Linjär algebra och numerisk analys, 2020

Laboration nummer 3: Numerisk lösning av differentialekvationer från elektromagnetisk fältteori

Problemställningar
En elektron med massa m och laddning Q rör sig i ett elektriskt och magnetiskt kraftfält med fältstyrkorna $\mathbf{E}(x,y,z)$ resp. $\mathbf{B}(x,y,z)$. Om elektronens position beskrivs med Cartesiska koordinater $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ och hastighetsvektor $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{s}(t) = (u(t), v(t), w(t))$ så gäller:

$$m\frac{d\mathbf{s}}{dt} = Q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{s}) \tag{1}$$

där $\times$ står för kryssprodukten.

Denna typ av ekvationer studeras närmare i kursen *Elektromagnetisk fältteori* i F2. Man kan skriva (1) som ett system av första ordningens ekvationer för de sex komponenterna $x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w$.
Låt nu fälten vara $\mathbf{E} = (e, 0, 0)$ och $\mathbf{B} = (0, 0, b)$ för (x, y) i cirkeln $x^2 + y^2 \leq R^2$ och noll utanför. Om elektronens z-hastighet utanför fältet är noll, så förblir den noll i fältet och dess bana kan beskrivas med enbart koordinaterna (x, y). Systemet kan nu beskrivas med de fyra komponenterna x, y, u, v. Genom lämpliga längd- och tidsskalor kan vi låta $Q \cdot e/m = Q \cdot b/m = R = 1$.
Vi formulerar våra två problem:
1. Att ta reda på var en elektron som kommer in vid $(1, 0)$ med hastighet $(-2, 0)$ lämnar fältet.
2. Att bestämma ingångshastighet $u(0)$ vid $(1, 0)$ så att elektronen lämnar fältet i punkten $(0, 1)$.

Uppgifter.
a. Skriv upp systemet av differentialekvationer för komponenterna x, y, u, v på matrisform $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, där $\mathbf{y} = [x, y, u, v]^T$ och $\mathbf{b}$ är en vektor som inte beror på $\mathbf{y}$. Systemet är alltså linjärt.
b. Lös problem 1 med MATLAB-funktionen `ode45` och rita en graf över elektronens bana tillsammans med cirkeln, se figur 1. Rita elektronens bana ett tag efter det att den lämnat cirkeln. Ta hänsyn till att fältet endast existerar inom cirkelskivan.
c. Lös problem 1 (approximativt) med följande tre metoder:
1) Euler framåt
2) Euler bakåt
3) Trapetsmetoden.
Välj steglängd $h = 0.1$. Rita ut de approximativa lösningarna. Här får Du alltså skriva kortare MATLAB-filer själv. Utnyttja att problemet är linjärt och koda metoderna med hjälp av matrisen $\mathbf{A}$ och högerledet $\mathbf{b}$.
d. Diskutera noggrannheten hos de tre metoderna. Förklara varför lösningskurvorna för Eulermetoderna ser ut som de gör. Använd `ode45` som ”facit”.

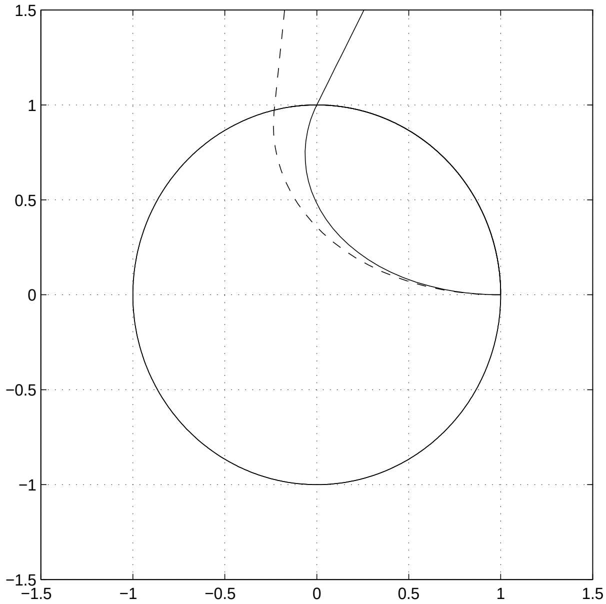

Figure 1: Elektronens bana, streckad - problem 1, heldragen - problem 2

e. Undersök teoretiskt om metoderna är stabila för aktuellt problem, se avsnitt 6.4 i *Numerisk Analys*. De ingående egenvärdena beräknar du med `eig` i MATLAB. Märker du av eventuell instabilitet i praktiken?
f. Lös problem 2 med MATLAB-funktionerna `ode45` och `fsolve`. Det är lämpligt att använda `'Events'` i `odeset`. Du kan läsa om Events i Help: Index / odeset: "Event Location Property", se även ett exempel på dess användning nedan. Rita ut elektronens bana, se figur 1.
Exempel på användning av Events. Vi har ett ode-system med två komponenter definierat i m-filen `der`. Vi vill avbryta beräkningarna när första lösningskomponenten byter tecken från + till -. I huvudprogrammet skriver vi då (vi antar att `intervall` och `start` fått lämpliga värden):

```
options=odeset('Events', @koll)
[t,y]=ode45(@der,intervall,start,options);
```

Den speciella händelsen definieras av rutinen `koll.m`:

```
function[val,stopp,riktning]=koll(t,y)
    val=y; %Kolla teckenväxlingar i y
    stopp=[1;0]; %Stanna bara när första komponenten = 0
    riktning=[-1;0]; %Stanna bara när första komponenten avtar
end
```

Vid redovisningen ska du kunna:
1. Presentera (på matrisform) det ode-system som rörelseekvationerna ger.
2. Köra MATLAB-program som ritar ut elektronens bana inom och utom cirkeln för problem 1.
3. Presentera MATLAB-program för Eulers båda metoder och trapetsmetoden, köra programmen som ritar ut approximativa elektronbanor, förklara de olika banorna och diskutera noggrannheten hos metoderna.
4. Redovisa teoretisk undersökning om stabilitet hos metoderna utgående från egenvärdena hos matrisen. Kommentera hur eventuell instabilitet visar sig.
5. Köra program med `fsolve` och `ode45` som löser problem 2 och ritar ut elektronens bana.