Linjär algebra och numerisk analys, 2020

Laboration nummer 1: Svartkroppsstrålning, Wiens lag

Strålningsflödet vid svartkroppsstrålning till exempel från en hålrumsstrålare ges av Plancks strålningslag. För den monokromatiska emittansen för våglängd λ vid temperatur T gäller:

$$m_e(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)}$$

där $h = 6.6262 \cdot 10^{-34} Js$ är Plancks konstant, $c = 2.9979 \cdot 10^8 ms^{-1}$ är ljushastigheten i tomrum och $k = 1.3807 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$ är Bolzmanns konstant.

Du kan studera emittansen $m_e(\lambda, T)$ genom att rita ut den som funktion av λ för fixt T. På kurshemsidan hitter du filen `planck.m` som beräknar $m_e(\lambda, t)$.

Vid studiet av funktionen framgår att huvuddelen av strålningen förskjuts mot allt kortare våglängder då temperaturen ökar, se figur 1, där intervallet för synligt ljus är markerat. Enligt Wiens förskjutningslag gäller

$$\lambda_{max} T = b$$

där λ_{max} är den våglängd för vilken strålningen är maximal och konstanten b kallas Wiens konstant.

Uppgifter:

a. Bestäm λ_{max} med `fminbnd` i MATLAB då $T = 3000, 4000, 5000$. Se till att maxpunkten beräknas med tillräcklig noggrannhet genom att styra med `optimset`,
`optimset( 'TolX' , 1e-10)` går bra. Verkar lagen stämma? Vad blir värdet på Wiens konstant?

b. Ett alternativt sätt att bestämma Wiens konstant, som även bevisar lagen, är följande: Genom att derivera m_e med avseende på λ, sätta derivatan till 0 och införa variabeltransformationen $x = \frac{hc}{k\lambda T}$ (för fixt T) får vi ekvationen

$$(5 - x)e^x - 5 = 0 \tag{1}$$

vars lösning ger x^*. Genom återtransformation bestäms sedan Wiens konstant, produkten λT.

Gör gärna denna härledning i detalj men den behöver inte redovisas.

För att lösa ekvation (1) använder vi Newtons metod. Rita upp funktionen $(5 - x)e^x - 5$ i MATLAB för att grovt lokalisera x^*. Gör sedan ett par Newton-iterationer för att bestämma x^* noggrant. Kontrollera värdet på Wiens konstant med a)-uppgiften.

c. Totala strålningsflödet (emittansen) $M_e(T)$ är integralen av m_e över alla våglängder, dvs

$$M_e(T) = \int_0^\infty m_e(\lambda, T)\, d\lambda \ . \tag{2}$$

Genom variabeltransformation (samma som i uppgift b) till den kända integralen $\int_0^\infty \frac{s^3}{e^s-1}ds = \frac{\pi^4}{15}$ kan man visa att $M_e(T) = \sigma T^4$, där $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ är Stefan-Boltzmanns konstant. Om vi vill bestämma totala energin $M_s(T)$ över synligt ljus $0.4 \leq \lambda \leq 0.7$ (μm) kan vi inte räkna ut integralen analytiskt med för oss kända metoder. Använd `integral` i MATLAB för att bestämma

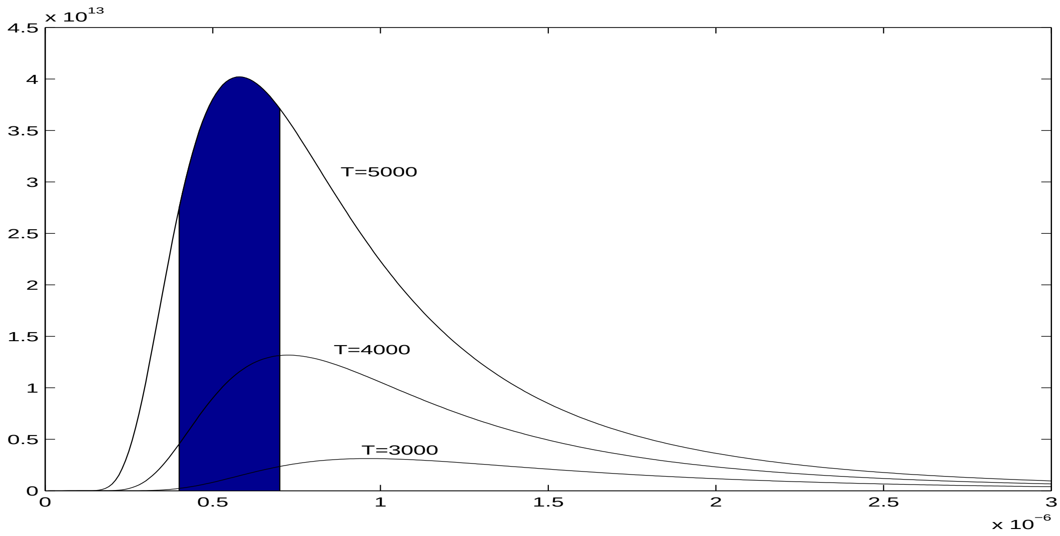
$$M_s(T) = \int_{4\cdot 10^{-7}}^{7\cdot 10^{-7}} m_e(\lambda, T) d\lambda \tag{3}$$

Rita upp kvoten mellan energin i synligt spektrum och totala energin dvs. $M_s(T)/M_e(T)$ för olika T-värden. Integralen $M_s(T)$ beräknas alltså för många olika T-värden mellan säg 100 och 10000 och integralvärdena sparas lämpligen i en vektor. Generera sedan på lämpligt sätt en figur liknande figur 2. För vilken temperatur är kvoten mellan energin för synligt ljus och den totala energin som störst?

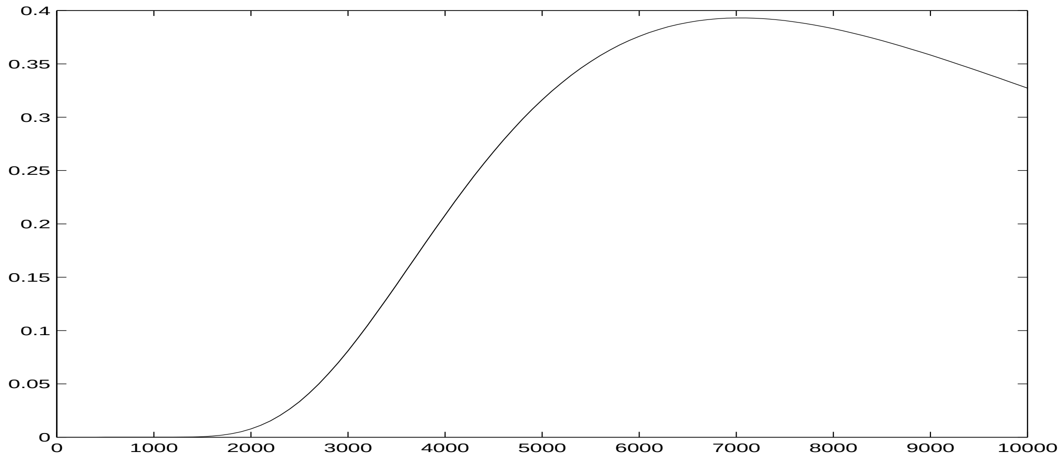
d. En alternativ teknik att bestämma $M_s(T)$ i uppgift c) är att skriva om integralen som ett ode-problem genom att derivera med avseende på övre gränsen. Gör det och använd `ode45` för att lösa de ingående ode-problemen. Jämför med lösningen i c)-uppgiften dvs. kontrollera att du får en liknande figur 2 i detta fall. Gör en enkel studie av beräkningstiden för alternativen enligt c-uppgiften och d-uppgiften för bestämning av kvoten $M_s(T)/M_e(T)$ för alla aktuella T-värden. Använd rutinerna `tic` och `toc` i MATLAB. Vilken metod är den snabbare? Vi kommer senare i kursen se hur `integral` och `ode45` fungerar och analysera lösningsnogrannheten.

Vid redovisningen ska du kunna:

1. Verifiera Wiens konstant genom att exekvera program som löser a-uppgiften.
2. Visa upp MATLAB-program för Newtons metod enligt b-uppgiften, köra det och få korrekt värde på Wiens konstant.
3. Presentera en figur lik figur 2 genom körning av program som beräknar integralerna med `integral`.
4. Redovisa omskrivningen från integral till differentialekvation i d-uppgiften. Köra program som löser de aktuella ODE-problemen med `ode45`. Visa att du får samma figur som i 3. Redovisa jämförelsen av tidsåtgången för alternativen i c-uppgiften och d-uppgiften.



Figur 1: Emmitans vid svartkroppsstrålning enligt Plancks lag, vid olika våglängd och tre temperaturer



Figur 2: Kvoten mellan energin för synligt ljus och totala energin