sum_{t=1}^{50} x_t y_{t1} = 60,\ \sum_{t=1}^{50} x_t y_{t2} = 50,$$

$$\sum_{t=1}^{50} y_{t1} = 150,\ \sum_{t=1}^{50} y_{t1}^2 = 500,\ \sum_{t=1}^{50} y_{t1} y_{t2} = 150,\ \sum_{t=1}^{50} y_{t2} = 50,$$

$$\sum_{t=1}^{50} y_{t2}^2 = 90.$$

α_0 və α_1 parametrlərinin ƏKKÜ qiymətləndirilməsini tapın.
Cavab: $\hat{\alpha}_0 = 3;\quad \hat{\alpha}_1 = 0{,}0833$.

FƏSİL VIII

ZAMAN SIRALARI. ONLARIN XARAKTERİSTİKALARI VƏ XASSƏLƏRİ

§8.1. Zaman sıralarının analizində əsas anlayışlar

İqtisadiyyatın bütün sahələrində çoxlu sayda təzahürlər mövcuddur ki, onların inkişafının öyrənilməsi vacibdir. Bu təzahürlər zamana nəzərən evolyusiya və fluktuasiya olunur. Zaman dəyişdikcə qiymətlər, iqtisadi mühit, istehsal proseslərində müəyyən rejimlər dəyişir. İqtisadi proseslərin analizində informasiya bazası olaraq dinamik və zaman sıraları hesab edilir.

Tərif 8.1. *Müəyyən təzahürün (göstəricinin) digər təzahürün (meyarların) nizamlanmış ardıcıl qiymətlərindən asılı olaraq müşahidələri külliyatına dinamik sıra deyilir.*

Tərif 8.2. *Əgər dinamik sırada nizamlanmış meyar olaraq zamandan istifadə olunursa, onda həmin sıraya zaman sırası deyilir.*

Müəyyən zaman müddəti ərzində valyuta, səhm kursları, malların qiymətləri və s. qeyd edilirsə, onda belə verilənlər zaman sıralarını formalaşdırır. Burada həm də müxtəlif mal buraxılışı və xidmətlərə tələbatın aylıq, kvartal, illik verilənlərin də, qeyd etmək olar.

İqtisadiyyat və biznesdə verilənlərin geniş yayılmış zaman sıraları formasında prosesin zamana nəzərən axını və xüsusiyyətləri haqda informasiyalar vardır. Zaman sıralarının ekonometrik analizi bu qanunauyğunluqların aşkar olunmasına və prosesin gələcəkdə xarakteristikalarının qiymətləndirilməsinə (yəni proqnozlaşdırılmasına) imkan verir.

Tərif 8.3. *Zaman sıraları göstəricinin ardıcıl zaman anlarında aldığı qiymətlərin toplusudur. Müəyyən prosesin hər hansı göstəricisinin bu zaman anlarında aldığı qiymətlərə zaman sırasının səviyyələri deyilir.*

Tərif 8.4. *İki ardıcıl zaman anları arasındakı intervala takt (addım, kvant) deyilir.*

Zaman sırasının uzunluğu olaraq ona daxil olan səviyyələrin sayı götürülür.

Əksər hallarda zaman sıralarının səviyyələrini bir neçə komponentin cəmi və ya hasili şəklində ifadə etmək olar.

Tərif 8.5. *Əgər modelin zaman sırası trend, mövsümi və təsadüfi komponentlərin cəmi şəklində göstərilirsə, onda model additiv adlanır.*

Tərif 8.6. *Əgər modelin zaman sırası trend, mövsümi və təsadüfi komponentlərin hasili şəklində göstərilirsə, onda model multiplikativ adlanır.*

Zaman sırasının ekonometrik tədqiqində əsas məsələ yuxarıdakı komponentlərin aşkar olunması və onların kəmiyyət xarakteristikalaırnın öyrənilməsidir ki, bu xarakteristikalar sıranın gələcəkdə qiymətlərinin proqnozlaşdırılmasına və digər zaman sıraları ilə qarşılıqlı əlaqələrin qurulmasına imkan versin.

Klassık statistik tədqiqat üsullarında əsasən fərz edilir ki, zaman sıralarının səviyyələrini inkişafın qanunauyğunluğunu və təsadüfiliyini əks etdirən bir neçə komponentin cəmi şəklində göstərmək olar. Xüsusi halda, 4 komponentin cəmi şəklində

$$y_t = u_t + v_t + c_t + \varepsilon_t \quad (t = 1,2,\dots,n) \qquad (8.1)$$

ayrılışını yazmaq olar. Burada u_t-inkişafın trendi (uzunmüddətli tendensiya), v_t-mövsümi tərkib, c_t-tsiklik tərkib, ε_t - qalıq komponentidir.

Zaman sıralarında əsasən determinik (sistematik) və təsadüfi tərkibləri ayırırlar. $y_1,\dots,y_n$ zaman sırasının determinik tərkibi dedikdə, elementləri müəyyən qayda ilə t-zamanının funksiyası kimi təyin olunan ədədi ardıcıllıq başa düşülür. Verilənlərdən determinik tərkibi yox etməklə, sıfırın ətrafında rəqs edən sıranı almaq olar ki, alınan sıra bir limit vəziyyətində təsadüfi sıçrayışlar halında, digər vəziyyətdə hamar rəqsi hərəkətdə olur.

Zaman sıralarının analizində ən çox yayılmış üsullardan korrelyasiya və spektral analiz üsullarını, avtoreqressiya və sürüşkən orta üsullarını qeyd etmək olar ki, onların şərhini sonrakı mövzularda aparacağıq ([7, 11, 18, 23, 50]).

Əgər $y_1,...,y_n$ seçimi verilənlərinə y təsadüfi kəmiyyətinin hər hansı realizasiyası kimi baxılırsa, onda $y_1,...,y_n$ zaman sırasına $Y(t)$ təsadüfi prosesinin bir realizasiyası kimi baxılır. Lakin y_t $(t=1,2,...,n)$ zaman sırası ilə təsadüfi seçimi doğuran $y_1,...,y_n$ müşahidələr ardıcıllığının fərqləndirmək lazımdır. Təsadüfi seçim elementlərindən fərqli olaraq, zaman sırasının həddləri bir qayda olaraq statistik asılı deyil, bu həddlər eyni qanunla paylanmaya bilər.

§8.2. Zaman sıralarının reqressiya modellərinin Qauss-Markov şərtləri

Zaman sıralarının ekonometrik reqressiya modellərinin qurulmasında aşağıdakı xüsusiyyətləri nəzərə almaq lazımdır:

1. Zaman faktoru verilənləri nizamlamalıdır. Yəni, fəza seçimlərindən fərqli olaraq, zaman sırası verilənlərinin yazılma tərtibi mühüm əhəmiyyətlidir.
2. Fəza seçimlərindən fərqli olaraq, zaman sıralarının elementləri arasında müxtəlif zaman anlarında asılılıq ola bilər.
3. Adətən reqressiya modelləri kiçik həcmli seçimlərdə qiymətləndirilir və böyük həcmli seçimi verilənlərin alınması imkanı olmur. Məsələn, belə hallar illik makroiqtisadi verilənlərin tədqiqində ortaya çıxa bilər.

İndi isə, zaman sıraları modellərində Qauss-Markov şərtlərinin necə ödənilməsini təhlil etmək üçün $(y_t, x_{t1},...,x_{tk})$ zaman sıralarının

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t1} + ... + \alpha_k x_{tk} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,n \qquad (8.2)$$

çoxfaktorlu reqressiya modelinə baxaq. Bu modelin təsadüfi fəza seçimli (3.3) modelindən fərqi ondan ibarətdir ki, zaman sıralarını formalaşdıran təsadüfi kəmiyyətlər asılı ola bilər. Ona görə də, Qauss - Markov şərtləri korrektə olunmalıdır.

$x_t = (x_{t1},...,x_{tk})'$, $t = (1,...,n)$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)'$ vektor işarələmələrini qəbul edək. Onda (8.2) tənliyi matris halında

$$y_t = \alpha_0 + x_t'\alpha + \varepsilon_t \qquad (8.3)$$

kimi yazılır.

Reqressiya qalıqları üzərinə aşağıdakı şərtləri qəbul edək:

1. $M(\varepsilon_t / x_1,...,x_n) = 0$;
2. $D(\varepsilon_t / x_1,...,x_n) = D(\varepsilon_t) = \sigma^2$;
3. $\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s / x_1,...,x_n) = 0$;
4. $\varepsilon_t / x_1,...,x_n \sim N(0, \sigma^2)$.

Burada (3.3) modelindən fərq ondadır ki, şərti riyazi gözləmə və şərti dispersiya $x_1,...,x_n$ şərtləri ilə qəbul olunur, yəni zaman sıralarının elementləri müxtəlif zaman anlarında korrelə oluna bilər.

Teorem 8.1. *Tutaq ki,* (8.2) *modelinin qalıqları* 1.-3. *şərtlərini ödəyir və heç bir reqressor digərləri ilə xətti ifadə olunmur. Onda* (8.2) *modelinin ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsi meylsiz, ən kiçik dispersiyalı qiymətləndirilmədir.*

Fəza seçimləri halında olduğu kimi, ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmənin meylsiz olması üçün 1-ci şərtin ödənilməsi kifayətdir.

Teorem 8.2. *Tutaq ki,* (8.2) *modelində teorem* 8.1-*in şərtləri və qalıqların 4. normal paylanma şərti ödənilir. Onda* (8.2) *modelinin əmsallarının ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsində fəza seçimləri reqressiyasının statistik nəticələri doğrudur.*

Bu teoremlərin şərtləri ödənildikdə zaman sıralarının analizi üçün əsasən çoxdəyişənli reqressiya analizində olan yanaşmalardan istifadə olunur. Bunlardan ən əsası ƏKKÜ-dur. Bundan başqa qeyri-xətti ƏKKÜ-dan və diskontlaşdırılmış ƏKKÜ-dan istifadə etmək olar.

§8.3. Zaman sıralarının trend modelləri

Zaman sıraları modellərində yalnız zamandan asılı determinik tərkib trend hesab olunur. Ona dörə də, zaman sırasını aşağıdakı nəzəri-ehtimal sxemi ilə ifadə etmək olar:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t, \tag{8.4}$$

burada $f(t)$- trend, ε_t -təsadüfi tərkibdir və $M\varepsilon_t = 0$, $D\varepsilon_t = \sigma^2$.

Əgər trend öz parametrlərinə nəzərən xəttidirsə, təsadüfi tərkib isə, məlum kovariasiya matrisinə malikdirsə, onda parametrlərin qiymətləndirilməsi məsələsi Fəsil 3-dəki xətti reqressiya məsələsinə gətirilir. Çünki, belə halda (8.4) münasibəti

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i(t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n \tag{8.5}$$

münsibəti ilə əvəz olunur. Burada $\varphi_i(t)$ funksiyaları zamana nəzərən məlum funksiyalardır. Məsələn, polinomial trend halında (8.5) münasibətləri

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t^i + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

kimi göstərilir.

$\varphi_i(t)$ funksiyalarını x_{ti} ilə əvəz etməklə, parametrlərə nəzərən xətti adi çoxdəyişənli reqressiya modelini almaq olar. Alınmış seçimi tənliklər belə yazılır:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{ti} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n \tag{8.6}$$

və ya matris halında

$$Y = X\alpha + \varepsilon, \tag{8.7}$$

burada

$$Y=\left(y_1,\ldots,y_n\right)',\ X=\begin{pmatrix}1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k}\\ \ldots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk}\end{pmatrix},$$

$$x_t=\left(1,x_{t1},\ldots,x_{tk}\right)',\alpha=\left(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k\right)',\varepsilon=\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\right)'.$$

Xətti trend halında $f(t)=\alpha_0+\alpha_1 t,\ k=1,\ \varphi_1(t)=t$ olduğundan, təsadüfi tərkiblərin qiymətləri korrelə olunmadıqda ƏKKÜ-ilə $\hat{y}_t=\hat{f}(t)=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 t$ xəttinin parametrləri

$$\begin{cases}\hat{\alpha}_0 n+\hat{\alpha}_1\sum\limits_{t=1}^{n}t=\sum\limits_{t=1}^{n}y_t,\\ \hat{\alpha}_0\sum\limits_{t=1}^{n}t+\hat{\alpha}_1\sum\limits_{t=1}^{n}t^2=\sum\limits_{t=1}^{n}ty_t\end{cases}\tag{8.8}$$

normal tənliklər sistemini ödəməlidir.

$$\sum_{t=1}^{n}t=\frac{n(n+1)}{2},\sum_{t=1}^{n}t^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

münsibətlərini nəzərə almaqla

$$\hat{\alpha}_0=\bar{y}-\hat{\alpha}_1\bar{t},\quad \hat{\alpha}_1=\frac{\sum\limits_{t=1}^{n}y_t\left(t-\bar{t}\right)}{\sum\limits_{t=1}^{n}\left(t-\bar{t}\right)^2},\ \bar{t}=\frac{1+n}{2}\tag{8.9}$$

xətti trend əmsallarının qiymətləndirmələri alınır.

Təsadüfi tərkibin dispersiyasının qiymətləndirilməsi üçün isə,

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\hat{y}_t\right)^2\tag{8.10}$$

qiymətləndirilməsi doğrudur. Burada

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t = \bar{y} + \hat{\alpha}_1 (t - \bar{t}).$$

Polinomial trend halında isə, $\varphi_i(t) = t^i$, $\varphi_0(t) = 1$ və

$$f(t,\alpha) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t^i, \quad t = \overline{1,n}$$

olduğundan, onun (8.7) formasında

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^k \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^k \end{pmatrix}$$

olur, digər işarələmələr dəyişməz qalır. Normal tənliklər sisteminin əmsallarından düzəldilmiş matris

$$A = X'X = \left(\sum_{i=1}^{n} t^{i+\ell} \right)_{i,\ell=\overline{0,k}}$$

kimidir və normal tənliklərin sağ tərəfini bütün

$$X'Y = \left(\sum_{i=1}^{n} y_t t^i \right), \; i = 0,1,\dots,k$$

üçün hesablamaq lazımdır. Sərbəst həddin qiymətləndirilməsi üçün isə,

$$\hat{\alpha}_0 = \bar{y} - \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i \overline{t^i}$$

düsturundan istifadə etmək olar. Məsələn, parabolik trend halında ƏKKÜ-ilə $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ parabolasının əmsallarının qiymətləndirilməsi belə normal tənliklər sistemini ödəməlidir:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 \sum_{t=1}^{n} t^3 + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=1}^{n} t^3 + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=1}^{n} t^4 = \sum_{t=1}^{n} t^2 y_t, \\ \hat{\alpha}_0 \sum_{t=1}^{n} t + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=1}^{n} t^3 = \sum_{t=1}^{n} y_t, \\ \hat{\alpha}_0 n + \hat{\alpha}_1 \sum_{t=1}^{n} t + \hat{\alpha}_2 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} t y_t. \end{cases} \tag{8.11}$$

$\sum_{t=1}^{n} t, \sum_{t=1}^{n} t^2, \sum_{t=1}^{n} t^3, \sum_{t=1}^{n} t^4$ cəmləri zaman sırasının səviyyələrindən asılı deyil, onlar üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur (bax. [7, səh. 99]):

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{t=1}^{n} t^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \sum_{t=1}^{n} t^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}.$$

Bu düsturların nəzərə alınması sistemi sadələşdirir.

Sistemi həll etməklə alırıq ki,

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t^2 - \sum_{t=1}^{n} t^2 \sum_{t=1}^{n} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} t^4 - \left(\sum_{t=1}^{n} t^2\right)^2}, \quad \hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{\sum_{t=1}^{n} t^2},$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t^2 \left[\frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t^2 - \sum_{t=1}^{n} t^2 \sum_{t=1}^{n} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} t^4 - \left(\sum_{t=1}^{n} t^2\right)^2}\right]. \tag{8.12}$$

Ümumiyyətlə, trend k-dərəcəli polinom olarsa, onda onun parametrlərinin ƏKKÜ-ilə tapılması aşağıdakı $(k+1)$ sayda tənliklərdən ibarət sistemin $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$-a nəzərən həll olunmasına gətirilir ([21, səh.45-47]):

$$\begin{cases} \alpha_0 n + \alpha_1 \sum_{t=1}^{n} t + \alpha_2 \sum_{t=1}^{n} t^2 + ... + \alpha_k \sum_{t=1}^{n} t^k = \sum_{t=1}^{n} y_t, \\ \alpha_0 \sum_{t=1}^{n} t + \alpha_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 + \alpha_2 \sum_{t=1}^{n} t^3 ... + \alpha_k \sum_{t=1}^{n} t^{k+1} = \sum_{t=1}^{n} t y_t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_0 \sum_{t=1}^{n} t^k + \alpha_1 \sum_{t=1}^{n} t^{k+1} + \alpha_2 \sum_{t=1}^{n} t^{k+2} ... + \alpha_k \sum_{t=1}^{n} t^{2k} = \sum_{t=1}^{n} t^k y_t. \end{cases} \tag{8.13}$$

(8.13) sistemini sadələşdirmək mümkündür. Bunun üçün zaman anlarının nömrələnməsini elə seçmək lazımdır ki, sıranın zaman göstəricilərinin $\sum t^p$ (burada p tək ədəddir) cəmi sıfra bərabər olsun. $\sum t^k = 0$ olması üçün tək saylı həddləri olan sıralarda mərkəzi hədd sıfr qəbul edilir, mərkəzdən (sütunda) yuxarıda olan nömrələr ardıcıl olaraq $-1, -2, -3$ (mənfi işarəsi ilə), aşağıya hərəkət etdikcə nömrələr $+1, +2, +3$ (müsbət işarə ilə) götürülür. (Məsələn, sıra 7 həddən ibarətdirsə ($-3, -2, -1$yuxarı) ($+1, +2, +3$ aşağı)). Əgər sıranın həddləri cüttdürsə (məsələn, 6), sıranın yuxarı yarımhissəsi üzrə (orta nömrədən) nömrələnmə $-1, -3, -5$ və s., mərkəzdən aşağı yarımhissə üzrə nömrələnmə $+1, +3, +5$ və s. götürülür. Hər iki halda $\sum t^k = 0$ olur və hesablamalar sadələşir. Xüsusi halda, (8.8) və (8.11) sistemləri uyğun olaraq

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 n = \sum_{t=1}^{n} y_t, \\ \hat{\alpha}_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} t y_t \end{cases}$$

və

$$\begin{cases} \alpha_0 n + \alpha_2 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t, \\ \alpha_1 \sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t t, \\ \alpha_0 \sum_{t=1}^{n} t^2 + \alpha_1 \sum_{t=1}^{n} t^4 = \sum_{t=1}^{n} y_t t^2 \end{cases}$$

hallarına gətirilir.

Tətbiqi iqtisadiyyatda iqtisadi göstəricinin zamana nəzərən inkişaf tendensiyasının təsvirində polinomial əyrilər və digər iqtisadi artım əyriləri (bax.[4, səh. 47-52]) geniş istifadə olunur. Belə yanaşmada tədqiq olunan iqtisadi göstəricinin dəyişməsi ancaq zaman faktorundan asılı olaraq təhlil olunur və fərz edilir ki, digər faktorların təsiri ciddi deyil və dolayısı ilə zaman faktoru vasitəsilə büruzə verir.

İqtisadi artım əyriləri ilə ekonometrik modeləşdirmə əsasında proqnozlaşdırma ekstrapolyasiya üsulu ilə keçmiş zaman anlarında müşahidə olunan tendensiyaları gələcək anlara davam etdirməklə aparılır. Bu zaman fərz edilir ki, zaman sıralarında trend mövcuddur, yaranan tendensiya qabaqlanma periodunda ciddi dəyişikliklərə məruz qalmır.

Qeyd olunanlara nümunə olaraq

$$y_t = ab^t \varepsilon_t, \quad t = 1,..., n \qquad (8.14)$$

modelinə baxaq. Bu modeli loqorifmləyək:

$$\ln y_t = A + Bt + u_t \ , \qquad (8.15)$$

burada $A = \ln a,\ B = \ln b,\ u_t = \ln \varepsilon_t.$

Bu tip modellərin statistik qiymətləndirilməsi üçün

$$\sum_{t=1}^{n} \left[\ln y_t - \ln \hat{y}_t\right]^2 \to \min,$$

(burada $\hat{y}_t = ab^t$) minimallaşdırma məsələsinə baxılır. Uyğun normal tənliklər sistemi

$$\begin{cases} nA + B\sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} \ln y_t, \\ A\sum_{t=1}^{n} t + B\sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} (\ln y_t) t \end{cases} \qquad (8.16)$$

Əgər trend $y_t = a + \dfrac{b}{t}$ hiperbolik haldadırsa, onda parametrlərin tapılması üçün

$$\begin{cases} an + b\sum_{t=1}^{n} \dfrac{1}{t} = \sum_{t=1}^{n} y_t \\ a\sum_{t=1}^{n} \dfrac{1}{t} + b\sum_{t=1}^{n} \dfrac{1}{t^2} = \sum_{t=1}^{n} \dfrac{1}{t} y_t \end{cases} \qquad (8.17)$$

normal tənliklər sistemini a və b-yə nəzərən həll etmək lazımdır.

Nümunə 8.1. Hiperbolik trendin analizinə nümunə kimi 6 il üzrə şərti verilmiş mal dövriyyəsini təsvir edən cədvələ baxaq:

1-ci il	2-ci il	3-cü il	4-cü il	5-ci il	6-cı il
70	100	140	180	200	240

a və b parametrlərini təyin etmək üçün (8.17)-dəki əmsallar üçün cədvəl belə olur:

t	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t^2}$	y_t	$\frac{1}{y_t}$	$\frac{y_t}{t}$
1	1	1	70	0,01428	70,0
2	0,5	0,25	100	0,01000	50,0
3	0,33	0,109	140	0,00714	46,6
4	0,25	0,062	180	0,00055	45,0
5	0,2	0,04	200	0,00500	40,0
6		0,029	240	0,00416	40,0
Σ 21	Σ 2,45	Σ 1,491	Σ 930	Σ 0,04113	Σ 29,16

$$a = \frac{\sum_{t=1}^{6} y_t \sum_{t=1}^{6}\left(\frac{1}{t^2}\right) - \sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t}\sum_{t=1}^{6}\frac{y_t}{t}}{6\sum_{t=1}^{6}\left(\frac{1}{t}\right)^2 - \sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t}\sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t}} = \frac{930\cdot 1491 - 2{,}45\cdot 291{,}6}{6\cdot 1{,}491 - 2{,}45\cdot 2{,}45} = 228{,}6;$$

$$b = \frac{6\sum_{t=1}^{6}\frac{y_t}{t} - \sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t}\sum_{t=1}^{6} y_t}{t\sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t^2} - \sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t}\sum_{t=1}^{6}\frac{1}{t}} = \frac{6\cdot 291{,}6 - 2{,}45\cdot 930}{6\cdot 1{,}491 - 2{,}45\cdot 2{,}45} = -179{,}9.$$

Mal dövriyyəsinin proqnozlaşdırılması üçün hiperbola tənliyi belə olur:

$$y_t = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{t}.$$

Əgər trend əyrisi Perli-Rid $y_t = \dfrac{1}{c + ab^t}$ loqistik əyrisidirsə (bax.[4, səh.47-52]), onda c asimptotu verildikdə a və b parametrləri ƏKKÜ-ilə statistik qiymətləndirilə bilər. Bunun üçün $\frac{1}{y}=c+ab^t$; $\frac{1}{y}-c=ab^t$ çevirməsində $\frac{1}{y}-c$-ni Y -lə əvəz edib loqarifmləməklə $\ln Y=\ln a+\ln b\cdot t$ cüt reqressiya tənliyi alınır ki, onun parametrlərinin tapılması üçün Qauss-Markov şərtləri ilə ƏKKÜ-nu tətbiq etmək olar.

Loqistik əyri $y_t=\frac{c}{1+be^{-at}}$ düsturu ilə verilirsə, onda c asimptotu məlum olduqda funksiyanı xəttiləşdirmək mümkündür: $1+be^{-at}=\frac{c}{y}$; $\frac{c}{y}-1=be^{-at}$ və $\left(\frac{c}{y}-1\right)$-i Y -lə işarə edib loqarifləməklə $Y=be^{-at}$ və $\ln Y=\ln b-a\cdot t$ alınır. Sonra isə, ƏKKÜ-ilə a və b parametrlərini qiymətləndirmək olar.

Əgər trend $y_t=ca^{b^t}$ Hompers əyrisidirsə, onda c asimptotu verildikdə digər parametrləri ƏKKÜ-ilə tapmaq olar. Bunun üçün $\frac{y_t}{c}=a^{b^t}$ bərabərliyini iki dəfə loqarifmləməklə $\lg\left(\lg\frac{y_t}{c}\right)=t\lg b+\lg(\lg a)$ münasibəti alınır. Burada $\lg\left(\lg\frac{y_t}{c}\right)=y^*,\ \lg b=B,\ \lg(\lg a)=A$ əvəzləməsi ilə $y^*=A+Bt$ xətti asılılığı alınır və qiymətləndirmə üçün ƏKKÜ tətbiq olunur.

§8.4. Stasionar zaman sıraları və onların xarakteristikaları. Avtokorrelyasiya fuksiyası

İqtisadi göstəricilərin analizi zamanı elə hallar ortaya çıxa bilər ki, öyrənilən proses dayannıqlı artım və ya azalma tendensiyası ilə (trendlə) təsvir olunmasın, lakin müəyyən orta səviyyə ətrafında təsadüfi rəqslər etsin. Belə təzahürlər, məsələn, iqtisadi göstəricilərin tarazlıq vəziyyətindən xarici faktorların təsirilə təsadüfi meyletmələrilə xarakterizə olunduqda baş verir və təzahür tarazlıq vəziyyətində olan sistemin təsadüfi rəqsini təsvir edir. Bu sinif zaman sıralarını təsvir etmək üçün stasionar zaman sıralarının ehtimal modelindən istifadə olunur([49, səh. 198-204]).

Tərif 8.7. $y_1,...,y_n$ *həddli* $\{y_t\}$, $\{t=1,2,...,n\}$ *zaman sırasına o zaman stasionar (geniş mənada) zaman sırası deyilir ki,*

$$My_t = const,\ \mathrm{cov}(y_t, y_{t+\tau}) = \gamma(\tau),\ (\tau = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \qquad (8.18)$$

olsun.

Satsionar zaman sırası analyışı onu göstərir ki, onun orta qiyməti zamana nəzərən dəyişmir, yəni zaman sırasının trendi mövcud deyil. Bundan başqa, zaman sırasının müxtəlif elementləri arasındakı kovariasiya yalnız onların bir-birindən nə qədər məsafədə olmasından asılıdır. τ kəmiyyəti zaman sırasının elementləri arasındakı zaman anlarının fərqini xarakterizə edir və laq dəyişəni və ya gecikmə adlanır. $\gamma(0) = \mathrm{cov}(y_t, y_t) = D(y_t)$ olduğundan, stasionar zaman sırasının dispersiyası da zamana nəzərən dəyişmir.

Tərif 8.8. $\{y_t\}$, $(t=1,2,...,n)$ *zaman sırası o zaman ciddi stasionar (qısa mənada stasionar) adlanır ki,* n *sayda* $y_1,...,y_n$ *müşahidələrinin birgə paylanması istənilən* n, t *və* τ *üçün* n *sayda* $y_{1+\tau}, y_{2+\tau},...,y_{n+\tau}$ *müşahidələrinin birgə paylanması kimi olsun. Başqa sözlə,* y_t *ciddi stasionar sırasının xassələri* t *momentindən asılı deyil, yəni onun paylanma qanunu və ədəd xarakteristikaları* t*-yə nəzərən dəyişmir.*

Geniş mənada stasionar zaman sıralarında n, t və τ-ya nəzərən dəyişməməzlik şərti yalnız göstərilən paylanmanın ədədi xarakteristikalarına xasdır.

Əgər $\{y_t\}$, $(t=1,2,...,n)$ardıcıllığı sonlu riyazi gözləmə və dispersiyaya malik olan ciddi stasionar ardıcıllıqdırsa, onda o, zəif stasionardır. Bu təklifin əksi isə, ümumiyyətlə doğru deyil. Lakin, əgər $\{y_t\}$ ardıcıllığı normal paylanmışdırsa, onda istənilən zəif stasionarlıq güclü stasionarlıqla ekvivalentdir.

Tərif 8.9. *laq dəyişənindən asılı* $\gamma(\tau)$ *funksiyasına zaman sırasının avtokovariasiya funksiyası deyilir.*

Avtokovariasiya funksiyası həm müsbət, həm də mənfi laqlar üçün təyin olunmuşdur.

$$\gamma(-\tau) = \mathrm{cov}(y_t, y_{t-\tau}) = \mathrm{cov}(y_{t-\tau}, y_t) = \mathrm{cov}(y_n, y_{n+\tau}) = \gamma(\tau)$$

olduğundan, $\gamma(\tau)$ funksiyası cüt funksiyadır. İstənilən t və s zaman anları üçün $\mathrm{cov}(y_t, y_s) = \gamma(t-s)$.

τ laqlı stasionar zaman sırasının müxtəlif elementləri arasında korrelyasiya əmsalı

$$\rho(\tau) = corr\,(y_t, y_{t+\tau}) = \frac{\mathrm{cov}(y_t, y_{t+\tau})}{\sqrt{D(y_t)\cdot D(y_{t+\tau})}} = \\ = \frac{\gamma(\tau)}{\sqrt{\gamma(0)\gamma(0)}} = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}, \tag{8.19}$$

düsturu ilə hesablanır. Kovariasiya əmsalı kimi, korrelyasiya əmsalı da, yalnız stasionar sıranın elementləri arasında laqdan asılıdır.

Tərif 8.10. $\rho(\tau) = corr(y_t, y_{t+\tau})$ *funksiyasına stasionar zaman sırasının avtokovariasiya funksiyası deyilir.*

$\rho(\tau)$ funksiyası da, laq dəyişəninə nəzərən cüt funksiaydır və $\rho(0) = 1$. Avtokorrelyasiya əmsalı üçün $corr(y_s, y_t) = \rho(t-s)$.

İstənilən stasionar sıra üçün $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} \rho(\tau)$ limiti mövcuddur və $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} \rho(\tau)$=0. Bu o deməkdir ki, zaman laqları artdıqca, zaman sırasının elementləri zəif korrelə olunur, yəni t-zaman anı artdıqca zaman sırasının keçmiş vəziyyətləri unudulur, çünki, s qeyd olunduqda və $t \to +\infty$ olduqda,

$$corr(y_s, y_t) = \rho(t-s) \to 0.$$

Tərif 8.11. $\rho(\tau)$ *funksiyasının qrafiki stasionar zaman sırasının korreloqramı adlanır.*

Stasionar zaman srasına nümunə olaraq riyazi gözləməsi sıfır və sabit dispersiyalı normal qanunla paylanmış və korrelə olunmayan $\{\varepsilon_t\}$ ardıcıllığını göstərmək olar. Belə xassəli zaman sırasına ağ küy deyilir. Ağ küyün avtokovariasiya funksiyası

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

olur, yəni, ağ küy özünün keçmiş qiymətlərini dərhal (bir anda) unudur.

Deməli $\{\varepsilon_t\}$ ardıcıllığının ağ küy olması üçün

$$M(\varepsilon_t) = M(\varepsilon_{t-1}) = \ldots = 0,$$
$$M(\varepsilon_t^2) = M(\varepsilon_{t-1}^2) = \ldots = \sigma^2,$$
$$M(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = M(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t-j-s}) = 0, \ \forall j, t$$

şərtləri ödənilməlidir.

Ola bilər ki, $\{\varepsilon_t\}$ ardıcıllığı ağ küy olsun, lakin onların laqlarla xətti kombinasiyaları ağ küy olmasın. Məsələn, $\{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}\}$ ardıcıllığına baxsaq, $M(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) = 0$ və $D(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) = 2\sigma^2$. Lakin $M[(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})] = M[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})] = \sigma^2$ və deməli, yuxarıdakı 3-cü şərt $y_t = \{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}\}$, $y_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}\}$ ardıcıllığı üçün ödənilmədiyindən cari andakı qiymətlə əvvəlki qiymətin cəmindən düzəldilmiş ardıcıllıq ağ küy əmələ gətirmir.

Ağ küy əmələ gətirən zaman sıraları belə şərtləri ödəyir:

$$y_t = \varepsilon_t,$$

burada $\begin{cases} M(\varepsilon_t)=0, \\ M(\varepsilon_t,\varepsilon_{t\pm\tau})=\begin{cases}\sigma_0^2, & \tau=0 \quad olduqada, \\ 0, & \tau\neq 0 \quad olduqada.\end{cases}\end{cases}$

Onda $\gamma(\tau)=0$, $(\rho(\tau)=0)$ bərabərlikləri $\tau>0$ olduqda doğrudur. $\gamma(\tau)=\sigma_0^2$, belə ki, σ_0^2 sabit dispersiyasının qiyməti t -dən asılı deyil.

Ağ küylərə nümunə kimi, klassik xətti reqressiya modellərində baxılan təsadüfi tərkibləri göstərmək olar. Bu qalıqlar normal qanunla paylandıqda, onlar Qauss tipli ağ küyləri formalaşdırır.

Tərifdən aydın olur ki, ağ küy zaman sırası üçün reqressiya modellərində təsadüfi tərkibə qoyulan Qauss-Markov şərtləri ödənilir.

$\rho(\tau)$ funksiyasının statistik qiymətləndirilirməsi kimi (2.24) düsturu ilə müəyyənləşdirilən seçimi $r(\tau)$ korrelyasiya əmsalından istifadə etmək olar ki, bu düsturda $x_i=y_t$, $y_i=y_{t+\tau}$ və n nömrəsi $n-\tau$ nömrələnməsi ilə əvəz olunmalıdır:

$r(\tau)=$

$$=\frac{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t y_{t+\tau}-\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t\sum_{t=1}^{n-\tau}y_{t+\tau}}{\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t^2-\left(\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t\right)^2}\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau}y_{t+\tau}^2-\left(\sum_{t=1}^{n-\tau}y_{t+\tau}\right)^2}}. \quad (8.20)$$

Tərif 8.12. $r(\tau)$ *funksiyasına seçimi avtokorrelyasiya funksiyası, onun qrafikinə isə, korreloqram deyilir.*

Stasionar zaman sıralarının tədqiqində $\rho_{xüsusi}(\tau)$- xüsusi avtokorrelyasiya funksiyasından da istifadə olunur ki, bu funksiya y_t ilə $y_{t+\tau}$ elementləri arasında xüsusi korrelyasiya əmsalıdır. Onun statistik qiymətləndirilməsi (3.56), xüsusi halda (3.58) düsturları vasitəsilə yerinə yetirilir. Məsələn, y_{t+1} həddinin təsirini aradan qaldırmaqla y_t və y_{t+2} elementləri arasında seçimi 1-ci tərtib xüsusi avrokorellyasiya əmsalı (3.58) düsturuna əsasən belə hesablana bilər:

$$r_{xüs}(2) = r_{02,1} = \frac{r(2) - r(1)r(1,2)}{\sqrt{1-r^2(1)}\sqrt{1-r^2(1,2)}}, \qquad (8.21)$$

burada $r(1), r(1,2), r(2)$ uyğun olaraq y_t və y_{t+1}, y_{t+1} və y_{t+2}, y_t və y_{t+2}, $t = 1,...,n$ elementləri arasında seçimi avtokorrelyasiya əmsallarıdır.

$r(\tau)$ və $r_{xüs}(\tau)$ avtokorrelyasiya funksiyalarının məlum olması təhlil olunan zaman sırası modelinin seçilməsində və indentifikasiyasında, həmçinin modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsində ciddi rol oynaya bilər.

Nümunə 8.2. Tutaq ki, 8 il ərzində son istehlak xərcləri şərti verilənlərlə belə cədvəldə əks olunmuşdur.

t	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{y}_1$	$y_t - \bar{y}_2$	$(y_t - \bar{y}_1) \times (y_t - \bar{y}_2)$	$(y_t - \bar{y}_1)^2$	$(y_t - \bar{y}_2)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	7	-3,29	-3	9,87	10,8241	9
3	8	8	-3,29	-2	6,58	10,8241	4
4	10	8	-1,29	-2	2,58	1,6641	4
5	11	10	-0,29	0	0	0,0841	0
6	12	11	0,71	1	0,71	0,5041	1
7	14	12	2,71	2	5,42	7,3441	4
8	16	14	4,71	4	18,84	22,1841	16
Σ	86	70	-0,03	0	44,0	53,4284	38

Fərz edək ki, cari ildə son istehlak xərcləri əvvəlki illərdəki istehlak xərclərindən asılıdır. y_t və y_{t-1} arasındakı korrelyasiya əmsalını tapaq və cari illə əvvəlki ildə olan istehlak xərcləri arasındakı asılılığın sıxlığını müəyyənləşdirək. Bunun üçün (2.23) düsturunda x dəyişəni olaraq $y_2, y_3, ..., y_7$ zaman sırasını götürək. Onda yeni alınmış düstur belə olar:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{8}(y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{8}(y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^{8}(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}, \qquad (8.22)$$

burada $\bar{y}_1 = \frac{1}{7}\sum_{t=2}^{8} y_t$; $\bar{y}_2 = \frac{1}{7}\sum_{t=2}^{8} y_{t-1}$.

Bu düstur zaman sırasının səviyyələrinin 1-ci tərtib avtokorrelyasiya əmsalıdır və sıranın ardıcıl $(t-1)$ və t anlarındakı səviyyələrin asılılığını ölçür və laq vahidə bərabərdir:

$$\bar{y}_1 = \frac{8+8+10+11+12+14+16}{7} = \frac{79}{7} = 11{,}29;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{7+8+8+10+11+12+14}{7} = \frac{70}{7} = 10;$$

$$r_1 = \frac{44}{\sqrt{53{,}4238}} = 0{,}976.$$

Alınan qiymət onu göstərir ki, əvvəlki illərlə cari il arasında istehlak xərclərinin asılılığı çox sıxdır və bu əlaqə xətti tendensiya xarakterlidir.

Eyniqayda ilə 2-ci və daha çox tərtib avtokorrelyasiya əmsallarını tapmaq olar:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{8}(y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{8}(y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^{8}(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}},$$

burada $\bar{y}_3 = \frac{1}{6}\sum_{t=3}^{8} y_t$; $\bar{y}_4 = \frac{1}{6}\sum_{t=3}^{8} y_t$. Şərti qiymətləri nəzərə alsaq,

$$\bar{y}_3 = \frac{8+10+11+12+14+16}{6} = \frac{71}{6} = 11{,}83;$$

$$\bar{y}_4 = \frac{7+8+8+10+11+12}{6} = \frac{56}{6} = 9{,}33;$$

$$r_1 = \frac{27{,}334}{\sqrt{40{,}8334 \cdot 19{,}3334}} = 0{,}973.$$

Hesablama nəticələri göstərir ki, istehlak xərcləri illər üzrə xətti tendensiya ilə dəyişir.

§8.4.1. Stasionarlığın yoxlanılmasında F-Fişer və t-Styudent testləri

Stasionarlığın yoxlanılmasında zaman sırasının qiymətlərinin aprior normal qanunla paylanması şərtilə parametrik testlərdən istifadə etmək olar. Bunun üçün əvvəlcə dispersiyanın sabitliyi haqda hipotezi Fişer kriteriyası ilə yoxlamaq lazımdır. Zaman sırası n_1 və n_2 uzunluqlu iki hissəyə bölünür. Kriteriyanın hesablanma qiyməti

$$F_{hes.} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{8.23}$$

düsturu ilə müəyyənləşdirilir. Burada s_1^2 və s_2^2 uyğun olaraq sıranın n_1 və n_2 uzunluqlu parçasında korrektə olunmuş seçimi dispersiyalarıdır və hər iki parçanın ümumi ortasından istifadə etməklə hesablanır.

Əgər $F_{hes.} < F_{cədvəl}\ (\alpha,\ n_1 - 1, n_2 - 1)$ (burada α - əhəmiyyətlilik səviyyəsidir), olarsa, onda dispersiyanın sabitliyi haqda hipotez qəbul olunur. Sonra isə, riyazi gözləmələrin bərabərliyi haqda hipotez yoxlanılır. Bunun üçün

$$t_{müş.} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 2)}{n_1 + n_2}} \qquad (8.24)$$

düsturu ilə Styudent kriteriyasının müşahidə olunan qiyməti hesablanır.

Əgər $t_{müş.} < t_{cədvəl} \quad (\alpha, n_1 + n_2 - 2)$ (burada α əhəmiyyətlilik səviyyəsidir, $k = n_1 + n_2 - 2$ isə,

Styudent paylanmasında sərbəst tərtiblərin sayıdır) olarsa, onda zaman sırasının riyazi gözləməsinin sabitliyi haqda hipotez qəbul olunur.

Ümumi halda, zaman sıralarının səviyyələrinin qiymətləri üçün normal paylanma şərtləri ödənilmir. Bu halda qeyri-parametrik testlərdən istifadə olunur (bax. [58, səh. 137-138]).

§8.5. Iqtisadi göstəricilərin zaman sıralarının ilkin analizi və hamarlanması

İqtisadi göstəricilərin zaman sıralarının ilkin analizində əsasən sıranın səviyyələrinin anomal qiymətlərinin üzə çıxması və onların aradan qaldırılması mərhələlərinə baxılır. Burada, həm də, zaman sırasında trendin mövcudluğu təhlil edilir. Anomal səviyyə dedikdə zaman sıraları ilə tədqiq olunan iqtisadi sistemin potensial imkanlarına cavab verməyən ayrıca səviyyə qiymətləri başa düşülür ki, onlar sıranın səviyyəsi kimi qalaraq zaman sırasının əsas xarakteristikalarının qiymətlərinə ciddi təsir göstərməklə, uyğun trendin təsvirində çətinliklər yaradır. Anomal müşahidələrin səbəbləri texniki tərtibli xətalar, göstəricilərin aqroqirə olunmasındakı xətalar, informasiyanın ötürülməsindəki xətalar və s. ola bilər.

Zaman sıralarında anomal səviyyələri müəyyənləşdirmək üçün statistik külliyyatlar üçün xüsusi hesablama üsullarından istifadə edilir. Onlardan İrvin üsulunu nəzərdən ([56, səh.124-125]) keçirək. Bu üsul

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}; \quad t = 2,3,\dots,n \tag{8.25}$$

düsturundan istifadəyə əsaslanır. Burada σ_y orta kvadratik meyldir və

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}{n-1}}; \ \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$$

düsturları ilə hesablanır.

λ_2, λ_3 və s. hesablanma qiymətləri λ_α - İrvin kriteriyasının cədvəl qiymətləri ilə müqayisə olunur. Əgər bu qiymətlər cədvəl qiymətindən böyükdürsə, onda sıranın uyğun y_t səviyyəsi anomal hesab edilir.

$\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində İrvin kriteriyasının qiymətləri belə cədvəllə verilir.

n	2	3	10	20	30	60	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

Əgər üzə çıxan anomal səviyyə texniki tərtiblidirsə, onda onu iki qonşu səviyyənin ədədi ortası ilə əvəz etməklə, ya da anomal səviyyəni sıranı approksimasiya edən əyrinin uyğun qiyməti ilə əvəz etməklə aradan qaldırmaq olar.

Göstəricilərin anomal qiymətlərinin aradan qaldırılmasını və tendensiyanın üzə çıxmasını müəyyənləşdirmək üçün ən geniş yayılmış üsul zaman sırasının hamarladırılmasıdır. Bu yanaşmada zaman sırasının faktiki səviyyələri müəyyən qaydada hesablanmış səviyyələrlə əvəz olunur ki, yeni alınmış zaman sırasında tendensiya daha dəqiq aşkar olunur. Zaman sıralarının hamarlanması riyazi filtirlər nəzəriyyəsi üsullarından biridir ki, onların köməyi ilə yüksək tezlikli küylər filtrasiya olunur. Ona görə də sıranın hamarlanmasına adətən onun filtrə olunması, bu əməliyyatı yerinə yetirən çevirməyə isə, filtr deyilir.

Şürüşkən orta üsulu ən çox yayılmış hamarlama üsuludur və sıranın təsadüfi və periodik rəqslərinin hamarlanmasına imkan verir. Ən sadə üsul sadə sürüşkən orta üsuldur ([21, səh. 29-42]). Üsulun mahiyyəti uzunluğu əvvəlcədən müəyyənləşdirilən zaman intervalında sıranın həddlərinin başlanğıc qiymətlərindən onların orta qiymətinə keçməkdir. Bu zaman seçilmiş zaman intervalı sıra boyunca sürüşür, yeni alınmış sıra daha hamar olur. Çünki, əgər zaman sırasının y_t həddinin ədədi ortası ətrafında meyletmələr σ^2 dispersiyası ilə xarakterizə olunursa, yeni alınmış m həddli $\frac{y_1+...+y_m}{m}$ sırasının həmin ədədi orta ətrafında meyletmələri $\frac{\sigma^2}{m}<\sigma^2$ dispersiyasına bərabər olur.

Hamarlanma intervalını tək ədədlə qəbul etmək daha məqsədə uyğun olur. Rəqslər nə qədər güclüdürsə, hamarlanma intervalı bir o qədər geniş olmalıdır.

Tərif 8.13. *Orta qiymətin hesablanması üçün müşahidələr hamarlanmanın aktiv sahəsi adlanır.*

Əgər hamarlanma intervalının uzunluğu $\ell=2p+1$ olarsa, onda aktiv sahənin bütün səviyyələrini belə göstərmək olar:

$$y_{t-p}, y_{t-p+1},..., y_{t-1}, y_t, y_{t+1},..., y_{t+p-1}, y_{t+p} \qquad (8.26)$$

burada y_t aktiv sahənin mərkəzi səviyyəsi, $y_{t-p}, y_{t-p+1},..., y_{t-1}$ mərkəzi səviyyəyə qədər p sayda ardıcıl səviyyə, $y_{t+1},..., y_{t+p-1}, y_{t+p}$ ondan sonrakı aktiv sahədəki p sayda səviyyələrdir.

Onda sürüşkən orta aşağıdakı düsturla hesablana bilər:

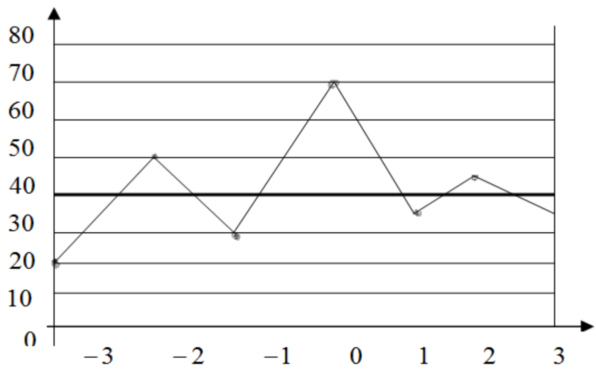
$$\tilde{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{2p+1} = \frac{y_{t-p} + y_{t-p+1} + \ldots + y_{t+p-1} + y_{t+p}}{2p+1}, \qquad (8.27)$$

burada y_i-ci səviyyənin faktiki qiyməti, $\tilde{y}_t$ - t anında sürüçkən orta qiymətidir.

Sadə şürüşkən orta üsul reallaşdıqda bütün aktiv sahələrdə hamarlanma düz xəttlə yerinə yetirilir. Deməli, təsadüfi olmayan tərkibin approksimasiyası zamana nəzərən xətti funksiya ilə aparılır:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t \ . \qquad (8.28)$$

Tutaq ki, hamarlanma intervalı $\ell = 7$ olan aktiv sahə şəkildəki kimidir.



Koordinat başlanğıcını zaman intervalının ortasına köçürək, yəni $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ zaman intervalına baxaq. Xətti modelin əmsalları elə seçilir ki, ƏKKÜ-ilə

$$S = \sum_{t=-3}^{3} (y_t - a_0 - a_1 t)^2 \to \min \qquad (8.29)$$

funksiyası minimallaşdırılsın.

Əgər səviyyələrin sayı cütdürsə, onda (8.27) ifadəsi əvəzinə

$$\tilde{y}_t = \frac{\frac{1}{2}y_{t-p} + y_{t-p+1} + \ldots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \ldots + y_{t+p-1} + \frac{1}{2}y_{t+p}}{2p} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}y_{t-p} + \sum_{i=t-p+1}^{t+p-1} y_i + \frac{1}{2}y_{t+p}}{2p+1} \;. \qquad (8.30)$$

Sadə sürüşkən orta üsulu o halda tətbiq edilir ki, dinamik sıranın qrafik təsviri düz xəttə daha çox bənzəyir. Prosesdə qeyri-xətti inkişaf olduqda, bu üsulun tətbiqi ciddi təhriflərə səbəb ola bilər.

Əgər hamarlanan sıranın trendi əyilmələrə malikdirsə və tədqiqatçı rəqsetmələri (dalğaları) saxlamaq istəyirsə, onda çəkili sürüşkən orta üsulundan istifadə olunması məqsədəuyğundur.

Bütün aktiv sahələrdə çəkili sürüşkən ortanı qurmaq üçün sahədəki mərkəzi səviyyənin qiyməti aşağıdakı orta ədədi çəkili hesablanma qiyməti ilə əvəz olunur:

$$\tilde{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i f_i}{\sum_{i=t-p}^{t+p} f_i}, \qquad (8.31)$$

burada f_i-çəki əmsallarıdır və onlar ƏKKÜ-ilə müəyyənləşdirilir. Onların hesablanması belə sxem üzrə aparılır:

Hər bir aktiv sahədə $\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ çoxhədlisi seçilir ki, onların əmsalları ƏKKÜ-ilə tapılır. Belə ki, hesablanma başlanğıcı (koordinat başlanğıcı) aktiv sahənin ortasına köçürülür. Məsələn, hamarlanma intervalı $\ell = 7$ olarsa, onda zaman anları belə ardıcıllıqla olur: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Nümunə 8.3. Cədvəldəki illər üzrə şərti verilənlərə əsasən 3,5 illik sadə sürüşkən ortaları və 5-illik çəkili sürüşkən ortanı hesablayıb nəticələri müqayisə edək:

t	1	2	3	4	5
y_t	16,3	21,2	18,1	8,7	16,3
t	6	7	8	9	10
y_t	17,3	20,9	15,4	19,7	21,7

3 illik sadə sürüşkən ortalar

$$y_2 = \frac{(16,3 + 21,2 + 18,1)}{3} = 18,5;$$

$$y_3 = \frac{(21,2 + 18,1 + 8,7)}{3} = 16,0 \quad \text{və s.}$$

5-illik sadə sürüşkən ortalar

$$y_3 = \frac{(16,3 + 21,2 + 18,1 + 8,7 + 16,3)}{5} = 16,1;$$

$$y_4 = \frac{(21,2 + 18,1 + 8,7 + 16,3 + 17,3)}{5} = 16,3 \text{ və s.}$$

5-illik çəkili sürüşkən ortalar

$$y_3 = \frac{(-3 \cdot 16,3 + 12 \cdot 21,2 + 17 \cdot 18,1 + 12 \cdot 8,7 - 3 \cdot 16,3)}{35} = 16,2;$$

$$y_4 = \frac{(-3 \cdot 16,3 + 12 \cdot 18,1 + 17 \cdot 8,7 + 12 \cdot 16,3 - 3 \cdot 17,3)}{35} = 12,7 \text{ və s.}$$

Hesablamanı cədvəl şəklində verək:

t	y_t	3-illik sadə sürüşkən	5-illik sadə sürüşkən	5-illik çəkili sürüşkən
1	16,3	-	-	-
2	21,2	18,5	-	-
3	18,1	16,0	16,1	16,2
4	8,7	14,4	16,3	12,7

5	16,3	14,1	16,3	13,5
6	17,3	18,2	15,7	19,1
7	20,9	17,9	17,9	18,3
8	15,4	18,7	19,0	18,1
9	19,7	18,9	-	-
10	21,7	-	-	-

3 və 5 -illik sadə sürüşmə ilə hamarlanmanı müqayisə etməklə görünür ki, 5-illik sadə sürüşmə daha hamardır (3-cü və 4-cü sıra). 5 illik sadə və çəkili sürüşmənin nəticələri göstərir ki, daha hamar sadə sürüşmədir, lakin çəkili sürüşmə ilkin verilənlərə daha yaxındır (4 və 5-ci sıralar).

Zaman sıralarının hamarlanmasında universal üsullardan biri də eksponensial hamarlama üsuludur (bax. [28, səh. 83-90]).

Eksponensial hamarlanmanın əsasını belə nəzəri-ehtimal sxem təşkil edir:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t,\ M\varepsilon_t = 0,\ D\varepsilon_t = \sigma^2,\ t = 1,2,\dots,n,$$
$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,\quad t \neq s\,. \tag{8.32}$$

Aşağıdakı xətti operatorla ilkin y_t sırasından hamarlanmış $S_t(y)$ sırası qurulur:

$$S_t(y) = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}(y), \tag{8.33}$$

burada α -hamarlanma sabitidir və $0 < \alpha < 1$.

Hamarlanma operatorunu ardıcıl olaraq sıranın elementlərinə tətbiq etməklə

$$\begin{aligned} S_n(y) &= \alpha y_n + (1-\alpha)S_{n-1}(y) = \alpha y_n + \\ &+ (1-\alpha)[\alpha y_{n-1} + (1-\alpha)S_{n-2}(y)] = \dots = \\ &= \alpha y_n + \alpha(1-\alpha)y_{n-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{n-2} + \dots + \\ &+ \alpha(1-\alpha)^{n-2} y_2 + (1-\alpha)^{n-1} y_1, \end{aligned} \tag{7.34}$$

alınır. Burada $S_0(y)$ hamarlanmış qiyməti əvəzinə sıranın 1-ci məlum qiyməti qəbul olunur. S_0 olaraq 1-ci üç həddin ədədi ortasını da qəbul etmək olar.

Beləliklə, eksponensial hamarlanma halında müşahidələr eksponensial azalan çəkilərlə öyrənilməyə başlayır. Sıra kifayət qədər uzun olarsa, onun keçmiş qiymətləri sıfra yaxınlaşan çəkilərlə hamarlanır və şərti olaraq sıranın elementlərinin sayını sonsuzluğa yaxınlaşdırmaqla

$$S_t(y) = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s y_{t-s} \tag{8.35}$$

alınır. Operatoru təsadüfi tərkibə tətbiq etməklə

$$S_t(\varepsilon) = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \varepsilon_{t-s}$$

sonsuz sırası alınır. Onun dispersiyası

$$DS_t(\varepsilon) = M\left[\alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1-\alpha)^s \varepsilon_{t-s}\right]^2 = \alpha^2 \sum_{s,r=0}^{\infty} (1-\alpha)^s M\varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-s} =$$

$$= \alpha^2\sigma^2 \sum_{s,r=0}^{\infty} (1-\alpha)^{2s} = \frac{\alpha^2\sigma^2}{1-(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha}{2-\alpha}\sigma^2.$$

Buradan alınır ki, hamarlanma nəticəsində təsadüfi tərkibin dispersiyası azalır, çünki

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} < (\alpha < 2-\alpha).$$

Hamarlanma operatorunu alınmış sıralara ardıcıl tətbiq etməklə

$$\begin{aligned}
S_t^{(1)} &= \alpha y_1 + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)}(y) \\
S_t^{(2)} &= \alpha S_t^{(1)}(y) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)}(y) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
S_t^{(N)} &= \alpha S_t^{(N-1)}(y) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(N)}(y)
\end{aligned} \tag{8.36}$$

ardıcıllıqlarında sonuncu sırada təsadüfi tərkibin yox olmasına nail olmaq olar. Nəticədə alınmış sırada ancaq determinik tərkib qalır.

Sürüşkən orta üsullarından fərqli olaraq eksponensial hamarlanma üsulunda proqnoz üçün analitik ifadə mövcuddur. Uyğun teorem Braun teoremidir ki, onun mahiyyətinə görə, proqnozlaşdırma üçün polinomların əmsalları diskontlaşdırılmış ƏKKÜ-ilə təyin olunur və sıranın hamarlanmış qiymətlərilə analitik ifadə olunur (bax. [28, səh. 83-90]). Başqa sözlə, tutaq ki, $\widetilde{y}_{t+\tau} = a_0^{(t)} + a_1^{(t)}\tau$. Bu proqnozlaşdırılan çoxhədlinin iki $a_0^{(t)}, a_1^{(t)}$ parametrlərinin qiymətləndirilməsi üçün

$$S(a_0, a_1) = \alpha\sum_{s=0}^{\infty}(1-\alpha)^s\left[y_{t-s} - (a_0 - a_1 s)\right]^2 \to \min \qquad (8.37)$$

minimallaşdırma məsələsinə baxaq. Xüsusi törəmələri sıfra bərabərləşdirməklə minimum nöqtələri tapmaq olar:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a_0} = -2\alpha\sum\limits_{s=0}^{\infty}(1-\alpha)^s\left(y_{t-s} - a_0 + a_1 s\right) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial a_1} = 2\alpha\sum\limits_{s=0}^{\infty}s(1-\alpha)^s\left(y_{t-s} - a_0 + a_1 s\right) = 0. \end{cases}$$

Burada $\sum\limits_{s=0}^{\infty}(1-\alpha)^s = \dfrac{1}{\alpha},\ \sum\limits_{s=0}^{\infty}s(1-\alpha)^s = \dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}$,

$\sum\limits_{s=0}^{\infty}s^2(1-\alpha)^s = \dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^3}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} a_0 - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} = S_t^{(1)}(y), \\ (1-\alpha)a_0 - \dfrac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha}a_1 = S_t^{(2)}(y) - \alpha S_t^{(1)}(y). \end{cases}$$

Nümunə 8.4. Aşağıdakı cədvəl verilənlərinə əsasən $\alpha = 0{,}1$ və $\alpha = 0{,}3$ olduqda eksponensial hamarlama aparaq və nəticəni təhlil edək:

Illə	1-ci	2-ci	3-cü	4-cü	5-ci	6-cı	7-ci	8-ci

r	il	il	il	il	il	il	il	il
y_t	233,5	239,9	239,8	261,9	261,8	268,7	260,7	298,6

$$S_0 = \frac{(233{,}5 + 239{,}9 + 239{,}8)}{3} = 237{,}7;$$

$$S_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)S_0 = 0{,}1\cdot 233{,}5 + 0{,}9\cdot 237{,}7 = 237{,}3;$$

$$S_3 = \alpha y_3 + (1-\alpha)S_2 = 0{,}1\cdot 239{,}8 + 0{,}9\cdot 237{,}6 = 237{,}8 \text{ və s.}$$

$\alpha = 0{,}3$ olduqda

$$S_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)S_0 = 0{,}3\cdot 233{,}5 + 0{,}7\cdot 237{,}7 = 233{,}6;$$

$$S_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)S_1 = 0{,}3\cdot 239{,}9 + 0{,}7\cdot 233{,}6 = 235{,}5;$$

$$S_3 = \alpha y_3 + (1-\alpha)S_2 = 0{,}3\cdot 239{,}8 + 0{,}7\cdot 235{,}5 = 236{,}8 \text{ və s.}$$

Bu hesablamalardan aydın olur ki, $\alpha = 0{,}1$ olduqda alınan sıra daha hamardır, çünki bu halda sıranın təsdüfi rəqsləri daha yüksək tərkibdən sönən rəqslər olur. Yəni $\alpha = 0{,}1$ olduqda yeni alınmış sıranın dispersiyası, $\alpha = 0{,}3$ olduqda hamarlanmış sıranın dispersiyasından kiçikdir.

§8.6. Zaman sıralarınını analizində laq və fərq operatorları

Zaman sıralarının modelləşdirilməsində əsas anlayışlardan biri laq anlayışıdır (bax. [23, №1, 2002, səh. 94-101]). Onun ingiliscədən hərfi mənada tərcüməsi gecikmə deməkdir. Müəyyən dəyişənin laqı dedikdə onun əvvəlki zaman periodlarında qiymətləri başa düşülür. Zaman sıralarının tədqiqində L laq operatorundan istifadə olunması daha münasibdir. Bu operator gecikmə və ya zamana görə geriyə sürüşmə operatorudur. Əgər y_t dəyişəninə L laq operatoru tətbiq olunursa, onda həmin dəyişənin laqı alınır:

$$Ly_t = y_{t-1}. \tag{8.38}$$

L laq operatorundan istifadə olunması fərq tənliklərinin sıxılmış yazılışını təmin edir və çoxlu sayda proseslərin xassələrinin öyrənilməsində instrument kimi istifadə olunur. Laq operatorundan istifadənin münasibliyi ondan ibarətdir ki, bu operatorlara adi dəyişən kimi yanaşmaq olur, yəni tətbiq olunan zaman sırası nəzərə alınmadan onları çevirmək olar. Laq operatorunun adi dəyişəndən fərqi ondan ibarətdir ki, operator yalnız tətbiq olunduğu zaman sıranın qarşısında durmalıdır. Laq operatoru ilə zaman sırasının yerini dəyişmək olmaz. Adi dəyişənlər kimi, laq operatorunun funksiyaları da mövcuddur. Onlardan ən sadəsi üstlü funksiyadır. m tam ədədi üçün

$$L^m y_t = y_{t-m}, \tag{8.39}$$

yəni, L^m operatorunun y_t dəyişəninə tətbiqi bu dəyişənin m periodu qədər gecikməsini göstərir.

Laq operatorundan düzəldilmiş çoxhədli belə işarə olunur:

$$f(L) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i L^{t-k} = \alpha_0 + \alpha_1 L + \ldots + \alpha_m L^m. \tag{8.40}$$

Əgər laq çoxhədlisi y_t dəyişəninə tətbiq olunursa, onda

$$f(L)y_t = (\alpha_0 + \alpha_1 L + \ldots + \alpha_m L^m)y_t = \alpha_0 y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \ldots + \alpha_m y_{t-m}.$$

Laq çoxhədlilərini adi çoxhədlilər kimi bir-birinə vurmaq olar. Məsələn,

$$(\alpha_0 + \alpha_1 L)(\beta_0 + \beta_1 L) = \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1)L + \alpha_1 \beta_1 L^2.$$

$m \to \infty$ olduqda laq operatorundan asılı sonsuz üstlü sıra alınır:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\alpha_m L^m\right)y_t=\left(\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2+\ldots\right)y_t=\alpha_0 y_t+\alpha_1 y_{t-1}+$$

$$+\alpha_2 y_{t-2}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m y_{t-m}.$$

Laq operatorunun aşağıdakı xassələrini qeyd etmək olar:
1. Sabitin laqı onun özünə bərabərdir: $LC=C$;
2. Distrubitivlik: $\left(L^i-L^j\right)y_t=L^i y_t+L^j y_t=y_{t-i}+y_{t-j}$;
3. Assosiativlik: $L^i L^j y_t=L^i\left(L^j y_t\right)=L^i y_{t-j}=y_{t-i-j}$;
Qeyd edək ki, $L^0 y_t=y_t$.
4. L operatorunun mənfi dərəcədə verilməsi qabaqlama operatorudur: $L^{-i}y_t=y_{t+i}$.
Məsələn, $j=-i$ olduqda, $L^j y_t=y_{t-j}=y_{t+j}$;
5. $|\alpha|<1$ olduqda

$$\left(1+\alpha L+\alpha^2 L^2+\alpha^3 L^3+\ldots\right)y_t=\left(1-\alpha L\right)^{-1}y_t.$$

Bunu göstərək. Bu bərabərliyin hər iki tətəfini $\left(1-\alpha L\right)$-ə vursaq,
$\left(1-\alpha L\right)\left(1+\alpha L+\alpha^2 L^2+\alpha^3 L^3+\ldots\right)y_t=y_t$, çünki $|\alpha|<1$ olduqda $\alpha^n L^n y_t$ ifadəsi $n\to\infty$ olduqda sıfra yaxınlaşır.

Laq operatorundan başqa zaman sıraları nəzəriyyəsində Δ-fərq operatorundan da geniş istifadə olunur (bax. [16, səh. 150.]). Bu operator belə təyin olunur:

$$\Delta=1-L. \tag{8.41}$$

Bu operatorun y_t dəyişəninə tətbiqi

$$\Delta y_t=\left(1-L\right)y_t=y_t-y_{t-1} \tag{8.42}$$

olur. Fərq operatoru ilkin zaman sırasını 1-ci tərtib fərqlər sırasına çevirir. d-tərtibli fərqlər sırası fərq operatorunu d-dəfə tətbiq etməklə alınır:

$$\Delta^d y_t=\underbrace{\Delta\left(\ldots\left(\Delta\left(\Delta y_t\right)\right)\right)}_{d-defe}. \tag{8.43}$$

Məsələn, $d=2$ olduqda $\Delta^2=(1-L)^2=1-2L+L^2$ olduğundan,

$$\Delta^2 y_t=\left(1-2L+L^2\right)y_t=y_t-2y_{t-1}+y_{t-2}.$$

İstənilən d-tərtibli fərq operatoru üçün Nyuton binomu düsturundan istifadə etmək olar:

$$\Delta^\alpha=(1-L)^\alpha=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^k C_d^k L^k .$$

Burada

$$C_d^k=\frac{d!}{k!(d-k!)}.$$

Deməli,

$$\Delta^d y_t=(1-L)^d y_t=\sum_{k=0}^{d}(-1)^k C_d^k y_{t-k} . \qquad (8.44)$$

Məsələn, hər hansı iqtisadi göstəricinin zamana nəzərən inkişafının ekonometrik modelləşdirilməsində trendlər uyğun olaraq $\hat{y}_{1t}=\alpha_0+\alpha_1 t$ (1-ci dərəcəli çoxhədli), $\hat{y}_{2t}=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2$ (2-ci dərəcəli çoxhədli), $\hat{y}_{3t}=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3$ (3-cü dərəcəli çoxhədli) olursa, onda, 1-ci dərəcəli çoxhədli üçün sabit artım qanunu xarakteriktikdir və onun 1-ci tərtib artımları $u_t=\Delta y_t=y_t-y_{t-1},\ t=2,3,\ldots,n$ kimi hesablanır, bu artımlar sabitdir və α_1-ə bərabərdir; 1-ci tərtib artımları 2-ci dərəcəli polinomla hesablamaqla alınır ki, onlar zamandan xətti asılıdır və $u_2,u_3,\ldots,$ artımlarından qurulmuş sıranın qrafiki düz xətt kimi təsvir alır, $u_t^{(2)}=u_t-u_{t-1}$ ikinci tərtib artımlar isə sabit olur; 3-cü dərəcəli çoxhədli üşün 1-ci tərtib artımlar zamana nəzərən 2-ci dərəcəli çoxhədli, 2-ci tərtib artımlar zamanın xətti funksiyası ($u_t^{(3)}=\Delta u_t^{(2)}=u_t^{(2)}-u_{t-1}^{(2)}$), 3-cü tərtib fərqləri isə, sabit kəmiyyətlər olur.

Tərif 8.14. *$y_t,\ t=1,2,\ldots,n$ zaman sırasından $t=2,3,\ldots,n$ olduqda $u_t=y_t-y_{t-1}=\Delta y_t$ zaman sırasına keçid proseduruna*

1-ci tərtib fərqlərin alınması, operatorun özünə isə, 1-ci tərtib fərq operatoru deyilir.

Əgər tədqiq olunan iqtisadi proses Tərif 8.7, Tərif 8.8 mənada qeyri stasionardırsa, onda ilkin zaman sırasından fərqlərdən düzəldilmiş sıraya keçilir.

Tərif 8.15. *İlkin zaman sırasına o halda 1-ci tərtib inteqrasiya olunan zaman sırası deyilir ki, onun 1-ci tərtib fərq sıraları stasionar olsun.*

Tərif 8.16. *Əgər stasionar sıranın alınması üçün* k *-tərtibli fərq operatoru tətbiq edilirsə, onda ilkin sıraya* k *-cı tərtib inteqrasiya olunan zaman sırası deyilir.*

Tərif 8.17. *Əgər ilkin zaman sırası stasionardırsa, onda ona sıfırıncı tərtib inteqrasiya olunan sıra deyilir.*

Məsələn, əgər şirkətin səhminin kursu zamana nəzərən xətti artırsa, onda uyğun zaman sırası 1-ci tərtib inteqrasiya olunan sıra, şirkətin gəlirliyini əks etdirən sıra isə, sıfırıncı tərtibdən inteqrasiya olunan sıradır.

k -cı tərtibdən inteqrasiya olunan y_t sırası $y_t \sim I(K)$ kimi işarə edilir.

Qeyd edək ki, stasionar zaman sırasının dispersiyası sabitdir, inteqrasiya olunan zaman sıralarının dispersiyası isə, zaman anları artıqca sonsuzluğa yaxınlaşır. Bu haqda gələcək mövzularda ətraflı təhlillər aparılacaq.

Zaman sıralarının stasionarlığı ona adekvat modelin qurulmasında münasib xassədir. İqtisadi məsələlərin həllində əksər hallarda sıranın ikinci tərtibdən stasionar olması şərtinin qoyulması kifayət edir. Lakin real proseslər bu şərti ödəməyə bilər. Belə hallarda ilkin sıraya adekvat modelin qurulması üçün əksər hallarda kifayət qədər mürəkkəb olmayan çevirmələrlə müşahidə olunan sıra 2-ci tərtib stasionar sıraya gətirilir, ona adekvat model qurulur, sonra isə, tərs çevirmə ilə ilkin sıranın modeli qurulur.

Belə çevirmələrə misal olaraq

$$z_t = \ln \frac{y_t}{y_{t-1}} = \ln y_t - \ln y_{t-1} \qquad (8.45)$$

zəncirvari indekslərin loqariflənməsi ola bilər. Çevirmə $y_t,\ t = 1,2,\ldots,n$ zaman sırasına eksponensial artım halında tətbiq olunur.

$$z_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \qquad (8.46)$$

çevirməsindən isə, iqtisadi göstəricinin nisbi artım tempinin hesablanmasında istifadə oluna bilər.

Riyazi gözləməsi və dispersiyası sabit olan konkret 2-ci tərtib zaman sırasının xüsusiyyətləri onun (8.19) düsturu ilə ifadə olunan avtokorrelyasiya funksiyasının xarakteri ilə tam müəyyən olunur. Bu funksiya diskret funksiyadır və $\rho(0), \rho(1), \ldots, \rho(\tau - 1)$ avtokorrelyasiya əmsallarının ardıcıl qiymətləridir. Burada $\rho(0) = 1,\ \ -1 \le \rho(\tau) \le 1,\ \ \ i = 1,2,\ldots$

Analoji olaraq, y_t stasionar prosesinin avtokorrelyasiya funksiyasını Tərif 8.9-a uyğun şəkildə, onu laqlardan asılı $\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(\tau), \ldots$ ardıcıllığından formalaşdırmaq olar. Bu funksiyaların qiymətləri arasında birqiymətli qarşılıqlı əlaqə mövcuddur:

$$\gamma(\tau) = \rho(\tau) \cdot \sigma_y^2,\ \ \tau = 0,1,\ldots,\ \gamma(0) = \sigma_y^2 . \qquad (8.47)$$

Üumiyyətlə, stasionar zaman sıralarını onların avtokorrelyasiya funksiyalarının xüsusiyyətlərindən asılı olaraq bir neşə bircins qrupa aylırmaq olar ki, onların hər biri müəyyən qrup modellərə uyğun gəlir. Belə modellərdən əsasən 3 qrup modellər xüsusilə ayrılır:

a) avtoreqressiya modelləri;
b) sürüşkən orta modellər;
c) avtoreqressiya-sürüşkən orta qarışıq modellər.

Bu modellərin qurulması və xassələri sonrakı fəsildə şərh olunacaq.

8-ci fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

8.1. İqtisadi zaman sıraları nədir?
8.2. İqtisadi zaman sıralarının tərkibində hansı komponentləri ayırırlar?
8.3. Zaman sıralarının ekonometrik tədqiqində əsas məsələ nədən ibarətdir?
8.4. Zaman sıralarının reqressiya modellərində ƏKKÜ-nun tətbiq olunması şərtləri necədir?
8.5. Zaman sıralarının polinomial trend modellərində ƏKKÜ-nun tətbiqi ilə alınan normal tənliklər sisteminin həll olunması üçün hansı kafi şərtlər ödənilməlidir?
8.6. Loqistik və Hompers tipli trendə malik zaman sıralarına ƏKKÜ hansı çevrilmiş modelləri tətbiq olunur. Nəticənin ilkin sıralar üçün iqtisadi mənasını izah edin.
8.7. Qısa və geniş mənada stasionar zaman sıralarının oxşar və fərqli cəhətlərini izah edin.
8.8. Hansı funksiyalara avtokovariasiya və avtokorrelyasiya funksiyaları deyilir? Zaman sıralarının korreloqramı nədir?
8.9. Ağ küy nədir?
8.10. Satasionarlığın yoxlanılmasında t və F statistikalarından necə istifadə olunur?
8.11. Zaman sıralarında anomal səviyyələrin müəyyənləşdirilməsi üçün hansı üsullardan istifadə olunur. Bu üsulların mahiyyətini izah edin.
8.12. Zaman sıralarının hamarlanması dedikdə nə başa düşürsünüz?
8.13. Sürüşkən orta hamarlanma üsulunun mahiyyətini izah edin.
8.14. Eksponensial orta hamarlanma üsulunun mahiyyətini izah edin.
8.15. Laq və fərq operatorları nədir və onlar zaman sıralarının analizində hansı hallarda və necə tətbiq olunur?

Testlər

8.1. Birölçülü zaman sıraları
a) eyni obyektin müxtəlif zaman anlarında xarakteristikaları haqda verilənlərdir;
b) müxtəlif obyektlərin eyni zaman anında xarakteristikaları haqda verilənlərdir;

c) eyni obyektin eyni zaman anında xarakteristikaları haqda verilənlərdir;
d) müxtəlif obyektlərin müxtəlif zaman anlarında xarakteristikaları haqda verilənlərdir.

8.2. Zaman sırası hansı halda qeyri- stasionardır?
a) onun səviyyələrinin orta qiymətləri sabit olmadıqda;
b) onun təsadüfi tərkibi zamandan asılı olduqda;
c) onun həddləri zamandan asılı olduqda;
d) onun təsadüfi olmayan tərkibi zamandan asılı olduqda.

8.3. Hansı halda zaman sırası stasionardır?
a) Onun həddlərinin orta qiyməti sabit olduqda;
b) sıranın həddləri ədədi silsilə əmələ gətirdikdə;
c) sıranın həddləri həndəsi silsilə əmələ gətirdikdə;
d) sıranın həddlərinin orta qiyməti həmişə artdıqda.

8.4. Ekonometrik modelləşdirmənin əsas növləri
a) trend və mövsümi modellər;
b) zaman sıraları modelləri, reqressiya modelləri, eynizamanlı tənliklər sistemi;
c) reqressiya, trend və mövsümi modellər;
d) reqressiya və mövsümi modellər.

8.5. Adaptiv model komponentləri hansı formada özündə saxlayır?
a) həddləri kombinasiya və vuruq halında;
b) vuruq kimi;
c) nisbət kimi;
d) həddlərin cəmi kimi.
8.6 Stasionar zaman sırasında trend komponenti
a) zamandan asılı xətti funkisyadır;
b) mövcud olmur;
c) zamandan asılı qeyri-xətti funksiyadır;
d) mövcud olur.

8.7. Zaman sırasının strukturunun müəyyənləşdirilməsində yanaşmalara aşağıdakılardan hansı aiddir?
a) avtokorrelyasiya funksiyasının analizi;
b) izahedici dəyişənlər arasında korrelyasiya əmsallarının

hesablanıb müqayisə olunması;
c) korrelyasiyanın qurulması;
d) müəyyən zaman intervalında verilənlərin ümumiləşdirilməsi.

8.8. Zaman sıralarında tendensiya nəyi xarakterizə edir?
a) mövsümi təsir edən faktorları;
b) eynizamanda təsir edən faktorlar toplusunu;
c) zaman sırasının səviyyələrinə təsir etməyən faktorlar toplusunu;
d) öyrənilən göstəricinin ümumi dinamikasını formalaşdıran uzunmüddətli təsirə malik faktorların toplusunu.

8.9. Korreloqram nədir?
a) avtokorrelyasiya funksiyasının laqdan asılılığını təsvir edən qrafikdir;
b) 1,2,...,k-cı avtokorrelyasiya əmsalları ardıcıllığıdır;
c) zaman sırasının iki ardıcıl səviyyəsi arasında korrelyasiya əmsalıdır;
d) avtokorrelyasiya funksiyasıdır.

8.10. Şirkətin ilkin gəlir dinamikası $\hat{y}_t = 131 \cdot 1{,}015^t$ modeli ilə təsvir olunursa, onda modelə əsasən orta illik artım tempi neçə faiz təşkil edir?
a)131; b)15; c)0,15; d) 101,5.

8.11. Şirkətin illik gəlir dinamikası $\hat{y}_t = 372{,}2 - 6{,}4t$ modeli ilə təsvir olunursa, onda illik artım həcmi (p.v. ilə) nə qədərdir?
a)6,4; b)-6,4; c)372,2; d) 722.

8.12. Zaman sırasının $e_1,\ldots,e_n$ qalıqları üçün DW statistikasının qiyməti 1-ci tərtib r_1 avtokorrelyasiya əmsalı ilə hansı təxmini bərabərliklə əlaqəlidir?
a) $DW \approx 2(1 - r_1)$;
b) $DW \approx 2r_1$;
c) $DW \approx 2(r_1 - 1)$;
d) $DW \approx 2(1 + r_1)$.

8.13. Zaman sırasının $e_1,...,e_n$ qalıqları üçün DW statistikası hansı düsturla hsablanır?

a) $DW = \dfrac{1}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$; b) $DW = \sum_{t=1}^{n} e_t^2$;

c) $DW = \dfrac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}$; d) $DW = \sum_{t=1}^{n} (e_t - e_{t-1})^2$.

8.13. Eksponensial hamarlama modeli hansı rekkurent düsturla müəyyənləşdirilir?

a) $S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}$; b) $S_t = \alpha^2 y_t + (1-\alpha)^2 S_{t-1}$;

c) $S_t = e^{\alpha y_t} + (1-\alpha)S_{t-1}$; d) $S_t = e^{\alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}}$.

8.14. Zaman sırası $y_t = 0{,}9y_{t-1} - 0{,}2y_{t-2} + \varepsilon_t$ (burada ε_t -ağ küydür) modeli ilə təsvir olunur. Bu model hansı növ modeldir:

a) 2-ci tərtib avtoreqressiya; b) 2-ci tərtib sürüşkən orta;

c) təsadüfi dolaşma; d) qeyri-stasionar.

8.15. Avtokorrelyasiya funksiyası hansı qiymətləri ala bilər:

a) 0,9, -0,9; b) 1,5; c) -2; d)0,5.

8.16. 1-ci tərtib avtoreqressiya prosesi üçün hansı halda xüsusi avtokorrelyasiya funksiyası sıfra bərabərdir?

a) laq sıfır olduqda ; b) laq ± 1 olduqda ; c) laq ≥ 1 olduqda ;

d) laq ≥ 2 olduqda ;

8.17. Əgər $y_1,...,y_n$ zaman sırasına $Ly_t = y_{t-1}$ düsturu ilə təyin olunan L laq operatoru tətbiq olunursa, onda $(\alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2)y_t$ operatorunu necə yazmaq olar?

a) $(\alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2)y_t = \alpha_0 y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2}$;

b) $\left(\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2\right)y_t=\alpha_0 y_t-2\alpha_1 y_{t-1}+2\alpha_2 y_{t-2};$

c) $\left(\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2\right)y_t=\alpha_0 y_t+\alpha_1 y_{t-1}+\alpha_2 y_{t-2}^2;$

d) $\left(\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2\right)y_t=\alpha_0 y_t+\alpha_1 y_{t-1}+\alpha_2^2 y_{t-1}.$

8.18. $y_1,...,y_n$ zaman sırası üçün $\Delta y_t=y_t-y_{t-1}$ düsturu ilə təyin olunan Δ fərq operatoru ilə L laq operatoru arasında əlaqəni tapın.
a) $\Delta=1-L;$ b) $\Delta=L;$ c) $\Delta=L+1;$ d) əlaqə yoxdur.

Çalışmalar

Məsələ 8.1. Müəyyən firmanın 1 il ərzində aylıq satış həcmi şərti pul vahidlərilə (ş.p.v.) cədvəldə verilmişdir:

t	1	2	3	4	5	6
y_t	200	310	320	260	190	210
t	7	8	9	10	11	12
y_t	310	410	430	370	300	320

Bu verilənlərə əsasən satış həcminin zamandan asılılığını təsvir edən model qurun.

Cavab: $\hat{y}_t=\underset{(5,3)}{230}+\underset{(1,9)}{11,15}t$; (burada mötərizədə t-statistikasının qiyməti göstərilir) $R^2=0,267;$ $\hat{s}=69,9;$ $F=3,64;$ $DW=1,01.$

Məsələ 8.2. $y_t=\alpha_1 y_{t-1}+\varepsilon_t$ (burada $|\alpha_1|<1,$ $M\varepsilon_t=0,$ əgər $\tau=0$ olarsa $M\left(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+\tau}\right)=\sigma_0^2$ əgər $\tau\neq 0$ olarsa; $M\left(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+\tau}\right)=0$) modelinin riyazi gözləməsini, dispersiyasını, k-cı tərtib avtokorrelyasiya əmsallarını tapın. Avtokorrelyasiya funksiyasının qrafikini (korreloqramı) qurun

Cavab: $My_t=0,$ $Dy_t=\dfrac{\sigma_0^2}{1-\alpha_1^2};$ $\rho_k=\alpha_1^k.$

Məsələ 8.3. $y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$ (burada ε_t - ağ küydür) prosesinin avtokorrelyasiya funksiyasını tapın və korreloqramı qurun.

Cavab: $\rho_1 = -\dfrac{\beta_1}{1+\beta_1^2}$; $\rho_2 = 0,\ \rho_3 = 0, \dots$.

Məsələ 8.4. $y_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$ (burada ε_t -ağ küydür) prosesinin avtokorrelyasiya funksiyasını hesablayın.

Cavab:

$$\begin{cases} \dfrac{-\beta_\tau + \beta_1\beta_{\tau+1} + \beta_2\beta_{\tau+2} + \dots + \beta_{q-\tau}\beta_q}{1+\beta_1^2+\beta_2^2+\dots+\beta_q^2}, & \tau = 1,2,\dots,q \text{ olduqda} \\ 0, \qquad \tau > q & \text{olduqda.} \end{cases}$$

Məsələ 8.5. §8.5-də verilmiş İrvin cədvəlindən istifadə etməklə, aşağıdakı cədvəldən y_t sırasının anomal qiymətlərinin mövcudluğunu yoxlayın.

t	1	2	3	4	5
y_t	1,6	1,9	2,1	2,4	4,5
t	6	7	8	9	10
y_t	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8

Cavab: $t = 5$ səviyyəsi anomaldır.

Məsələ 8.6. Cədvəldə verilmiş zaman sırasını 3 addımlı sadə sürüşmə ilə hamarlayın:

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	3	7	8	6	8	9	10
t	8	9	10	11	12	13	14
y_t	9	8	11	14	12	8	7

Cavab:

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	3	7	8	6	8	9	10

$\tilde{y}_t$	-	6	7	7,3	7,7	9	9,3
t	8	9	10	11	12	13	14
y_t	9	8	11	14	12	8	7
$\tilde{y}_t$	9	9,3	11	12,3	11,3	9	-

Məsələ 8.7. Cədvəldə verilmiş sıranı $\alpha = 0{,}5$ və $\alpha = 0{,}3$ parametrləri ilə eksponensial hamarlayın:

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	3	7	8	6	8	9	10
t	8	9	10	11	12	13	14
y_t	9	8	11	14	12	8	7

Cavab:

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	3	7	8	6	8	9	10
$\alpha = 0{,}5$	3	5	6,5	6,3	7,1	8,1	9
$\alpha = 0{,}3$	3	4,2	5,3	5,5	6,3	7,1	8
t	8	9	10	11	12	13	14
y_t	9	8	11	14	12	8	7
$\alpha = 0{,}5$	9	8,5	9,8	11,9	11,9	10	8,5
$\alpha = 0{,}3$	8,3	8,2	9	10,5	11	10,1	9,2

Məsələ 8.8.

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	82	87	99	104	107	121	118

cədvəl qiymətlərinə görə $f(t) = at^b$ üstlü trendin parametrlərini tapın.

Cavab: $\hat{a} = 79{,}13$; $\hat{b} = 0{,}81$.

Məsələ 8.9. $$\begin{cases} Q_t = P_t + I_t, \\ P_t = \alpha Q_{t-1} + \varepsilon_{pt}, \quad 0 < \alpha < 1, \\ I_t = \beta(P_t - P_{t-1}) + \varepsilon_{It}, \quad \beta > 0. \end{cases}$$

(burada Q_t -real ümummilli məhsul, P_t -istehlakın miqdarı, I_t kəmiyyəti t anında investisiya, ε_{pt} və ε_{It} istehlak və investisiyalarda həyəcanlanmalardır, ε_{pt} və ε_{It} nin riyazi gözləməsi sıfırdır) Keyns-Samuelson- Xiks ([bax. 4, səh. 293-297]) modelinin stoxastik versiyasını Q_t istehsal funksiyasının xətti qeyri-bircins fərq tənliyinə çevirin.

Cavab: $Q_t = \alpha(1+\beta)Q_{t-1} - \alpha\beta Q_{t-2} + (1+\beta)\varepsilon_{pt} + \varepsilon_{It} - \beta\, \varepsilon_{pt-1}$.

Məsələ 8.10. Tutaq ki, kvartal verilənləri üçün ekonometrik model $y_t = \alpha_4 y_{t-4} + \varepsilon_t$, $\alpha_4 < 1$ formasında təsvir olunur. Onun avtokorrelyasiya funksiyasını qurun.

Cavab: $k = 4m$, $m = 0,1,2,\ldots$, olduqda $\rho(k) = \alpha_4^{k/4}$; digər $k > 0$ qiymətlər üçün $\rho(k) = 0$.

FƏSİL IX

STASİONAR ZAMAN SIRALARI MODELLƏRİ VƏ ONLARIN XASSƏLƏRİ

§9.1. Dinamik ekonometrik modellərin ümumi xarakteristikaları

İqtisadi proseslərin kifayət qədər üzun zaman parçasında davranışının öyrənilməsində onun ardıcıl vəziyyətləri arasında müəyyən qarşılıqlı əlaqənin olması fərziyyəsinin mövcudluğu məsələsi ortaya çıxır. Yəni, cari zaman anı və ya cari zaman periodunda iqtisadi təzahürlərin vəziyyəti, həm də onun və ona təsir edən faktorların əvvəlki zaman anları və zaman periodlarındakı vəziyyətləri ilə xarakterizə oluna bilir. Bu cəhət səbəbiyyət faktorlarının təsirində gecikmənin və öyrənilən iqtisadi proseslərin inersiyalılığının nəticəsidir.

Tərif 9.1. *İqtisadi təzahürlərin vəziyyətlərini ardıcıl zaman anlarında və ya periodlarında əlaqələndirən modellərə dinamik modellər deyilir.*

Dinamik modellər təzahürlərin dinamikasının inkişafının öyrənilməsinə imkan yaradır. Onların analitik göstərilişi dəyişənlərin həm cari zaman anında və ya periodunda həm də, əvvəlki anlarda və zaman periodlarındakı qiymətlərini nəzərə alır.

Tərif 9.2. *Faktor dəyişənlərinin əvvəlki zaman anlarındakı qiymətlərini özündə saxlayan ekonometrik modellərə paylanmış laq modelləri deyilir.*

Paylanmış laq modellərini ümumi halda belə yazmaq olar:

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t \quad (9.1)$$

Belə modellərlə səbəbiyyət faktorunun nəticə faktoruna təsiri müəyyən gecikmələrlə verilən hallar təsvir olunur. Məsələn, müxtəlif məhsul buraxılışı həcminin investisiya miqdarından asılılığı, reklam xərclərindən mal satışından əldə olunan pul vəsaitinin asılılığı və s. belə modellərlə təsvir oluna bilər (tətbiqi ekonometrik tədqiqat nümunəsi kimi bax [33]). Sadə iqtisadi nümunə kimi iqtisadi artım göstəricilərinin investisiyalardan asılılığını təsvir edən akselerator və multiplikator (bax. [4, səh. 251-252, 293-297; 27, səh. 55]) modellərinə nəzər salaq. Akselerator modelində fərz edilir ki, t zaman anında I_t ümumi kapital qoyuluşu ilə Y_t milli gəlir arasında $I_t = \alpha \Delta Y_t$ (burada $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$, α -akselerasiya əmsalıdır) asılılığı mövcuddur. Burada $Y_t = Y_{t-1} + \dfrac{1}{\alpha} I_t$ asılılığı alınır. İqtisadi artım nəzəriyyəsində isə, multiplikator modelindən istifadə olunur ki, modelə əsasən, investisiyaların artımı milli gəlirin artımına səbəb olur: $\Delta I_t = m \Delta Y_t$ (burada m -multiplikatordur). Bərabərliyin hər iki tərəfində fərq operatoruna keçməklə $Y_t = Y_{t-1} + \dfrac{1}{m}\left(I_t - I_{t-1}\right)$ asılılığı alınır. Bu modellər onu göstərir ki, milli gəlir öz əvvəlki andakı qiymətlərinin və investisiyaların cari və əvvəlki andakı qiymətlərinin funksiyasıdır. Lakin bu tənliklər investisiyalarda gecikmələri nəzərə almır. Ona görə də, tətbiqi ekonometrik modelləşdirmədə təsadüfi tərkiblərlə yanaşı, hər iki göstəricinin gecikən qiymətlərini nəzərə almaq lazımdır. Xüsusi halda, analoji nümunə AR(2) modeli üçün [14, səh. 367-368]-də Samuelson-Xiks iqtisadi tsikl modelində göstərilişdir.

Tərif 9.3. *Əgər modeldə faktor qismində dəyişənlərin əvvəlki zaman anlarında qiymətləri verilmişdirsə, belə modelə laq dəyişənli model deyilir.*

Ekonometrik modelə asılı dəyişənin laq qiymətlərinin daxil olması onun parametrlərinin meylsiz, effektiv qiymətləndirmələrinin alınmasınada bir sıra çətinliklər yaradır:

1. $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots,$ və ya $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$ bir neçə laq dəyişənləri arasında güclü korrelyasiya asılılğının mövcudluğu onun

parametrlərinin qiymətləndirilməsində dəqiqlik aşağı olduğundan, modelin keyfiyyətinin aşağı düşməsinə gətirir;

2. y_{t-1}, y_{t-2} dəyişənləri ilə ε_t qalıq həddi arasında yüksək korrelyasiya asılığı olduğundan, ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmədə meyillilik yüksək olur;

3. Əksər hallarda modelin qalıq həddlərindən formalaşan $\{\varepsilon_t\}$ zaman sırası avtokorrelyasiya əlaqəsi ilə xarakterizə olduğundan, ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmə effektiv olmur.

Qeyd edək ki, paylanmış laq modellərinin qurulmasında əsas mərhələ laqın optimal qiymətinin seçilməsi və onun strukturunun müəyyənləşdirilməsi mərhələsidir.

Dinamik modellərin ən çox yayılmış digər növü avtoreqressiya modelləridir.

Tərif 9.4. *p tərtibli avtoreqressiya modeli* (AR(*p*)) *zaman sırasının qiymətləri arasında fərq reqressiya tənlikləri ilə müəyyən olunan modelə deyilir və aşağıdakı kimi yazılır:*

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t,\ \alpha_p \neq 0 \qquad (9.2)$$

burada α_0 *-sərbəst hədd,* ε_t *-ağ küydür.*

Dinamik modellər sinfinə asılı olmayan və asılı laq dəyişənləri olan modellər də daxildir ki, onlar ümumi şəkildə belə təsvir olunur:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + ... + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t \qquad (9.3)$$

Ümumi halda, (9.1)-(9.3) tənlikləri ilə təsvir olunan sıralar stasionar deyil. Onların stasionarlığı üçün parametrlər üzərinə müəyyən zəruri və kafi şərtlər olmalıdır.

Ekonometrik tədqiqatlarda stasionar zaman sıralarının modelləşdirilməsinə mühüm əhəmiyyət verilir. Bu onunla əlaqədardır ki, çoxlu sayda zaman sıraları trendin ayrılması, mövsümi komponentin filtrə olunması, fərqlərin alınması ilə stasionar hala gətirilə bilər.

Stasionar zaman sıralarının ən geniş yayılmış praktiki əhəmiyyətli növləri avtoreqressiya və sürüşkən orta modellərdir ki, onların xassələri gələcək mövzularda ətraflı şərh ediləcək.

§9.2. Stasionar zaman sıralarının avtoreqressiya AR(*p*), sürüşkən orta (SO), sürüşkən orta avtoreqressiya (SOAR) modelləri

Fərq tənlikləri nəzəriyyəsi və onların iqtisadi tətbiq elementləri "Riyazi iqtisadiyyat" fənninin tədrisində ətraflı təhlil edilir. Qeyri-bircins tənliyin sağ tərəfi dereminik həyəcanlanma olduqda xarakteristik çoxhədlinin köklərinin vahid radiuslu dairənin daxilində və ya xaricində yerləşməsindən asılı olaraq baxılan prosesin zamana nəzərən dayanıqlılıq məsələləri [4, səh. 285-297]-də izah olunmuşdur.

Biz burada

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + x_t, \quad t = 1,2,\dots,n \qquad (9.4)$$

p -tərtibli fərq tənliyinə baxacağıq.

Fərz edək ki, həyəcanlanmış $\{x_t\}$ prosesi stoxastik prosesdir və

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \varepsilon_{t-i}, \quad t = 1,2,\dots,n\,. \qquad (9.5)$$

Burada $\{\varepsilon_t\}$ ağ küylərdir.

Tərif 9.5. (9.5) *düsturu ilə ifadə olunan ardıcıllıq* q *tərtibli sürüşkən orta* (SO(q)) *adlanır.*

Tərif 9.6. x_t *elementi* (9.5) *düsturu ilə ifadə olunan* (9.4) *modeli inteqrasiya olunursa, onda bu modelə Inteqrasiya Olunan Sürüşkən Orta Avtoreqressiya* (İSOAR) *modeli deyilir.*

Tərif 9.7. *Əgər* (9.4) *modelinin özü stasionardırsa, onda belə modelə Stasionar Sürüşkən Orta Avtoreqressiya* (SSOAR) *modeli deyilir.*

$\{\varepsilon_t\}$ ardıcıllığının ağ küy olmasına baxmayaraq, əgər β əmsallarından bir neçəsi sıfırdan fərqlidirsə, o ağ küy olmaya bilər. Nümunə olaraq §8.4-də $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \ \beta_j \neq 0, \ j > 2$ olduqda $x_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ ardıcıllığı göstərilmişdir ki, $Mx_t = 0$, $D(x_t) = 2\sigma^2$, $M(x_t x_{t-1}) = \sigma^2$ olur və sonuncu bərabərlik ağ küyün tərifində $M(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = 0$ (istənilən ε_t üçün) şərtinə ziddirdir.

(9.5) -i (9.4)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i} \quad . \tag{9.6}$$

(9.6)-nı elə normallaşdırmaq olar ki, β_0 əmsalı bütün müşahidələr üçün vahid olsun.

(9.6) tənliyində, xüsusi halda, $\beta_0 = 1, \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 0$ olarsa, onda (9.2) avtoreqressiya modeli alınır.

Tutaq ki,

$$A(\theta) = 1 - \alpha_1 \theta - ... - \alpha_p \theta^p \tag{9.7}$$

(9.2) tənliyinə uyğun xarakteristik çoxhədlidir

Teorem 9.1. (9.2) *tənliyi ilə müəyyənləşdirilən zaman sırası yalnız və yalnız o halda stasionardır ki, $A(\theta)$ xarakteristik çoxhədlisinin kökləri modulca (kompleks köklərdə) vahiddən böyük olsun.*

Nümunə 9.1. 1-ci tərtib

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \ \alpha_1 \neq 0, \ t = 1, 2, ..., n \tag{9.8}$$

avtoreqressiya modeli üçün $A(\theta) = 1 - \alpha_1 \theta$ çoxhədlisi yeganə $\theta_0 = \dfrac{1}{\alpha_1}$ kökünə malikdir. Deməli, AR(1) reqressiya modeli o halda stasionar zaman sırasını doğurur ki, $|\theta_0| > 1$ olsun, yəni $|\alpha_1| < 1$ şərti ödənilsin.

$\alpha_1 = 1, \ \alpha_0 = 0$ olduqda 1-ci tərtib avtoreqressiya modeli

$$y_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_{p-1} + \varepsilon_p = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \qquad (9.9)$$

qeyri-stasionar sıranı doğurur.

Tərif 9.8. (9.2) *avtoreqressiya modelində* $\alpha_1 = 1, \alpha_0 = 0$ *olduqda 1-ci tərib avtoreqressiya modeli* (9.9) *qeyri-stasionar zaman sırasını doğurur ki, bu sıraya təsadüfi dolaşan sıra deyilir.*

Təsadüfi dolaşan proses üçün ε_t -nin xassələrini və y_{t-1} -lə ε_t korrelə olunmadığını nəzərə almaqla, alınır ki, $D(y_t) \neq D(y_{t-1})$ və $My_t = 0,$ $D(y_t) = tD(\varepsilon),$ yəni zaman sırasının disperisyası zamana nəzərən artır.

Təsadüfi dolaşan prosesin stasionar AR(1) prosesindən fərqi ondan ibarətdir ki, həyəcanlanan ε_t həddinin təsiri burada azalmır, AR(1)-də isə onların təsiri aşağı düşür.

Qeyd edək ki, real maliyyə iqtisadi məsələlərdə qeyri-stasionar sıraların mövcudluğu az ehtimallıdır, çünki belə sıralar dağılan sıraları xatırladır, lakin iqtisadi mühitin təsiri imkan vermir ki, göstəricilər kifayət qədər böyük qiymətlər alsın (məsələn iqtisadiyyatın dövlət tənzmlənməsi alətləri ilə).

Nümunə 9.2. $y_t = 3 + 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t$ tənliyi ilə verilən AR(2) modelinə baxaq. Onun $A(\theta) = 1 - 2\theta + \theta^2$ xarakteristik çoxhədlisinin iki dəfə təkrarlanan $\theta_0 = 1$ kökü vardır, yəni avtoreqressiya modeli qeyri-stasionar zaman sırası doğurur.

(9.2) avtoreqressiya modeli ilə təsvir olunan stasionar zaman sırasının orta qiymətini tapaq. Bunun üçün reqressiya tənliyinin hər iki tərəfindən riyazi gözləməsini alaq:

$$My_t = \alpha_0 + \alpha_1 My_{t-1} + ... + \alpha_p My_{t-p} + M\varepsilon_t .$$

$M\varepsilon_t = 0$ olduğundan və stasionar sıra üçün $My_t = const$ eyniliyi ödənildiyindən,

$$My_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-...-\alpha_p}. \qquad (9.10)$$

Stasionar avtoreqressiya modeli üçün

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, y_{t-h}) = 0, \; h > 0, \qquad (9.11)$$

yəni yenilənmiş ardıcıllıq zaman sırasının əvvəlki qiymətləri ilə korrelə olunmur.

§9.2.1. Avtokovariasiya funksiyaları və Yul-Uoker tənliklər sistemi

AR(p) modelində tənliyin əmsalları ilə Avtokovariasiya funksiyası arasındakı əlaqəni müəyyənləşdirək. Bunun üçün aşağıdakı keçid hesablamalarını aparaq:

$$\gamma(h) = \gamma(-h) = \operatorname{cov}(y_t, y_{t-h}) =$$
$$\operatorname{cov}(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t, y_{t-h}) =$$
$$= \alpha_1 \operatorname{cov}(y_{t-1}, y_{t-h}) + ... + \alpha_p \operatorname{cov}(y_{t-p}, y_{t-h}) +$$
$$+ \operatorname{cov}(\varepsilon_t, y_{t-h}) = \alpha_1\gamma_1(h-1) + ... + \alpha_p\gamma_p(h-p).$$

Hər tərəfi $\gamma(0)$-a bölməklə belə xətti tənlik alınır

$$\rho(h) = \alpha_1\rho(h-1) + \alpha_2\rho(h-2) + ... + \alpha_p\rho(h-p).$$

Bu tənlikləri $h = 1,...,p$ olduqda ayrıca yazıb, $\rho(h)$ funksiyasının cüt olmasını nəzərə almaqla, $\rho(h)$ avtokorrelyasiya funksiyası ilə α_k əmsalları arasındakı asılılığı ifadə edən **Yul-Uoker** tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{cases} \rho(1) = \alpha_1\rho(0) + \alpha_2\rho(1) + ... + \alpha_p\rho(p-1), \\ \rho(2) = \alpha_1\rho(1) + \alpha_2\rho(0) + ... + \alpha_p\rho(p-2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho(p) = \alpha_1\rho(p-1) + \alpha_2\rho(p-2) + ... + \alpha_p\rho(0). \end{cases} \qquad (9.12)$$

Bu sistem avtoreqressiyanın qiymətlərinin ardıcıl tapılmasına imkan verir və α_j əmsallarının avtokorellyasiyanın qiymətləri ilə ifadə olunmasını təmin edir ki, bu da real statistik verilənlərə uyğun avtoreqressiya modelinin seçilməsində əhəmiyyətlidir.

Yul-Uoker tənliklər sisteminin daha aydın xarakterizə etmək üçün (9.8) tənliyi ilə verilən AR(1) modelinə baxaq. Bu model yalnız $|\alpha_1| < 1$ olduqda stasionar prosesi doğurur. Onun Yul-Uoker tənliyi $\rho(1) = \alpha_1 \rho(0)$ olduğundan, $\rho(0) = 1$ olduğunu nəzərə alsaq, $\rho(1) = \alpha_1$ olur. $\rho(h) = \alpha_1 \rho(h-1)$ olduğundan $\rho(h) = \alpha_1 \rho(h-1) =$
$\alpha_1^2 \rho(h-2) = ... = \alpha_1^h \rho(0) = \alpha_1^h,\ h > 0.$ Deməli, AR(1) modeli üçün Avtokovariasiya funksiyası müsbət h laqları üçün sonsuz azalan həndəsi silsilə əmələ gətirir. İxtiyari laq üçün $\rho(h) = \alpha_1^{|h|}$.

Birinci tərtib avtoreqressiya modeli üçün seçimi zaman sırasının davranışının iki halı ola bilər:

a) $\alpha_1 > 0$ halı. $corr(y_t, y_{t+1}) = \rho(1) = \alpha_1 > 0$, yəni, zaman sırasının iki ardıcıl həddi müsbət korrelə olduğundan, zaman sırasında orta səviyyəyə nəzərən işarənin saxlanılması tendensiyası mövcudur, yəni zaman sırasının həddi orta səviyyədən böyükdürsə, onda sonrakı qiymət orta səviyyədən böyükdür və əksinə. Əgər orta qiymət sıfra bərabərdirsə ($\alpha_0 = 0$ halı), onda zaman sırasının qiyməti əvvəlki qiymətlə eyniləşdirilir.

b) $\alpha_1 < 0$ halı. $corr(y_t, y_{t+1}) = \rho(1) = \alpha_1 < 0$, yəni, iki ardıcıl hədd mənfi korrelə olunduğundan, zaman sırasında orta səviyyəyə nəzərən işarənin dəyişilməsi tendensiyası baş verir, yəni, əgər zaman sırasının qiyməti orta səviyyədən yüksəkdirsə, onda sonrakı qiymət orta səviyyədən aşağıdır.

AR(2) modeli üçün Yul-Uoker tənliklər sistemindən istifadə etməklə avtokorrelyasiyaların hesablanma düsturlarını almaq olar. Bunun üçün, sadə halda, $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ (α_0 sərbəst həddi avtokorrelyasiya funksiyasına ciddi təsir etmədiyi üçün sıfır qəbul olunur) tənliyinin hər iki tərəfini

$y_{t-s},\ s=1,2,...,$ vurub riyazi gözləmə almaqla belə sistem alınır:

$$\begin{cases} My_t y_t = \alpha_1 My_{t-1}y_t + \alpha_2 My_{t-2}y_t + M\varepsilon_t y_t, \\ My_t y_{t-1} = \alpha_1 My_{t-1}y_{t-1} + \alpha_2 My_{t-2}y_{t-1} + M\varepsilon_t y_{t-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ My_t y_{t-s} = \alpha_1 My_{t-1}y_{t-s} + \alpha_2 My_{t-2}y_{t-s} + M\varepsilon_t y_{t-s}. \end{cases} \tag{9.13}$$

Stasionarlığın tərifinə əsasən,

$My_t y_{t-s} = My_{t-s}y_t = My_{t-k}y_{t-k-s} = \gamma(s) = \gamma_s,$

$M\varepsilon_t y_t = \sigma^2,\ M\varepsilon_t y_{t-s} = 0.$

Ona görə də, sonuncu sistem belə hala çevrilir:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2, \\ \gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_s = \alpha_1\gamma_{s-1} + \alpha_2\gamma_{s-2}. \end{cases} \tag{9.14}$$

Sistemin 2-ci tənliyini və sonrakı tənlikləri γ_0-a bölməklə alırıq:

$$\begin{cases} \rho_1 = \alpha_1\rho_0 + \alpha_2\rho_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_s = \alpha_1\rho_{s-1} + \alpha_2\rho_{s-2}, \end{cases} \tag{9.15}$$

$\rho_0 = 1$ olduğundan, (9.15)-in 1-ci tənliyindən alınır ki, $\rho_1 = \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}$. Sonra isə, ardıcıl olaraq digər avtokorrelyasiya əmsalları hesablanır. Məsələn, $s=2$ və $s=3$ olduqda

$$\rho_2 = \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1} + \alpha_2,$$

$$\rho_3 = \alpha_1\left[\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2\right] + \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_2}.$$

Eyni qayda ilə ARSO(1,1) modelinin avtokorrelyasiya funksiyalarını hesablamaq olar. Bunun üçün, $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1}$ tənliyinə Yul-Uoker metodunu tətbiq etməklə alırıq:

$$My_t y_t = \alpha_1\gamma_1 + \sigma^2 + \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\sigma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \sigma^2 + \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\sigma^2,$$

$$My_t y_{t-1} = \alpha_1 My_{t-1}y_{t-1} + M\varepsilon_t y_{t-1} + \beta_1 M\varepsilon_{t-1}y_{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \beta_1\sigma^2.$$

Buradan $\gamma_0 = \dfrac{1+\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1}{1-\alpha_1^2}\sigma^2.$

Digər $My_t y_{t-2},\dots,My_t y_{t-s}$ vurma əməliyyatlarından sonrakı əmsallar da rekkurent qayda ilə tapılır.

SOAR(p,q) modellərinin praktiki realizasiyasında p və q laqlarının düzgün seçilməsi vacibdir. Laqların müəyyənləşdirilməsi modelin strukturunun dəqiqləşdirilmıəsində əsas şərtdir, yəni modelin identifikasiya olunması üçün vacibdir. SOAR(p,q) modellərinin identifikasiyası üçün instrument olaraq müxtəlif sayda laqlarla modellərin Xüsusi Avtokorrelyasiya Funksiyalarının (XAF) öyrənilməsi məsələsinə baxılır. Bu funksiyalar xüsusi avtokorrelyasiya əmsallarıdır ki, onlar y_t dinamik sırasının cari səviyyəsi ilə $y_{t-1}, y_{t-2},\dots, y_{t-k}$ səviyyələri arasındakı əlaqəni, digər aralıq zaman laqlarının kənarlaşdırılması şərti daxilində, ölçür. Məsələn k laqlı XAF-sı y_t və y_{t-k} arasındakı əlaqəni $y_{t-1}, y_{t-2},\dots, y_{t-k-1}$ -in təsirini kənarlaşdırmaqla təsvir edir.

Φ_{kk} -ilə XAF-nın k -cı qiymətini işarə edək. Bu qiymət

y_t və y_{t-k} arasındakı korrelyasiya əmsalıdır. Belə ki, $y_{t-1}, y_{t-2},..., y_{t-k-1}$ aralıq laqlarla xətti izhaolunan y_t hissəsi nəzərə alınmır. Əgər bu xətti kombinasiyalar y_t-nin proqnozlaşdırılmasında orta kvadratik səhvin minimallığını xarakterizə edirsə, onda onlar optimal olur. Başqa sözlə, $corr(y_t - \Phi_{k1}y_{t-1} - \Phi_{k2}y_{t-2} - ... - \Phi_{kk-1}y_{t-k-1}, y_{t-k})$ korrelyasiya əmsalının örənilməsi zəruridir. Burada $\Phi_{k1}, \Phi_{k2},..., \Phi_{kk-1}$ əmsalları proqnozlaşdırmanın xətasınının minimal orta kvadratik meylini təmin edən xətti kombinasiyanın əmsallarıdır:

$$\min M\left\{(y_t - \Phi_{k1}y_{t-1} - \Phi_{k2}y_{t-2} - ... - \Phi_{kk-1}y_{t-k-1})^2\right\}.$$

Bu ifadə ƏKKÜ-da məqsəd funksiyasının analoqudur və həmin üsuldakı cəmləmə burada riyazi gözləmə ilə əvəz olunur. Optimal xətti kombinasiya ilə y_{t-k} arasındakı korrelyasiya əmsalına nəzəri reqressiyanın əmsalı kimi baxılır və əmsal $y_t = \Phi_{k1}y_{t-1} + \Phi_{k2}y_{t-2} + ... + \Phi_{kk}y_{t-k} + \varepsilon_t$ nəzəri reqressiyasında sonuncu reqressorun əmsalıdır. Reqressiya prosesin k - sayda əvvəlki qiymətlərinə nəzərən qurulur, k-sayda əmsallar müəyyənləşdirilir, lakin XAF-nın uyğun qiymətləri bu reqressiyanın sonuncu əmsalını verir. Burada seçimi deyil, nəzəri reqresseyaya baxıldığından, şərti riyazi gözləmə başa düşülür. Əgər tədqiq olunan proses AR(p)-dirsə, onda $\Phi_{pp} = \alpha_p$. Bu proses üçün cari qiymət əvvəlki p-sayda anlardakı qiymətlərlə optimal ifadə olunur və daha əvvəlki qiymətlər proqnozu yaxşılaşdıra bilməz.

Qeyd edilənləri AR(1) prosesində göstərək. Bunun üçün (9.8) tənliyində $\alpha_0 = 0$ qəbul edək və $y_t = \Phi_{11}y_{t-1} + \varepsilon_t$ nəzəri reqressiyasına baxaq. Tənliyi y_{t-1}-ə vurub, sonra riyazi gözləməyə keçib, nəticəni $\gamma(0)$-a bölməklə alırıq ki, $\rho_1 = \Phi_{11} = \alpha_1$.

Φ_{22}-ni tapmaq üçün $y_t = \Phi_{21}y_{t-1} + \Phi_{22}y_{t-2} + \varepsilon_t$ nəzəri reqressiyasını quraq. Hər tərəfi y_{t-1}-ə vurub, riyazi gözləməyə keçib, sonra $\gamma(0)$-a bölməklə alırıq: $\rho_1 = \Phi_{21}\cdot 1 + \Phi_{22}\rho_1$. Bu bərabərliyə Φ_{21} və Φ_{22} naməlum kəmiyyətləri daxildir. Onları təyin etmək üçün ilkin tənliyin hər iki tərəfini y_{t-2}-yə vurub, yuxarıdakı çevirmələri aparsaq, $\rho_2 = \Phi_{21}\rho_1 + \Phi_{22}$ alınır. Φ_{21} və Φ_{22} -yə nəzərən alınan sistemin əmsalları ρ_1 və ρ_2-ilə ifadə olunur ki, onların ilkin tənliyin əmsalları ilə əlaqəsi məlumdur. Yəni, yanaşma ilə avtokorrelyasiya funksiyalarının əmsalları ilə XAF-nın arasında əlaqə alınır. Burada Kramer qaydasını tətbiq etməklə alırıq ki, $\Phi_{22} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{1-\rho_1^2}$. ρ_1 kəmiyyəti avtokorrelyasiya funksiyasının qiyməti olduğundan $\rho < 1$. AR(1) prosesi üçün $\rho_1 = \alpha_1;\ \rho_2 = \alpha_1^2$ olduğundan $\Phi_{22} = \dfrac{\alpha_1^2 - \alpha_1^2}{1-\rho_1^2} = 0$.

Φ_{33} qiymətini hesablamaq üçün isə, $y_t = \Phi_{31}y_{t-1} + \Phi_{32}y_{t-2} + \Phi_{33}y_{t-3} + \varepsilon_t$ nəzəri reqressiyasına baxılır. Yuxarıdakı çevirmələrdə analoji çevirmələr etməklə alırıq:

$$\begin{cases} \rho_1 = \Phi_{31}\cdot 1 + \Phi_{32}\rho_1 + \Phi_{33}\rho_2, \\ \rho_2 = \Phi_{31}\rho_1 + \Phi_{32}\cdot 1 + \Phi_{33}\rho_1, \\ \rho_3 = \Phi_{31}\rho_2 + \Phi_{32}\rho_1 + \Phi_{33}\cdot 1. \end{cases}$$

Buradan isə, Φ_{33} əmsalı Kramer qaydası ilə hesablanır.

Bu qayda ilə istənilən k üçün alırıq ki, avtokorrelyasiya və XAF-nın qiymətlərini əlaqələndirən xətti tənliklər sistemi faktiki olaraq naməlum XAF-nın qiymətlərindən qurulmuş nəzəri reqressiya üçün Yul-Uoker tənliklər sistemidir:

$$\begin{cases} \rho_1 = \Phi_{k1}\cdot 1 + \Phi_{k2}\rho_1 + \Phi_{k3}\rho_2 + \ldots + \Phi_{kk}\rho_{k-1}, \\ \rho_2 = \Phi_{k1}\rho_1 + \Phi_{k2}\cdot 1 + \Phi_{k3}\rho_1 + \ldots + \Phi_{kk}\rho_{k-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_k = \Phi_{k1}\rho_{k-1} + \Phi_{k2}\rho_{k-2} + \Phi_{k3}\rho_{k-3} + \ldots + \Phi_{kk}\cdot 1. \end{cases}$$

Buradan, Kramer qaydasını tətbiq etməklə alırıq ki,

$$\Phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \rho_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \rho_{k-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \rho_{k-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\ \rho_{k-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 1 \end{vmatrix}}$$

Buradan isə, alınır ki, AR(p) prosesi üçün XAF $k > p$ olduqda sıfra bərabərdir, $k \le p$ olduqda isə, ümumilikdə sıfır deyil. Bu isə, AR prosesinin ρ tərtibinin müəyyənləşdirilməsinə imkan verir. Məsələn, $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ modeli üçün $\rho(2)$ sıfra yaxınlaşır. $y_t = \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1}$ SO(1) modeli üçün isə, $\beta_1 \ne -1$ olduqda $\varepsilon_t = \dfrac{y_t}{(1+\beta_1 L)}$. Bu bərabərliyin sağ tərəfini üstlü sıraya ayırsaq, $y_t - \beta_1 y_{t-1} + \beta_1^2 y_{t-2} - \beta_1^3 y_{t-3} + \ldots = \varepsilon_t$ olar. Ona görə də, XARF -sı SO(1) modeli üçün müəyyən nömrədən başlayaraq sıfra yaxınlaşmır, lakin həndəsi silsilə sürətilə azalır. Əgər $\beta_1 < 0$ olarsa, azalma monotondur, $\beta_1 > 0$ olduqda isə, ossilyasiya olunur.

Ümumi halda, XARF-sı SOAR(p,q) modelində p laqından başlayaraq azalmaqla sıfra yaxınlaşır. Azalmanın xarakteri isə, $\left(1+\beta_1 L+\beta_2 L^2+. \;+\beta_q L^q\right)$ çoxhədlisinin əmsallarından asılıdır.

§9.2.2. Qeyri-bircins stoxastik fərq tənliklərinin həlli

Əvvəlcə sadə hallara baxaq və tutaq ki, (9.8) tənliyində $\alpha_0 = 0$ və ε_t riyazi gözləməsi sıfır, dispersiyası σ_ε^2 olan ağ küy prosesidir, y_0 -isə müəyyən təsadüfi kəmiyyətdir, $\alpha_1 \neq 0$. Bu halda $M(y_t) = \alpha_1 M(y_{t-1})$ olduğundan, (9.8) prosesi o halda stasionar olur ki, $M(y_t) = 0, \quad t = 0,1,2,\dots,n$ olsun.

$$
\begin{aligned}
& y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha_1(\alpha_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \\
& = \alpha_1^2 y_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots = \alpha^t y_0 + \alpha^{t-1}\varepsilon_1 + \alpha^{t-2}\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t; \\
& y_{t-1} = \alpha_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} = \alpha_1^{t-1} y_0 + \alpha_1^{t-2}\varepsilon_1 + \alpha_1^{t-3}\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-1}; \\
& y_{t-2} = \alpha_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} = \alpha_1^{t-2} y_0 + \alpha_1^{t-3}\varepsilon_1 + \alpha_1^{t43}\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{t-2}; \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& y_1 = \alpha_1 y_0 + \varepsilon_1.
\end{aligned}
$$

Əgər y_0 təsadüfi kəmiyyəti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ kəmiyyətləri ilə korrelə olunmayıbsa, onda

$$\operatorname{cov}(y_0, \varepsilon_1) = 0, \ \operatorname{cov}(y_1, \varepsilon_2) = 0, \dots, \operatorname{cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t) = 0,$$

$$D(y_t) = D(\alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t) = \alpha_1^2 D(y_{t-1}) + D(\varepsilon_t), \ t = 1,\dots,n.$$

Fərz edək ki, $D(y_0) = D(y_t) = \sigma_y^2, \quad t = 1,2,\dots,n.$ Onda

$$\sigma_y^2 = \alpha_1^2 \sigma_y^2 + \sigma_\varepsilon^2 .$$

Sonuncu münasibət yalnız $\alpha_1^2 < 1$, yəni $\alpha_1 < 1$ olduqda ödənilir və buradan

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \alpha_1^2} .$$

Avtokovariasiya və avtokorrelyasiya üçün

$$\operatorname{cov}(y_t, y_{t+\tau}) = \operatorname{cov}\left(\alpha_1^t y_0 + \alpha_1^{t-1}\varepsilon_1 + \alpha_1^{t-2}\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t, \alpha_1^{t+\tau} y_0 + \right.$$
$$\left. + \alpha_1^{t+\tau-1}\varepsilon_1 + \alpha_1^{t+\tau-2}\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{t+\tau}\right) = \alpha_1^{2t+\tau} D(y_0) +$$
$$+ \alpha_1^{\tau}\left(1 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_1^{2(t-1)}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \alpha_1^{\tau}\left[\alpha_1^{2t}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha_1^2} + \left(1-\alpha_1^{2t}\right)\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha_1^2}\right] =$$
$$= \left[\frac{\alpha_1^{\tau}}{1-\alpha_1^2}\right]\sigma_\varepsilon^2.$$

və $corr(y_t, y_{t-\tau}) = \alpha_1^{\tau}$, yəni qəbul olunmuş şərtlər ödənildikdə avtokovariasiya və avtokorrelyasiya uyğun müşahidələrin bir-birindən nə qədər məsafədə olmasından asılıdır.

$\alpha_0 \neq 0$ halında isə, y_0 -ı baçlanğıc şərt qəbul etməklə, iterasiya üsulu ilə $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ hesablayıb (9.8) tənliyinin t - nömrəli iterasiya üçün alırıq:

$$y_t = \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \alpha_1^i y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}\,. \tag{9.16}$$

Tutaq ki, y_0 başlanğıc qiyməti məlum deyil. Onda geriyə hərəkət etməklə y_0 -ı $(\alpha_0 + \alpha_1 y_{-1} + \varepsilon_0)$-la əvəz etsək,

$$y_t = \alpha_0 \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \alpha_1^t \alpha_1^* (\alpha_0 + \alpha_1 y_{-1} + \varepsilon_0) + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} =$$
$$= \alpha_1 \sum_{i=0}^{t} \alpha_1^i + \sum_{i=0}^{t} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} + \alpha_1^{t+1} y_{-1}$$

alınar. $\alpha_1 < 1$ qəbul edib geriyə m period hərəkət etməklə və $m \to \infty$ şərtilə limitə keçsək alırıq: $\alpha_1^{t+m+1} \to 0$ və $\sum_{i=0}^{t+m} \alpha_1^i \to \frac{1}{1-\alpha_1}$ və onda

$$y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i}\,. \tag{9.17}$$

(9.8) -in bu həlli yeganə deyil. Onun ümumi həlli istənilən c sabiti üçün belə göstərilir:

$$y_t = c\alpha_1^t + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_1^i \varepsilon_{t-i} \ . \qquad (9.18)$$

Burada $c\alpha_1^t$ həlli $y_t = \alpha_1 y_{t-1}$ bircins tənliyinin ümumi həllidir. c-sabiti uzunmüddətli tarazlıqdan kənarlaşma kimi interpretasiya oluna bilər. Stasionarlıq üçün $(c\alpha_1)^t = 0$ olması zəruridir. Yəni, ya $c = 0$, ya da $\alpha_1^t = 0$ olmalıdır.

Beləliklə, stasionarlıq şərtləri aşağıdakı şərtlər olur:

1) Bircins tənliyin həlli sıfır olmalıdır. Ona görə də, ya y_t ardıcıllığının qiymətləri prosesin başlanğıcından kifayət qədər uzaqda olmalıdır $\alpha_1^t = 0$, ya da proses tarazlıq vəziyyətində olmalıdır;

2) α_1 xarakteristik kökü mütləq qiymətcə vahiddən kiçik olmalıdır.

Ümumi halda, (9.4), (9.5) ARSO(*p*,*q*) modeli üçün bir vahid gecikən L laq operatorundan istifadə etməklə,

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L^i\right) y_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i} \qquad (9.19)$$

bərabərliyindən

$$y_t = \frac{\alpha_0 + \sum_{i=0}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i}}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L^i} \qquad (9.20)$$

formal həlli alınır ki, onun varlığı üçün $\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L^i\right)$ xarakteristik çoxhədlisinin köklərinin vahid radiuslu dairədən kənarda yerləşməsi zəruri şərtdir. Bu halda, xarakteristik köklər sadə olduqda, bircins tənlik $\sum_{i=1}^{p} c_i \theta_i^t$ ümumi həllinə, köklər təkrarlandıqda isə, $\theta \sum_{i=1}^{m} c_i t^i + \sum_{i=m+1}^{p} c_i \alpha_i^t$ ümumi həllinə malikdir. Burada α_i $(p-m)$-sayda fərqli köklər, c_i-lər p-sayda ixtiyari sabitlər, θ isə, m dəfə təkrarlanan kökdür.

Xüsusi halda,

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad (9.21)$$

ARSO(2,1) modelinə baxaq. SO(∞)-la

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \, \varepsilon_{t-i}, \qquad (9.22)$$

prosesini işarə edək. Bu proses ağ küy prosesi deyil. Onun stasionarlığını yoxlayaq.

$$M(x_t) = M(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots) = M(\varepsilon_t) + \beta_1 M(\varepsilon_{t-1}) +$$

$$+ \beta_2 M(\varepsilon_{t-2}) + \ldots = 0,$$

$$D(x_t) = M(\varepsilon_t)^2 + \beta_1^2 M(\varepsilon_{t-1})^2 +$$

$$+ \beta_2^2 M(\varepsilon_{t-2})^2 + \ldots = \sigma^2 \left[1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots\right].$$

Əgər $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2$ sırası yığılırsa, onda dispersiya sonludur və t-dən asılı deyil. Avtokovariyasiyanı hesablayaq

$$M(x_t, x_{t-s}) =$$

$$= M\left[(\varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots)(\varepsilon_{t-s} + \beta_1 \varepsilon_{t-s-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-s-2} + \ldots)\right].$$

$s \neq 0$ olduqda $M(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$ olduğundan,

$$M(x_t, x_{t-s}) = \sigma^2 (\beta_s + \beta_1 \beta_{s+1} + \beta_2 \beta_{s+2} + \ldots).$$

Əgər sağ tərəfdəki sıra yığılırsa, onda kovariasiya sonludur və t-dən deyil, s sürüşməsindən asılıdır.

Teorem 9.2. (9.22) SO(∞) *sırasının stasionar olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$\begin{aligned} &1) \quad \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2 < \infty; \\ &2) \quad \beta_s + \beta_1 \beta_{s+1} + \beta_2 \beta_{s+2} + \ldots < +\infty, \ s \neq 0 \end{aligned} \qquad (9.23)$$

sıralarının yığılmasıdır.

Əgər $\beta_0 = 1$ qəbul etsək və 2)-nin $s = 0$-da doğruluğunu fərz etsək, onda stasionarlıq üçün 2) şərtinin ödənilməsi kifayətdir. Buradan alınır ki, SO(q) prosesi q sonlu olduqda həmişə stasionardır.

§9.2.3. AR(2) modelinin xarakteristik köklər üzrə ayrılışı

Aşağıdakı AR(2) modelinə baxaq:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t. \tag{9.24}$$

L-laq operatorunu tətbiq etməklə, $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = Ly_{t-1} = y_{t-2}$ işarələmələrindən sonra (9.24) -ü belə yazmaq olar:

$$\left(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2\right)y_t = \omega_t,$$

burada $\omega_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \sim N\left(\alpha_0,\, \sigma_\varepsilon^2\right)$.

$F(L) = 1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2$ işarə edək. Onda $F(L)x_t = \omega_t$ alınır. AR(2) modelinin tərsinin varlığı məsələsinə baxaq, yəni ω_t-nin qiymətlərinə nəzərən x_t-ni tapaq. L operatorunun xassələrinə əsasən (bax. §8.6) istənilən θ_1, θ_2 üçün

$$\left(1-\theta_1 L\right)\left(1-\theta_2 L\right) = 1-\left(\theta_1+\theta_2\right)L+\theta_1\theta_2 L^2$$

münsibəti doğrudur. θ_1 və θ_2-ni elə seçək ki, $\theta_1+\theta_2=\alpha_1$, $\theta_1\cdot\theta_2 = -\alpha_2$ olsun, yəni onlar $\theta^2-\alpha_1\theta-\alpha_2=0$ kvadrat tənliyinin kökləri olsun. Başqa sözlə, $\theta_1 = \dfrac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+4\alpha_2}}{2}$, $\theta_2 = \dfrac{\alpha_1-\sqrt{\alpha_1^2+4\alpha_2}}{2}$ qəbul edək. Onda $1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2 = \left(1-\theta_1 L\right)\left(1-\theta_2 L\right)$. $\left(1-\theta_1 L\right)\left(1-\theta_2 L\right)y_t = \omega_t$ münasibətindən alırıq ki, $y_t = \left(1-\theta_1 L\right)^{-1}\left(1-\theta_2 L\right)^{-1}\omega_t$.

$$\frac{1}{\left(1-\theta_1 L\right)\left(1-\theta_2 L\right)} = \frac{a}{\left(1-\theta_1 L\right)} + \frac{1}{\left(1-\theta_2 L\right)} = \frac{a\left(1-\theta_2 L\right)+b\left(1-\theta_1 L\right)}{\left(1-\theta_1 L\right)\left(1-\theta_2 L\right)}$$

bərabərliyində a və b-ni təyin edək. Onlar belə sistemi ödəyir:

$$\begin{cases} a+b=1, \\ \theta_2 a+\theta_1 b=0. \end{cases}$$

Bu sistemi həll etmıəklə alırıq ki, $a=\dfrac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}$, $b=\dfrac{\theta_2}{\theta_2-\theta_1}$.

Ona görə də,

$$\frac{1}{(1-\theta_1 L)(1-\theta_2 L)}=\frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}\frac{a}{(1-\theta_1 L)}+\frac{\theta_2}{\theta_2-\theta_1}\frac{1}{(1-\theta_2 L)}.$$

Nəticədə y_t ifadəsi aşağıdakı hala düşür.

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}\sum_{i=0}^{\infty}\theta_1^i\omega_{t-i}+\frac{\theta_2}{\theta_2-\theta_1}\sum_{i=0}^{\infty}\theta_2^i\omega_{t-i}= \\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}\theta_1^i+\frac{\theta_2}{\theta_2-\theta_1}\theta_2^i\right)\omega_{t-i}. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Qeyd edək ki, AR(2) modelləri çoxluğundan olan modellərin həmişə tərsi olmur. Modelin (9.25) düsturu ilə göstərilməsi üçün $|\theta_{1,2}|<1$ zəruri şərti ödənilməlidir ki, bu şərt stasionarlıq şərtidir.

(9.25) düsturu $|\theta_{1,2}|<1$ olduqda AR(2) modelinin xarakteristik köklərə nəzərən ayrılış düsturudur. Sonuncu bərabərliyi AR(2)-nin əmsalları ilə ifadə etsək alarıq ki, $\alpha_1+\alpha_2<1$; $\alpha_1-\alpha_2>1$; $|\alpha_2|<1$bərabərsizliklərinin ödənilməsi stasionarlıq üçün kafi şərtlərdir.

§9.3. Zaman sıralarından stasionar AR(p), SO(q) və SOAR (p,q) modellərinin seçilməsi

Stasionar zaman sıralarının AR(p), SO(q) və SOAR(p,q) modellərinin ekonometrik üsullarla tədqiq olunmasında əsas üç məsələyə baxılır:

1) Modelin identifikasiyası: modelin p və q tərtiblərinin müəyyənləşdirilməsi və modelin parametrlərinin təqribi qiymətləndirilməsi;

2) Modelin qiymətləndirilməsi: modelin parametrlərinin dəqiqləşdirilməsi;

3) Modelin diaqnostikası: adekvatlığın və reqressiya modelinin əsas şərtlərinin (Qauss-Markov şərtləri) uyğunluğunun yoxlanılması.

İdentifikasiya mərhələsində bütün SOAR(p,q) modellər sinfindən bir neçə model seşilir, yəni p və q-nün müəyyən seçimi qiymətlərinə baxılır və bu mərhələdə identifikasiya olunan (9.4) modelinin $\alpha_1,...,\alpha_p,\beta_1,...,\beta_q$ əmsallarının təxmini qiymətləndirilmələri hesablanır.

Modelin qiymətləndirilməsi mərhələsində effektiv statistik üsullardan istifadə etməklə modelin qiymətləndirmələri dəqiqləşdirilir.

Modelin diaqnostikası mərhələsində seçilmiş modelin statistik verilənlərə adekvatlığının yoxlanılması üçün müxtəlif diaqnostik prosedurlar tətbiq edilir.

Stasionar SOAR(p,q) modelinin identifikasiyası üçün bu sinifdən olan müxtəlif modellərə uyğun sıraların avtokorrelyasiya və XAF-nın tədqiqi əsas məsələdir.

Zaman sırasının avtokovariyasiya funksiyası n-həcmli seçimdə adi seçimi kovariasiya əmsalı düsturu ilə qiymətləndirilir:

$$\hat{\gamma}(h)=\frac{1}{n-h}\sum_{t=1}^{n-h}(y_t-\bar{y})(y_{t+h}-\bar{y}). \qquad (9.26)$$

Seçimi avtokorrelyasiya funksiyası isə,

$$r(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \tag{9.27}$$

düsturundan müəyyənləşdirilir.

Əksər ekonometrik proqram paketlərində (Eviews, SPSS və s.) bu funksiyalar verilmiş tərtibə qədər avtomatik hesablanır.

Əvvəlcə AR(p) modelinin p tərtibinin qiymətinin məlum olmasını fərz etməklə, onun parametrlərinin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxaq.

Teorem 9.3. *Əgər* (9.2) *modelində* ε_t *tərkibləri Qauss-Markov şərtlərini ödəyirsə, onda* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p$ *parametrlərinin asimptotik xətti qiymətləndirilməsində ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmə ən yaxşıdır.*

$\alpha_1, ..., \alpha_p$ parametrlərinin qiymətləndirmələrini Yul-Uoker tənliklər sisteminin həlli kimi də, almaq olar:

$$\begin{cases} r(1) = \alpha_1 r(0) + \alpha_2 r(1) + ... + \alpha_p r(p-1), \\ r(2) = \alpha_1 r(1) + \alpha_2 r(0) + ... + \alpha_p r(p-2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r(p) = \alpha_1 r(p-1) + \alpha_2 r(p-2) + ... + \alpha_p r(0). \end{cases}$$

α_0 əmsalının qiymətləndirilməsi isə, $\hat{\alpha}_0 = \bar{y}(1 - \hat{\alpha}_1 - ... - \overline{\alpha}_p)$ olur.

Nümunə 9.3. AR(1) modeli üçün

$\hat{\alpha}_1 = r(1),\ \hat{\alpha}_0 = \bar{y}(1 - \hat{\alpha}_1) = \bar{y}(1 - r(1))$

və 1-ci tərtib avtoreqressiya modeli

$\hat{y}_t = \bar{y}(1 - r(1)) + r(1) y_{t-1}$

tənliyi ilə verilir.

Nümunə 9.4. Tutaq ki, zaman sırası üçün $\bar{y} = 1{,}3$ və $r(1) = -0{,}7$ qiymətləri hesablanıb. Onda AR(1) modeli

$\hat{y}_t = 1{,}3(1 - (-0{,}7)) + (-0{,}7) y_{t-1} = 2{,}21 - 0{,}7 y_{t-1}.$

Nümunə 9.5. İkinci tərtib model üçün, $r(0) = 1$ olduğunu nəzərə almaqla, Yul-Uoker tənliklər sistemi

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 r(1) = r(1), \\ \alpha_1 r(1) + \alpha_2 = r(2) \end{cases}$$

kimi göstərilir. Onu həll etməklə alırıq:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{r(1) - r(1)r(2)}{1 - r(1)}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{r(2) - r^2(1)}{1 - r^2(1)}.$$

AR(2) modeli belə avtoreqressia tənliyi olur:

$$\hat{y}_t = \bar{y}(1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2) + \hat{\alpha}_1 y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 y_{t-2}.$$

Nümunə 9.6. Tutaq ki, zaman sırası üçün $\bar{y} = 2{,}1,\ r(1) = 0{,}6,\ r(2) = -0{,}2$ qiymətləri hesablanıb. Onun 2-ci tərtib avtoreqressiya modelini quraq.

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{0{,}6 - 0{,}6 \cdot (-0{,}2)}{1 - 0{,}6^2} = 1{,}125, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{-0{,}2 - 0{,}6^2}{1 - 0{,}6^2} - 0{,}875.$$

2-ci tərtib model

$$\hat{y}_t = 2{,}1(1 - 1{,}125 + 0{,}875) + 1{,}125 y_{t-1} - 0{,}875 y_{t-2}.$$

Ümumi halda, göstəricinin proqnoz qiymətlərinin alınmasında α_k qiymətləri əvəzinə onların ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmələri götürülür:

$$\hat{y}_{n+1} = \bar{y}(1 - \hat{\alpha}_1 - \ldots - \hat{\alpha}_p) + \hat{\alpha}_1 y_n + \hat{\alpha}_2 y_{n-1} + \ldots + \hat{\alpha}_p y_{n-p+1},$$
$$\hat{y}_{n+2} = \bar{y}(1 - \hat{\alpha}_1 - \ldots - \hat{\alpha}_p) + \hat{\alpha}_1 y_{n+1} + \hat{\alpha}_2 y_n + \ldots + \hat{\alpha}_p y_{n-p+2}.$$

§9.3.1. Akayke, Şvarts, Hennan-Kuin informasiya kriteriyaları

Avtoreqressiyanın tərkibinin müəyyənləşdirilməsində informativ kriteriyalara əsaslanan yanaşmadan istifadə olunur. Bu yanaşmalar stasionar zaman sıralarının SO(q), SOAR(p,q) modellərinə də tətbiq edilir. Bu yanaşmaya əsasən müxtəlif tərtibli bir neçə AR modelləri qiymətləndirilir və onlar üçün informasiya kriteriyasının ədədi göstəriciləri hesablanır. O model seçilir ki, onun ədədi göstəricisi minimaldır. Bir neçə informasiya kriteriləri vardır ki, onlardan ən çox yayılmışlarını qed edək:

1. <u>Akayke informasiya kriteriyası</u>. Bu kriteriyaya əsasən avtoreqressiyanın p tərtibi

$$AIC(m) = \ln S^2(m) + \frac{2m}{n} \to \min \tag{9.28}$$

şərtindən seçilir. Burada $S^2(m)$ kəmiyyəti AR(m) modelində səhvlərin dispersiyasının qiymətləndirilməsidir.

2. <u>Şvarts informasiya kriteriyası</u>. Bu kriteriyaya əsasən avtoreqressiyanın p tərtibi

$$SIC(m) = \ln S^2(m) + \frac{m \ln n}{n} \to \min \tag{9.29}$$

şərtindən seçilir.

3. <u>Hennan -Kuin kriteriyası</u>. Bu kriteriyaya əsasən avtoreqressiyanın p tərtibi

$$HQ(m) = \ln S^2(m) + 2c\frac{m \ln(\ln n)}{n} \to \min, \quad c > 1 \tag{9.30}$$

şərtindən seçilir.

Nümunə 9.7. Tutaq ki, $n = 100$ həcmli zaman sırası üçün 4-cü tərtibə qədər avtoreqressiya modelləri qiymərləndirilib və onlar üçün səhvlərin dispersiyalarının belə qiymətləri alınmışdır:

$$S^2(1) = 0{,}9; S^2(2) = 0{,}7; S^2(3) = 0{,}3; S^2(4) = 0{,}46.$$

Avtoreqressiyanın tərtibini Şvarts kriteriyasını yoxlamaqla müəyyənləşdirək:

$$SIC(1) = \ln S^2(1) + \frac{1 \cdot \ln n}{n} = \ln 0{,}9 + \frac{1 \cdot \ln 100}{100} \approx -0{,}059;$$

$$SIC(\ \ ) = \ln S^2(2) + \frac{2 \cdot \ln n}{n} = \ln 0{,}7 + \frac{2 \cdot \ln 100}{100} \approx -0{,}265;$$

$$SIC(\ \ ) = \ln S^2(3) + \frac{3 \cdot \ln n}{n} = \ln 0{,}5 + \frac{3 \cdot \ln 100}{100} \approx -0{,}555;$$

$$SIC(\ \ ) = \ln S^2(4) + \frac{4 \cdot \ln n}{n} = \ln 0{,}46 + \frac{4 \cdot \ln 100}{100} \approx -0{,}592.$$

Deməli, 4-cü tərtib avtoreqressiya modelinə üstünlük vermək lazımdır.

AR(*p*), SO(*q*), SOAR(*p*,*q*) modellərinin adekvatlığının yoxlanılması qalıqların tədqiqinə əsaslanır. Qalıqlar normal paylanmış ağ küy prosesini modelləşdirməlidir. Modellər asılı dəyişənin laq qiymətlərini özündə saxladığından, qalıqların avtokorrelyasiyasının tədqiqi üçün Darbin-Uotson kriteriyası tətbiq olunmur, çünki DW statistikası azalma hissəsinə meylli olur. Bu halda, əsasən Boks - Lyunq yanaşmasından istifadə olunur ki, bu yanaşma Q- statistikasının tətbiqinə əsaslanır. Tutaq ki, $r_e(h)$ AR(*p*) modelinin e_t qalıqlarının seçimi avtokorrelyasiya əmsalıdır. Q-statistika belə təyin olunur:

$$Q = n(n+2)\sum_{h=1}^{M}\frac{r_e^2(h)}{n-h}, \; M = 1,2,... \qquad (9.31)$$

Avtoreqressiya modelinin səhvləri Qauss-Markov şərtlərini ödədikdə, Q-statistikası asimptotik $\chi^2(M-p)$ paylanmasına malikdir. Verilmiş α əhəmiyyətlilik səviyyəsində və seçimin həcminin böyük qiymətlərində reqressiyanın səhvlərinin asılı olmaması və eyni-qanunla paylanması haqda hipotez $Q > \chi_{kr}^2$ olduqda rədd edilir. Burada

$$\chi_{kr}^2 = \chi^2(\alpha, \, M-p).$$

İndi tutaq ki, identifikasiya mərhələsində (9.4) modeli üçün seçim müəyyən qeyd olunmuş *p*,*q* parametrli SOAR(*p*,*q*) modelinə olmuşdur. Laq operatorunu tətbiq etməklə (9.4) -un $A(L)y_t = B(L)\varepsilon_t$ çevirməsinin qiymətləndirilməsi $\hat{A}(L)y_t = \hat{B}(L)\varepsilon_t$ münasibətidir. Burada $\hat{A}(L) = 1 - \hat{\alpha}_1 L - ... - \hat{\alpha}_p L^p$, $\hat{B}(L) = 1 + \hat{\beta}_1 L + ... + \hat{\beta}_q L^q$. Əgər SOAR(*p*,*q*) modelinin SO tərkibinin tərsi varsa, onda $\varepsilon_t = \dfrac{A(L)}{B(L)} y_t$ və ε_t qiymətləndirilməsini nəzəri olaraq *A*(L) və *B*(L) -ni uyğun olaraq $\hat{A}(L)$ və $\hat{B}(L)$-lə əvəz etməklə almaq olar: $\hat{\varepsilon}_t = \dfrac{\hat{A}(L)}{\hat{B}(L)} y_t$.

Lakin çox həcmli praktik zaman sıralarının tədqiqində Boks-Lyunq kriteriyasından istifadəyə üstünlük verilir. Bu yanaşmada Q-statistikası asimptotik olaraq $\chi^2(M-p-q)$ paylanmasına malikdir. Q-kriteriyası ε_t paylanmasının normal paylanmadan meyletmələrinə kifayət qədər dayanıqlıdır. Əsas odur ki, $D(\varepsilon_t)$ dispersiyası sonlu olsun. Bu şərt sürətlə dəyişən maliyyə göstəricilərinin evalytor hərəkətlərinin təsvirini ifadə sıralarda pozulur (səhmlərin qiymətləri, birja indeksləri, mübadilə kursları). Belə zaman sıralarında ε_t-lərin paylanması adətən ağır quyruqludur, yəni ε_t-lərin modulca kifayət qədər böyük qiymətləri kifayət qədər çox müşahidə olunur.

Nümunə 9.8. Tutaq ki, $n = 100$ həcmli zaman sırası üçün $p = 2$-ci tərtib model qiymətləndirilir və qalıqların avtokorrelyasiya əmsallarının hesablanmış qiymətləri belədir:

$r_e(1) = 0{,}001;\quad r_e(2) = 0{,}001;\ r_e(3) = 0{,}0006;$

$r_e(4) = 0{,}0004; r_e(5) = 0{,}0003.$

Modelin adekvatlığını Boks-Lyunq kriteriyasına əsasən yoxlayaq. $M = 5$olduqda Q-statistikasını hesablayaq:

$$Q = n(n+2)\left(\frac{r_e^2(1)}{n-1} + \frac{r_e^2(2)}{n-2} + \frac{r_e^2(3)}{n-3} + \frac{r_e^2(4)}{n-4} + \frac{r_e^2(5)}{n-5}\right) =$$

$$= 100 \cdot 102\left(\frac{0{,}001^2}{100-1} + \frac{0{,}001^2}{100-2} + \frac{0{,}0006^2}{100-3} + \frac{0{,}0004^2}{100-4} + \frac{0{,}0003^2}{100-5}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}00027$$

$M - p = 5 - 2 = 3$ sərbəst dərəcəli və 5% əhəmiyyətlik səviyyəli χ^2 paylanmasının kritik qiyməti $\chi^2_{kr} = \chi^2(5\%;3) \approx 7{,}875$.

$Q < \chi^2_{kr}$ olduğundan, verilənlər AR(2) modeli üçün Qauss-Markov şərtləri ilə razılaşdırılır.

§9.4. Paylanmış laq modelləri

Paylanmış laq modellərinin tərifi §9.1 Tərif 2.1-də verilmiş, onun ümumi göstərilişi (9.1) düsturu ilə ifadə olunmuşdur. Onun parametrlərinin qiymətləndirilməsində əsas problem $x_t, x_{t-1}, x_{t-2},...$ faktorları arasında güclü korrelyasiya asılılığının olmasıdır. Bu çətinliyin aradan qaldırılması üçün laq dəyişənlərinin üzərində ya çevirmələr aparılaraq yeni dəyişənlərə keçilir, ya da reqressiya əmsallarının xarakterinə müəyyən şərtlər qoyulur.

Qiymətləndirmə üsullarını şərh etməzdən əvvəl, (9.1) tənliyinin əmsallarını zaman anları dəyişmələrinə nəzərən xarakterizə edək. Sadəlik üçün $k = 4$ olduqda

$$\hat{y}_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \beta_3 x_{t-3} + \beta_4 x_{t-4} \quad (9.32)$$

modelinə baxaq. Bu model onu göstərir ki, x izahedici faktorunun zamana nəzərən dəyişməsi y nəticə faktorunun qiymətinə sonrakı 4 zaman anlarında təsir edəcək.

Tərif 9.9. *Qeyd olunmuş t zaman anında x_t faktorunun öz ölçüsündən 1 vahid dəyişməsi nəticəsində y faktorunun orta dəyişməsini xarakterizə edən β_0 əmsalına qısamüddətli multiplikator deyilir.*

$t+1$ anında izahedici x faktorunun y nəticə faktoruna təsiri
$(\beta_0 + \beta_1)$ vahid, $t+2$ zaman anında isə onun y-ə təsirinin nəticəsi $(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)$ vahid təşkil edir.

Tərif 9.10. (9.1) *tənliyində istənilən* $\sum_{j=0}^{h} \beta_j$, $(h < k)$ *cəminə* *aralıq multiplikator, bütün reqressiya əmsallarının* $\sum_{j=0}^{k}\beta_j$ *cəminə isə, uzun-müddətli multiplikator deyilir.*

Uzunmüddətli multiplikator x faktorunun t anında 1 vahid dəyişməsinin təsiri ilə zaman periodunun k intervalından sonra y nəticə faktorunun ümumi dəyişməsini xarakterizə edir. Əgər bütün reqressiya əmsalları eyni işarəlidirsə, onda $w_j = \dfrac{\beta_j}{\sum_{j=0}^{k}\beta_j}$, $0 < \beta_j < 1$, $\sum_{j=0}^{k} w_j = 1$ modelin nisbi əmsallarını müəyyənləşdirmək olar. Bu əmsallar $t + j$ zaman anında y-in ümumi dəyişməsindəki payını göstərir.

Tərif 9.11. *Tam arqumentli* w_j *funksiyasına laq paylanmaları deyilir.*

x faktorunun dəyişməsinə y faktorunun reaksiya vermə sürəti $\sum_{j=0}^{q} jw_j$ ifadəsinin qiymətindən asılıdır. Bu ifadənin kiçik qiymətləri x faktorunun dəyişməsinə y-in tez reaksiyasına və əksinə, onun böyük qiymətləri reaksiyanın ləngiməsinə uyğun gəlir.

Nümunə 9.9. Tutaq ki, x investisiya qoyuluşu miqdarından y əsas istehsal fondlarının asılılığını təsvir edən reqressiya tənliyi belədir:

$\hat{y}_t = 0{,}8 + 0{,}7x_t + 1{,}0x_{t-1} + 1{,}5x_{t-2} + 0{,}6x_{t-3} + 0{,}3x_{t-4}$, (burada t illərdir, dəyişənlər min p.v. ilə ölçülür).

Burada belə interpretasiya verilir ki, carı periodda 1 min p.v. investisiya qoyuluşunun artımı əsas istehsal fondlarının artımına aşağıdakı mərhələlərdə göstərildiyi kimi səbəb olur:

1) Həmin periodda istehsal fondları 0,7 min p.v. artır (qısamüddətli multiplikator);

2) Bir ildən sonra istehsal fondu 0,7+1=1,7 min p.v. artır;

3) İki ildən sonra artım 0,7+1+1,5=3,2 min p.v. olur;
4) Üç ildən sonra artım 3,8 min p.v. olur;
5) Dörd ildən sonra artım 4 min p.v. təşkil edir.

Modelin nisbi göstərilişləri $w_0 = \frac{0,7}{4} = 0,175$; $w_1 = \frac{1}{4} = 0,25$; $w_3 = \frac{1,5}{4} = 0,375$; $w_4 = \frac{0,6}{4} = 0,15$; $w_5 = \frac{0,2}{4} = 0,05$. Yəni cari ildə istehsal fondlarının artımına investisiyaların artımının təsiri 17,5%, bir ildən sonra, yenə 25%, 2-ildən sonra, yenə 37,5%, 3 ildən sonra, yenə 15%, 4 ildən sonra, yenə 5% realizasiya olunur.

$$\sum_{j=0}^{q} j w_j = 0 \cdot 0,175 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,05 = 1,65 \text{ il}$$

olduğundan, investisiyaların artırılmasında nəticə faktorunda əsas effekt 1,65 ildən sonra büruzə verir.

İndi isə, paylanmış laqlarla verilmiş (9.1) modelinin parametrlərinin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxaq. Bu model ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilə bilər. Burada $x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-k}$ dəyişənlərinə adi çoxölçülü reqressiya modellərində izahedici dəyişənlər kimi baxılır. Bununla belə, ƏKKÜ-nun sonlu sayda paylanmış laqlarla verilmiş modellərə tətbiqi aşağıdakı səbəblərdən çətinliklər yarada bilər:

1) Tendensiya mövcud olduqda $x_t, x_{t-1}, ..., x_{t-k}$ dəyişənləri arasında sıx qarşılıqlı əlaqə olur. Bu isə, faktorların multikollienarlığına səbəb olur və nəticədə reqressiya əmsallarının qarşısında interpretasiya olunmayan işarələrin olmasına, onların dəqiqliyinin aşağı düşməsinə gətirir;
2) ƏKKÜ tendensiyalı zaman sıralarına tətbiq edildiyindən, qalıqların avtokorrelyasiya halları ola bilər.

Ona görə də, sonlu və sonsuz sayda paylanmış laqlı zaman sıralarının parametrlərinin qiymətləndirilməsində xüsusi çevirmə üsullarından istifadə olunur. Bu üsullar izahedici laq dəyişənlərinin əmsallarının paylanma xarakterini nəzərə alır.

Başqa sözlə, paylanmış laqlarla verilmiş modellərin parametrlərinin qiymətləndirilməsi üsulları laqların strukturunun öyrənilməsinə əsaslanır. Məsələn, laq əmsalları polinomial paylanırsa, Almon üsulundan, onların həndəsi silsilə hipotezində isə, Koyk çevirməsindən istifadə olunur.

§9.4.1. Polinomial laqlı model (Almon üsulu)

Reqressiyanın β_i laq əmsallarının i-dən asılılığı müəyyən r tərtibli polinomla approksimasiya olunduqda, yəni

$$\beta_i = \delta_0 + \delta_1 i + ... + \delta_r i^r, \quad r \le q \tag{9.33}$$

olduqda, Almon parametrlərin qiymətləndirilməsi üsulunu vermişdir. (9.33)-ü (9.1)-də yerinə qoysaq, $r+2$ sayda naməlum parametrli model alınır:

$$y_t = \delta_0 + \delta_1 z_{0t} + ... + \delta_r z_{rt} + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,...,n \tag{9.34}$$

burada $z_0,...,z_r$ dəyişənləri $x_t,...,x_{t-q}$ dəyişənlərinin xətti kombinasiydır.

(9.34) reqressiyası (9.1)-dən fərqli olaraq məhdudiyyətli reqressiyadır.

Sadəlik üçün fərz edək ki, β_i ikinci dərəcədən parabolik paylanmaya malikdir. Onda

$$\beta_0 = \delta_0;$$
$$\beta_1 = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2;$$
$$\beta_2 = \delta_0 + 2\delta_1 + 4\delta_2;$$
$$\beta_3 = \delta_0 + 3\delta_1 + 9\delta_2;$$
$$.........................$$
$$\beta_q = \delta_0 + q\delta_1 + q^2\delta_2.$$

Bu qiymətləri (9.1) -də nəzərə alaq:

$$\begin{aligned} y_t = \alpha_0 + \delta_0 x_t + (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)x_{t-1} + (\delta_0 + 2\delta_1 + 4\delta_2)x_{t-2} + \\ + (\delta_0 + 3\delta_1 + 9\delta_2)x_{t-3} + ... + (\delta_0 + q\delta_1 + q^2\delta_2)x_{t-q} + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Buradan isə,

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha_0 + \delta_0\left(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-q}\right) + \\
&+ \delta_1\left(x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \ldots + qx_{t-q}\right) + \\
&+ \delta_2\left(x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \ldots + q^2 x_{t-q}\right) + \varepsilon_t .
\end{aligned}
\tag{9.36}
$$

(9.36) -da $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ -nin vuruğundakı ifadələri yeni z_0, z_1, z_2 dəyişənləri ilə işarə etsək,

$$
y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_0 + \delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \varepsilon_t , \tag{9.37}
$$

burada

$$
z_0 = \sum_{j=0}^{q} x_{t-j},\ z_1 = \sum_{j=0}^{q} j \cdot x_{t-j},\ z_2 = \sum_{j=0}^{q} j^2 \cdot x_{t-j} .
$$

(9.37) reqressiya tənliyinin parametrləri ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilir. Sonra isə, $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ qiymətləndirilməsindən β_j qiymətləndirilməsinə keçilir: $\beta_j = \delta_0 + \delta_1 j + \delta_2 j^2$.

Ümumi halda, (9.34) düsturu üçün

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha_0 + \delta_0\left(x_t + x_{t-1} + \ldots + x_{t-q}\right) + \\
&+ \delta_1\left(x_{t-1} + 2x_{t-2} + 3x_{t-3} + \ldots + qx_{t-q}\right) + \\
&+ c_2\left(x_{t-1} + 4x_{t-2} + 9x_{t-3} + \ldots + q^2 x_{t-q}\right) + \ldots + \\
&+ c_r\left(x_{t-1} + 2^r x_{t-2} + 3^r x_{t-3} + \ldots + q^m x_{t-q}\right) + \varepsilon_t ,
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

və ya, yeni dəyişənlərlə

$$
y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_0 + \delta_1 z_1 + \ldots + \delta_r z_r + \varepsilon_t . \tag{9.38}
$$

Bu modeldə $z_1, \ldots, z_r$ dəyişənləri x_t dəyişənlərinin q sayda laq qiymətlərinin xətti kombinasiyalardır və onların çəki verilənləri polinomial paylanmaya tabedir.

Matris halında $\beta = H \cdot \delta$ kimi yazmaq olar ki, burada

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 2^r \\ 1 & 3 & 9 & \dots & 3^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q & q^2 & \dots & q^r \end{pmatrix}$$

β_j laq dəyişənlərinin çəki matrisi, δ isə, z dəyişəninin əmsallarından düzəldilmiş vektordur. Onda modeli belə yazmaq olar:

$$Y = XH\delta + \varepsilon = Z\delta + \varepsilon . \tag{9.40}$$

t - Styudent kriteriyası ilə β_j əmsallarının əhəmiyyərliliyi, modelin keyfiyyəti isə, sonuncu modelin R^2 determinasiya əmsalı ilə yoxlanılır.

§9.4.2. Həndəsi Laqlar modeli (Koyk üsulu)

Bu modeldə fərz olunur ki, x faktorunun y nəticə faktoruna təsiri q zaman anından sonra bitmir, hər bir zaman anında eyni faiz dərəcəsi ilə azalaraq sonsuzluğa qədər davam olunur. Model ümumi halda belə yazılır:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \\ &+ \beta_q x_{t-q} + \beta_q \lambda x_{t-q} + \beta_q \lambda^2 x_{t-q-2} + \dots + \varepsilon_t . \end{aligned} \tag{9.41}$$

Burada λ $(0 < \lambda < 1)$ parametri paylanmış laq əmsallarının eyni templə azalmasını göstərir və nəticə faktorunun səbəbiyyət faktorunun təsirinə olan reaksiyasının sürətilə tərs asılıdır: $\lambda = 0$ olması x-in dəyişməsinə y-in dərhal tam reaksiyasını göstərir.

Əgər (9.41) düsturunda fərz edilirsə ki, laq əmsallarının həndəsi silsilə ilə azalması q intervalından sonra deyil, dərhal baş verir, onda

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda x_{t-2} + ... + \varepsilon_t. \qquad (9.42)$$

Bu modelin əmsalları sonsuz həddli $(q = \infty)$ (9.1) modelinin əmsalları ilə uzlaşdırılır:

$$\beta_j = \beta_0 \lambda^j, \quad j = 0,1,2,.... \qquad (9.43)$$

Bu o deməkdir ki, (9.42)-nin $\alpha_0, \beta_0, \lambda$ parametrlərini qiymətləndirməklə, (9.1) modelinə keçmək olar.

(9.42) modelinin qiymətləndirilməsində Koyk çevirməsindən istifadə olunur. Onun tətbiqi üçün fərz edilir ki, bütün laq əmsalları eyni işarəlidir və həndəsi silsilə ilə azalır.

Çevirmənin tətbiqində aşağıdakı mərhələlərdə prosedurların yerinə yetirilməsi nəzərdə tutulur:

1) Model $(t-1)$ anı üçün qurulur:

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \beta_0 x_{t-1} + b_0 \lambda x_{t-2} + b_0 \lambda^2 x_{t-3} + ... + \varepsilon_{t-1}. \qquad (9.43)$$

2) (9.43) tənliyi λ-ya vurulmaqla (9.42)-dən çıxılır:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = (1-\lambda)\alpha_0 + \beta_0 x_t + (\varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}). \qquad (9.44)$$

Buradan isə, çevirmə ilə aşağıdakı münasibət alınır:

$$y_t = (1-\lambda)\alpha_0 + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \xi_t, \ \xi_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}. \qquad (9.45)$$

(9.45) tənliyinə Koyk çevirməli tənlik deyilir.

Koyk çevirməsi ilə praktiki olaraq, (9.41) tənliyindən (9.45) AR tənliyi alınır ki, sonuncunun α_0, β_0 və λ parametrlərini qiymətləndirmək lazımdır. Sonra isə, (9.43) düsturu ilə (9.41) tənliyinin bütün əmsalları hesablanır.

(9.45) modelində β_0 əmsalı x_t faktorunun qiyməti bir ölçü vahidi qədər dəyişdikdə y_t-nin qısamüddətli dəyişməsini xarakterizə edir. $(t+1)$ onunda y faktoru əlavə olaraq $\beta_0 \lambda$

qədər, $(t+2)$ anında bu əlavə dəyişiklik $\beta_0\lambda^2$, $(t+3)$ anında dəyişiklik $\beta_0\lambda^3$ və s. təşkil edir. Uyğun olaraq uzunmüddətli multiplikator $\beta = \beta_0 + \beta_0\lambda + \beta_0\lambda^2 + \beta_0\lambda^3 + ... = \dfrac{\beta_0}{1-\lambda}$ olur və y faktorunun dəyişməsinin uzunmüddətli multiplikatoru kimi interpretasiya olunur.

§9.5. Paylanmış laqlarla avtoreqressiya modellərinə çevrilə bilən bəzi tətbiqi dinamik modellər

Paylanmış laqlarla avtoreqressiya modellərinə gətirilə bilən müəyyən tətbiqi dinamik moddellərə baxaq. Onlardan ən geniş yayılmışları hissə-hissə uyğunlaşma, adaptiv gözləmə və səhvlərin korrektə olunması modelləridir.

§9.5.1 Hissə-hissə uyğunlaşma modeli

İqtisadiyyatda subyektlər dəyişən şəraitə həmişə dərhal uyğunlaşa bilmir. Bu uyğunlaşma tədricən reallaşır. Məsələn, ehtiyatların dəyişdirilməsinə, yeni texnologiyalara keçidə, uzun-müddətli müqavilələrin şərtlərinin dəyişdirilməsinə və s. müəyyən zaman müddəti zəruridir. Belə prosesləri hissə-hissə uyğunlaşma modeli ilə təsvir etmək olar. Nümunə olaraq belə misal göstərək: inflyasiya pul kütləsindən asılı olduğundan, pul kütləsini dəyişməklə inflyasiyanın müəyyən nəzərdə tutulan səviyyəsinə nail olmaq olar. Lakin reallıq müəyyən zaman müddəti üçün gecikir. Tutaq ki, y_t^s-lə y_t dəyişəninin azrzuolunan səviyyəsini, x_t-ilə isə y_t^s-i müəyyənləşdirən asılı olmayan faktoru işarə edək. Onda hissə-hissə uyğunlaşma modelini belə iki tənliklə təsvir etmək olar:

$$\begin{cases} y_t^s = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \varepsilon_t, \;\; \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right), \; t = 1,2,\ldots,n, \\ \operatorname{cov}\left(\varepsilon_t, \, \varepsilon_s\right) = 0, \; t \neq s, \\ y_t - y_{t-1} = \delta\left(y_t^s - y_{t-1}\right) + \xi_t, \;\; \xi_t \sim N\left(0, \sigma^2\right), \; t = 1,2,\ldots,n, \\ \operatorname{cov}\left(\xi_t, \, \xi_s\right) = 0, \; t \neq s. \end{cases} \tag{9.46}$$

Burada $\delta \in [0, 1]$ uyğunlaşma sürətidir. Əgər $\delta = 0$ olarsa, onda $y_t = y_{t-1}$, yəni y_t dəyişmir; əgər $\delta = 1$ olarsa, onda uyğunlaşma dərhal baş verir və bu halda dərhal $y_t = y_t^s$ olur.

Tutaq ki, y_t^s dəyişəni müşahidə olunan deyil. (9.46)-da müşahidə olunmayan dəyişəni yox etsək

$$y_t = \delta\alpha_0 + (1+\delta)y_{t-1} + \delta\beta_0 x_t + \xi_t + \delta\varepsilon_t \tag{9.47}$$

olar. Burada $\delta\alpha_0 = \alpha, \; (1+\delta) = \alpha_1, \delta\beta_0 = \beta_1$ parametrlərini ƏKKÜ-nun şərtləri daxilində qiymətləndirmək olar və əks çevirmələrlə ilkin modelin əmsalları qiymətləndirilir.

§ 9.5.2. Adaptiv gözləmə modeli

Müəyyən iqtisadi proseslə bağlı hər hansı qərarın qəbul edilməsi həmin prosesin inkişafı haqqında verilən proqnozlardan asılıdır. Belə ki, həmin qərarların təsiri ilə öyrənilən iqtisadi kəmiyyətin səviyyəsi nəinki onun cari qiymətindən, habelə onun gələcəkdə gözlənilən qiymətindən də asılıdır. Tətbiqi iqtisadiyyatda gözləmənin dinamik modelləşdirilməsi mürəkkəb məsələ hesab olunur. Bu, makroiqtisadi proseslərin modelləşdirilməsində özünü daha çox büruzə verir. Çünki, bu proseslərdə aktivlərə investisiyalar, yığım və istehlak gələcəyə münasibətdə gözləmələrlə xarakterizə olunur. Məsələn, əgər ölkədə yüksək səviyyəli inflyasiya gözlənilirsə, onda milli valyuta ilə münasibətdə daha möhkəm kurslu valyuta almaq lazımdır. Çünki, proseslərin inkişafı nəticəsində onun kursu qalxır.

Qeyd edək ki, makroiqtisadi göstəricilərin dinamikasında gözləmələrin birbaşa ölçülməsi mümkün olmadığından, makroiqtisadi modellər kifayət qədər dəqiq proqnoz almağa imkan vermir. Bu da makroiqtisadi tənzimlənmədə müəyyən analitik çətinliklər yaradır. Müəyyən hallarda bu çətinliklərin aradan qaldırılmasında adaptiv gözləmələr prosesindən istifadə olunur. Bu proses, hər bir zaman anında iqtisadi göstəricinin real qiyməti onun gözlənilən qiyməti ilə müqayisə edilərkən, gözləmələrin korrektə olunması prosedurudur. Əgər real qiymətlər çox olarsa, onda növbəti zaman anında və ya intervalında gözlənilən qiymət yüksələn tərəfə, əgər az olarsa, onda azalan tərəfə korrektə edilir.

Adaptiv gözləmə hipotezində fərz edilir ki, korrektənin ölçüsü iqtisadi kəmiyyətin real və gözlənilən qiymətləri arasındakı fərqə proporsionaldır, başqa sözlə, fərziyyə ardıcıl zaman anlarında müşahidə olunan qiymətlərlə əvvəlki andakı proqnoz qiymətləri arasındakı fərqin müəyyən proporsiyalarına uyğun şəkildə, gözləmələrin yenidən nəzərdən keçirilməsini nəzərdə tutur.

Tutaq ki, y_t göstəricisi müəyyən iqtisadi nəticə faktoru, x_t isə, ona təsir edən səbəbiyyət faktorudur. x^*_{t+1} -la t anında x_t dəyişənin $(t+1)$ anında gözlənilən qiymətini işarə edək. Onda y_t kəmiyyətinin qiymətini gözlənilən x^*_{t+1} qiyməti ilə belə ifadə etmək mükündür:

$$y_t = \alpha + \beta x^*_{t+1} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,n. \tag{9.48}$$

Qeyd etdiyimiz proporsiya asılılığını isə, belə yazmaq olar:

$$\left(x^*_{t+1} - x^*_t\right) = (1-\lambda)\left(x_t - x^*_t\right),\ 0 \le \lambda \le 1 \tag{9.49}$$

və ya,

$$x^*_{t+1} = \lambda x_t + (1-\lambda)x^*_t. \tag{9.50}$$

Bu düstur onu göstərir ki, növbəti zaman anında x_t dəyişəninin gözlənilən qiyməti cari dövrdə olan real və gözlənilən qiymətlərinin çəkili ortasıdır. λ kəmiyyəti nə qədər böyük olarsa, təsiredici iqtisadi faktorun gözlənilən qiyməti onun əvvəlki real qiymətinə o qədər tez adaptasiya olunur. Bu kəmiyyət gözləmələrin adaptasiya olunma sürətini xarakterizə edir. Əgər $\lambda = 0$ olarsa, onda gözləmələr reallığa adaptasiya olunmur və proqnozlar özünü doğrultmur (adaptasiya sürəti sıfırdır). Əgər $\lambda = 1$ olarsa, gözləmələr dərhal adaptasiya olunur. Bu tip modellər, məsələn, hər hansı istehsal şirkətinin t anında y_t məhsul buraxılışı həcminin müəyyən olunması məsələnin həllində ortaya çıxır. Bu məsələdə şirkət istehsal həcmi haqda qərarı o zaman verməlidir ki, bu məhsulun $(t+1)$ anında hansı qiymətə satılacağı x^*_{t+1} pul miqdarı məlum olsun. Burada məhsulun gözlənilən x^*_{t+1} qiyməti t periodunda müşahidə olunan x_t qiymətinin və x^*_t gözlənilən qiymətinin çəkili ortasıdır.

(9.50) düsturundan iterasiyalar almaqla və nəticələri (9.48) -də yerinə qoymaqla alırıq:

$$y_t = \alpha + \beta(1-\lambda)\left(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \ldots\right) + \varepsilon_t, \; t = 1,2,\ldots,n. \quad (9.51)$$

Alınan tənlik isə, həndəsi laqlarla olan modeldir ki, onun parametrləri tənliyə qeyri-xətti daxil olduğundan, onların qiymətləndirilməsi müəyyən çətinliklər törədir. Onların aradan qaldırılması üçün bu tənlikdən onun y_{t-1} anındakı ifadəsini λ-ya vurmaqla alınan yeni ayrılışını çıxmaqla yeni tənlik alınır ki, burada y_t-nin ayrılışında y_{t-1} qiyməti və $u_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$ qalıq həddi iştirak edir və parametrlər xəttiləşir. Burada qalıq hədd klassik xətti reqressiya modelinin şərtlərini ödəyirsə, onda ƏKKÜ-nu tətbiq etmək olar. y_{t-1}-dəyişəni üçün x_{t-1} instrumental dəyişənini qəbul etməklə instrumental dəyişənlər üsulunu və ya MDOÜ-nu tətbiq etmək də mümkündür.

§9.5.3. Səhvlərin korreksiyası modeli

Dinamik reqressiya modellərində qısamüddətli və uzunmüddətli dinamikaların fərqləndirilməsi mühümdür. Bu fərqi səhvlərin korrektə olunması modeli çərçivəsində təhlil etmək olar. Uzunmüddətli aspektdə

$$y_t = \alpha + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,\ldots,n. \tag{9.52}$$

modelinə baxaq. Tutaq ki, x_t faktoru və ε_t səhvləri stasionar proseslərdir. Onda $|\alpha_1| < 1$ olduqda öyrənilən y_t dəyişəni də, stasionardır. Hər iki tərəfdən riyazi gözləmə alaq:

$$\bar{y} = My_t = \alpha + \alpha_1 \bar{y} + \beta_0 \bar{x} + \beta_1 \bar{x}\,. \tag{9.53}$$

Buradan isə,

$$\bar{y} = \frac{\alpha}{1-\alpha_1} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1}\bar{x} = \delta + \lambda \bar{x} \tag{9.54}$$

tənliyi alınır ki, o iqtisadi prosesin uzunmüddətli stasionar vəziyyətini təsvir edir. Burada $\lambda = \dfrac{\beta_0 + \beta_1}{1-\lambda_1}$ əmsalı x dəyişəninin y dəyişəninə uzunmüddətli təsir əmsalıdır və uzunmüddətli multiplikatorla üst-üstə düşür.

(9.52) modelini elə çevirmək olar ki, yeni alınan model iqtisadi sistemin qısamüddətli dinamikasını təsvir etsin. Bu halda model səhvlərin korrektə olunması modeli adlanır:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \alpha - (1-\alpha_1) y_{t-1} + \beta_0 \Delta x_t + (\beta_0 + \beta_1) x_{t-1} + \varepsilon_t = \\ &= \beta_0 \Delta x_t - (1-\alpha_1)\big(y_{t-1} - (\delta + \lambda x_{t-1})\big) + \varepsilon_t.\end{aligned} \tag{9.55}$$

Burada nəzərdə tutulur ki, əgər əvvəlki zaman periodunda y_t dəyişəni özünün $\delta + \lambda \bar{x}$ uzunmüddətli qiymətindən meyletmişdirsə, onda $y_{t-1} - (\delta + \lambda x_{t-1})$ elementi dinamikanı lazımı istiqamətdə korrektə edir. Bunun baş verməsi üçün $|\alpha_1| < 1$ şərtinin ödənilməsi zəruri şərtdir.

Tutaq ki, (9.52) modelinin (y^*, x^*) stasionar vəziyyəti mövcuddur. Bunun üçün $|\alpha_1| < 1$ şərti ödənilməlidir. Tənliyi stasionar vəziyyətdə yazsaq, alarıq:

$$(1-\alpha_1)y^* = \alpha + (\beta_0 + \beta_1)x^* \tag{9.56}$$

və ya

$$y^* = \frac{\alpha}{1-\alpha_1} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1}x^*. \tag{9.57}$$

Onda (9.55) tənliyini belə xarakterizə etmək olar: y faktorunun cari anda dəyişməsi iki komponentdən ibarətdir; onlardan birincisi x faktorunun cari dəyişməsinə proporsionaldır; ikincisi y faktorunun əvvəlki zaman anında (9.57) düsturu ilə təyin olunan tarazlıq vəziyyətindən meyletməsinin qismən korreksiyasıdır. (9.55) tənliyinin əmsalları ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilə bilər.

§9.6. Səbəbiyyət-nəticə asılılığının yoxlanılmasında Qreyncer testi

İqtisadi məslələrin həllində əksər hallarda iqtisadi göstəricilər arasında səbəbiyyət-nəticə asılılığının varlığının yoxlanılması zərurəti yaranır. Bu asılılığın öyrənilməsində Qreyncer testindən istifadə edilir ki, onun mahiyyəti aşağıdakı kimidir:

Əgər x faktoru y faktoruna təsir edirsə, onda x-in dəyişməsi y dəyişmələrindən əvvəl olmalıdır. Başqa sözlə, bu iki şərt ödənilməlidir:

1) x faktoru y-in proqnozlaşdırılmasına öz töhvəsini verməlidir;

2) y dəyişəni x dəyişəninin proqnozlaşdırılmasına əhəmiyyətli töhvə olmamalıdır.

x faktorunun y faktoruna təsir etməməsi haqda H_0 hipotezini test vasitəsilə yoxlamaq üçün y-in reqressiyasını onun özünün və x faktorunun laq qiymətlərinə nəzərən qiymətləndirmək lazımdır:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t. \qquad (9.58)$$

Bu model mənada H_0 hipotezi belə yazılır: $H_0 : \beta_1 = ... = \beta_p = 0$. Onun yoxlanılmasında çoxdəyişənli reqressiya üçün adi F-testindən istifadə olunur. y-in x-ə təsir etməməsi haqda hipotezin yoxlanılması da analoji testlə yoxlanılır. Bunun üçün (9.58) -də x-lə y-in yerini dəyişmək lazımdır. x-in y-ə təsir etməsi nəticəsinə gəlmək üçün x-in y-ə təsir etməməsi haqda hipotez rədd edilməli, y-in x-ə təsir etməməsi haqda olan hipotez qəbul olunmalıdır.

Qeyd edək ki, x-in y-ə təsir etməsi x və y arasında səbəbiyyət-nəticə asılılığının mövcudluğunu göstərmir, ancaq onu xarakterizə edir ki, x-in əvvəlki qiymətləri y-in sonrakı qiymətlərini izah edir, yəni səbəbiyyət-nəticə əlaqəsinin mümkünlüyünü ifadə edir. Əgər x-in y-ə təsir etməməsi haqda hipotez rədd olunmursa, bu o deməkdir ki, x faktoru y faktoru üçün səbəbiyyət faktoru deyil. p parametrinin seçilməsi testin nəticəsinə, ümumiyyətlə, təsir edə bilər. Ona görə də, bir neçə fərqli p üçün test edib müəyyənləşdirmək lazımdır ki, testin nəticəsi nə dərəcədə p-nin seçilməsinə həssasdır.

§9.7. Stasionar zaman sıralarının harmonik analizi

İqtisadi proseslərin dinamikasının öyrənilməsində mövsümi rəqslərin tədqiqi və modelləşdirilməsi mühüm xarakteristikalardır. §2.1-də qeyd edildiyi kimi, əgər iqtisadi göstəricinin dəyişməsi periodik xarakterlidirsə, onda bu dəyişmələrə periodik Furye funksiyası uyğun gəlir və göstəricilərin riyazi funksiyalarla approksimasiyası olaraq (2.8)-düsturunun əmsallarını ƏKKÜ-ilə hesablamaq olar (bax.

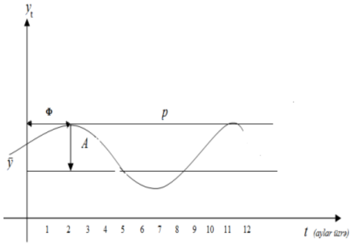
[4, səh.24-27]). Məsələn, mövsümi rəqslər periodu bir olan sinusoidal funksiyalarla təsvir olunursa, onda bu funksiyaların triqonometrik Furye sırasına ayrılışı harmonik analiz adını daşıyır və mövsümi rəqslərin analitik forması olaraq:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right), \ t = 1,2,\ldots,n \qquad (9.59)$$

triqonometrik çoxhədlisindən istifadə etmək olar. Burada k- Furye sırasının harmonikasının sıra nömrəsi; m -harmonikaların sayı; t -zaman anıdır və $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\cdot 2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)2\pi}{n}$ (aylıq verilənlər üçün $n = 12$) qiymətlərini alır. a_0, a_k, b_k əmsalları ƏKKÜ-ilə hesablanır (praktikada əksər hallarda Furye sırası ilə mövsümi proseslərin verilənlərinin hamarlanmasında ən çoxu 4 harmonikadan istifadə olunur). Sonra isə, zaman sırasının periodik dəyişməsinin hansı harmonikada daha yaxşı təsvir olunması müəyyənləşdirilir. Harmonikaların sayının artması approksi-masiya dəqiqliyinin artmasını yaxşılaşdırır, lakin bu halda $\sigma^2_{\hat{y}_t} = \frac{\sum\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n-p}$ (burada p -ədədi (9.59) -da naməlum parametrlərin sayıdır) despersiyası artır. Ona görə də zaman sıraları halında klassik Furye analizi yanaşmalarını (bax. [18], [46]) təsadüfi tərkibli zaman sırası modellərinə modifikasiya etmək lazımdır. Onun qurulması zaman sırasının dinamikasında tendensiyasının mövcud olub-olmamasından asılıdır. Tendensiya mövcud olmadıqda, yəni stasionar dinamik sırada, Furye sırası qurulması metodikası dinamik sıranın bilavasitə səviyyələrinə tətbiq edilir. Əgər sıranın dinamikasında tendensiya müşahidə olunursa, onda Furye sırası tendensiyadan meyletmələrə tətbiq olunur. Bu fərqlər, həm də proqnozlaşdırmada nəzərə alınır.

Stasionar zaman sırasında proqnoz Furye sırasına nəzərən verilir. Tendensiyalı zaman sırasında isə, ümumi proqnoz verilir. Belə ki, əvvəlcə proqnoz tendensiyaya nəzərən verilir, sonra isə, trenddən meyletmələrin Furye sırasına görə proqnoz tendensiya proqnozuna əlavə olunur. Biz burada stasionar zaman sıralarının Furye analizinə baxacağıq. Qeyri-stasionar zaman sırasının Furye analizi isə, sonrakı fəsildə şərh olunacaq.

Tutaq ki, stasionar zaman sırasının səviyyələri onun $\bar{y}_t$ orta qiyməti ətrafında dəyişir, onun rəqsləri isə təkrarlanır. Qrafiki olaraq belə təsvirə baxaq:



Qrafikdə zaman sırasının səviyyələrinin təkrarlanmağa başlaması intervalı p ilə işarə olunur. Qrafikdə onun qiyməti 10 aydır (12-2) və yuxarı pik nöqtəsi ilə aşağı pik nöqtəsi arasındakı məsafəni göstərir. Əgər zaman sırası p peiodludursa, onda o, həm də $2p, 3p$ və s. periodludur. Ümumi halda, stasionar periodik zaman sırası üçün $y_t = y_t + cp, \ (c = 1,2,...)$ bərabərliyi doğrudur.

Tərif 9.12. *Stasionar periodik zaman sırasında periodun tərsinə dinamik sıranın tezliyi deyilir və* $f = \dfrac{1}{p}$ *ilə işarə olunur.*

Tezlik zaman vahidində tsiklik təkrarlanma sayını göstərir (şəkildə $f = \dfrac{1}{10}$ bir ayda).

Tərif 9.13. *Stasionar periodik zaman sırasında orta səviyyədən pik nöqtəsinə qədər meyletmə zaman sırasının amplitudu adlanır.* (şəkildə A məsafəsi).

Tərif 9.14. *Stasionar periodik zaman sırasında başlanğıc andan 1-ci pik nöqtəsinə qədər olan məsafəyə onun fazası deyilir.*

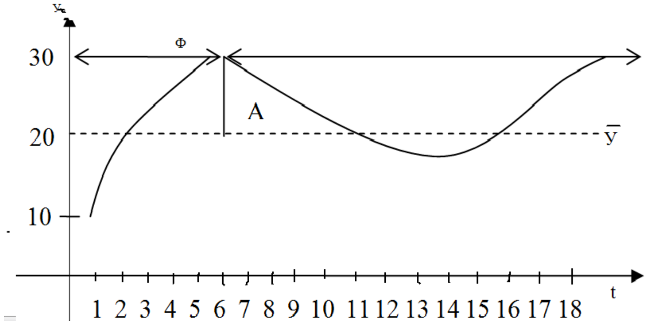
Stasionar periodik zaman sırasını 4 parametrlə xarakterizə etmək olar: period (*p*) və ya tezlik (*f*), amplituda (*A*); faza (φ); orta qiymət ($\bar{y}$);

Qrafiki təsvir olunmuş zaman sırasını belə analitik ayrılışla ifadə etmək olar:

$$y_t = \bar{y} + A\cos w(t-\varphi), \tag{9.60}$$

burada w-bucaq tezliyidir və zaman vahidində radianlarla ölçülür və $w = 2\pi f$; $0 \le w \le 2\pi$.

Tutaq ki, stasionar periodik zaman sırası belə qrafiki təsvirlədir:



Bu zaman sırasında $\bar{y} = 20$; $p = 12$ ay; $f = \dfrac{1}{12}$; $A = y_{max} - \bar{y} =$

$= 30 - 20 = 10$; $\varphi = 6$ ay; $w = 2\pi f = 2\pi \dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi}{6}$.

(9.60) düsturundan $t = 6$ ay üçün alırıq ki,

$$y_t = 20 + 10\cos\frac{\pi}{6}(6-6) = 20 + 10\cos 0 = 20 + 10\cdot 1 = 30;$$

$t = 12$ ay üçün

$$y_t = 20 + 10\cos\frac{\pi}{6}(12-6) = 20 + 10\cos\pi = 20 + 10\cdot(-1) = 10;$$

$t = 18$ ay üçün

$$y_t = 20 + 10\cos\frac{\pi}{6}(18-6) = 20 + 10\cos 2\pi = 20 + 10\cdot 1 = 30.$$

Tərif 9.15. (9.60) *düsturuna stasionar periodik zaman sırasının harmonik göstərilişi deyilir.*

(9.60) düsturu əksər hallarda sinus və kosinususlarla belə yzılır:

$$y_t = \bar{y} + a\cos wt + b\sin wt \qquad (9.61)$$

burada $a = A\cos\phi,\ b = A\sin\phi\ \left(a^2 + b^2 = 1\right).$

Harmonikanın parametrləri ilə rəqslərin amplitudaları arasında qarşılıqlı əlaqə mövcuddur: $a^2 + b^2 = A.$ Harmonikanın parametrləri sıranın fazası ilə də, əlaqəlidir:

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} \ \text{ və ya } \ arctg\,\frac{b}{a} = \varphi.$$

Periodik rəqsli stasionar zaman sıraları nəzəri olaraq orta qiymətlə sinusoid və kosinusoid sıralarının cəmi şəklində göstərilə bilər:

$$y_t = \bar{y} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos w_i t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin w_i t\,. \qquad (9.62)$$

İqtisadi göstəricilərin dinamikası sonlu N uzunluqlu olduğundan, (9.62) Furye sırası

$$y_t = \bar{y} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos w_i t + \sum_{i=1}^{n} b_i \sin w_i t \qquad (9.63)$$

halına düçür. Burada $n = \frac{N}{2}$.

$\bar{y}$ parametrini a_0-la əvəz etməklə Furye sırasını belə yazmaq olar:

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos w_i t + \sum_{i=1}^{n} b_i \sin w_i t\,. \qquad (9.64)$$

Bu tənliyin parametrlərinin qiymətləndirilməsi ƏKKÜ-ilə reallaşdırılır. Bir və iki harmonikadan ibarət sıranın parametrlərinin tapılmasında ƏKKÜ-nun tətbiqi ilə alınan normal tənliklər sistemi və onların həlləri [4, səh. 24-26]-da göstərilmişdir.

Ümumiyyətlə, i-sayda harmonikaya malik stasionar periodik zaman sırasının parametrlərinin statsitik qiymətləndirilməsində

$$a_i = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_t \cos w_i t_k, \quad b_i = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_t \sin w_i t_k \qquad (9.65)$$

düsturlarından istifadə olunur.

Qeyd edək ki, amplitudların seçimi qiymətləndirilməsi avtokovariasiya funksiyasının qiymətlərindən də, almaq olar. Bu qiymətləndirmənin keyfiyyətini yüksəldə bilər.

9-cu fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

9.1. Dinamik ekonometrik modellərin ümumi xrakteristikalarını səciyyələndirin.

9.2. Zaman sıralarının avtoreqressiya (AR(p)) və sürüşkən orta (SO(q)) modellərinin stasionarlıq şərtləri hansılardır?

9.3. Reqressiya əmsalları Yul-Uoker sistemindən necə müəy-yənləşdirilir?

9.4. Hansı şərtlər ödənildikdə qeyri-bircins fərq tənliklərinin həlli mövcuddur?

9.5. Stasionar stoxastik proses modelinin identifikasiya olun-masında avtokorrelyasiya funksiyasından necə istifadə olunur?

9.6. Stasionar proseslər hansı parametrlərlə xarakterizə olunur?

9.7. Paylanmış laq modellərinin mahiyyətini izah edin. Modelin parametrləri necə interpretasiya olunur?

9.8. Avtoreqressiya modelinin parametrləri necə interpretasiya olunur?

9.9. Koyk üsulunun mahiyyətini izah edin.

9.10. Almon üsulunun mahiyyətini izah edin.

9.11. Avtoreqressiya modellərinin parametrləri necə qiymətləndirilir?

9.12. Hissə-hissə uyğunlaşma modelinin mahiyyətini izah edin və modelə aid iqtisadi nümunə göstərin.

9.13. Adaptiv gözləmə modelinin mahiyyətini izah edin və modelə aid iqtisadi nümunə göstərin.

9.14. Səbəbiyyət-nəticə asılılığının yoxlanılmasında Qreyncer testinin mahiyyəti necədir?

9.15. Stasionar zaman sıralarının harmonik analizi dedikdə nə başa düşürsünüz? Zaman sırasının periodu, amplitudu, fazası necə müəyyənləşdirilir?
9.16. Paylanmış laq modelləri ilə paylanmış laq avtoreqressiya modellərinin prinsipial fərqi nədir?
9.17. Uzunmüddətli multiplikator və uzunmüddətli elastikliklik anlayışları necə uyğunlaşdırılır?
9.18. Hissə-hissə uyğunlaşma modeli ilə adaptiv gözləmə modeli arasında oxşarlıq necə ifadə olunur?
9.19. Birinci tərtib fərq reqressiya modelləri ilə müqayisədə səhvlərin korreksiyası modelinin hansı üstünlükləri vardır?
9.20. Səhvlərin korreksiyası modelində prosesin uzunmüddətli və qısamüddətli dinamikası necə əlaqələndirilir?
9.21. Akayke, Şvarts, Hennan-Kuin informasiya kriteriyaları avto-reqressiyanın strukturnun müəyyənləşdirilməsində necə istifadə olunur.
9.22. Hansı hallarda paylanmış laq modellərinin parametrləri ƏKKÜ- ilə qiymətləndirilə bilər?

Testlər

9.1. $y_t = 4,375 + 0,23 y_{t-1} - 0,125 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1,\dots,n$
avtoreqressiya modelinə uyğun xarakteristik tənliyin köklərini tapın.

a) $1 \pm i\sqrt{7}$;

b) ± 1;

c) $e^{1\pm i\sqrt{7}}$;

d) $\pm i\sqrt{7}$.

9.2. $y_t = 4,375 + 0,23 y_{t-1} - 0,125 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1,\dots,n$
avtoreqressiya modeli

a) stasionardır;
b) qeyri-stasionardır;
c) paylanmış laq modelidir;
d) 2-ci tərtib sürüşkən orta modeldir.

9.3. $y_t = 3 + 0,8 y_{t-1} + \varepsilon_t$ prosesinin xarakteristik tənliyi hansıdır?

a) $1-0{,}8\theta=0$;

b) $-2+0{,}8\theta=0$;

c) $3+0{,}8\theta=0$;

d) $3\theta+0{,}8=0$.

9.4. Yul-Uoker sistemi ilə
a) avtoreqressiya funksiyaları verildikdə modelin parametrlərinin qiymətləndirmək mümkündür;
b) modelin stasionar olmasını yoxlamaq olar;
c) modelin avtoreqressiya tərtibini müəyyənləşdirmək olar;
d) sıranın ardıcıl səviyyələri arasında avtoreqressiyanın olmasını müəyyənləşdirmək olar.

9.5. Tutaq ki, $y_t=\alpha_1 y_{t-1}+\varepsilon_t$ modeli verilib. Burada ε_t ağ küydür və y_{t-1}-lə korrelə olunmur. Bu proses hansı halda stasionardır?

a) $|\alpha_1|<1$;

b) $|\alpha_1|=1$;

c) $|\alpha_1|>1$;

d) $-\infty<\alpha_1<+\infty$;

9.6. $y_t=\alpha_1 y_{t-1}+\alpha_2 y_{t-2}+\varepsilon_t$ (burada ε_t ağ küydür) prosesinin stasionar olması üçün θ_1 və θ_2 xarakteristik köklər hansı zəruri şərti ödəməlidir?
a) modulca vahiddən böyük olmalıdır;
b) modulca vahiddə bərabər olmalıdır;
c) hər ikisi sıfır olmalıdır;
d) $\alpha_1>0$, $\alpha_2<0$ olmalıdır.

9.7. Avtoreqressiya modelində Akayke, Şvarts, Hennan-Kuin informasiya kriteriyalarının tətbiqi zamanı hansı modellərə üstünlük verilir?
a) kriteriyanın qiyməti ən kiçik olan modelə;

b) kriteriyanın qiyməti ən böyük olan modelə;
c) bütün kriteriyaların qiyməti bərabər olan modelə;
d) kriteriyaların qiyməti sıfır olan modelə;

9.8. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\alpha_1| < 1, \; t = 1,2,...,n$ (burada ε_t - ağ küydür) modelində Yul -Uoker sistemindən α_1 necə qiymətləndirilir?
a) $\hat{a}_1 = r_1$ (burada r_1 məlum avtoreqressiya əmsalıdır);
b) $\hat{a}_1 = \bar{y}_t$;
c) $\hat{a}_1 = 1 - r_1$;
d) $\hat{a}_1 = \sigma_\varepsilon^2$.

9.9. $y_t = 100 + 70x_t + 25x_{t-1} + 5x_{t-2}$ modelində qısa və uzunmüddətli multiplikatoru tapın.
a) 70 və 100; b) 70 və 25;
c) 100 və 100; d) 100 və 5.

9.10. $y_t = 200 + 50x_t + 0{,}6y_{t-1}$ modelində qısa və uzunmüddətli multiplikatoru tapın.
a) 50 və 125; b) 50 və 60;
c) 200 və 50; d) 50 və 60.

9.11. Stasionar periodik zaman sırasını hansı parametrlərlə vermək olar?
a) period, tezlik, amplituda, faza, orta qiymət;
b) orta qiymət, dispersiya;
c) period, orta qiymət;
d) periodoqram, amplitud.

9.12. Paylanmış laq modellərinə Koyk çevirməsini tətbiq etdikdən sonra alınan modelin parametrlərinin qiymətləndirilməsində hansı ehtimal hipotezlər pozulur?
a) təsadüfi tərkiblər y_{t-1} dəyişəni ilə korrelə olunduğundan, ƏKKÜ-ilə qiymətləndirmə tutarsız və meyllidir;
b) təsadüfi tərkiblər ağ küy əmələ gətirir və heç bir ehtimal hipotezi pozulmur;

c) təsadüfi tərkiblərin dispersiyası qeyri-bircins olur, qiymətləndirmənin effektivliyi pozulur;
d) təsadüfi tərkiblər avtoreqressiya prosesini əmələ gətirir və ona DW testi tətbiq olunmur.

9.13. AR(1) modeli üçün y_t ilə y_{t-1} arasındakı XAKF-nin qiyməti
a) sıfra bərabərdir;
b) 2-yə bərabərdir;
c) y_t və y_{t-1}-nin əmsalları fərqinə bərabərdir;
d) y_t, y_{t-1}, y_{t-2}-nin əmsalları fərqinə bərabərdir.

9.14. $y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,\ldots,n$ modelində paylanmış laq funksiyası necə təyin olunur?

a) $w_j = \dfrac{\beta_j}{\sum\limits_{i=1}^{q} \beta_i},\ \ j < q;\ \ \sum\limits_{j=1}^{q} w_j = 1;$

b) $w_j = \dfrac{\beta_j}{\prod\limits_{i=0}^{q} \beta_i},\ \ j < q;$

c) $w_j = \beta_j;$

d) $w_j = \beta_0 + \ldots + \beta_j$.

9.15. $y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,\ldots,n$ modelində $\beta_i = \gamma_0 + \gamma_0 i + \ldots + \gamma_r i^r,\quad r < q$ olduqda model
a) Almon modeli adlanır;
b) Koyk modeli adlanır;
c) həndəsi paylanmış laq modeli adlanır;
d) ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilə bilməz.

9.16. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,\quad |\alpha_1| < 1,\ t = 1,2,\ldots,n$ (ε_t - ağ küydür) modelində y_t-nin dispersiyasını tapın.

a) $D(y_t)=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha_1^2}$;
b) $D(y_t)=t\sigma_\varepsilon^2$;
c) $D(y_t)=0$;
d) $D(y_t)=\sigma_\varepsilon^2$.

9.17. $y_t=\alpha_1 y_{t-1}+\varepsilon_t, |\alpha_1|<1,\ t=1,2,...,n$ (ε_t - ağ küydür) modelində $\hat{a}_1$ qiymətləndirilməsi hansı düsturla tapılır?

a) $\hat{a}_1=\alpha_1+\dfrac{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2}$;

b) $\hat{a}_1=\dfrac{\alpha_1\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2}$;

c) $\hat{a}_1=\dfrac{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}}$;

d) $\hat{a}_1=\dfrac{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^2\varepsilon_t}{\sum_{t=1}^{n} y_{t-1}}$.

9.18. $y_t^*=\alpha_0+\beta_1 x_t+\varepsilon_t,\quad t=1,2,...,n$
$(y_t-y_{t-1})=\delta(y_t^*-y_{t-1}),\quad 0<\delta<1$ modeli laq dəyişənli hansı modellər sinfinə aiddir?
a) tədricən uyğunlaşma;
b) adaptiv gözləmə;
c) səhvlərin korreksiyası;
d) AR(1).

9.19. t anında x_t dəyişəninin gözlənilən qiyməti x^*_{t+1} olduqda $y_t = \alpha_0 + \beta_2 x^*_{t+1} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,n$ modelində adaptiv gözləmə hipotezi hansıdır:
a) $\left(x^*_{t+1} - x^*_t\right) = (1-\lambda)\left(x_t - x^*_t\right),\ 0 \le \lambda < 1;$
b) $\left(x^*_{t+1} - x^*_t\right) = \lambda\left(x_t - x^*_t\right),\ \lambda > 1;$
c) $x^*_{t+1} = \lambda x^*_t,\ \lambda > 1;$
d) $x^*_{t+1} = x^*_t.$

9.20. $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,n$ səhvlərin korreksiyası modelinin stasionar vəziyyəti hansı düsturla müəyyənləşdirilir.
a) $y^* = \dfrac{\alpha}{1-\alpha_1} + \dfrac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1} x^*;$
b) $|\alpha_1| < 1;$
c) $|\beta_0| < 1;\ |\beta_1| < 1;$
d) $y^* = \dfrac{1-\alpha_1}{\beta_0 + \beta_1}.$

Çalışmalar

Məsələ 9.1. $y_t = 0{,}2 y_{t-1} + \varepsilon_t$ (burada ε_t - ağ küydür) fərq tənliyini həll edin.

Cavab: $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} (0{,}2)^t \varepsilon_{t-i}$.

Məsələ 9.2. $y_t = 5 + \varepsilon_t - 0{,}75\varepsilon_{t-1} + 0{,}125\varepsilon_{t-2}$ (burada ε_t - ağ küydür) modelində ρ_1 və ρ_2 avtoreqressiya əmsallarını hesablayın.

Cavab: $\rho_1 = -0{,}535;\quad \rho_2 = 0{,}079.$

Məsələ 9.3. $y_t = 1{,}2 y_{t-1} - 0{,}36 y_{t-2} + \varepsilon_t$ (burada ε_t - ağ küydür) modelinin stasionarlığını araşdırın.

Cavab: stasionardır.

Məsələ 9.4. $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ (burada ε_t - ağ küydür) modelini fərq operatorunu tətbiq etməklə səhvlərin korreksiyası modelinə çevirin.

Cavab: $\Delta y_t = \alpha_0 + \beta_0 \Delta x_t - (1-\alpha_1)\left(y_{t-1} - \dfrac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1} x_{t-1} \right) + \varepsilon_t,$

$\alpha_1 < 1, \quad \beta_0 + \beta_1 \neq 0.$

Məsələ 9.5. Göstərin ki, $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ (burada ε_t - ağ küydür) stasionar prosesinin avtokorrelyasiya funksiyası $A(\theta) = 1 - \alpha_1\theta - \alpha_2\theta^2$ xarakteristik funksiyasının kökləri həqiqi olduqda eksponensial azalır.

Məsələ 9.6. Göstərin ki, $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ (burada ε_t - ağ küydür) stasionar prosesinin avtokorrelyasiya funksiyası $A(\theta) = 1 - \alpha_1\theta - \alpha_2\theta^2$ xarakteristik funksiyasının kökləri kompleks olduqda eksponensial azalan amplitudlu sinusoidal qanunla dəyişir

Məsələ 9.7.

t	1	2	3	4	5	6
x_t	1412,7	1978,9	2292	2514	4632	7116,6
y_{t-1}	-	1016,6	1435,9	1776,1	2003,8	3265,7
y_t	1016,6	1435,9	1776,1	2003,8	3265,7	4476,9
t	7	8	9	10	11	12
x_t	8819,9	10627,5	12886,1	16679,9	21079,5	26009,7
y_{t-1}	4476,9	5886,9	7443,2	9024,8	11401,4	14363,5
y_t	5886,9	7443,2	9024,8	11401,4	14363,5	17742,6

şərti cədvəl verilənlərinə görə $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \varepsilon_t$ avtoreqressiya modelində $\hat{y}_{t-1}$ instrumental dəyişənini

müəyyənləşdirmək üçün $\hat{y}_{t-1} = \delta_0 + \delta_1 x_{t-1} + \xi_t$ reqressiya tənliyinin əmsallarını tapın və ümumi reqressiya tənliyini qurun.
Cavab: $\hat{y}_{t-1} = 104{,}31 + 0{,}677 x_{t-1}$;
$y_t = 139{,}80 + 0{,}496 x_t + 0{,}329 y_{t-1}$.

Məsələ 9.8. 9.7-ci tapşırığın şərtlərinə əsasən qurulmuş modelin $\alpha = 0{,}05$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində əhəmiyyətliliyini yoxlayın, parametrlərin interpretasiyasını verin, qalıqların avtokorrelyasiyasını yoxlayın.
Cavab: Qurulmuş tənlik $\alpha = 0{,}05$ səviyyəsində əhəmiyyətlidir; bu səviyyədə $\hat{\alpha}_0 = 139{,}80$ parametri əhəmiyyətsiz, $\hat{\alpha}_1 = 0{,}329$ və $\hat{\beta}_0 = 0{,}496$ parametrləri əhəmiyyətlidir; modelin qısamüddətli multiplikatoru 0,496, uzunmüddətli multiplikatoru 0,739-dur; modelin qalıqlarında avtokorrelyasiya mövcud deyil.

Məsələ 9.9. $y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t + 0{,}5\varepsilon_{t-1} + 0{,}5\varepsilon_{t-2}$ SO(2) modelinin korrelyasiya funksiyasını hesablayın.

Cavab: $\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0{,}5, & k = 1, \\ 0{,}333, & k = 2, \\ 0, & k \geq 3. \end{cases}$

Məsələ 9.10. $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 (y_{t-1} - \alpha_0) + \varepsilon_t$, (burada ε_t təsadüfi prosesdir) modelinin avtokorrelyasiya funksiyasını hesablayın və stasionarlıq şərtini müəyyənləşdirin.
Cavab: $\rho(k) = \alpha_1^{|k|}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, stasionarlıq şərti $|\alpha_1| < 1$ bərabərsizliyidir.

Məsələ 9.11. $y_t = 0{,}5 y_{t-1} + 0{,}7 x_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, 2, \ldots, n$ modelini səhvlərin korrelyasiyası modelinə çevirin.

Cavab: $\Delta y_t = -0{,}5\left(y_{t-1} - \dfrac{0{,}7}{0{,}5}x_{t-1}\right) + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\ldots,n.$

Məsələ 9.12. $y_t = -\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ (burada ε_t təsadüfi komponenti y_{t-1} və y_{t-2}-dən asılı deyil) modelindən ρ_1 və ρ_2 avtoreqressiya əmsallarını hesablayın.

Cavab: $\rho_1 = -\dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_2}; \quad \rho_2 = -\alpha_2 + \dfrac{\alpha_1^2}{1+\alpha_2}.$

Məsələ 9.13. Məhsula tələbat $Q_t^d = 9 - P_t$, təklif $Q_t^s = 2P_t$ düsturları ilə verilib və sıfırıncı periodda $P_0 = 2{,}5$ olduqda tarazlıq mövcuddur. Adaptasiya əmsalı $0{,}25$ olduqda adaptiv gözləmə halında t_3 periodunda məhsulun qiyməti nə qədər olar.

Cavab: $P_3 = 3.$

FƏSİL X

QEYRİ-STASİONAR ZAMAN SIRALARI VƏ ONLARIN İNTEQRASİYA OLUNMASI

§10.1. Qeyri-stasionar zaman sıraları və onların növləri

Əksər maliyyə-iqtisadi zaman sıralarının riyazi gözləmələri və dispersiyaları, avtokovariasiya və avtokorrelyasiya funksiyaları zamana nəzərən dəyişdiyindən, onlar qeyri-stasionar olur. Qeyri-stasionar sıraların ekonometrik modelləşdirilməsində orta qiymətə və dispersiyaya nəzərən qeyri-stasionarlığı fərqləndirmək lazımdır.

Tərif 10.1. *Zaman sırası o halda orta qiymətə nəzərən qeyri-stasionar adlanır ki, onun riyazi gözləməsi müəyyən determinik və ya ehtimal qanunauyğunluğu ilə zamana nəzərən dəyişsin. Bu halda deyirlər ki, zaman sırası determinik və ya stoxasyik trendi özündə saxlayır.*

Orta qiymətə görə qeyri-stasionar zaman sıralarının təsvirində əsasən iki sinif modeldən istifadə olunur:

1) Determinik trendli modellər (trendi zamanın determinik funksiyası olan modellər);
2) İnteqrasiya olunan zaman sıraları modelləri.

Birinci növ modellər haqda §8.3-də təhlillər aparılmışdı. Belə modellər ciddi artan və ya ciddi azalan trendli və ya ümumi trend fonunda rəqsli ola bilər ki, onlar ÜDM göstəriciləri, inflyasiya və faiz dərəcələri üçün xarakteristikdir. Müəyyən qeyri-stasionar zaman sıraları təsadüfi dolaşma ilə xarakterizə olunur. Belə sıralar zamana nəzərən arta və ya azala bilər və uzunmüddətli periodda orta qiyməti dəyişə bilər. Məsələn, valyuta mübadilə kursunu təsvir edən sıralar bu sinif zaman sıralarına daxildir. Zaman sıralarının qeyri-stasionarlığını doğuran səbəblərdən biri də ani (gözlənilməz) şokların zaman sırasına olan inersiyalılığıdır. Məsələn, iqtisadi tsiklik fazalarının bir-birini dəyişdiyi periodda, makroiqtisadi göstəricilər ciddi dəyişir və uzunmüddətli periodda yeni səviyyədə qalır. Eynianlı şokların stasionar sıralara təsiri müvəqqəti xarakterlidir, bu effekt səpələnir və uzunmüddətli periodda zaman sırasının qiyməti onun orta qiymətinə qayıdır.

İkinci növ modellər isə, inteqrasiya olunan AR və SO modellər sinfinə aiddir (ingiliscə Avtoreqressive İnteqrated Moving Average Model-ARİMA model, azərbaycan dilində qısa olaraq İARSO modeli).

Maliyyə -iqtisadi dəyişənlərin dispersiyalarının qiymətləri də, zamandan asılı ola bilər. Bu halda da, uyğun zaman sırası qeyri-stasionar olur. Belə zaman sıraları şərti və şərtsiz qeyri-bircins (heteroskedastik) modellər sinfi ilə təsvir olunur. Şərtsiz heteroskedastiklik effektli zaman sırasını uyğun funksional çevirmələrlə yüngülləşdirmək və ya aradan qaldırmaq olar.

Tərif 10.2. *Əgər ilkin zaman sırasından onun təsadüfi olmayan tərkibini çıxdıqdan sonra alınan sıra stasionar zaman sırasıdırsa, onda əvvəlki sıraya bircins qeyri-stasionar sıra deyilir.*

Belə sıraları təsvir etmək üçün İARSO(p,q,k) modelindən istifadə olunur. Burada p-avtoreqressiyanın, q-sürüşkən ortanın, k-inteqrasiya olunma tərtibləridir. Ədəbiyyatlarda (bax.[11]) bu model Boks-Djenkins modeli kimi də, yazılır. İARSO modeli aşağıdakı xassələrə malik zaman sıralarının təsvirində istifadə olunur:

1) Sıra additiv tərkib olaraq, cəbri çoxhədlini özündə saxlayır;

2) Sıra, ona k-tərtibli fərq operatorunu tətbiq etdikdən sonra ARSO modeli vasitəsilə təsvir oluna bilər.

Tutaq ki, zaman sırasından k-dəfə fərqlər aldıqdan sonra (k - tərtibli diskret diferensiallamadan sonra) yeni sıra stasionardır:

$$\Delta^k y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \\ - \beta_1 x_{t-1} - \beta_2 x_{t-2} - ... - \beta_q x_{t-q}. \quad (10.1)$$

Burada $\Delta^k y_t$- ilə y_t- səviyyələrindən k-tərtibli fərq işarə olunmuşdur.

Onda İARSO modeli ilkin modelə tətbiq olunan modeldir. Ekonometrik modelləşdirmədə İARSO(*p,q,k*) modelinin ən çox yayılmış forması, onun *p,q,k* parametrinin qiymətləri 2-ni aşmadığı haldır. İARSO(*p,q,k*) modelinin qurulmasına sonrakı mövzularda baxacağıq.

Əgər (3.4) modelində müşahidələr zaman anları üzrə verilərsə, onda qalıqlardan ibarət sıraya stasionar sıra kimi baxıla bilər. x_t və y_t sıralarının qeyri-stasionarlığı isə, təsadüfi olmayan komponentin (trendin) mövcudluğu ilə səciyyələndirilə bilər. Trendi ayırdıqdan sonra bütün sıralar stasionar olur və bu stasionarlıq əvvəlcədən məlum hesab edilir. Praktikada belə vəzuyyətlər nadir hallarda olur. Bununla belə, modelə qeyri-stasionar sıraların daxil edilməsi doğru olmayan nəticələrə gətirə bilər. Xüsusi halda, $y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \varepsilon$ modelinin ƏKKÜ-ilə standart analizi, x_t və y_t dəyişənləri asılı olmadıqda belə, β əmsalının ciddi əhəmiyyətliliyinin mövcudluğunu göstərə bilər. Belə təzahür yalan reqressiya (əslində olmayan reqressiya) adını daşıyır və ancaq, modeldə qeyri-stasionar zaman sıralarından istifadə edilidikdə mümkündür.

Tutaq ki, y_t zaman sıralarının tərkibində təsadüfi olmayan hədd yoxdur və onun orta qiyməti sıfra bərabərdir (reqressiya modelinin qalıq sıraları bu sinifdəndir). Əgər sıra stasionardırsa, onda hər bir sonrakı zaman anında onun qiyməti orta qiymətə yaxınlaşır. Başqa sözlə, əgər biz y_t-nin qiymətini əvvəlki y_{t-1} qiyməti ilə izah etmək istəyiriksə, onda ozah olunan $\hat{y}_t$ hissəsi y_{t-1} qiyməti ilə müqayisədə sıfra daha yaxındır. Bu şərtin riyazi təsviri üçün (9.8) reqressiya modelinə $\alpha_0 = 0$ olduqda baxaq. $|\alpha_1| < 1$ şərtinin ödənilməsi zəruridir. $\alpha_1 = 1$ olduqda Tərif 9.3-ə nəzərən proses təsadüfi dolaşma olur. Bu halda sonrakı qiymətlər orta sıfır qiymətinə yaxınlaşa, həm də ondan kənarlaşa bilər.

§10.2. Vahid köklərin mövcudluğunun yoxlanılması üçün Diki-Fuller testləri

(9.8) düsturu ilə göstərilən AR(1) prosesi üçün $|\alpha_1| < 1$ şərtinin ödənilməsi stasionarlıq üçün zəruri şərtdir. Bu şərt $[F(L)]^{-1} = (1 - \alpha_1 \cdot L)^{-1}$ tərs operatorunun varlığı şərtidir. §9.2.3-də araşdırılan (9.24) düsturu ilə verilən AR(2) modeli üçün isə, stasionarlıq üçün zəruri şərtlər $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$; $\alpha_1 - \alpha_2 > 1$; $|\alpha_2| < 1$ şərtləridir.

Əgər (9.7) düsturu ilə təyin olunan $A(\theta)$ xarakteristik çoxhədlisinin vahid kökləri mövcuddursa, onda bu köklər prosesin xassələrinə ciddi təsir edir. (9.8) düsturu üçün $\alpha_1 = 1$ olmasının mövcud müşahidələrlə necə müəyyənləşdirilməsi məsələsinə baxaq. 2-ci və 3-cü fəsildə reqressiya əmsallarının qiymətləndirilməsinin əhəmiyyətliliyinin yoxlanılmasında t-statistikasından istifadə etməklə $t = \dfrac{(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1)}{S_{\hat{\alpha}_1}}$ paylanmasının t-Styudent paylanması və asimptorik standart normal paylanmaya malik olması məsələləri təhlil olunmuşdu. Diki və Fuller 1976 -cı ildə göstərmişlər ki, əgər $\alpha_1 = 1$ olarsa, onda (9.8) modeli üçün t-statistikası Styudent qanunu ilə paylanmır və onun paylanması müşahidələrin sayını artırdıqda standart normal paylanmaya yaxınlaşmır.

(9.8) modeli və onun iki modifikasiya olunmuş halı üçün üçün $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1$ olduqda t- statistikasının paylanması Diki-Fuller tərəfindən təsvir olunmuşdur:

$$y_{1t} = \alpha_{11} y_{t-1} + \varepsilon_{1t} \tag{10.2}$$

$$y_{2t} = \alpha_{02} + \alpha_{21} y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \tag{10.3}$$

$$y_{3t} = \alpha_{03} + \alpha_{31} y_{t-1} + c_{3t} t + \varepsilon_{3t} \tag{10.4}$$

Aşağıdakı cədvəldə Diki-Fuller (DF) statistikasının birtərəfli kritik qiymətləri verilmişdir.

inam səviyyəsi	seçimi həcm			
	25	50	100	∞
Sərbəst həddsiz (10.2) düsturu ilə verilən AR(1) modeli				
0,010	-2,66	-2,62	-2,60	-2,58
0,025	-2,26	-2,25	-2,24	-2,23
0,050	-1,95	-1,95	-1,95	-1,95
Sərbəst həddli (10.3) düsturu ilə verilən AR(1) modeli				
0,010	-3,75	-3,58	-3,51	-3,43
0,025	-3,33	-3,22	-3,17	-3,12
0,050	-3,00	-2,93	-2,89	-2,86
Sərbəst hədd və trendli (10.4) düsturu ilə verilən AR(1) modeli				
0,010	-4,38	-4,15	-4,04	-3,96
0,025	-3,95	-3,80	-3,69	-3,66
0,050	-3,60	-3,50	-3,45	-3,41

Fərz edək ki, (10.3) tənliyi üçün 100 müşahidə və 5% əhəmiyyətlilik səviyyəsində $H_0 : \alpha_1 = 1$ hipotezinin və ona alternativ $H_1 : \alpha_1 < 1$ hipotezinin testlə yoxlnılmasını reallaşdırırıq. Əgər yoxlama klassik reqressiyanın yuxarıdakı t -stattistikası ilə aparılırsa, onda statistika -1,66-dan kişik olduqda H_0 hipotezi rədd olunmalıdır. Lakin Diki-Fuller cədvəlindən istifadə edildikdə, t-statistikası -2,89-dan kiçik olduqda H_0 hipotezi rədd olunur. Beləliklə, standart prosedurdan istifadə edildikdə vahid köklərin mövcudluğu haqda düzgün hipotez əksərən rədd edilir (səhvə yol verilir).

Yuxarıdakı cədvəldə verilən kritik qiymətlər (10.2)-(10.4) tənliklərinin sağ tərəfinə $\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2}$ həddləri əlavə edildikdə də, doğru qalır. Bu isə AR modellərinin tərtibi vahiddən böyük olduğu halda da, vahid köklərin test yoxlanılmasına imkan verir. $\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2},...,$ artımlarının laq qiymətlərilə verilən tənliyə uyğun testlər Genişləndirilmiş Diki-Fuller testi ilə reallaşdırılır. Məsələn, əgər (9.24) düsturu ilə verilən AR(2) modelində bir vahid kök vardırsa, yəni $\theta_1 = 1$ və $|\theta_2| < 1$ olarsa, onda $1 + \theta_2 = \alpha_1$ və $1 \cdot \theta_2 = -\alpha_2$ bərabərliklərindən alınır ki, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ |\alpha_2| < 1$. Bu halda (9.24) düsturunu belə yazmaq olar:

$$y_t = (\alpha_1 + \alpha_2) y_{t-1} - \alpha_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (10.5)$$

və ya

$$\Delta y_t = (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) y_{t-1} - \alpha_2 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (10.6)$$

Ona görə də, vahid kökün mövcudluğu testi yuxarıdakı Diki - Fuller proseduru ilə yoxlanılır.

Əgər AR(p) prosesinin tərtibi əvvəlcədən məlum deyilsə, onda mümkün qədər çox sayda laqları daxil etmək lazımdır ki, səhvlərdə mümkün avtokorrelyasiyanı aradan qaldırmaq mümkün olsun. Məsələ ondan ibarətdir ki, Genişləndirilmiş Diki-Fuller testində fərz olunur ki, səhvlər ağ küy əmələ gətirir və yuxarıdakı cədvəldə verilmiş kritik qiymətlər ancaq bu şərt ödənildikdə doğrudur. Lakin çoxlu sayda laqların daxil edilməsi testin gücünü aşağı salır. Laqların sayının müəyyənləşdirilməsi üçün əlavə laq dəyişənlərinin statistik əhəmiyyətliliyini yoxlamaq lazımdır. Burada həm də, ARSO modelinin tərtibinin seçilməsi kriteriyalarından da, istifadə etmək olar. Əgər yoxlama nəticəsində ilkin verilənlərə bir neçə model adekvatdırsa, onda yekun seçim üçün

$$AIC = \frac{p+q}{n} + \ln\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n}\right), \qquad (10.7)$$

(burada e_t - qalıq sıranın səviyyələridir) Akayke İnformasiya Kriteriyasını (AİC) yoxlamaq lazımdır. AİC qiyməti kiçik olan modelə üstünlük verilir.

Eyni xarakterli Şvarts kriteriyasıdır ki, bu kriteriya

$$SC = \frac{(p+q)\ln n}{n} + \ln\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n}\right), \qquad (10.8)$$

düsturu ilə verilir.

Nümunə 10.1. Tutaq ki, (9.8) düsturunda $\alpha_0 \neq 0$. Onu belə yazmaq olar.

$$\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad (10.9)$$

burada $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$.

Əgər H_0 hipotezi qəbul olunursa və $\alpha_1 = 1$ isə, yəni y_{t-1}-in əmsalı əhəmiyyətsiz, α_0 əmsalı əhəmiyyətlidirsə, onda ilkin sıra $y_t = \alpha_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ tənliyi ilə verilən dreyfli təsadüfi dolaşma (müəyyən təsirlə tendensiyanın itirilməsi) kimi qəbul olunur. Bu tənliyi 1-ci tərtib fərqlə $\Delta y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$, stasionar halına gətirmək olar.

Nümunə 10.2. $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t$ modelinə baxaq. Ona xətti trend əlavə olunub. Bu model $\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t$ halına gətirilə bilər. Uyğun olaraq trend hesabına stasionarlıq, qeyri-stasionarlıq haqda nəticələri vermək olar.

Nümunə 10.3. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + \alpha_4 y_{t-4} + \varepsilon_t$

modelinə baxaq.

$$\Delta y_t = \alpha_1 y_{t-1} - y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-1} - \left(\alpha_2 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2}\right) + \alpha_3 y_{t-3} + \alpha_4 y_{t-4} +$$
$$+\varepsilon_t = \left(\alpha_1 - 1 + \alpha_2\right) y_{t-1} - \alpha_2 \Delta y_{t-1} + \alpha_3 y_{t-1} - \alpha_3 y_{t-1} + \alpha_3 y_{t-2} -$$
$$-\alpha_3 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + \alpha_4 y_{t-4} + \varepsilon_t = \left(\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \alpha_3\right) y_{t-1} -$$
$$-\left(\alpha_2 + \alpha_3\right)\Delta y_{t-1} - \alpha_3 \Delta y_{t-2} + \alpha_4 y_{t-4} + \varepsilon_t = \left(\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \alpha_3\right) y_{t-1} -$$
$$-\left(\alpha_2 + \alpha_3\right)\Delta y_{t-1} - \alpha_3 \Delta y_{t-2} + \alpha_4 y_{t-1} - \alpha_4 y_{t-1} + \alpha_4 y_{t-2} - \alpha_4 y_{t-2} +$$
$$+\alpha_4 y_{t-3} - \alpha_4 y_{t-3} + \alpha_4 y_{t-4} + \varepsilon_t = \left(\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\right) y_{t-1} -$$
$$-\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\right)\Delta y_{t-1} - \left(\alpha_3 + \alpha_4\right)\Delta y_{t-2} - \alpha_4 y_{t-3} + \varepsilon_t .$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ olduqda, zaman sırası qeyri-stasionardır.

Nümunə 10.4. $y_t = a + bt + \varepsilon_t$ modelinə baxaq. $y_t = a + bt + \varepsilon_t - \quad -\left(a + b(t-1) + \varepsilon_{t-1}\right) = b + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$. Alınan sıra geniş mənada stasionardır. Onun riyazi gözləməsi b -yə, dispersiyası $2\sigma^2$ -na bərabərdir, t -dən asılı olmayan 1-ci tərtib avtokorrelyasiya mövcuddur. İlkin sıranın dispersiyası σ^2 -dır və çevrilmiş sıranın dispersiyasından iki dəfə kiçikdir.

Nümunə 10.5. $y_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$ modelinə baxaq.

$$\Delta y_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t - \left(a + b(t-1) + c(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}\right) =$$
$$= b + 2ct - c + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1},$$
$$\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = b + 2ct - c + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} -$$
$$-\left(b + 2c(t-1) - c + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}\right) = 2c + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}.$$

Alınan sıra stasionardır. Onun riyazi gözləməsi $2c$, dispersiyası $6\sigma^2$ -dır, zamandan asılı olmayan 1-ci və 2-ci tərtib avtokorrelyasiya mövcuddur və onun dispersiyası ilkin sıranın dispersiyasından altı dəfə çoxdur.

§10.3. İARSO (*p,q,k*) modelinin qurulması

İARSO (*p,q,k*) modelinin qurulması aşağıdakı addımlarla müəyyən prosedurların yerinə yetirilməsi ilə reallaşır:

Birinci addımda stasionar sıranın alınması zəruridir. İlkin verilənlərin stasionarlığı haqda test yoxlanılarkən əvvəlcə qrafikin vizual analizi aparılmalıdır.

Boks-Djenkins yanaşmasında həm də, AKF(XAKF)-nın analizi tövsiyyə olunur. Seçimi AKF-nın qiymətlərinin sürətlə azalması stasionarlığın sadə kriteriyasıdır (eyni qaydada XAKF özünü aparmalıdır).

Bu addımda əsasən vahid köklərin mövcudluğu haqda statistik testlərdən (Diki-Fuller testi, Genişləndirilmiş Diki-Fuller testi) istifadə olunur.

Stasionar sıraya keçid üşün ardıcıl fərqlər operatorundan (diskret difernsiallama prosedurundan) istifadə olunur. AKF funksiyasının sürətlə sönməsi onu göstərir ki, stasionarlığın təmin olunması üçün fərq operatorunun zəruri tərtibi müəyyənləşdirilmişdir.

İkinci addımda, stasionar sıranı aldıqdan sonra seçimi AKF və XAKF funksiyalarının davranışı tədqiq edilir, p və q parametrlərinin qiymətləri haqda hipotezlər irəli sürülür. Burada nəzərə almaq lazımdır ki, seçimi korrelyasiya funksiyaları nəzəri qiymətlərdən fərqlənə bilər. Ona görə də, modelin identifikasiyası üçün AKF-nin əsas xarakteristikalarından istifadə oluna bilər. İncə detallarda fərqlilik ciddi olduqda, bir və ya iki, hətta daha çox modellər formalaşdırıla bilər.

Üçüncü addımda, modellərin identifikasiyasını müəyyənləşdirdikdən sonra, onların parametrlərinin qiymətləndirilməsi zəruridir. Müasir ekonometrik tətbiqi proqram paketlərinin müxtəlif yanaşmalarından istifadə olunur (ƏKKÜ, qeyri-xətti ƏKKÜ, MDOÜ). Bu qiymətləndirmələr seçimlərin böyük həcmlərində asimptotik ekvivalentdir.

Dördüncü addımda, hər bir modelin adekvatlılığının yoxlanılmasına onun qalıq sıraları təhlil olunur. Adekvat modellərin qalıqları ağ küyə oxşar olmalıdır, yəni, onların seçimi avtokorrelyasiyaları sıfırdan ciddi fərqlənməməlidir.

AKF-nin əmsallarının əhəmiyyətliliyinin yoxlanılmasında iki yanaşmadan istifadə olunur:

a) Bütün avtokorrelyasiya əmsallarının əhəmiyyətliliyi yoxlanılır;

b) Avtokorrelyasiya əmsalları çoxluğunun əhəmiyyətliliyi qrup kimi yoxlanılır;

Birinci yanaşma Bartlet (bax. [21. səh. 132-136.]) yanaşmasıdır. O göstərir ki, əgər model ilkin verilənlərə adekvatdırsa və səhvlər ağ küy əmələ gətirirsə, onda avtokorrelyasiya əmsallarının paylanması riyazi gözləməsi sıfır və dispersiyası $\frac{1}{n}$ olan normal paylanmaya yaxınlaşır. Ona görə də, əgər r_k avtokorrelyasiya əmsalı $\left(-\frac{t_\gamma}{\sqrt{n}}, +\frac{t_\gamma}{\sqrt{n}}\right)$ intervalından kənara çıxırsa, onda $\rho(k)=\rho(y_t,\, y_{t+k})=\frac{\gamma(k)}{\gamma(\nu)}$ əmsalının sıfra bərabər olması haqda hipotez rədd edilir.

İkinci yanaşma Boks-Pirsin Q-statistikasına əsaslanır və qalıqların AKF-nın birinci τ qiymətlərinin sıfra bərabərliyinin yoxlanılmasına imkan verir.

Q -statistikası belə təyin olunur:

$$Q=n\sum_{k=1}^{\tau} r_k^2 . \tag{10.10}$$

Avtokorrelyasiyanın olması haqda H_0 hipotezi halında Q- statistikası $\nu=\tau-p-q$ sərbəst dərcəli χ^2 paylanmasına malikdir.

Əgər $Q>\chi^2_{krit}$ olarsa, onda qrup olaraq, 1-ci τ qədər avtokorrelyasiya əmsalları əhəmiyyətlidir (yəni, $\rho_1,...,\rho_\tau$ -nın hamısı sıfır deyil).

Müasir ekonometrik paketlərdə onun modifikasiyası olan Boks-Lyunq testindən istifadə olunur. Uyğun statistika belə təyin olunur:

$$\tilde{Q} = n(n+2)\sum_{k=1}^{\tau}\frac{r_k^2}{n-k} \quad . \tag{10.11}$$

$\tilde{Q}$ - statistikası da, Q- statistikası kimi, eyni asimptotik paylanmaya malikdir. Praktiki hesablamalarda $\tau \approx \frac{n}{4}$ (50-dən çox olmamaq şərtilə) götürülür.

Nümunə 10.5 Təsadüfi $y_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$ prosesinə baxaq. O, ancaq sıranın orta səviyyəsindən və səhvlərdən asılıdır. Bu proses İARSO (0,0,0) prosesidir. Ağ küy prosesi orta qiyməti sıfır olan İARSO(0,0,0) prosesidir.

Nümunə 10.6. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ (burada $|\alpha_1| < 1$, ε_t -ağ küydür) prosesi İARSO (1,0,0) prosesidir. Proses y-in bilavasitə əvvəlki qiymətlərindən asılıdır, sıranın stasionar sıraya transformasiya olunması üçün səviyyələrin fərqlərinin müəyyənləşdirilməsi tələb olunmur. Əgər $\alpha_1 = 1$ olarsa, onda proses qeyri-stasionar olur və fərqlərin hesablanması tələb olunur. Proses İARSO (0,1,0), yəni $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ prosesidir.

Nümunə 10.7. $y_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$ prosesi İARSO (0,0,0) prosesidir.

Nümunə 10.8. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ prosesi İARSO (1,0,1) prosesidir.

§10.4. Zaman sıralarında kointeqrasiya məsələləri

§10.2 -də qeyd edildiyi kimi, əgər dəyişənlər qeyri-stasionardırsa, onda ənənəvi reqressiya analizi üsullarının təbiqi doğru olmayan reqressiyaya gətirir. İki asılı olmayan təsadüfi dolaşan prosesə baxaq:

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \qquad t = 1,2,\ldots,n, \\ y_t &= y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \qquad t = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Burada ε_{1t} və ε_{2t} qalıq həddləri Qauss-Markov şərtlərini ödəyir. ε_{1t} və ε_{2t} asılı olmadığından, x və y kəsişmir.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,...,n \tag{10.13}$$

tənliyində ε_t qeyri-stasionar proses olur və ona görə də, bu tənlik klassik reqressiya modelinin şərtlərini ödəmir (səhvlərin dispersiyası sabit olmur). Bu halda ƏKKÜ-ilə (10.13) tənliyinin qiymətləndirilməsində t-statistikası asimptotik paylanmaya malik deyil və $n \to \infty$ olduqda dağılır. Lakin, müəyyən hallarda ƏKKÜ-nun tətbiqi doğru reqressiya nəticələrini verir.

Tərif 10.3. *Əgər 1-ci tərtib inteqrasiya olunan x_t və y_t zaman sıralarının elə xətti kombinasiyası varsa ki, həmin kombinasiya stasionar sıra əmələ gətirir, onda deyirlər ki, bu sıralar kointeqrasiya olunandır. Başqa sözlə, qeyri-stasionar x_t və y_t sıralaırına o halda kointeqrasiya olunan sıralar deyilir ki, $\alpha x_t + \beta y_t$ sırasının stasionar olması üçün elə α, β ədədləri tapılsın.*

İnteqrasiya olunan zaman sıralarına nümunə olaraq maliyyə zaman sıralarının modelləşdirilməsində tez-tez istifadə olunan təsadüfi dolaşma prosesini göstərmək olar.

Biz §8.6-da k-cı tərtibdən inteqrasiya olunan y_t sırasını $y_t \sim I(k)$ ilə işarə etmişdik. Bu işarələməyə əsasən, $z_t = \alpha x_t + \beta y_t \sim I(1)$.

Tərif 10.4. (α, β) *komponentli vektora kointeqrasiya edən vektor deyilir.*

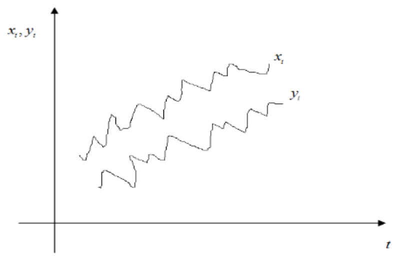
Tərif 10.3-ü eyni k tərtibdən inteqrasiya olunan $x_t \sim I(k)$, $y_t \sim I(k)$ prosesləri üçün də, vermək olar.

Tərif 10.5. *Tutaq ki, $x_t \sim I(k)$, $y_t \sim I(k)$. Əgər elə (α, β) vektoru varsa ki, $\alpha x_t + \beta y_t \sim I(k - \ell)$ (burada $\ell > 0$ və tərtibin* *nə qədər aşağı düşməsini göstərir) olsun, onda deyirlər ki,* x_t *və* y_t *prosesləri kointeqrasiya olunandır və bu, belə yazılır:* $x_t, y_t \sim I(k, \ell)$.

Tərif 10.6. *Verilmiş* N *sayda sıra üçün xətti asılı olmayan kointeqrasiya edən vektorların maksimal sayına kointeqrasiya ranqı deyilir və* r *-lə işarə olunur.*

Tərif 10.7. 1-*ci tərtib kointeqrasiya olunan zaman sıraları sistemi üçün bütün mümkün kointeqrasiya edən vektorlar çoxluğu* r *-ölçülü xətti vektor fəza əmələ gətirir ki, ona kointeqrasiya fəzası deyilir.*

r -sayda xətti asılı olmayan kointeqrasiya edən vektorlar kointeqrasiya fəzasında bazisdir.



1-ci tərtib inteqrasiya olunan iki prosesə baxaq. İlk baxımda aydın olmur ki, iki prosesin cəmlənməsi necə inteqrasiya tərtibini aşağı sala bilər. Lakin kointeqrasiyanın alınması ideyası çox sadədir. Tutaq ki, iki təsadüfi kəmiyyət verilmişdir. Ümumiyyətlə, onların xətti kombinasiyası da, təsadüfi kəmiyyətdir. Ancaq, elə təsadüfi kəmiyyətlər ola bilər ki, onların müəyyən xətti kombinasiyası determinik kəmiyyət ola bilər. Məsələn, y təsadüfi kəmiyyətini x təsadüfi kəmiyyəti və determinik kəmiyyətin cəmi şəklində göstərsək, onda y və x təsadüfi kəmiyyətlərinin xətti kombinasiyaları uyğun $(1, -1)$ əmsalları ilə, determinik kəmiyyət olur. Uyğun vəziyyətlər, təsadüfi proseslər üçün də, ola bilər. Onların stasionar olan hər hansı kombinasiyaları mümkündür. Əgər $x_t, y_t \sim I(1, 1)$ olarsa, onda hər iki proses stoxastik trendli təsadüfi dolaşan proseslərdir. Kointeqrasiya isə, bu proseslərin stoxastik trendlərinin bir-

birilə yekdil (bir ahənglə) hərəkətini və ya onların ümumi stoxastik trendini göstərir. Bu xassələri qrafiki təsvir etmək olar:
Qrafikdən görünür ki, iki iqtisadi kəmiyyət arasında müəyyən $\alpha x_t + \beta y_t$ münasibəti vardır ki, bu kombinasiya stasionardır. Bu kombinasiyanı

$$y_t = \gamma x_t + u_t \qquad (10.14)$$

kimi yazmaq olar. Burada u_t stasionar prosesdir. Əgər hər iki tərəfdən riyazi gözləmə alsaq, onda aydın olur ki, x_t və y_t qeyri-stasionar proseslərinin zamandan aslılı riyazi gözləmələri determinik münasibətlə asılıdır, onlar arasında uzunmüddətli əlaqə mövcuddur. Kointeqrasiya uzun-müddətli tarazlıqla uyğunlaşır. Baxmayaraq ki, hər iki proses təsadüfi olaraq dolaşır, kointeqrasiyanın mövcudluğu onları bir-birindən uzaqlaşmadan, birgə dolaşmağa sövq edir.

Əgər iqtisadi göstəricilər arasında stasionar xətti kombinasiya mövcuddursa, bu iqtisadi baxımdan o deməkdir ki, bu münasibət tez-tez müşahidə olunur və ona uzunmüddətli tarazlıq kimi baxmaq olar. Əgər kointeqrasiya münasibəti yoxdursa, hər hansı qiyməti tarazlıq qiyməti adlandırmaq mənasızdır, çünki proses praktiki olaraq heç bir anda həmin qiymətə qayıtmır. Deməli, kointeqrasiya münasibəti baxılan kəmiyyətlər arasınada uzunmüddətli tarazlığa uyğundur və bu halda, iqtisadi göstəricilərin davranışının ümumi dinamikası üzunmüddətli və qısamüddətli tərkiblərə ayrıla bilər. Belə ki, uzunmüddətli davranış kointeqrasiya münasibəti ilə təsvir olunur. Qısamüddətli davranışın necə təsvir olunmasına baxaq. (10.14) bərabərliyində u_t-ni ağ küy qəbul edək. $x_t, y_t \sim I(1)$ olduğundan, Δx_t və Δy_t fərq prosesləri $I(0)$ tipli, yəni stasionar proseslərdir. Δx_t və Δy_t məzmunca ilkin göstəricilərin qısamüddətli dəyişməsini təsvir etdiyindən, (9.55) düsturundan məlum olan

$$y_t = \alpha \Delta x_t + \beta \left(y_{t-1} - \gamma x_{t-1} \right) + v_t \qquad (10.15)$$

səhvlərin korreksiyası modeli $\Delta x_t, \Delta y_t$ stasionar kəmiyyətlərini və onların kointeqasiya münasibətlərini əlaqələndir. Burada mötərizə daxilindəki ifadə stasionar olduğundan, səhvlərin korreksiyası modelinin iqtisadi interpretasiyası saxlanılır, necə ki, x_t və y_t stasionar olduğu haldakı kimi, y_t prosesində qısamüddətli dəyişiklər x_t prosesinin qısamüddətli dəyişməsindən və əvvəlki zaman anında uzunmüddətli tarazlıqdan meyletmələrdən asılıdır. Yəni, dəyişənlərin öz uzunmüddətli tarazlığından nə qədər meyletməsindən asılı olaraq korreksiya daxil edilir.

İndi isə, kointeqrasiya prosesinin mövcud olmasını öyrənək. Tutaq ki, x_t və y_t prosesləri belə təyin olunub:

$$\begin{aligned} x_t + \beta y_t &= u_t, \\ x_t + \alpha y_t &= v_t. \end{aligned} \qquad (10.16)$$

Həm də, fərz edək ki,

$$\begin{aligned} u_t &= u_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ v_t &= \rho v_{t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned} \qquad (10.17)$$

Burada ε_{1t} və ε_{2t}-korrelə olunmayan ağ küylərdir. $|\rho| < 1$ olduqda v_t prosesi stasionar prosesdir, u_t prosesi isə, dreyfsiz təsadüfi dolaşmadır. Başqa sözlə, $u_t \sim I(1), v_t \sim I(0)$. x_t və y_t -nin birgə paylanması çevrilmiş tənliklərlə tam təyin olunur. Burada ancaq $\alpha \neq \beta$ halında modelə baxmaq lazımdır, əks halda sistem ziddiyyət təşkil edir.

x_t və y_t -proseslərinin inteqrasiya tərtibini müəyyən edək. Bunun üçün modelin struktur formasından çevrilmiş formasına keçək, yəni x_t və y_t -yə nəzərən həll edək:

$$x_t = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}u_t + \frac{\beta}{\alpha-\beta}v_t \sim I(1),$$
$$y_t = -\frac{1}{\alpha-\beta}u_t + \frac{1}{\alpha-\beta}v_t \sim I(1). \qquad (10.18)$$

Hər iki proses 1-ci tərtib inteqrasiya olunan proseslərdir və onların $x_t + \alpha y_t$ xətti kombinasiyası stasionar olduğundan, onlar kointeqrasiya olunandır.

§10.5. Kointeqrasiyalı reqressiyanın qiymətləndirilməsində Engel-Qreyncer yanaşması

Praktiki məsələlərdə adətən iki x_t və y_t qeyri-stasionar zaman sıralarının stasionar $y_t - \gamma x_t$ xətti kombinasiyasının olması üçün γ əmsalı məlum olmur. Bu o deməkdir ki, $\delta = (-1,\ \gamma)$ kointeqrasiya vektorunun qiymətləndirməsi zəruridir. Sonra isə, həmin qiymətləndirmənin həqiqətən stasionar xətti kombinasiya doğurduğunu müəyyənləşdirmək lazımdır.

Stasionar xətti kombinasiyanın müəyyənləşdirilməsində sadə yanaşma Engel-Qreyncer yanaşmasıdır. Bu üsula görə adi reqressiyasının ƏKKÜ-ilə qiymətləndirilməsindən istifadə etmək lazımdır. Dəyişənlərdən biri reqressiya tənliyinin sağında, digəri solunda olmalıdır:

$$y_t = \gamma x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\ldots,n \qquad (10.19)$$

Xətti kombinasiyanın stasionarlığının müəyyənləşdirilməsi üçün reqressiyasının qalıq həddinə Diki-Fuller üsulunu tətbiq etmək lazımdır. H_0 hipotezi olaraq ε_t-nin vahid kökü saxlaması, yəni x_t və y_t arasında kointeqrasiyanın olmaması şərti götürülür. Tutaq ki, e_i bu reqressiyanın qalıqlarıdır. Engel-Qreyncer üsulunda kointeqrasiyanın olmaması haqda hipotezin yoxlanılması

$$e_t = \varphi e_{t-1} + u_t,\quad t = 1,2,...,n \qquad (10.20)$$

reqressiyası ilə reallaşdırılar. Bu reqressiyada $\varphi = 1$ hipotezi üçün t-statistikasının paylanması Diki-Fuller statistikasının paylanmasından fərqli olur. Əgər kointeqrasiyanın olmaması haqda hipotez inkar olunursa, onda inam yaranır ki, alınan nəticələr doğru olmayan reqressiya deyil.

Determinik komponentin nəzərə alınmaması kointeqrasiya haqda düzgün olmayan nəticəyə gətirir. Bunu aradan qaldırmaq üçün kointeqrasiya reqressiyasına sabit, trend, mövsümi fiktiv dəyişənləri əlavə etmək lazımdır. Bunun nəticəsində Engel-Qreyncer kriteriyası asimptotik dəyişir.

Kointeqrasiyalı dəyişənlər olan reqressiyada ƏKKÜ qiymətləndirilmələri sağ tərəfdə səhvlərlə korrelə olunan endogen dəyişən olduğundan, meyyli olmalıdır. Əgər x_t və y_t kointeqrasiya olunursa, onda y_t və γx_t ümumi qeyri-stasionar komponenti (uzunmüddətli tendensiyanı) özündə saxlayır, $y_t - \alpha - \gamma x_t$ isə, stasionardır və sıfırın ətrafında fluktuasiya edir.

§10.6 Kointeqrasiya və ümumi trendlər

Tutaq ki, x_t və y_t dəyişənləri müəyyən $f(t)$ trendinə nəzərən stasionardır:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu_0 + \mu_1 f(t) + \varepsilon_t, \\ x_t &= \nu_0 + \nu_1 f(t) + \xi_t, \end{aligned} \qquad (10.21)$$

burada ε_t və ξ_t stasionar proseslərdir. Onların $y_t - \gamma x_t$ xətti kombinasiyası

$$y_t - \gamma x_t = \mu_0 - \gamma \nu_0 + (\mu_1 - \gamma \nu_1) f(t) + \varepsilon_t - \gamma \xi_t \qquad (10.22)$$

olur və onun stasionar olması üçün $\mu_1 = \gamma \nu_1$ olmalıdır. Digər tərəfdən, əgər y_t dəyişəni $f(t)$ trendini, x_t dəyişəni isə, $g(t)$ trendini özündə saxlayırsa, elə xətti kombinasiya tapmaq mümkün deyil ki, $\left(\mu_1 f(t) - \gamma v_1 g(t)\right)$ fərqi sabit kəmiyyət olsun və deməli, x_t və y_t üçün kointeqrallayıcı vektor tapmaq olmazdı. Bu vektor o halda mümkündür ki, hər hansı γ üçün $f(t) = \frac{\gamma v_1}{\mu_1} g(t)$ olsun, yəni $f(t)$ və $g(t)$ xətti asılı olsun.

İndi tutaq ki, $x_t, y_t \sim I(1)$ prosesləri aşağıdakı ayrılışla verilir:

$$\begin{aligned} y_t &= \lambda t + v_t + \varepsilon_t, \\ x_t &= \delta t + w_t + \xi_t, \end{aligned} \tag{10.23}$$

burada v_t və w_t - təsadüfi dolaşan, ε_t və ξ_t - isə stasionar proseslərdir.

x_t və y_t dəyişənlərinin elə xətti kombinasiyasını tapaq ki, o stasionar olsun.

$$\begin{aligned} & y_t - \gamma x_t = \lambda t + v_t + \varepsilon_t - \gamma\left(\delta t + w_t + \xi_t\right) = \\ & = (\lambda - \gamma\delta)t + v_t - \gamma w_t + \varepsilon_t - \lambda \xi_t \end{aligned} \tag{10.24}$$

fərqinin stasionar olması üçün sağ tərəfdə həm determinik, həm də stoxastik trend olmamalıdır. $\lambda = \gamma\delta$, $v_t = \gamma w_t$ olduqda, (10.23) -də y_t-ni belə yazmaq olar:

$$y_t = \gamma\delta t + \gamma w_t + \varepsilon_t = \gamma\left(\delta t + w_t\right) + \varepsilon_t. \tag{10.25}$$

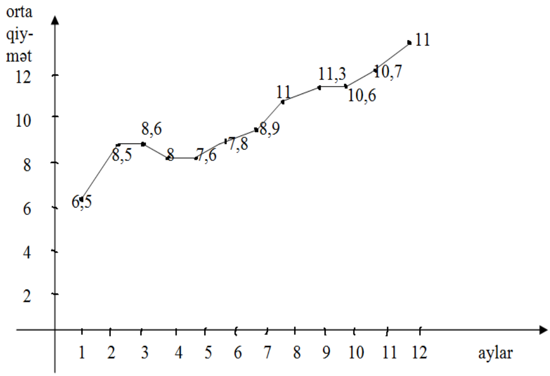
Burada x_t və y_t ümumi $\left(\delta t + w_t\right)$ trendini özündə saxlayır.

Qeyd edək ki, kointeqrasiyalılıq çoxlu sayda iqtisadi göstəricilərin mühüm xassəsidir. O, göstərir ki, ayrı-ayrı iqtisadi faktorların staoxastik xarakterli dəyişmələrinə baxmayaraq, onlar arasında uzunmüddətli asılılıq vardır. Uzunmüddətli asılılıqdan meyletmə dərəcəsindən asılı olaraq qısamüddətli dəyişmələr korrektə olunduqda, bu uzunmüddətli asılılıq müəyyən birgə, qarşılıqlı əlaqəli dəyişməyə gətirir.

İqtisadi göstəricilər arasinda kointeqrasiya münasibətlərinin olması onlar arasındakı qarşılıqlı təsirin dərəcəsini kəmiyyətcə qiymətləndirməyə imkan verir ki, bu da öyrənilən göstəricilər arasındakı inteqrasiya prosesinin qısamüddətli dinamikasının daha dərin tədqiq olunmasında tətbiq oluna bilər.

§10.7. Qeyri-stasionar zaman sıralarının harmonik analizi

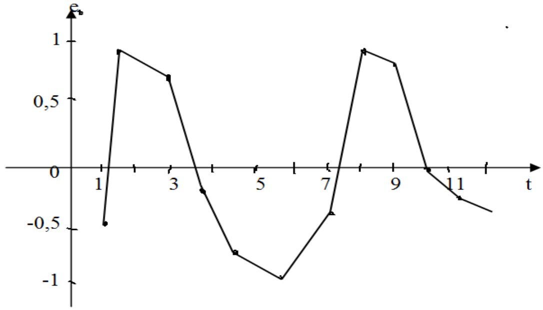
İqtisadi məslələrin həllində tez-tez rast gəlinən sıralar tendensiyalı dinamik sıralardır. Sırada periodik rəqslər mövcuddursa və sıranı stasionar hala gətirmək mümkündürsə, onda Fuyre sırasını tətbiq etmək olar və əmsalların statistik qiymətləndirilməsi §9.7-də göstərilmişdir. Sıranı stasionar hala salmaq üçün xətti $\hat{y}_t = a + bt$ trendini tapmaq olar və Furye sırası üsulunu $e_t = y_t - \hat{y}_t$ qalıq kəmiyyətlərinə tətbiq etmək lazımdır. Digər yanaşmada Furye sırası 1-ci tərtib fərqlər üzrə qurulur ki, bu isə, xətti trend hesablanmasına ekvivaletdir. Başqa sözlə, dinamik sıraya əsasən zəncirvari $\Delta_t = y_t - y_{t-1}$ mütləq artımları müəyyənləşdirilir ki, onlar Furye sırasının qurulması üçün informasiya bazası kimi istifadə olunur.



Tutaq ki, bir il ərzində məhsulun aylar üzrə orta qiymət dinamikası qrafikdəki kimidir.
Qrafikdən göründüyü kimi, zaman sırası tendensiyalıdır. Xətti trendin tənliyi $\hat{y}_t = 6{,}683 + 0{,}388t,\ t = 1,2,\ldots,12$. Bu tənlik qiymətin orta dəyişməsinin $73{,}7\%$-ni təşkil edir $\left(R^2 = 0{,}737\right)$ və statistik əhəmiyyətlidir. Çünki 5% əhəmiyyətlilik səviyyəsində 4,84 cədvəl qiyməti üçün $F = 28$. Tənlikdə t-nin

uyğun qiymətlərini yazmaqla $\hat{y}_t$ - orta qiymətlərin hesablanma qiymətləri və $e_t = y_t - \hat{y}_t$ qalıq qiymətləri alınır. Qalıq həddlərin qrafiki təsviri belədir.

e_t qalıq həddləri stasionar sıra təşkil edir və iki harmonikalı Furye sırası ilə yaxşı təsvir olunur:



$$e_t = 0{,}123\cos t - 0{,}296\sin t - 0{,}137\cos 2t + 1{,}005\sin 2t;\ R^2 = 0{,}880$$
.

Burada $\sum e_t = 0$ olduğundan, a_0 sərbəst həddi yoxdur.

Dinamik sıranın modeli

$$\begin{cases} y_t = a + bt + e_t, \\ e_t = a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos 2t + b_2\sin 2t \end{cases} \qquad (10{,}25)$$

sistemidir və baxılan hal üçün model belə olur:

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 6{,}683 + 0{,}388t + e_t, \\ e_t = 0{,}123\cos t - 0{,}296\sin t - 0{,}137\cos 2t + 1{,}005\sin 2t. \end{cases} \qquad (10.26)$$

Bu sistemdə trenddə t-nin yerinə 1,2,...,12 qiymətlərini, qalıq həddə isə, $0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \ldots, \frac{12\pi}{6}$ nəzərə alsaq, dinamik sıranın səviyyələrinin nəzəri qiymətləri alınır ki, onlar ilkin verilənlərlə sıx korrelə olunur $(R = 0{,}9855)$.

Ümumi proqnoz iki proqnoz komponentlərinin cəmidir: trendə nəzərən proqnoz və qalıq həddlər üçün Furye sırasına görə proqnoz.

Məsələn 14-cü ay üçün proqnoz:

a) Trendə nəzərən proqnoz: $6{,}683 + 0{,}388 \cdot 14 = 12{,}122$;

b) Qalıq həddinə nəzərən proqnoz:

$$0{,}123\cos\frac{13\pi}{6} - 0{,}296\sin\frac{13\pi}{6} -$$

$$-0{,}137\cos\frac{13\pi}{3} + 1{,}005\sin\frac{13\pi}{3} = 0{,}123 \cdot 0{,}866 - 0{,}296 \cdot 0{,}5 -$$

$$-0{,}137 \cdot 0{,}5 + 1{,}005 \cdot 0{,}866 = 0{,}760;$$

c) yekun: 12,88.

Furye sırası həm də, mövsümi rəqsli dinamikanın təsvirində və proqnozlaşdırmasında istifadə oluna bilər. Mövsümi rəqslər digər modellərlə də, təsvir oluna bilər ki, bu modellərdə həm mövsümilik nəzərə alınır, həm də, onu kəmiyyətcə ölçmək olar.

§10.8. Mövsümilik modelləri

İqtisadi göstəricilər əksər hallarda mövsümi komponentlərlə verilir. Məsələn, kvartal verilənlərində 4 periodlu mövsümi komponent müşahidə oluna bilər:

$$y_t = v(t) + \varepsilon_t, \quad v(t+4) = v(t), \quad t = 1,2,\ldots,n. \qquad (10.27)$$

Burada y_t sırası periodik determinik (mövsümi komponent) $v(t)$ tərkibi və təsadüfi ε_t komponentinin kompozisiyasından ibarətdir və ε_t-lər orta qiyməti sıfır olan stasionar zaman sırasıdır. $v(t)$ mövsümi komponentini belə yazılışla göstərmək olar (bax. fəsil 5):

$$v(t) = \alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_2 + \alpha_{13}z_3 + \alpha_{14}z_4, \qquad (10.28)$$

burada z_i, $i = \overline{1,4}$ kvartallar üçün fiktiv dəyişənlərdir.

Mövsümi komponenti ayırmaq üçün reqressiya parametrlərinin qiymətləndirmə üsullarını

$$y_t = \alpha_{11} z_{1t} + \alpha_{12} z_{2t} + \alpha_{13} z_{3t} + \alpha_{14} z_{4t} + \varepsilon_t \qquad (10.29)$$

tənliyinə tətbiq etmək olar. Əksər hallarda (10.29) -a $\sum_{i=1}^{4} \alpha_{1i} = 0$ şərti qoyulmaqla (bax §5.4) α sərbəst hədli reqressiyaya baxılır. Burada α_{1i} əmsalları il ərzində orta qiymətdən i-ci kvartaldakı səviyyənin meylini göstərir.

Trendin ayrılması halında olduğu kimi, stasionar zaman sıralarının modelləşdirmə üsulları (10.28) reqressiyanın qalıq sırasına tətbiq edilir.

(10.27) tənliyi üçün mövsümi komponentin aradan qaldırılması

$$\Delta_4 y_t = \left(1 - L^4\right) y_t = y_t - y_{t-4} \qquad (10.30)$$

mövsümi ardıcıl fərq operatoru ilə reallaşdırıla bilər.

Əgər mövsümi komponentin periodu 12 olarsa, onda Δ_{12} operatorunu tətbiq etmək lazımdır. Bu hal aylıq verilənlər olduqda mümkündür.

§10.8.1. Trendsiz mövsümilik modeli

Dinamik sırada tendensiya olmadıqda sıranın səviyyəsinin ümumi rəqsi v mövsümi və ε təsadüfi tərkibin təsiri ilə formalaşır. Onda

$$\left(y_t - \bar{y}\right) = \left(\bar{y}_{v_j} - \bar{y}\right) + \left(y_t - \bar{y}_{v_j}\right), \quad t = 1,2,\ldots,n. \qquad (10.31)$$

Burada $\bar{y}_{v_j}$ - illər üzrə olan sırada uyğun ildaxili periodun orta səviyyəsidir (ay, kvartal).

Bu bərabərlikdə $\left(\bar{y}_{v_j} - \bar{y}\right)$ kəmiyyəti mövsümiliyin təsirini, $\left(\bar{y}_t - \bar{y}_{v_j}\right)$-isə, təsadüfi komponentin təsirini xarakterizə edir. $\bar{y}$ və $\bar{y}_v$ orta qiymətləri bu düsturla hesablanır:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t; \quad \bar{y}_{v_j} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} y_t. \qquad (10.32)$$

Burada n dinamik sıranın səviyyələrini (kvartallarda-illər, aylarda- illər), k -dinamik sırada illərin sayıdır. Məsələn, hər hansı məhsulun satış həcmi aşağıdakı cədvəl şəklində verilərsə,

kvartallar	İllər			Cəmi	$\bar{y}_{v_j}$	v_j
	1	2	3			
I	25	30	26	81	27	-62,25
II	125	120	133	378	126	36,75
III	180	162	180	522	174	84,75
IV	30	30	30	90	30	-59,25
Cəmi	360	342	369	1071	89,25	0

illər üzrə yekun göstəricilərdə dəqiq tendensiya müəyyən olunmur. Ümumi orta kvartal $\bar{y}$ səviyyəsi 89,25 $\left(\frac{1071}{12}\right)$ və mövsümiliyin təsiri olmasaydı, hər bir kvartalda satış həcmi 89 vahid olardı. Lakin mövsümiliyin təsiri ilə satış I və IV kvartallarda orta səviyyədən ciddi aşağı, II və III kvartallarda isə, bu səviyyədən yüksək olur.

Additiv modeldə mövsümüliyin ölçülməsi

$$v_j = \bar{y}_{v_j} - \bar{y} \qquad (10.33)$$

düsturu ilə aparılır (cədvəldə sonuncu sütun). İl ərzində mövsümilik göstəricilərinin cəmi sıfır olur. Uyğun kvartalın (ayın) sıra səviyyəsini fiktiv dəyişənli xətti model kimi yazmaq olar:

$$y_t = \alpha + \alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_2 + \alpha_{13}z_3 + \varepsilon_t. \qquad (10.34)$$

Burada z_1, z_2, z_3 fiktiv dəyişənləri I, II və III kvartallar üçün fiktiv dəyişənlərdir və baxılan kvartal üçün "1", digər kvartallar üçün "0" qiymətini alır. Belə ki, $z_1 = 1$ ancaq I kvartala, $z_2 = 1$ ancaq II kvartala $z_3 = 1$ isə, ancaq 3-cü kvartala aiddir.

(y_t, z_1, z_2, z_3) verilənlərinə ƏKKÜ-nu tətbiq etməklə $(\alpha, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$ parametrlərinin qiymətləndirilməsini almaq olar. Bu modeldə müqayisə 4-cü kvartal üçün olduğundan, $z_4 = 0$. ƏKKÜ-nun tətbiqi aşağıdakı normal tənliklər sisteminə gətirir:

$$\begin{cases} \sum y_t = n\alpha + \alpha_{11}\sum z_1 + \alpha_{12}\sum z_2 + \alpha_{13}\sum z_3, \\ \sum y_t z_1 = \alpha\sum z_1 + \alpha_{11}\sum z_1^2 + \alpha_{12}\sum z_1 z_2 + \alpha_{13}\sum z_1 z_3, \\ \sum y_t z_2 = \alpha\sum z_2 + \alpha_{11}\sum z_1 z_2 + \alpha_{12}\sum z_2^2 + \alpha_{13}\sum z_2 z_3, \\ \sum y_t z_3 = \alpha\sum z_3 + \alpha_{11}\sum z_1 z_3 + \alpha_{12}\sum z_2 z_3 + \alpha_{13}\sum z_3^2. \end{cases} \qquad (10.35)$$

Bu sistemdə $n = 12$; $\sum z_1 = \sum z_2 = \sum z_3 = 3$; $\sum z_1 z_2 = \sum z_1 z_3 =$ $= \sum z_2 z_3 = 0$ $\sum y_t z_1 = \sum y_{j=1}$ (1-ci kvartal üzrə şəkildə 1-ci sətrin yekunu); $\sum y_t z_2 = \sum y_{j=2}$ (cədvəldə 2-ci sətrin yekunu); $\sum y_t z_3 = \sum y_{j=3}$. Beləliklə, (10.35) sistemi belə halda verilir:

$$\begin{cases} \sum y_t = 12\alpha + 3\alpha_{11} + 3\alpha_{12} + 3\alpha_{13} = 1071, \\ \sum y_t z_1 = 3\alpha + 3\alpha_{11} = 81, \\ \sum y_t z_2 = 3\alpha + 3\alpha_{12} = 378, \\ \sum y_t z_3 = 3\alpha + 3\alpha_{13} = 522. \end{cases} \qquad (10.35)$$

Burada 1-ci tənlikdən sonrakı tənlikləri çıxsaq alarıq:

$$\sum y_{j=4} = 3a \Rightarrow a = \frac{\sum y_{j=4}}{3} = \bar{y}_{v_{j=4}},$$

yəni, α -parametri IV kvartalda orta səviyyəni xarkterizə edir.

2,3 və 4-cü tənlikliklərini 3-ə bölüb, α -nın qiymətini nəzərə almaqla

$$\frac{\sum y_{j=1}}{3} - \bar{y}_{v_{j=4}} = \bar{y}_{v_{j=1}} - \bar{y}_{v_{j=4}} = \alpha_{11};$$
$$\frac{\sum y_{j=2}}{3} - \bar{y}_{v_{j=4}} = \bar{y}_{v_{j=2}} - \bar{y}_{v_{j=4}} = \alpha_{12}; \qquad (10.38)$$
$$\frac{\sum y_{j=3}}{3} - \bar{y}_{v_{j=4}} = \bar{y}_{v_{j=3}} - \bar{y}_{v_{j=4}} = \alpha_{13};$$

münasibətləri alınır.

Cədvəl verilənlərindən istifadə etməklə

$\alpha_{11} = 27 - 30 = -3;\ \alpha_{12} = 126 - 30 = 96;\ \alpha_{13} = 174 - 30 = 144$

parametrləri tapılır və cədvəl verilənləri üçün sıranın səviyyələri modeli

$$y_t = 30 - 3z_1 + 96z_2 + 144z_3 + \varepsilon_t\,. \qquad (10.39)$$

formasında olur.

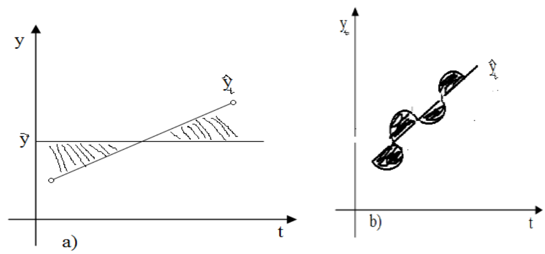
§10.8.2. Trendli mövsümi model

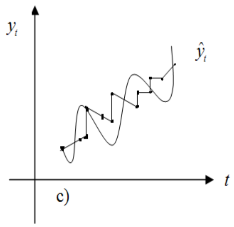
Dinamik sırada tendensiya mövcud olduqda, sıranın səviyyələrinin ümumi rəqsetməsi üç tərkiblə formalaşır:

$$\underbrace{(y_t - \bar{y})}_{\substack{\text{ümumi} \\ \text{variasiya}}} = \underbrace{(\hat{y}_t - \bar{y})}_{\substack{\text{tendensiyanin} \\ \text{tesiri}}} + \underbrace{(y_v - \hat{y}_t)}_{\substack{\text{mövsümiliyin} \\ \text{tesiri}}} + \underbrace{(y_t - y_v)}_{\substack{\text{tesadüfi terkibin} \\ \text{tesiri}}}. \qquad (10.40)$$

Burada y_v mövsümiliyin nəzərə alınması ilə, trenddir

Bu tərkiblərin təsirini qrafiki belə təsvir etmək olar:





$\hat{y}_t$-trend xəttinin sıranın $\bar{y}$ orta xəttindən bucaq əmsalı nə qədər böyükdürsə, tendensiyanın təsiri o qədər çoxdur (şəkil a)); y_v əyrisi $\hat{y}_t$ trend xəttindən nə qədər çox meyledirsə, mövsümiliyin təsiri o qədər yüksəkdir (şəkil b)). Sıranın faktiki y_t səviyyəsini y_v nöqtələrinin hamar xəttinə nə qədər yaxınlaşırsa, təsadüfi faktorların təsiri o qədər az olur (şəkil c)).

Modelin qurulması üçün əvvəlcə dinamik sıranın sürüşmə orta ilə hamarlanması aparılır ki, bu mərhələdə v mövsümi rəqsləri ayrılır, sonra onları yox etməklə, $\hat{y}_t = T$ mövsümi rəqslərsiz trend müəyyən edilir.

Modelin qurulması üçün aşağıdakı mərhələlərlə əməliyyatlar aparmaq lazımdır:

1. Dinamik sıranın hamarlanmış ($\hat{y}_t$) səviyyələrinin müəyyənləşdirilməsi;

2. v_j mövsümi komponentin qiymətləndirilməsi və onun korrektə olunması $(\hat{v}_j)$;

3. İlkin sıradan mövsümi komponentin kənarlaşdırılması $(y_t - \hat{v}_j)$;

4. Mövsümi komponenti kənarlaşdırmaqla alınan sıranın səviyyələrinə nəzərən xətti trend tənliyinin qurulması;

5. $\hat{y}_t$ trend tərkibinin hamarlanmış qiymətlərinin hesablanması;

6. $(\hat{y}_t + \hat{v}_j)$ mövsümiliyi nəzərə alınmaqla sıranın nəzəri səviyyələrinin hesablanması;

7. Təsadüfi ε_t komponentinin hesablanması.

§10.8.3. Mövsümiliyin multiplikativ modeli

Multiplikativ modeldə dinamik sıranın səviyyəsinə onun komponentlərinin hasili kimi baxılır:

$$y_t = \hat{y}_t k_m E_t. \tag{10.41}$$

Burada y_t dinamik sıranın faktiki komponentidir; $\hat{y}_t$-tendensiyaya əsasən dinamik sıranın nəzəri səviyyələrinin qiymətləri, k_m-mövsümilik əmsalı, E_t-təsadüfi komponentin əmsalıdır.

$\hat{y}_t k_m$ hasili (y_m) mövsümi dalğaları nəzərə almaqla trendi xarakterizə edir: $y_m = \hat{y}_t k_m$.

y_m kəmiyyətini nəzərə almaqla multiplikativ modeli belə yazmaq olar:

$$y_t = \hat{y}_t \frac{y_m}{\hat{y}_t} \frac{y_t}{y_m} \ . \tag{10.42}$$

Burada

$$\frac{y_m}{\hat{y}_t} = k_m \text{ və } \frac{y_t}{y_m} = E_t \,.$$

Bu yazılış multipikativ modelin additiv modeldən fərqini göstərir. Belə ki, multiplikativ modeldə mövsümi və təsadüfi tərkiblər nisbi kəmiyyətlərlə müəyyənləşdirilir, additiv modeldə isə, bu kəmiyyətlər mütləq qiymətlərlə verilir.

Multiplikativ modelin qurulması mərhələləri də, additiv modelin qurulmasında olan mərhələlərdir.

10-cu fəslə dair suallar, testlər, çalışmalar.

Suallar

10.1. Hansı zaman sırasına qeyri -stasionar zaman sırası deyilir? Orta qiymətə nəzərən qeyri-stasionar sıranı xarakterizə edin.
10.2. Hansı sıralara bircins qeyri-stasionar sıralar deyilir?
10.3. İnteqrasiya olunan zaman sıraları dedikdə nə başa düşürsünüz?
10.4. Qeyri-stasionar zaman sıralarının reqressiya modellərinin qurulmasında hansı problemlər ortaya çıxır?
10.5. Hansı proseslərə inteqrasiya olunan proseslər deyilir?
10.6. $I(1)$ və $I(2)$ proseslərinə aid nümunələr göstərin.
10.7. Hansı proses vahid köklü proses adlanır?
10.8. Vahid kök anlayışı ilə Diki -Fuller (DF) testi necə uyğunlaşır. Nə üçün DF testi vahid kök testi adlanır?
10.9. Diki-Fuller kriteriyasının mahiyyətini izah edin.
10.10. Genişləndirilmiş Diki-Fuller (GDF) testinin mahiyyətini izah edin. Onun adi DF testindən üstünlüyü nədir?
10.11. GDF testi üçün AR(2) modeli nümunəsində tənlikləri qurun.
10.12. Hansı proseslər kointeqrasiya olunan proseslərdir?
10.13. Proselərin kointeqrasiya olunması necə yoxlanılır?
10.14. Kointeqrasiyaedici vektor hansı vektordur?
10.15. Hansı sıralara trendə nəzərən stasionar sıralar deyilir?
10.16. Periodik dinamik sırada tendensiya mövcud olduqda klassik Furye sırasından necə istifadə olunur.
10.17. Additiv və multiplikativ modellərdə mövsümiliyin qiymətləndirilməsində yanaşmalar necə fərqlənir?
10.18. Təsadüfi dolaşan proses üçün DF testini yoxlayın.
10.19. İARSO prosesini xarakterizə edin.
10.20. Zaman sıralarının trend -mövsümi modelinin qurulması proseduru hansı mərhələlərlədir?
10.21. ARSO modelini xətti çoxdəyişənli model mənada xarakterizə edin.

Testlər

10.1. $y_1,\dots,y_n$ zaman sırası o halda qeyri-stasionar adlanır ki, istənilən $t=1,\dots,n$ üçün

$$M(y_t) = q = const; \quad D(y_t) = \sigma^2 = const; \quad \text{cov}(y_t;\ y_{t+k}) = r(k)$$

şərtlərinin
a) heç olmazsa biri ödənilməsin;
b) bu bərabəbərliklərin hər üçü ödənilsin;
c) yalnız riyazi gözləmə və dispersiya zamana nəzərən sabit olsun;
d) bu bərabərliklərin heç biri ödənilməsin.

10.2. $\{y_t\},\ t = 1,\dots,n$ zaman sırası determinik $f(t)$ trendinə nəzərən o halda stasionar adlanır ki,
a) $\{y_t - f(t)\}$ sıarsı stasionar olsun;
b) $y_t = f(t) + \varepsilon_t$ formasında göstərilsin;
c) trend xətti olsun;
d) trend xətti funksiya ilə triqonometrik funksiyaların cəmi şəklində göstərilsin.

10.3. $\{y_t\},\ t = 1,\dots,n$ zaman sırasına k-cı $(k = 1,2,\dots,)$ tərtibdən inteqrasiya olunan sıra o halda deyilir ki,
a) $\{y_t\}$ sırası stasionar deyil və ya determinik trendə nəzərən stasionarlıq şərti ödənilmir;
b) $\{y_t\}$ zaman sırasına k -tərtibli fərq operatoru ilə təsir etdikdə alınan sıra stasionar olsun;
c) $\{y_t\}$ zaman sırasına k -tərtibli fərq operatoru ilə təsir etdikdə trend stasionar sıra alınsın;
d) $\{y_t\}$ zaman sırası stasionar olsun.

10.4. $\{x_t\}$ və $\{y_t\}$ zaman sıraları stasionardırsa, onda reqressiya modellərinin qurulmasında ənənəvi üsulların tətbiqi korrektdir, modelin adekvatlılıq meyarı
a) təsadüfi meyletmələrdən qurulmuş sıranın ağ küy olmasıdır;
b) təsadüfi meyletmələrdən qurulmuş sıranın dispersiyasının sıfır olmasıdır;
c) təsadüfi meyletmələrdən qurulmuş sıranın riyazi gözləməsinin dəyişməməsidir;

d) təsadüfi meyletmələrdən qurulmuş sıranın dispersiyasının sıfırdan fərqli olmasıdır.

10.5. Əgər $\{y_t\}$ qeyri - stasionardırsa və k -cı tərtibdən inteqrasiya olunursa, $\{x_t\}$ trend stasionar sıradırsa, onda fərq operatoru ilə təsir etdikdən sonra alınan reqressiya asılılığının təsadüfi meylləri
a) ağ küy əmələ gətirir;
b) ağ küy əmələ gətirmir;
c) ancaq asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olur;
d) təsadüfi kəmiyyətlər olur, lakin ağ küy olmasına təminat verilmir.

10.6. ƏKKÜ-nun köməyilə qeyr-stasionar zaman sıralarından stasionar modelin qurulmasına əsaslanan yanaşma
a) Enqel-Qreyncer yanaşmasıdır;
b) Boks-Djenkins yanaşmasıdır;
c) Aytken yanaşmasıdır;
d) Darbin-Uotson yanaşmasıdır.

10.7. Əgər $\{y_t\} \sim I(1)$, $\{x_t\} \sim I(1)$: 1-ci tərtib inteqrasiya olunan sıralardırsa, $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \varepsilon_t$ modelində ε_t $= y_t - (\alpha_0 + \alpha_1 x_t) \sim I(0)$ olduqda,
a) qeyri-stasionar zaman sıralarının müəyyən xətti kombinasiyası stasionar zaman sırası əmələ gətirir;
b) bu sıralar inteqrasiya olunmur;
c) heç bir xətti kombinasiya stasionar deyil;
d) xətti kombinasiyanın qalıqları ağ küy əmələ gətirmir.

10.8. İqtisadi nöqteyi nəzərdən iki zaman sırası o halda inteqrasiya olunandır ki, əgər uyğun göstəricilər arasında
a) uzunmüddətli qarşılıqlı əlaqə və ya tarazlıq mövcuddur, qısamüddətli perspektivdə tarazlığın pozulması mümkündür;
b) uzunmüddətli qarşılıqlı əlaqə yoxdur, yalnız qısamüddətli əlaqə vardır;
c) ancaq qısamüddətli əlaqə tarazlıdır;

d) uzunmüddətli əlaqə tarazlı deyil.

10.9. DF testinin ideyası necədir?

a) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$H_0 : \alpha_1 = 1;\ H_1 : \alpha_1 < 1;$

b) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$H_0 : \alpha_1 = 0;\ H_1 : \alpha_1 = 1;$

c) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$\Delta y_t = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$H_0 : \alpha_1 = 1;\ H_0 : \alpha_1 > 1;$

d) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$,
$H_0 : \alpha_1 \neq 0;\ H_1 : \alpha_1 \neq 1;$

10.10. Hansı fərziyyənin yoxlanılması üçün DF kriteriyasından istifadə olunur?
a) zaman sırasının stasionarlıq dərəcəsinin yoxlanılması üçün;
b) avtoreqressiya modelinin tərtibinin müəyyənləşdirilməsi üçün;
c) zaman sırasının avtokorrelyasiya əmsallarının əhəmiyyətliliyinin yoxlanılması üçün;
d) iki qeyri - stasionar zaman sırasının kointeqrasiya tərtibinin müəyyənləşdirilməsində.

10.11. $y_t = 0{,}6 y_{t-1} + \varepsilon_t$ (ε_t -burada ağ küydür) prosesi
a) 1-ci tərtibdən inteqrasiya olunandır;
b) sıfırıncı tərtibdən inteqrasiya olunandır;
c) vahid kökü özündə saxlayır;
d) DF testi ilə yoxlanılmır.

10.12. $\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2 - 1)\Delta y_{t-1} - \beta_2 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t$ modeli hansı növ modeldir?
a) səhvlərin korreksiyası modeli;
b) asılı dəyişənin paylanmış laq modeli;
c) GDF testində istifadə olunan AR(2) modelidir;
d) sıfırıncı tərtib inteqrasiya olunan modeldir.

Çalışmalar

Məsələ 10.1. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ (burada ε_t normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətdir) prosesinin $0 < \alpha_1 < 1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_1 > 1$ olduqda trayektoriyasının xarakterini tədqiq edin.

Məsələ 10.2. $y_0 = 1$ olduqda $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,n$ dolaşan prosesin şərti riyazi gözləməsini, şərti dispersiyanı və y_t ilə y_{t-1} arasındakı şərti kovariasiya və korrelyasiya əmsallarını tapın.

Cavab: 1; $n\sigma_\varepsilon^2$; $(t-1)\sigma_\varepsilon^2$; $\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}$.

Məsələ 10.3. $y_{t1} = \alpha + \beta t + \varepsilon_t,\ \ t = 1,2,...,n$ (burada ε_t -ağ küydür) və $y_{t2} = \alpha_1 + y_{t-1} + \varepsilon_t,\ y_0 = x_0,\ \ t = 1,2,...,n$ (burada ε_t -ağ küydür)

modellərini detrendləşdirməklə alınan sıraların stasionarlığını müəyyənləşdirin.

Cavab: 1-ci model stasionar, 2-ci model isə, qeyri-stasionar olur.

Məsələ 10.4. 10.3-cü tapşırıqda verilən modelləri 1-ci tərtib fərq operatoru tətbiq etməklə stasionar hala gətirin və nəticəni təhlil edin.

Cavab: $\Delta y_{t1} = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1};\ \Delta y_{t2} = \alpha_1 + \varepsilon_t$. Detrendləşdirmə əmsallarından fərqli olaraq fərq operatoru tətbiq edilməsilə hər iki halda stasionar sıra alınır. Lakin 1-ci sıraya fərq operatoru ilə təsir etdikdə sürüşkən orta prosesi alınır ki, bu prosesin tərsi mövcud deyil. Bu isə, statistik verilənlərə nəzərən modelin seçilməsində yaxşı nəticələr vermir və proqnozlaşdırma üçün effekli olmur.

Məsələ 10.5. $y_{t1} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \varepsilon_t,\ t = 1,2,...,n$ (burada ε_t -ağ küydür) və $y_{t2} = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + x_t$ (burada x_t həddi $x_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_{t-2} + \ ... + t\varepsilon_1,\ \ t = 1,2,..,n$ münasibətilə təyin olunur) sıralarını detrendləşdirdikdən sonra alınan sıraların stasionarlığını yoxlayın və onların dispersiyasını hesablayın.

Cavab: $y_{t1}^0 = y_{t1} - (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = \varepsilon_t$ sırası stasionardır və

$D\left(y_{t1}^{0}\right)=\sigma_{\varepsilon}^{2}$; $y_{t2}^{(0)}=y_{t2}-\left(\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2\right)=x_t$ sırası qeyri-stasionardır və $D\left(y_{t2}^{0}\right)=\sigma_{\varepsilon}^{2}\dfrac{t(t+1)}{2}$.

Məsələ 10.6. 10.5-ci tapşırıqdakı modellərə 2-ci tərtib fərq operatoru tətbiq etməklə alınan sıraların stasionarlığını yoxlayın və onların tərsinin mövcud olmasını araşdırın.
Cavab: $\Delta^2 y_{t1}=2\alpha_2+\varepsilon_t-2\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_{t-2}$, bu proses SO(2) prosesidir, onun riyazi gözləməsi $2\alpha_2$, tərsi mövcud deyil (çünki uyğun xarakteristik $\theta_1=1$ kökü var və bu kök təkrarlanır);

$$\Delta^2 y_{t2}=2\beta_2+\varepsilon_t$$

sırası SO(0) sırasıdır və onun tərsi vardır.

Məsələ 10.7. DF testini tətbiq etməklə $\alpha=0{,}1$ əhəmiyyətlilik səviyyəsində

t	1	2	3	4	5	6	7	
y_t	-7,1	6	-7,2	7,7	-7,1	14,4	-12,1	
t	8	9	10	11	12	13	14	15
y_t	17,4	-19,2	13,2	-12,0	11,1	-9,9	6,5	-2,8

cədvəldə verilmiş y_t, $t=1,2,\ldots,15$ zaman sırasının stasionarlığını yoxlayın.
Cavab: DF testi stasionarlığı inkar etmir.

Məsələ 10.8.

t	1	2	3	4	5	6
y_t	200	310	320	260	190	210
t	7	8	9	10	11	12
y_t	310	410	430	370	300	320

cədvəl verilənlərinə əsasən

$$y_t=\alpha_0+\alpha_1 t+a\cos\frac{\pi t}{3}+b\sin\frac{\pi t}{3}+\varepsilon_t,\ \ t=1,2,\ldots,12$$

reqressiya modelinin əmsallarını ƏKKÜ-ilə qiymətləndirin.
Cavab:
$\hat{\alpha}_0 = 184{,}79;\ \hat{\alpha}_1 = 18{,}11;\ \hat{a} = -83{,}94;\ \hat{b} = 47{,}24;\ R^2 = 0{,}9988.$

Məsələ 10.9. $y_t = \alpha + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2}$ SO(2) prosesinin tərsinin varlığı şərtlərini tapın.

Cavab: $\begin{cases} \beta_2 < 1 - \beta_1, \\ \beta_2 < 1 + \beta_1, \\ -1 < \beta_2. \end{cases}$

Məsələ 10.10. Tutaq ki, $x_t,\ y_t \sim I(1)$ kointeqrasiya olunandır və $\varepsilon_t \sim I(0)$. Göstərin ki, x_t və $\alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ kointeqrasiya olunandır.

Məsələ 10.11. Tutaq ki, $y_t \sim I(1)$. Göstərin ki, y_t və y_{t-2} sıraları kointeqrasiya olunur.
Məsələ 10.12. $y_t = t,\ \ x_t = t^2,\ t = 1,2,\ldots,30$ qeyri-stasionar zaman sıraları üçün $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t$ reqressiyanın qiymətləndirməsində onun doğruluğunu tədqiq edin.
Cavab: $y_t = \underset{(9{,}9)}{5{,}92} + \underset{(21{,}2)}{0{,}030}\, x_t$ (burada mötərizədə t-Styudent statistikasının qiymətidir), $R^2 = 0{,}94$, $DW = 0{,}06$. R^2, t- statistikası yaxşı olmasına baxmayaraq, DW çox kiçik olduğundan reqressiya doğru olmayan reqressiyadır.

ƏDƏBİYYAT

1. Əyyubova N.S. Sosial iqtisadi proseslərin proqnozlaşdırılması məsələləri: Dərslik. -Bakı, Afpoliqraf, 2014, 168 səh.
2. Əyyubova N.S. Statistika (Ümumi nəzəriyyə): Dərslik.- Bakı, Afpoliqraf, 2014, 344 səh.
3. Orucov E.Q. Maliyyə riyaziyyatı və informatikasının elemetləri.- Bakı, "BDU" nəşriyyatı, 2010, 217 səh.
4. Orucov E.Q. Riyazi iqtisadiyyat: Dərslik. –Bakı, Xəzər Universiteti nəşriyyatı, 2016, 308 səh.
5. Orucov E.Q., Kərimova Ü.Y. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın elementləri: Dərslik. Bakı, Xəzər Universiteti nəşriyyatı, 2017, 386 səh.
6. Т.А.Агапова, С.Ф.Серегина.Макроэкономика: -М.: Дело и Сервис, 2002.-448 стр.
7. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. -М.: 1976, 755 стр.
8. Баканов М.И., Шеремет А.Д. Теория эконометрического анализа. М.: Финансы и статистика, 2002, 416 стр.
9. Балдин К.В., Быстров О.Ф., Соколов М.М. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ, ДАНА, 2004, 254 стр.
10. Барбаулов В.Е., И.М. Гладких, А.С. Чуйко, Финансовые инвестиции / М.: Финансы и статистика, 2003, 542 стр.
11. Бокс Дж., Дженкинс Г.Анализ временных рядов: прогноз и управление / -М.: Мир, 1974, 406 стр.
12. Валентинов В.А. Эконометрика: практикум. -М.: "Дашков и К", 2008, 436 стр.
13. Валентинов В.А. Эконометрика. Учебник-М.: "Дашков и К", 2009, 448 стр.
14. Г.С.Вечканов. Экономическая теория: Учебник. - СПб.: Питер, 2011.-512 стр.

15. Вуколов Э.А. Основы статистического анализа / Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATİSTİCA и EXCEL учебное пособие- М.: Форум: ИНФРА-М., 2010, 464 стр.
16. Гладилин А.В., Герасимов А.Н., Громов Е.И. Эконометрика: учебное пособие/ -М.: КНОРУС, 2011, 232 стр.
17. Гюльмамедова Гюнель. Количественный анализ денежных и материальных накоплений / Германия, LAP LAMBERT, 2014, 153 стр.
18. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Выпуск 1,2 -М.: Мир, вып.1, 1971, 316 стр. вып.2, 1972, 284 стр.
19. Доугерти К. Введение в эконометрику. -М: Инфра -М , 2001, 402 стр.
20. Дубницкий В.Ю., Савченко А.А. Нелинейное оценивание параметров производственный функции Кобба-Дугласа // Системu обробкu інформацü, 2009, вып. 2(76), стр.109-113.
21. Дуброва Т.А. Прогнозирование социально-экономических процессов: Учебное пособие- М.: Маркет ДС, 2010, 192 стр.
22. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. -М.: Дело и Сервис, 2001, 368 стр.
23. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Лекционные и методическое материалы. I, II, III / Экономический журнал ВШЭ №1, 2002, стр. 85-116; №2, 2002, стр. 251-273, №3, 2002, стр. 379-401; №4, 2002, стр. 498-523; №1, 2003, стр. 79-103.
24. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А., Головань С.В. Сборник задач к начальному курсу эконометрики.: Учебное пособие. -М.: Дело, 2007, 308 стр.

25. Клейнер Г.Б., Смоляк С.А. Эконометрические зависимости: принципы и методы построение. -М.: Наука, 104 стр.
26. Ковалева Г.Д. Применение теории временные рядов в экономических исследованиях: Курс лекций. –Новосибирск: Издательство НГУ, 2005, 56 стр.
27. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник.- М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005.-399 стр.
28. Колемаев В.А. Эконометрика: Учебник – М.: ИНФРА-М, 2010, 160 стр.
29. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник.– М.: ЮНИТИ, ДАНА, 2008, 311 стр.
30. Любушин Н.П. Экономический анализ: Учебник. -М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010.-575 стр.
31. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика: Начальный курс, Учебник -8-е изд. – М.: Дело, 2007, 504 стр.
32. Малугин В.А. Линейная алгебра / М.: Рид Групп, 2011, 464 стр.
33. Мамедова Л.М. Анализ взаимосвязи ВВП и экспорта для Азербайджана с использованием ADL- модели авторегрессии и распределению лага// Azərbaycan Vergi Jurnalı, 3(129), 2016, стр. 119-130.
34. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. -М.: Анкил, 2006, 440 стр.
35. Надеждин Е.Н., Смирнова Е.Е. Эконометрика: Учебное пособие, Тула: АНО ВПО "ИЭУ", 2011, 176 стр.
36. Носко В.П. Эконометрика. Введение в регрессионный анализ временных рядов. - М.: Национальный фонд подготовки кадров, 2002, 275 стр.
37. Неруш Ю.М. Логистика: Учебник.- М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006, 520 стр.

38. Никулин И.Н. Микроэкономика: Учебник. -М.: ИНФРА-М, 2013.-553 стр.
39. Носко В.П. Эконометрика для начинающих (Дополнительные главы) -М.:ИЭПП, 2005, 379 стр.
40. Орехов Н.А., Лёвин А.Г., Горбунов Е.А. Математические методы и модели в экономике: -М.: ЮНИТИ, ДАНА, 2004, 302 стр.
41. Подкорытова О.А., М.В. Соколов. Анализ временных рядов / учебное пособие для бакалавров и магистратуры. -М.:ЮРАЙТ, 2016, 266 стр.
42. Родионова М.В., Чичагов В.В. Руководство к решению задач по эконометрике. / Пермский филиал ГУВШЭ. – Перм, 2008.- 104 стр.
43. Ступаков В.С., Токаренко Г.С. Риск - менеджмент: Учебное пособие. -М.: Финансы и статистика, 2005, 288 стр.
44. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: Учебник. -М.: ЮРАЙТ, 2012.-686 стр.
45. Тихомиров Н.П., Тихомиров Т.М., Ушмаев О.С. Методы эконометрики и многомерного статистического анализа. -М.: Экономика, 2011, 647 с.
46. Толстов Г.П. Ряды Фурье М.: Наука, 1980, 384 стр.
47. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере: учебное пособие. -М: ИД Форум, 2010, 368 стр.
48. Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. Перевод с англ.; под ред. М.Р. Ефимовой. -М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999, 528 стр.
49. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций: Учебное пособие / Под ред. В.А.Половникова и А.И.Пилипенко. -М.: Вузовский учебник, 2009, 360 стр.
50. Хеннан Э. Анализ временных рядов. -М.: Наука, 1964, 217 стр.

51. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. -М.: Статистика, 1977, 199 стр.
52. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с анг. -М.: ИНФРА-М, 2007, XII, 1028 стр.
53. Шимко П.Д. Международная экономика: Практикум.-Ростов на /Д: Феникс, 2004.-320 стр.
54. Шимко П.Д. Международная экономика: Учебник. -М.: Высшая школа, 2006.-471 стр.
55. Эконометрика: Учебник для бакалавров / Под ред. Н.И. Елисеевой. - Москва: Проспект, 2013, 288 стр.
56. Экономико-математическое методы и прикладные модели: Учебное пособие / Под редакции В.В. Федосеева – М.: ЮНИТИ, ДАНА, 2005, 304 стр.
57. Эконометрика и экономико-математическое методы и модели: пособие для студентов экономического специальности / Авторы - составители: АЛ.П Авдашкова и др. - Гомель: учреждение образования "Белорусской торгово-экономический университет потребительной кооперации", 2012, 116 стр.
58. Яновский Л.П., Буховец А.Г. Введение в эконометрику: Учебное пособие. -М.: КНОРУС, 2009, 256 стр.

ƏLAVƏLƏR

Əlavə 1. Standart normal paylanmanın sıxlıq qiymətləri cədvəli $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398942	0,398922	0,398862	0,398763	0,398623	0,398444	0,398225	0,397966	0,397668	0,397330
0,1	0,396953	0,396536	0,396080	0,395585	0,395052	0,394479	0,393868	0,393219	0,392531	0,391806
0,2	0,391043	0,390242	0,389404	0,388529	0,387617	0,386668	0,385683	0,384663	0,383606	0,382515
0,3	0,381388	0,380226	0,379031	0,377801	0,376537	0,375240	0,373911	0,372548	0,371154	0,369728
0,4	0,36827	0,366782	0,365263	0,363714	0,362135	0,360527	0,358890	0,357225	0,355533	0,353812
0,5	0,352065	0,350292	0,348493	0,346668	0,344818	0,342944	0,341046	0,339124	0,337180	0,335213
0,6	0,333225	0,331215	0,329184	0,327133	0,325062	0,322972	0,320864	0,318737	0,316593	0,314432
0,7	0,312254	0,310060	0,307851	0,305627	0,303389	0,301137	0,298872	0,296595	0,294305	0,292004
0,8	0,289692	0,287369	0,285036	0,282694	0,280344	0,277985	0,275618	0,273244	0,270864	0,268477
0,9	0,266085	0,263688	0,261286	0,258881	0,256471	0,254059	0,251644	0,249228	0,246809	0,24439
1,0	0,241971	0,239551	0,237132	0,234714	0,232297	0,229882	0,227470	0,22506	0,222653	0,220251
1,1	0,217852	0,215458	0,213069	0,210686	0,208308	0,205936	0,203571	0,201214	0,198863	0,196520
1,2	0,194186	0,19186	0,189543	0,187235	0,184937	0,182649	0,180371	0,178104	0,175847	0,173602
1,3	0,171369	0,169147	0,166937	0,164740	0,162555	0,160383	0,158225	0,15608	0,153948	0,151831
1,4	0,149727	0,147639	0,145564	0,143505	0,14146	0,139431	0,137417	0,135418	0,133435	0,131468
1,5	0,129518	0,127583	0,125665	0,123763	0,121878	0,120009	0,118157	0,116323	0,114505	0,112704
1,6	0,110921	0,109155	0,107406	0,105675	0,103961	0,102265	0,100586	0,098925	0,097282	0,095657
1,7	0,094049	0,092459	0,090887	0,089333	0,087796	0,086277	0,084776	0,083293	0,081828	0,08038
1,8	0,07895	0,077538	0,076143	0,074766	0,073407	0,072065	0,070740	0,069433	0,068144	0,066871
1,9	0,065616	0,064378	0,063157	0,061952	0,060765	0,059595	0,058441	0,057304	0,056183	0,055079

əlavə 1-in davamı

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,053991	0,052919	0,051864	0,050824	0,04980	0,048792	0,047800	0,046823	0,045861	0,044915
2,1	0,043984	0,043067	0,042166	0,041280	0,040408	0,039550	0,038707	0,037878	0,037063	0,036262
2,2	0,035475	0,034701	0,033941	0,033194	0,03246	0,031740	0,031032	0,030337	0,029655	0,028985
2,3	0,028327	0,027682	0,027048	0,026426	0,025817	0,025218	0,024631	0,024056	0,023491	0,022937
2,4	0,022395	0,021862	0,021341	0,020829	0,020328	0,019837	0,019356	0,018885	0,018423	0,017971
2,5	0,017528	0,017095	0,016670	0,016254	0,015848	0,015449	0,015060	0,014678	0,014305	0,01394
2,6	0,013583	0,013234	0,012892	0,012558	0,012232	0,011912	0,011600	0,011295	0,010997	0,010706
2,7	0,010421	0,010143	0,009871	0,009606	0,009347	0,009094	0,008846	0,008605	0,00837	0,00814
2,8	0,007915	0,007697	0,007483	0,007274	0,007071	0,006873	0,006679	0,006491	0,006307	0,006127
2,9	0,005953	0,005782	0,005616	0,005454	0,005296	0,005143	0,004993	0,004847	0,004705	0,004567
3,0	0,004432	0,004301	0,004173	0,004049	0,003928	0,003810	0,003695	0,003584	0,003475	0,00337
3,1	0,003267	0,003167	0,00307	0,002975	0,002884	0,002794	0,002707	0,002623	0,002541	0,002461
3,2	0,002384	0,002309	0,002236	0,002165	0,002096	0,002029	0,001964	0,001901	0,001840	0,001780
3,3	0,001723	0,001667	0,001612	0,001560	0,001508	0,001459	0,001411	0,001364	0,001319	0,001275
3,4	0,001232	0,001191	0,001151	0,001112	0,001075	0,001038	0,001003	0,000969	0,000936	0,000904
3,5	0,000873	0,000843	0,000814	0,000785	0,000758	0,000732	0,000706	0,000681	0,000657	0,000634
3,6	0,000612	0,00059	0,000569	0,000549	0,000529	0,000510	0,000492	0,000474	0,000457	0,000441
3,7	0,000425	0,000409	0,000394	0,000380	0,000366	0,000353	0,000340	0,000327	0,000315	0,000303
3,8	0,000292	0,000281	0,000271	0,000260	0,000251	0,000241	0,000232	0,000223	0,000215	0,000207
3,9	0,000199	0,000191	0,000184	0,000177	0,000170	0,000163	0,000157	0,000151	0,000145	0,000139
4,0	0,000134	0,000129	0,000124	0,000119	0,000114	0,000109	0,000105	0,000101	0,000097	0,000093

Cədvəl üçün izahat: Burada a=0 (riyazi gözləmə) və σ=1 (orta kvadratik kənarlaşma) parametləri ilə standart normal paylanmanın sıxlığının qiymətləri verilir. EXCEL-də bu funksiyanın qiymətlərinin =НОРМРАСП(x;0;1;0) formulunun köməyi ilə hesablamaq olar. Əgər nəzərdən keçirdiyiniz paylanma standart paylanmadan fərqlidirsə (a≠0 или σ≠1) əvvəlcədən onu normallaşdırmaq lazımdır: x*=(x-a)/σ, bundan sonraa cədvəldən və ya EXCEL-də =НОРМРАСП(x;a;σ;0) funksiyasından istifadə etmək lazımdır.

Əlavə 2. t-nin müxtəlif qiymətlərində Laplas inteqral funksiyasının qiymətləri.
(Normal paylanma funksiyası üçün)

t	*F(t)*	*t*	*F(t)*	*t*	*F(t)*	*t*	*F(t)*	*t*	*F(t)*	*T*	*F(t)*	*t*	*F(t)*
0.00	0.00000	0.22	0.17413	0.44	0.34006	0.66	0.49075	0.88	0.62114	1.10	0.72867	1.32	0.81316
0.01	0.00798	0.23	0.18191	0.45	0.34729	0.67	0.49714	0.89	0.62653	1.11	0.73300	1.33	0.81648
0.02	0.01596	0.24	0.18967	0.46	0.35448	0.68	0.50350	0.90	0.63188	1.12	0.73729	1.34	0.81975
0.03	0.02393	0.25	0.19741	0.47	0.36164	0.69	0.50981	0.91	0.63718	1.13	0.74152	1.35	0.82298
0.04	0.03191	0.26	0.20514	0.48	0.36877	0.70	0.51607	0.92	0.64243	1.14	0.74571	1.36	0.82617
0.05	0.03988	0.27	0.21284	0.49	0.37587	0.71	0.52230	0.93	0.64763	1.15	0.74986	1.37	0.82931
0.06	0.04784	0.28	0.22052	0.50	0.38292	0.72	0.52848	0.94	0.65278	1.16	0.75395	1.38	0.83241
0.07	0.05581	0.29	0.22818	0.51	0.38995	0.73	0.53461	0.95	0.65789	1.17	0.75800	1.39	0.83547
0.08	0.06376	0.30	0.23582	0.52	0.39694	0.74	0.54070	0.96	0.66294	1.18	0.76200	1.40	0.83849
0.09	0.07171	0.31	0.24344	0.53	0.40389	0.75	0.54675	0.97	0.66795	1.19	0.76595	1.41	0.84146
0.10	0.07966	0.32	0.25103	0.54	0.41080	0.76	0.55275	0.98	0.67291	1.20	0.76986	1.42	0.84439
0.11	0.08759	0.33	0.25860	0.55	0.41768	0.77	0.55870	0.99	0.67783	1.21	0.77372	1.43	0.84728
0.12	0.09552	0.34	0.26614	0.56	0.42452	0.78	0.56461	1.00	0.68269	1.22	0.77754	1.44	0.85013
0.13	0.10348	0.35	0.27366	0.57	0.43132	0.79	0.57047	1.01	0.68750	1.23	0.78130	1.45	0.85294
0.14	0.11134	0.36	0.28115	0.58	0.43809	0.80	0.57629	1.02	0.69227	1.24	0.78502	1.46	0.85571
0.15	0.11924	0.37	0.28862	0.59	0.44481	0.81	0.58206	1.03	0.69699	1.25	0.78870	1.47	0.85844
0.16	0.12712	0.38	0.29605	0.60	0.45149	0.82	0.58778	1.04	0.70166	1.26	0.79233	1.48	0.86113
0.17	0.13499	0.39	0.30346	0.61	0.45814	0.83	0.59346	1.05	0.70628	1.27	0.79592	1.49	0.86378
0.18	0.14285	0.40	0.31084	0.62	0.46474	0.84	0.59909	1.06	0.71086	1.28	0.79945	1.50	0.86639
0.19	0.15069	0.41	0.31819	0.63	0.47131	0.85	0.60468	1.07	0.71538	1.29	0.80295	1.51	0.86696
0.20	0.15852	0.42	0.32552	0.64	0.47783	0.86	0.61021	1.08	0.71986	1.30	0.80640	1.52	0.87149
0.21	0.16633	0.43	0.33280	0.65	0.48431	0.87	0.61570	1.09	0.72429	1.31	0.80980	1.53	0.87398

əlavə 2-nin davamı

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	T	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
1.54	0.87644	1.80	0.92814	2.06	0.96060	2.32	0.97966	2.58	0.99012	2.84	0.99549	3.10	0.99806
1.55	0.87886	1.81	0.92970	2.07	0.96155	2.33	0.98019	2.59	0.99040	2.85	0.99563	3.11	0.99813
1.56	0.88124	1.82	0.93124	2.08	0.96247	2.34	0.98072	2.60	0.99068	2.86	0.99576	3.12	0.99819
1.57	0.88358	1.83	0.93275	2.09	0.96338	2.35	0.98123	2.61	0.99095	2.87	0.99590	3.13	0.99825
1.58	0.88589	1.84	0.93423	2.10	0.96427	2.36	0.98172	2.62	0.99121	2.88	0.99602	3.14	0.99831
1.59	0.88817	1.85	0.93569	2.11	0.96514	2.37	0.98221	2.63	0.99146	2.89	0.99615	3.15	0.99837
1.60	0.89040	1.86	0.93711	2.12	0.96599	2.38	0.98269	2.64	0.99171	2.90	0.99627	3.16	0.99842
1.61	0.89260	1.87	0.93852	2.13	0.96683	2.39	0.98315	2.65	0.99195	2.91	0.99639	3.17	0.99848
1.62	0.89477	1.88	0.93989	2.14	0.96765	2.40	0.98360	2.66	0.99219	2.92	0.99650	3.18	0.99853
1.63	0.89690	1.89	0.94124	2.15	0.96844	2.41	0.98405	2.67	0.99241	2.93	0.99661	3.19	0.99858
1.64	0.89899	1.90	0.94257	2.16	0.96923	2.42	0.98448	2.68	0.99263	2.94	0.99672	3.20	0.99863
1.65	0.90106	1.91	0.94387	2.17	0.96999	2.43	0.98490	2.69	0.99285	2.95	0.99682	3.21	0.99867
1.66	0.90309	1.92	0.94514	2.18	0.97074	2.44	0.98531	2.70	0.99307	2.96	0.99692	3.22	0.99872
1.67	0.90508	1.93	0.94639	2.19	0.97148	2.45	0.98571	2.71	0.99327	2.97	0.99702	3.23	0.99876
1.68	0.90704	1.94	0.94762	2.20	0.97219	2.46	0.98611	2.72	0.99347	2.98	0.99712	3.24	0.99880
1.69	0.90897	1.95	0.94882	2.21	0.97289	2.47	0.98649	2.73	0.99367	2.99	0.99721	3.25	0.99855
1.70	0.91087	1.96	0.95000	2.22	0.97358	2.48	0.98686	2.74	0.99386	3.00	0.99730	3.26	0.99889
1.71	0.91273	1.97	0.95116	2.23	0.97425	2.49	0.98723	2.75	0.99404	3.01	0.99739	3.27	0.99892
1.72	0.91457	1.98	0.95230	2.24	0.97491	2.50	0.98758	2.76	0.99422	3.02	0.99747	3.28	0.99896
1.73	0.91637	1.99	0.95341	2.25	0.97555	2.51	0.98793	2.77	0.99439	3.03	0.99755	3.29	0.99900
1.74	0.91814	2.00	0.95450	2.26	0.97618	2.52	0.98826	2.78	0.99456	3.04	0.99763	3.30	0.99903
1.75	0.91988	2.01	0.95557	2.27	0.97679	2.53	0.98859	2.79	0.99473	3.05	0.99771	3.31	0.99907
1.76	0.92159	2.02	0.95662	2.28	0.97739	2.54	0.98891	2.80	0.99489	3.06	0.99779	3.32	0.99910
1.77	0.92327	2.03	0.95764	2.29	0.97798	2.55	0.98923	2.81	0.99505	3.07	0.99786	3.33	0.99913
1.78	0.92492	2.04	0.95865	2.30	0.97855	2.56	0.98953	2.82	0.99520	3.08	0.99793	3.34	0.99916
1.79	0.92655	2.05	0.95964	2.31	0.97911	2.57	0.98983	2.83	0.99535	3.09	0.99800	3.35	0.99919

əlavə 2-nin davamı

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$	T	$F(t)$	t	$F(t)$
3.36	0.99922	3.49	0.99952	3.62	0.99971	3.75	0.99982	3.88	0.99990
3.37	0.99925	3.50	0.99953	3.63	0.99972	3.76	0.99983	3.89	0.99990
3.38	0.99928	3.51	0.99955	3.64	0.99973	3.77	0.99984	3.90	0.99990
3.39	0.99930	3.52	0.99957	3.65	0.99974	3.78	0.99984	3.91	0.99991
3.40	0.99933	3.53	0.99958	3.66	0.99975	3.79	0.99985	3.92	0.99991
3.41	0.99935	3.54	0.99960	3.67	0.99976	3.80	0.99986	3.93	0.99992
3.42	0.99937	3.55	0.99961	3.68	0.99977	3.81	0.99986	3.94	0.99992
3.43	0.99940	3.56	0.99963	3.69	0.99978	3.82	0.99987	3.95	0.99992
3.44	0.99942	3.57	0.99964	3.70	0.99978	3.83	0.99987	3.96	0.99992
3.45	0.99944	3.58	0.99966	3.71	0.99979	3.84	0.99988	3.97	0.99993
3.46	0.99946	3.59	0.99967	3.72	0.99980	3.85	0.99988	3.98	0.99993
3.47	0.99948	3.60	0.99968	3.73	0.99981	3.86	0.99989	3.99	0.99993
3.48	0.99950	3.61	0.99969	3.74	0.99982	3.87	0.99989		

Laplas funksiyası qiymətləri cədvəli – təsadüfi kəmiyyətin verilən intervala uyğun qiymət alması ehtimalını ifadə edir. Riyazi statistika və ehtimal nəzəriyyəsi məsələlərinin həllində, adətən, arqumentin məlum qiyməti əsasında Laplas funksiyasının qiymətləndirilməsi, ya da, əksinə Laplas funksiyasının məlum qiyməti əsasında arqumentin qiymətini müəyyən etmək tələb olunur.

Əlavə 3. χ^2 *paylanmasının sərbəst hədlərə görə müxtəlif əhəmiyyətlilik səviyyələrində qiymətləri*

df	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579	0.10153	0.45494	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	0.87944
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.10259	0.21072	0.57536	1.38629	2.77259	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	0.07172	0.11483	0.21580	0.35185	0.58437	1.21253	2.36597	4.10834	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	1.06362	1.92256	3.35669	5.38527	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	0.41174	0.55430	0.83121	1.14548	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	0.67573	0.87209	1.23734	1.63538	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	0.98926	1.23904	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	1.34441	1.64650	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.21885	13.36157	15.50731	17.53455	20.0902	21.95495
9	1.73493	2.08790	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.38875	14.68366	16.91898	19.02277	21.6659	23.58935
10	2.15586	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182	12.54886	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	2.60322	3.05348	3.81575	4.57481	5.57778	7.58414	10.34100	13.70069	17.27501	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	3.07382	3.57057	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.34032	14.84540	18.54935	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	3.56503	4.10692	5.00875	5.89186	7.04150	9.29907	12.33976	15.98391	19.81193	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	4.07467	4.66043	5.62873	6.57063	7.78953	10.16531	13.33927	17.11693	21.06414	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	4.60092	5.22935	6.26214	7.26094	8.54676	11.03654	14.33886	18.24509	22.30713	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132

əlavə 3-ün davamı

df	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
16	5.14221	5.81221	6.90766	7.96165	9.31224	11.91222	15.33850	19.36886	23.54183	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	5.69722	6.40776	7.56419	8.67176	10.08519	12.79193	16.33818	20.48868	24.76904	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	6.26480	7.01491	8.23075	9.39046	10.86494	13.67529	17.33790	21.60489	25.98942	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645
19	6.84397	7.63273	8.90652	10.11701	11.65091	14.56200	18.33765	22.71781	27.20357	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	7.43384	8.26040	9.59078	10.85081	12.44261	15.45177	19.33743	23.82769	28.41198	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	8.03365	8.89720	10.28290	11.59131	13.23960	16.34438	20.33723	24.93478	29.61509	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	8.64272	9.54249	10.98232	12.33801	14.04149	17.23962	21.33704	26.03927	30.81328	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	9.26042	10.19572	11.68855	13.09051	14.84796	18.13730	22.33688	27.14134	32.00690	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	9.88623	10.85636	12.40115	13.84843	15.65868	19.03725	23.33673	28.24115	33.19624	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	10.51965	11.52398	13.11972	14.61141	16.47341	19.93934	24.33659	29.33885	34.38159	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	11.16024	12.19815	13.84390	15.37916	17.29188	20.84343	25.33646	30.43457	35.56317	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	11.80759	12.87850	14.57338	16.15140	18.11390	21.74940	26.33634	31.52841	36.74122	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	12.46134	13.56471	15.30786	16.92788	18.93924	22.65716	27.33623	32.62049	37.91592	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	13.12115	14.25645	16.04707	17.70837	19.76774	23.56659	28.33613	33.71091	39.08747	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	13.78672	14.95346	16.79077	18.49266	20.59923	24.47761	29.33603	34.79974	40.25602	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

χ^2 paylanması, *t* Styudent paylanması halında olduğu kimi, sərbəst hədlərin sayına görə müəyyən olunur. Verilmiş sərbəst hədlərin sayına görə χ^2 paylanması üçün kritik qiymətlər təqdim olunur. Axtarılan qiymətlər müvafiq sərbəst həddlərin sayına və seçilən ehtimala uyğun sütunların kəsişməsi xanasında yerləşir. Məsələn, sərbəst hədlərin sayı 4, ehtimal 0,25 olarsa, χ^2 paylanması üçün kritik qiymət 5,38527 olacaq. Yəni, 4 sərbəst hədli χ^2 paylanması üçün sıxlıq əyrisinin sahəsi 5.38527 qiymətindən sağda 0,25-ə bərabərdir.

Əlavə 4. Korrelyasiya əmsalının 0,05 və 0,01 əhəmiyyətlilik səviyyələrində kritik qiymətləri

$\kappa = n - 2$	$p = 0,05$	$p = 0,01$
5	0,75	0,87
6	0,71	0,83
7	0,67	0,8
8	0,63	0,77
9	0,6	0,74
10	0,58	0,71
11	0,55	0,68
12	0,53	0,66
13	0,51	0,64
14	0,5	0,62
15	0,48	0,61
16	0,47	0,59
17	0,46	0,58
18	0,44	0,56
19	0,43	0,55
20	0,42	0,54
21	0,41	0,53
22	0,4	0,52
23	0,4	0,51
24	0,39	0,5
25	0,38	0,49
26	0,37	0,48
27	0,37	0,47
28	0,36	0,46
29	0,36	0,46
30	0,35	0,45
35	0,33	0,42
40	0,3	0,39
45	0,29	0,37
50	0,27	0,35
60	0,25	0,33
70	0,23	0,3
80	0,22	0,28
90	0,21	0,27
100	0,2	0,25
125	0,17	0,23
150	0,16	0,21
200	0,14	0,18
300	0,11	0,15
400	0,1	0,13
500	0,09	0,12
700	0,07	0,1
900	0,06	0,09
1000	0,06	0,09

Burada k – sərbəst hədlərin sayı, n – iki seçimüzrə müşa-hidələrin cəmi, yəni $n_1 + n_2$, p - əhəmiyyətlilik səviyyələ-ridir. Kritik qiymətin müəyyən olunması üçün ilk növbədə 1-ci sütundakı formula uyğun sərbəst hədlərin sayı müəyyən olunmalıdır. Sonra isə müvafiq sətirdə seçilən əhəmiyyətlilik səviyyəsinə uyğun olaraq kritik qiymət seçilir.

Sadə korrelyasiyada sərbəs-tlik həddi variantların sayına nəzərən n-2 kimi götürülür, xüsusi korrelyasiya halında isə həm də nəzərə alınmayan dəyişənlərin sayı da çıxılma-lıdır.

Əlavə 5. t- Styudent meyarının kritik qiymətləri (0,050,01;0,001)

df	p=0,05	p=0,01	p=0,001	df	p=0,05	p=0,01	p=0,001	df	p=0,05	p=0,01	p=0,001
1	12,70	63,65	636,61	16	2,120	2,921	4,015	31	2,040	2,744	3,633
2	4,303	9,925	31,602	17	2,110	2,898	3,965	32	2,037	2,738	3,622
3	3,182	5,841	12,923	18	2,101	2,878	3,922	33	2,035	2,733	3,611
4	2,776	4,604	8,610	19	2,093	2,861	3,883	34	2,032	2,728	3,601
5	2,571	4,032	6,869	20	2,086	2,845	3,850	35	2,030	2,724	3,591
6	2,447	3,707	5,959	21	2,080	2,831	3,819	36	2,028	2,719	3,582
7	2,365	3,499	5,408	22	2,074	2,819	3,792	37	2,026	2,715	3,574
8	2,306	3,355	5,041	23	2,069	2,807	3,768	38	2,024	2,712	3,566
9	2,262	3,250	4,781	24	2,064	2,797	3,745	39	2,023	2,708	3,558
10	2,228	3,169	4,587	25	2,060	2,787	3,725	40	2,021	2,704	3,551
11	2,201	3,106	4,437	26	2,056	2,779	3,707	41	2,020	2,701	3,544
12	2,179	3,055	4,318	27	2,052	2,771	3,690	42	2,018	2,698	3,538
13	2,160	3,012	4,221	28	2,049	2,763	3,674	43	2,017	2,695	3,532
14	2,145	2,977	4,140	29	2,045	2,756	3,659	44	2,015	2,692	3,526
15	2,131	2,947	4,073	30	2,042	2,750	3,646	45	2,014	2,690	3,520

əlavə 5-in davamı

df	p=0,05	p=0,01	p=0,001	df	p=0,05	p=0,01	p =0,001	df	p=0,05	p=0,01	p=0,001
46	2,013	2,687	3,515	62	1,999	2,657	3,454	78	1,991	2,640	3,420
47	2,012	2,685	3,510	63	1,998	2,656	3,452	79	1,990	2,639	3,418
48	2,011	2,682	3,505	64	1,998	2,655	3,449	80	1,990	2,639	3,416
49	2,010	2,680	3,500	65	1,997	2,654	3,447	90	1,987	2,632	3,402
50	2,009	2,678	3,496	66	1,997	2,652	3,444	100	1,984	2,626	3,390
51	2,008	2,676	3,492	67	1,996	2,651	3,442	110	1,982	2,621	3,381
52	2,007	2,674	3,488	68	1,995	2,650	3,439	120	1,980	2,617	3,373
53	2,006	2,672	3,484	69	1,995	2,649	3,437	130	1,978	2,614	3,367
54	2,005	2,670	3,480	70	1,994	2,648	3,435	140	1,977	2,611	3,361
55	2,004	2,688	3,476	71	1,994	2,647	3,433	150	1,976	2,609	3,357
56	2,003	2,667	3,473	72	1,993	2,646	3,431	200	1,972	2,601	3,340
57	2,002	2,665	3,470	73	1,993	2,645	3,429	250	1,969	2,596	3,330
58	2,002	2,663	3,466	74	1,993	2,644	3,427	300	1,968	2,592	3,323
59	2,001	2,662	3,463	75	1,992	2,643	3,425	350	1,967	2,590	3,319
60	2,000	2,660	3,460	76	1,992	2,642	3,423	∞			
61	2,000	2,659	3,457	77	1,991	2,641	3,422				

Əlavə 6*. *F- Fişer meyarının* α =0,05 *əhəmiyyətlilik səviyyəsində qiymətləri cədvəli*

k1 / k2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,5	230,1	233,9	238,8	243,9	249,0	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48

əlavə 6-un davamı*

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Əlavə 7. Darbin-Uatson meyarı üçün 5%-li əhəmiyyətlilik səviyyəsində kritik sərhədlər cədvəli

Critical Values for the Durbin Watson Statistic (d)										
Level of Significance α = .05										
n	*k* = 1		*k* = 2		*k* = 3		*k* = 4		*k* = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0.61	1.40								
7	0.70	1.36	0.47	1.90						
8	0.76	1.33	0.56	1.78	0.37	2.29				
9	0.82	1.32	0.63	1.70	0.46	2.13	0.30	2.59		
10	0.88	1.32	0.70	1.64	0.53	2.02	0.38	2.41	0.24	2.82
11	0.93	1.32	0.66	1.60	0.60	1.93	0.44	2.28	0.32	2.65
12	0.97	1.33	0.81	1.58	0.66	1.86	0.51	2.18	0.38	2.51
13	1.01	1.34	0.86	1.56	0.72	1.82	0.57	2.09	0.45	2.39
14	1.05	1.35	0.91	1.55	0.77	1.78	0.63	2.03	0.51	2.30
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21

əlavə 7-nin davamı

16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.92	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.96	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83

əlavə 7-nin davamı

31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78

əlavə 7-nin davamı

50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
150	1.72	1.75	1.71	1.76	1.69	1.77	1.68	1.79	1.66	1.80
200	1.76	1.78	1.75	1.79	1.74	1.80	1.73	1.81	1.72	1.82

Əlavə 8. Pirson, Spirmen ranq korrelyasiya əmsalları üçün kritik qiymətlər cədvəli

	p					p					p			
k	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,001*	*k*	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,001*	*k*	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,001*
5	0,805	0,878	0,959	0,991	33	0,291	0,344	0,442	0,547	61	0,213	0,252	0,327	0,411
6	0,729	0,811	0,917	0,974	34	0,287	0,339	0,436	0,539	62	0,211	0,250	0,325	0,408
7	0,669	0,754	0,875	0,951	35	0,283	0,334	0,430	0,532	63	0,209	0,248	0,322	0,405
8	0,621	0,707	0,834	0,925	36	0,279	0,329	0,424	0,525	64	0,207	0,246	0,320	0,402
9	0,582	0,666	0,798	0,898	37	0,275	0,325	0,418	0,519	65	0,206	0,244	0,317	0,399
10	0,549	0,632	0,765	0,872	38	0,271	0,320	0,413	0,513	66	0,204	0,242	0,315	0,396
11	0,521	0,602	0,735	0,847	39	0,267	0,316	0,408	0,507	67	0,203	0,240	0,313	0,393
12	0,497	0,576	0,708	0,823	40	0,264	0,312	0,403	0,501	68	0,201	0,239	0,310	0,390
13	0,476	0,553	0,684	0,801	41	0,260	0,308	0,398	0,495	69	0,200	0,237	0,308	0,388
14	0,458	0,532	0,661	0,780	42	0,257	0,304	0,393	0,490	70	0,198	0,235	0,306	0,385
15	0,441	0,514	0,641	0,760	43	0,254	0,301	0,389	0,484	80	0,185	0,220	0,286	0,361
16	0,426	0,497	0,623	0,742	44	0,251	0,297	0,384	0,479	90	0,174	0,207	0,270	0,341
17	0,412	0,482	0,606	0,725	45	0,248	0,294	0,380	0,474	100	0,165	0,197	0,256	0,324
18	0,400	0,468	0,590	0,708	46	0,246	0,291	0,376	0,469	110	0,158	0,187	0,245	0,310
19	0,389	0,456	0,575	0,693	47	0,243	0,288	0,372	0,465	120	0,151	0,179	0,234	0,297
20	0,378	0,444	0,561	0,679	48	0,240	0,285	0,368	0,460	130	0,145	0,172	0,225	0,285
21	0,369	0,433	0,549	0,665	49	0,238	0,282	0,365	0,456	140	0,140	0,166	0,217	0,275
22	0,360	0,423	0,537	0,652	50	0,235	0,279	0,361	0,451	150	0,135	0,160	0,210	0,266
23	0,352	0,413	0,526	0,640	51	0,233	0,276	0,358	0,447	200	0,117	0,139	0,182	0,231
24	0,344	0,404	0,515	0,629	52	0,231	0,273	0,354	0,443	250	0,104	0,124	0,163	0,207

Əlavə 8-in davamı

	p					*p*					*p*			
k	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,001*	*k*	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,00*	*k*	*0,10*	*0,05*	*0,01*	*0,001*
25	0,337	0,396	0,505	0,618	53	0,228	0,271	0,351	0,439	300	0,095	0,113	0,149	0,189
26	0,330	0,388	0,496	0,607	54	0,226	0,268	0,348	0,435	350	0,088	0,105	0,138	0,175
27	0,323	0,381	0,487	0,597	55	0,224	0,266	0,345	0,432	400	0,082	0,098	0,129	0,164
28	0,317	0,374	0,479	0,588	56	0,222	0,263	0,341	0,428	450	0,078	0,092	0,121	0,155
29	0,311	0,367	0,471	0,579	57	0,220	0,261	0,339	0,424	500	0,074	0,088	0,115	0,147
30	0,306	0,361	0,463	0,570	58	0,218	0,259	0,336	0,421	600	0,067	0,080	0,105	0,134
31	0,301	0,355	0,456	0,562	59	0,216	0,256	0,333	0,418					
32	0,296	0,349	0,449	0,554	60	0,214	0,254	0,330	0,414					

MÜNDƏRİCAT

«AVROPA» nəşriyyatı

Nəşriyyatın direktoru: Şöhrət SƏLİMBƏYLİ
Texniki redaktor: Mail XƏLİLOV

Kitab *"AFPoliqrAF"* mətbəəsində çap olunmuşdur

Mətbəənin direktoru: Fuad HÜSEYNOV

afpoliqraf@mail.ru | Tel.: +994(12) 510 96 74
afpoliqraf@gmail.com | Mob.: +994(50) 405 96 74

Yığılmağa verilmişdir: 19.01.2018
Çapa imzalanmışdır: 14.02.2018
Qarnitura: Times New Roman
Şərti çap vərəqi: 24
Formatı: 64x90 $^{1}/_{16}$
Tiraj 200

Qeyd üçün