Linjär algebra och numerisk analys, 2020

Laboration nummer 4: Numerisk lösning av differentialekvationer från mekanik

Problemställning

Vi betraktar en enkel variant av Eulers ekvationer som beskriver rotationsrörelsen för en stel kropp. I mekanikkursen beskrivs hur ekvationerna uppstår, här nöjer vi oss med att konstatera att lösningen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ är vinkelhastigheten med komponenter i ett lämpligt koordinatsystem och att konstanterna $\gamma_1,\ \gamma_2$ och γ_3 har med tröghetsmoment att göra:

$$\begin{cases} \omega_1' = \gamma_1\omega_2\omega_3 \\ \omega_2' = \gamma_2\omega_1\omega_3 \\ \omega_3' = \gamma_3\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

Låt vidare $\epsilon = 0.1/\max_i(|\gamma_i|)$.

Låt oss studera två specifika fall som kan vara av intresse:
Fall 1 (Stabil rotation):
$\gamma_1 = 0.265,\ \gamma_2 = -0.995,\ \gamma_3 = 0.882,\ \omega_1(0) = 1,\ \omega_2(0) = \ \omega_3(0) = \epsilon.$
Fall 2 (Instabil rotation):
$\gamma_1 = 0.265,\ \gamma_2 = -0.995,\ \gamma_3 = 0.882,\ \omega_1(0) = \epsilon,\ \omega_2(0) = 1,\ \omega_3(0) = \epsilon.$

Uppgifter.
a. Lös problemet med MATLAB-funktionen `ode45` över intervallet $0 \leq t \leq 10$ och rita en graf över lösningskomponenterna för de två fallen. Se till att problemets parametrar $\gamma_i,\ i = 1, 2, 3$ ges till funktionen på lämpligt sätt, se exempelvis övning 6.23 i *Numerisk Analys.*
b. Eftersom problemet är icke-linjärt så kan man inte få grepp på problemets **numeriska stabilitet** enbart genom att studera egenvärden till en konstant matris, som i det linjära fallet. Man kan få en viss uppfattning om problemets lokala stabilitetsegenskap genom att studera egenvärdena $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3$ till Jacobianmatrisen av högerledsfunktionerna i (1) vid diskreta tidpunkter. Jacobianmatrisen kan bestämmas analytiskt och dess egenvärden bestämmas med `eig` i MATLAB.
Som ett mått på graden av stabilitet/instabilitet kan vi ta $\max_{1\leq i\leq 3}(Re(\lambda_i))$. Beräkna detta värde vid tider t_k och ange det på lämpligt sätt i grafen. Gör en liten störning av begynnelsevärdena $\omega_i(0),\ i = 1, 2, 3$ och rita ut de störda lösningarna i de båda fallen. Här kan det vara lämpligt att rita över ett längre intervall, säg $0 \leq t \leq 50$ för att se störningarnas effekt efter längre tid. Kan du se ett samband mellan stabilitetsmåttet och störningarnas storlek?

Vid redovisningen ska du kunna:
1. Visa upp och köra MATLAB-program som ritar ut lösningskurvorna i de två fallen.
2. Redogöra för hur du räknar fram och presenterar stabilitetsmåttet.
3. Diskutera stabilitetsmåttet i relation till gjorda störningar utifrån illustrativ grafisk presentation.