Simulation physique d'un problème à N-corps

Thomas Demenat
Ecole d'ingénieur IMAC,
Master SIS,
UPEM

Mars 2014

Abstract

En physique, le problème à N-corps est un problème classique de prédiction du mouvement individuel d'un groupe d'objets célestes s'attirant mutuellement par les lois de la gravité. Les grecs ont été motivés à résoudre ce problème par le désir de comprendre les mouvements du Soleil, des planètes et des étoiles visibles depuis la Terre. Au XXe siècle, comprendre la dynamique de systèmes solaires de type Amas Globulaires est devenu un problème à N-corps très important. Or il est impossible de résoudre ce genre de problème sans recourir à des programmes de simulation physique.
Le problème en physique classique peut être décrit tel quel : "Soient les propriétés orbitales (position et vitesse instantanées à un instant t dans le temps) d'un groupe d'objets célestes, en déduire leur interaction mutuelle et par conséquent, en déduire leurs nouvelles propriétés orbitales a un instant $t + n$ dans le futur".
Basé sur cette définition, ce projet a pour but de simuler le mouvement de trois corps dans un système solaire simple constitué d'un soleil, une planète et un satellite.

Compilation du projet

Réalisé en C++ et OpenGL avec l'aide de plusieurs librairies externes, ce projet nécessite une étape de compilation avant exécution. Pour compiler le projet, assurez-vous d'avoir CMake installé (avec une version ¿= 2.6), puis utiliser les commandes suivantes dans votre terminal :

```
> mkdir build
> cd build
> cmake ..
> make
> cd bin
> ./NBodySim
```

Aucune dépendance externe n'a besoin d'être installée, les librairies étant directement incluses dans le projet. Vous pouvez retrouver l'ensemble du projet sur Github a cette adresse : `https://github.com/Mahoimi/NbodySim`

Loi de Newton

La loi d'attraction universelle de Newton stipule que quelque soient deux objets dans l'univers, ceux-ci s'attirent mutuellement avec une force qui est directement proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance les séparant. Cette loi de physique générale fait partie du travail d'Isaac Newton dans son livre Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, publié en 1687.

En d'autres termes, cette loi suit la formule mathématique suivante :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

avec :

- F : force entre les deux masses (en N)
- G : constante gravitationnelle équivalente à 6.67384×10^{-11}N.m^2.kg^{-2}
- m_1 : la masse du premier objet (en kg)
- m_2 : la masse du second objet (en kg)
- d : la distance séparant les deux objets (en m)

Cette loi n'est cependant vraie tant que la vitesse des objets étudiés reste inférieure à la vitesse de la lumière. Dans ce cas, on doit utiliser la loi de la Relativité générale établie par Albert Einstein. Dans le cadre de l'étude de systèmes solaires, il est relativement admis qu'on utilise le principe de Newton car elle reste véridique et plus facile à implémenter.

Intégration Leapfrog

Afin de calculer les positions et les vitesses de chaque planète en fonction des forces appliquées, j'ai intégré la méthode dite d'intégration Leapfrog.

Son nom vient du fait que les positions et les vitesses "sautent" l'une au dessus de l'autre : en effet, tandis que les positions sont calculées à des instants $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \cdots$ espacés par un intervalle constant Δt, les vitesses sont définies à des instants intermédiaires $t_{i-\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{3}{2}} \cdots$, où $t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}} = t_{i+\frac{1}{2}} - t_i = \frac{\Delta t}{2}$. En outre, les positions et les vitesses sont définies par les équations mathématiques suivantes :

$$x_i = x_{i-1} + v_{i-\frac{1}{2}}\Delta t$$

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_{i-\frac{1}{2}} + a_i\Delta t$$

où l'accélération $a_i = \frac{F_i}{m}$ avec F_i la force appliqué à l'instant i sur un corps de masse m.

Cette méthode a l'avantage d'être simple d'implémentation, de pouvoir être inversée à n'importe quel instant (de passer à un instant t à un instant t_{-1}) et d'être de type "symplectique", i.e. conserve chaque changement infime d'energie d'un système dynamique. Contrairement à d'autres méthodes, il est parfaitement adapté dans le cadre de la simulation de mouvements orbitaux.

Paramètrage du système

Afin d'obtenir un résultat stable, j'ai apporté quelques modifications aux paramètres initiaux de la loi de Newton.
Ainsi la constante gravitionnelle G est définie ainsi :

$$G = 0.01\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$$

Aussi, les positions de chaque planète dans l'application est de l'ordre de 10^2 mètre. J'ai également appliqué des vitesses initiales à la planète et à son satellite et fixé la position du soleil.
Voici les paramètres initiaux de chaque corps céleste :

- Soleil
  - Position $(x, y, z) = (0, 0, -300)$
  - Masse $= 10^7$kg
- Planète
  - Position $(x, y, z) = (0, 80, -300)$
  - Masse $= 2,9 \times 10^5$kg
  - Vitesse initiale $(x, y) = (0.35, 0)$ en $\mathrm{m.s^{-1}}$
- Satellite
  - Position $(x, y, z) = (0, 87, -300)$
  - Masse $= 10$kg
  - Vitesse initiale $(x, y) = (0.55, 0)$ en $\mathrm{m.s^{-1}}$